LU dekompozicija matrica

Magaš, Marko-Velebit

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Marko-Velebit Magaš

Matični broj: 42746/13-Iz

Studij: Primjena informacijske tehnologije u poslovanju

LU DEKOMPOZICIJA MATRICA

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Bojan Žugec

Varaždin, rujan 2021.

Marko-Velebit Magaš

Izjava o izvornosti

Izjavljujem da je moj završni/diplomski rad izvorni rezultat mojeg rada te da se u izradi istoga nisam koristio drugim izvorima osim onima koji su u njemu navedeni. Za izradu rada su korištene etički prikladne i prihvatljive metode i tehnike rada.

Autor/ica potvrdio/la prihvaćanjem odredbi u sustavu FOI-radovi

Sažetak

U ovom radu ćemo se baviti LU dekompozicijom matrica. Ovaj rad je zamišljen kao jedan vodič koji će uvesti čitatelja u ovo područje linearne algebre. U radu počinjemo od samog početka, tj. pojma matrice, a završavamo sa jednim složenim algoritmom za rješavanje sustava linearnih jednadžbi kao što je LU dekompozicija matrica. Kroz rad je objašnjeno što su matrice, koji su oblici matrica, što je determinanta matrice, što su i kako se rješavaju matrične jednadžbe. Zatim pojašnjavamo što su sustavi linearnih jednadžbi i kako ih zapisujemo u matrice. Na kraju ćemo pokazati tri načina za rješavanje matričnih linearnih sustava, a to su Gaussove eliminacije, LU dekompozicija i LU dekompozicija s pivotiranjem.

Ključne riječi: matrice, sustavi linearnih jednadžbi, Gaussove eliminacije, LU dekompozicija

Sadržaj

1. Uvod

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi svrstava se među najstarije matematičke probleme te je oduvijek bio jedan od glavnih predmeta zanimanja matematičara. Postoje brojni načini rješavanja sustava jednadžbi, a s obzirom da se problem pronalaženja rješenja može prikazati pomoću matrica, potrebno je detaljnije proučiti matrice koje su jedno od područja linearne algebre. Pristup tematici dekompozicija matrica može biti iz različitih perspektiva, a u ovom radu ćemo se bazirati na same načine tehnika dekompozicija, odnosno faktorizacija matrica iz perspektive linearne algebre. Definirat ćemo neke od osnovnih pojmova linearna algebre koje ćemo koristiti u analizi i prikazu rješavanja sustava jednadžbi preko matrica odnosno matričnih dekompozicija (faktorizacija). [1]

Jedan od osnovnih problema linearne algebre je rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = B$. Kada je matrica A regularna, postoji jedinstveno rješenje $x = A^{-1}B$, ali taj inverz nije uvijek lako izračunati. Iz tog razloga, matricu A ćemo transformirati u neki drugi oblik koji je lakše riješiti. [1]

U drugom poglavlju ćemo razmotriti pojam matrice, obraditi sve osnovne pojmove i definicije potrebne za računanje matrica po LU dekompoziciji. U trećem poglavlju ćemo pokazati vezu između matrica i sustava linearnih jednadžbi. U četvrtom poglavlju pokazat ćemo kako se rješavaju trokutasti sustavi.U petom poglavlju bit će obrađena Gaussova metoda koju je potrebno poznavati kako bismo mogli savladati glavnu temu ovog rada, a to je LU dekompozicija matrica. LU dekompoziciju obrađujemo u ostatku rada. Vidjet ćemo da postoji i još jedan složeniji oblik LU dekompozicije, takozvana LU dekompozicija s pivotiranjem. Na kraju ćemo prikazati implenetaciju LU dekompozicije u programski jezik Python.

2. Matrice

Matrica je pravokutna tablica sačinjena od nekoliko redaka i stupaca ispunjenih njezinim elementima. Ti su elementi obično brojevi, najčešće realni, no ponekad i kompleksni. Elementi mogu biti i drugi objekti, poput funkcija, vektora, diferencijalnih operatora, pa čak i samih matrica. [2]

U ovom radu ćemo se bavit isključivo matricama realnih brojeva. Neka su $M = \{1, 2, ..., m\}$ i $N = \{1, 2, ..., n\}$. Realna matrica A tipa (m, n) je funkcija $A : M \times N \to \mathbb{R}$ pri čemu se funkcijska vrijednost $A(i, j)$ označava s a_{ij} i smješta u i-ti redak i j-ti stupac tablice s m redaka i n stupaca.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Skup svih realnih matrica tipa (m, n) označavamo s $M_{mn}(\mathbb{R})$ ili skraćeno samo sa M_{mn} ako je iz konteksta jasno da se radi o matricama iz skupa realnih brojeva. Za matricu koja ima elemente a_{ij} koristi se i oznaka $[a_{ij}]$.

2.1. Specijalne matrice

Postoje određene specijalne matrice, tj. one matrice koje su u linearnoj algebri unaprijed definirane ili imaju nekakava jedinstvena obilježja. U ovom dijelu se nećemo baviti sa svim koje postoje već ćemo samo navesti one koje su potrebne za shvaćanje i računanje LU dekompozicije.

- **KVADRATNA MATRICA** je matrica koja ima jednak broj redaka i stupaca. Ako se radi o matrici reda n to znači da je matrica tipa (n, n).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  Ovdje je potrebno spomenuti i pojam **glavne dijagonale** matrice. U gore navedenom primjeru to je uređena n-torka $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Sporedna dijagonala je uređena n-torka $(a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1})$.

- **GORNJETROKUTASTA MATRICA** je kvadratna matrica kojoj su elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0, tj. $a_{ij} = 0$ za $i > j$. [3]

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **DONJETROKUTASTA MATRICA** je kvadratna matrica kojoj su elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0, tj. $a_{ij} = 0$ za $i < j$. [3]

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **DIJAGONALNA MATRICA** je kvadratna matrica čiji su elementi izvan glavne dijagonale jednaki jednaki 0, tj. $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$. [3]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  Dijagonalna matrica se kraće može zapisati kao $A = diag(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$

- **JEDINIČNA MATRICA** je dijagonalna matrica kojoj su vrijednosti elemenata na glavnoj dijagonali jednaki 1. Ova vrsta matrice se uvijek označava sa velikim tiskanim slovom i.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

  Bakić [2] navodi kako je ovdje prikladno uvesti **Kroneckerov simbol** δ_{ij}, koji ovisi o indexima i i j i definiran je formulom

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j, \\ 0, & \text{za } i \neq j. \end{cases}$$

  Uz ovu oznaku, jediničnu matricu n-tog reda jednostavno zapisujemo kao

$$I = [\delta_{ij}] \in M_n$$

- **JEDNOSTUPČANA MATRICA** je matrica koja ima samo jedan stupac i takvu matricu nazivamo vektorom ili točnije vektor-stupcem, te se označava malim tiskanim slovom za razliku od dosad navedenih matrica. Vektor-stupac je matrica oblika $(m, 1)$.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

2.2. Množenje matrica

Množenje matrica je operacija nad dvije matrice i od velike je važnosti kod LU dekompozicije. Horvatić [4] navodi da se množenje matrica definira samo za **ulančane matrice**. Za uređeni par matrica (A, B) kažemo da je ulančan ako druga matrica ima toliko redaka koliko prva ima stupaca. Na primjer, matrice A i B su ulančane ako je matrica A tipa (m, n), a matrica B tipa (n, p). Ovdje je bitno primjetiti da ako su matrice A i B ulančane, ne vrijedi isto za B i A. Uređeni par matrica (B, A) biti će ulančan jedino u slučaju da je $p = m$. Posebno pravilo vrijedi za kvadratne matrice istoga reda, one su uvijek ulančane, neovisno o njihovom poretku.

Recimo da su $A = [a_{ij}]$ tipa (m, n) i $B = [b_{ij}]$ tipa (n, p) ulančane matrice. Produkt navedenih matrica definiramo kao matricu $C = [c_{ij}]$ tipa (m, p). Elementi matrice C su dani s

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

za svaki $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, p$. Element c_{ij} na presjeku i-tog retka i j-tog stupca matrice C dobiva se kao suma produkata od elemenata iz i-tog retka matrice A i j-tog stupca matrice B.

$$C = AB$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_k a_{1k} b_{k1} & \ldots & \sum\limits_k a_{1k} b_{kp} \\ \vdots & \sum\limits_k a_{ik} b_{kj} & \vdots \\ \sum\limits_k a_{mk} b_{k1} & \ldots & \sum\limits_k a_{mk} b_{kp} \end{bmatrix}$$

Množenje matrica nije komutativno, što znači da je $AB \neq BA$. Za množenje matrica vrijede određena svojstva:

- $A(BC) = (AB)C$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $AI = IA = A$, za kvadratne matrice.

2.3. Determinanta matrice

U ovom poglavlju prikazat ćemo kratko kako se računaju determinante matrica prvog, drugog i trećeg reda. Zato jer će nam se takve determinante pojaviti u poglavlju LU dekompozicija. One će nam biti potrebne kako bismo dokazali da su određeni uvjeti, koji su potrebni izvršavanje LU dekompozicije, zadovoljeni. Determinante su široka tema koja bi nam zauzela puno prostora i vremena prilikom pisanja ovog rada, pogotvo to vrijedi za determinante reda većeg od 3. Iz tog razloga je uzet općeniti primjer matrice četvrtog reda za prikaz LU dekompozicije. Uvest ćemo i pojam minora u ovom poglavlju. Kod općenitog primjera LU dekompozicije potrebno je dokazati da je vrijednost prvih $n-1$ elementa na glavnoj dijagonali matrice različita od nule. To dokazujemo pomoću vrijednosti $n-1$ glavnih minora, što će u ovom slučaju najviše biti determinanta trećeg reda. Za daterminante prvog, drugog i trećeg reda postoje gotove formule po kojima se jednostavno računaju.

Determinanta prvog reda je

$$detA = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a.$$

Determinata drugog reda se računa po slijedećoj formuli

$$detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinante trećeg reda najjednostavnije se računaju po Sarrusovom pravilu. Nadopišu se prva dva stupca desno od determinante. Zatim zbrajamo produkte po glavnim dijagonalama i oduzimamo produkte po sporednim dijagonalama.

$$det(B) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right| =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Zanimljivo je da je determinanta gornjetrokutaste i donjetrokutaste matrice jednaka produktu elemenata na glavnoj dijagonali, pa ako je jedan element na glavnoj dijagonali jednak nuli onda je i determinanta te matrice nula.

Ako iz neke matrice uklonimo nekoliko redaka i stupaca dobijemo njenu submatricu ili podmatricu. Minora je determinanta te submatrice. Glavne minore dobivamo po glavnoj dijagonali.

2.4. Inverzna matrica

Inverzna matrica kvadratne matrice je matrica s kojom ju moramo pomnožiti da bismo dobili jediničnu matricu. Recimo da je matrica A kvadratna matrica. Njena **Inverzna matrica** je matrica A^{-1} za koju vrijedi

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Primjer računanja inverzna matrice se nalazi u poglavlju LU dekompozicija na strani 14. Do inverzne matrice se dolazi tako što zapišemo matricu A u prošireni oblik gdje će sa desne strane biti jedinična matrica. Cilj je pretvoriti lijevu stranu u jediničnu pomoću elementarnih transformacija na redcima. Na kraju sa desne strane neće biti jedinična matrica, već inverzna matrica matrice A.

2.5. Regularna matrica

Regularna matrica je ona matrica koja ima svoj inverz. Binet-Couchyjev teorem glasi

$$detA \cdot detA^{-1} = 1$$

pa je determinanta inverzne matrice

$$detA^{-1} = \frac{1}{detA}.$$

Kada postoji invezna matrica A^{-1} vrijednost njene determinante je recipročna vrijednost od matrice A. Što znači da ako je determinanta matrice A jednaka nuli, ona nema inverznu matricu i nije regularna, već singularna.

Matrica A je regularna ako je $detA \neq 0$.

2.6. Matrične jednadžbe

U ovom poglavlju promatrat ćemo matrične jednadžbe $AX = B$ i $XA = B$. Od prije znamo da množenje matrica nije komutativno pa je jasno da one nisu ekvivalentne. Ako je matrica A regularna, onda je

$$A^{-1} \cdot /AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B.$$

Dijeljenje matrica nije definirino, pa moramo množiti matricu sa njenim inverzom kako bismo ju poništili. Primjetimo u prvom koraku kako jednadžbu množimo sa lijeve strane. To je zato jer množenje matrica nije komutativno pa je bitna strana sa koje vršimo operaciju. Ista stvar vrijedi za $XA = B$

$$XA = B/ \cdot A^{-1}$$

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$$

$$X(AA^{-1}) = BA^{-1}$$

$$XI = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

3. Sustav linearnih jednadžbi

Linearna jednadžba je jednadžba oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Sustav od m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica je skup jednadžbi oblika

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}.$$

Skalari a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, zovu se koeficjenti sustava, a $b_1, \ldots, b_m$ slobodni članovi. [2]

Ovakav sustav linearnih jednadžbi se rješava tako što jednadžbe zapišemo u matrični sustav te ih pomoću elementarnih transformacija pretvorimo u sličan sustav iz kojeg je jednostavnije pročitati rješenja. Slični sustavi jednadžbi su svi oni sustavi koji imaju različitu strukturu ali daju ista rješenja.

Zapis u matrični sustav se vrši tako što koeficjente sustava zapišemo u matricu A, nepoznanice u matricu x i slobodne članove u matricu b, pa imamo

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Elementarne transformacije su operacije koje možemo vršiti na redcima i stupcima matrice, a to su:

- zamjena dvaju redaka (stupaca) matrice,
- množenje jednog retka (stupca) matrice skalarom različitim od nule i
- dodavanje jednog retka (stupca) pomnoženog skalarom različitim od nule drugom retku (stupcu) matrice

4. Rješavanje trokutastih sustava eliminacijama unaprijed i unazad

Razlog svođenja linearnih sustava na trokutaste jest njihova jednostavnost pri rješavanju. Pokazat ćemo po jedan primjer donjetrokutastog i gornjetrokutastog sustava dimenzije $n = 4$. Zadan je donjetrokutasti sustav

$$Lx = b$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Recimo da je matrica L regularna, što znači da su l_{ii} za $i = 1, 2, 3, 4$ različiti od nule. U tom slučaju je

$$x_1 = b_1/l_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2)/l_{33}$$

$$x_4 = (b_4 - l_{41}x_1 - l_{42}x_2 - l_{43}x_3)/l_{44}$$

x_1 se može odmah izračunati i uvrstiti u drugu jednadžbu. Iz druge jednadžbe uz uvrštavanje x_1 dobivamo x_2. Zatim uvrštavamo x_1 i x_2 u treću i dobivamo x_3. Na kraju uvrštavamo x_1, x_2 i x_3 u četvrtu jednadžbu i dobivamo zadnje rješenje sustava, odnosno x_4. Primjetimo da smo sa rješavanjem krenuli od vrha prema dnu, pa ovakav postupak zovemo **eliminacija ili supstitucija unaprijed**.

Neka je sada zadan gornjetrokutasti sustav

$$Ux = b$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Ako je matrica U regularna, rješavamo sustav od zadnje jednadžbe prema prvoj, pa ovaj postupak zovemo **eliminacija ili supstitucija unazad**. Imamo

$$x_4 = b_4/u_{44}$$

$$x_3 = (b_3 - u_{44}x_4)/u_{33}$$

$$x_2 = (b_2 - u_{33}x_3 - u_{24}x_4)/u_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - u_{14}x_4)/u_{11}.$$

5. Gaussove eliminacije

Gaussove eliminacije su osnovni algoritam za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$. Osnovni cilj je pretvoriti zadani sustav u nekakav jednostavniji oblik koji će imati ista rješenja, ali lakša za čitanje. Kod Gaussove metode sustav linearnih jednadžbi zapisujemo u proširenu matricu oblika

$$\left[A \,\middle|\, b\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

na kojoj vršimo elementarne transformacije nad redcima kako bismo došli do sličnog sustava, oblika koji nam odgovara. Prikazat ćemo ovu metodu na jednom jednostavnom primjeru.

Neka je zadan sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ -6x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 6x_2 & & & - & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Zapisali smo zadani sustav u proširenu matricu kako bismo pokazali računanje Gaussovom metodom.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Prvo eliminaramo sve elemente ispod glavne dijagonale u prvom stupcu. To radimo tako što pomnožimo prvi redak sa $-\frac{a_{21}}{a11}$ što je u ovom slučaju $-\frac{-6}{1}$, tj. 6 i pribrojimo ga drugom retku. Zatim množimo prvi redak sa $-\frac{a_{31}}{a11}$, odnosno -1 i pribrojimo trećem retku. Na kraju množimo prvi redak sa $-\frac{a_{41}}{a11} = -2$ i pribrajamo ga četvrtom. Na taj način smo očistili prvi stupac ispod glavne dijagonale i za rezultat dobili sličan sustav. Istim procesom eliminiramo ostale elemente ispod dijagonale sve dok ne dođemo do trokutastog sustava.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 6 \quad (-1) \quad (-2) \\ + \\ + \\ + \end{array},$$

$$\begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\
0 & -12 & -5 & 1 & 7 \\
0 & 8 & 1 & -4 & -1 \\
0 & 3 & 3 & 1 & -2
\end{array}\right] &
\begin{array}{ll}
 & \\
\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\
+ & \\
 & +
\end{array}
\end{array},$$

$$\begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\
0 & -12 & -5 & 1 & 7 \\
0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{11}{3} \\
0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4}
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
 \\
 \\
\frac{3}{4} \\
+
\end{array}
\end{array},$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\
0 & -12 & -5 & 1 & 7 \\
0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{11}{3} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{2}
\end{array}\right].$$

Na kraju čitamo i rješavamo jednadžbe sustava sličnog zadanom

$$-\frac{5}{4}x_4 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = -2$$

$$-\frac{7}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 = \frac{11}{3} \Rightarrow x_3 = \frac{9}{7}$$

$$-12x_2 - 5x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_2 = -\frac{9}{7}$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{7}.$$

Rješenje zapisujemo u matricu x

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ \frac{9}{7} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

6. LU dekompozicija

U prethodnom poglavlju možemo vidjeti da se rješavanje linearnog sustava $Ax = b$ dekompozicijom matrice A svodi na trokutaste sustave. U ovom poglavlju ćemo proučiti dekompoziciju matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ na produkt donje i gornje trokutaste matrice. Ova se metoda u praksi koristi češće od Gaussove, prvenstveno zato jer kod matrica velikih dimenzija zahtjeva manji broj operacija, ali i zato što se ne transformira matrica slobodnih koeficjenata b, tako da imamo mogućnost promjene vrijednosti elemenata b_i.

Zanima nas matrica reda n, ali ćemo se zbog jednostavnosti prikaza baviti primjerom matrice reda $n = 4$. Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Eliminacija prve nepoznanice linearnog sustava vrši se na pozicijama $(2,1), (2,1), \ldots, (n,1)$ Pa definiramo matricu $L^{(1)}$ u kojoj zapisujemo koeficjente kojima eliminiramo prvi stupac matrice A

$$\mathbf{L^{(1)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Množenjem matrica $L^{(1)}$ i A eliminiramo prvu nepoznanicu u svim jednadžbama osim prve.

$$\mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{L^{(1)}A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Kod matrice $A^{(1)}$ možemo primjetiti da su elementi u prvom retku jednaki elementima prvog retka matrice A.

Kako bi ova gore prikazana transformacija mogla biti izvediva porebno je zadovoljiti uvjet

$$a_{11} \neq 0.$$

Dalje eliminiramo drugu nepoznanicu u trećem i četvrtom retku matrice $A^{(1)}$ tako što definiramo matricu $L^{(2)}$

$$\mathbf{L^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pa vrijedi

$$\mathbf{A^{(2)}} = \mathbf{L^{(2)}A^{(1)}} = \mathbf{L^{(2)}L^{(1)}A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Primjetimo da je prvi redak matrice $A^{(2)}$ jednak prvom retku matrice A i da je drugi redak matrice $A^{(2)}$ jednak drugom retku matrice $A^{(1)}$. Također je bitno da je zadovoljen uvjet

$$a_{22}^{(1)} \neq 0.$$

Sličnim postupkom eliminiramo treću nepoznanicu u četvrtom retku matrice $A^{(2)}$. Prvo definiramo matricu $L^{(3)}$

$$\mathbf{L^{(3)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Pa vrijedi

$$\mathbf{A^{(3)}} = \mathbf{L^{(3)}A^{(2)}} = \mathbf{L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Primjetimo da je prvi redak matrice $A^{(3)}$ jednak prvom retku matrice matrice A, drugi redak je jednak drugom retku matrice $A^{(1)}$ i treći redak je jednak trećem retku matrice $A^{(2)}$. Kao i kod prethodnih koraka važno je zadovoljiti uvjet

$$a_{33}^{(2)} \neq 0.$$

Sada polako dolazimo do dekompozicije

$$A = LU.$$

Kada smo došli do matrice $A^{(3)}$ možemo zaključiti da je ona gornje trokutasta pa ju označavamo sa U. Također možemo primjetiti da se matrice $L^{(3)}, L^{(2)}$ i $L^{(1)}$ nalaze uz matricu A.

$$L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}A = U$$

$$(L^{(3)})^{-1} \cdot /L^{(3)}L^{(2)}L^{(1)}A = U$$

$$(L^{(2)})^{-1} \cdot /L^{(2)}L^{(1)}A = (L^{(3)})^{-1}U$$

$$(L^{(1)})^{-1} \cdot /L^{(1)}A = (L^{(2)})^{-1}(L^{(3)})^{-1}U$$

$$A = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}(L^{(3)})^{-1}U$$

Dalje računamo inverz matrice $L^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ccc} \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{41}}{a_{11}} \\ + & & \\ & + & \\ & & + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Izračunamo li inverz matrice pomoću gaussove metode dobijemo sa desne strane matricu $(L^{(1)})^{-1}$

$$(\mathbf{L^{(1)}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Možemo primjetiti da inverznu matricu od $L^{(1)}$ dobijemo tako da zamjenimo predznake elementima izvan glavne dijagonale. Na isti način dobivano inverz od matrica $L^{(2)}$ i $L^{(3)}$.

$$(\mathbf{L^{(2)}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{L^{(3)}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix}$$

Kad izračunamo produkt od $(L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}(L^{(3)})^{-1}$ dobijemo matricu L.

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L^{(1)}})^{-1}(\mathbf{L^{(2)}})^{-1}(\mathbf{L^{(3)}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix}$$

Kad smo došli do matrica L i U dolazimo do faktorizacije

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Izvedivost operacija koje su dovele do dekompozicije $A = LU$ ovisi o uvjetima

$$a_{11} \neq 0,\ a_{22}^{(1)} \neq 0,\ a_{33}^{(2)} \neq 0.$$

Ti uvjeti su zadovoljeni ako su u matrici A glavne minore reda $1, 2, \ldots, n-1$ različite od nule. Iz A smo dobili faktorizaciju vodeće submatrice reda 1 pa lako dolazimo do vrijednosti minore m_1

$$\mathbf{m_1} = a_{11} \neq 0.$$

Ako je $m_1 \neq 0$ vidimo da je i $a_{11} \neq 0$ pa je uvjet zadovoljen.

Iz $A = (L^{(1)})^{-1} A^{(1)}$ dobili smo faktorizaciju vodeće submatrice reda 2 od A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m_2} = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22}^{(1)}$$

Ako je $m_2 \neq 0$, onda je i $a_{22}^{(1)} \neq 0$ pa je i drugi uvjet zadovoljen. Jasno je da je za zadovoljavanje ovog uvjeta potrebno zadovoljiti prvi uvjet.

Iz $A = (L^{(1)})^{-1} (L^{(2)})^{-1} A^{(2)}$ dobili smo faktorizaciju vodeće submatrice reda 3 od A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m_3} = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)}$$

Ako je $m_3 \neq 0$, onda je i $a_{33}^{(2)} \neq 0$ pa je i treći uvjet zadovoljen. Jasno je da je za zadovoljavanje ovog uvjeta potrebno zadovoljiti prvi i drugi uvjet.

Brojeve a_{11}, $a_{22}^{(1)}$ i $a_{33}^{(2)}$ zovemo **pivotni elementi** ili kratko **pivoti**. Brojevi m_1, m_2 i m_3 su **glavne minore** matrice A. [5]

Iz ovog svega možemo doći do zaključka da ako je prvih $n-1$ minora matrice A različito od nule, onda su i svi pivotni elementi različiti od nule i Gausove eliminacije daju LU faktorizaciju matrice A. [5]

Tada smo došli do LU dekompozicije matrice A,

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

gdje je matrica L donjetrokutasta sa jedinicama na glavnoj dijagonali, a matrica U gornjetrokutasta onda se linearni sustav $Ax = b$ rješava kao dva jednostavna linearna sustava,

$$Ax = LUx = b$$

označavamo $Ux = y$ pa su ta dva sustava

$$Ly = b$$

$$Ux = y.$$

Prvi sustav je donjetrokutasti, dok je drugi sustav gornjetrokutasti.

Prikazat ćemo na jednom primjeru sustava linearnih jednadnadžbi kako se pomoću LU dekompozicije dolazi do rješenja x.

Neka je zadani sustav isti kao u poglavlju Gaussove eliminacije

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\
-6x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
x_1 & + & 6x_2 & & & - & 4x_4 & = & 0 \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0
\end{array}$$

pronalazimo mu rješenje putem algoritma za LU dekompoziciju prikazanog ranije.

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rastavljamo matricu A na LU

$$A^{(1)} = L^{(1)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)} = L^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = L^{(3)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix},$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Nakon što smo došli do matrica L i U, unosimo prvo L u sustav

$$Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i rješavamo linearne jednadžbe

$$y_1 = 1$$

$$-6y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 7$$

$$y_1 - \frac{2}{3}y_2 + y_3 \Rightarrow y_3 = \frac{11}{3}$$

$$2y_1 - \frac{1}{4}y_2 - \frac{3}{4}y_3 + y_4 \Rightarrow y_4 = \frac{5}{2}$$

i na taj način dolazimo do

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Zatim unosimo U i y u sustav

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

pa rješavamo linearne jednadžbe

$$-\frac{5}{4}x_4 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = -2$$

$$-\frac{7}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 = \frac{11}{3} \Rightarrow x_3 = \frac{9}{7}$$

$$-12x_2 - 5x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_2 = -\frac{9}{7}$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_= -\frac{2}{7}.$$

Na taj način smo došli do rješenja sustava $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ \frac{9}{7} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

7. LU dekompozicija s pivotiranjem

Postoji jedan očiti problem sa LU dekompozicijom koja je opisana u prethodnom poglavlju, a to je da matrica A mora zadovoljavati određene uvjete i imati određenu strukturu. Naime, glavne minore sve do reda $n-1$ moraju biti različite od nule. Drugim rječima, sve glavne submatrice, do reda $n-1$, moraju biti regularne. Pivotiranje se u praksi koristi kako bi se zadržala numerička stabilnost i obično se radi tako što u stupcu koji eliminiramo, prvo tražimo element koji je najveći po apsolutnoj vrijednosti i stavljamo ga na mjesto pivotnog elementa. Na jednom kratkom primjeru prikazat ćemo ovaj problem.

Neka je matrica sustava $Ax = b$ zadana s

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice A je jednaka -1, što znači da je ova matrica regularna i uvijek ima rješenja. Ali A očito nema LU dekompoziciju, jer joj je prva glavna minora $\mathbf{m_1} \equiv a_{11} = 0$.

Možemo to prikazati na slijedeći način:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

što znači da je

$$u_{11} = 0$$

$$u_{12} = 1$$

$$l_{21}u_{21} = 1$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = 1.$$

Iz prve jednadžbe vidimo da je $u_{11} = 0$, a to znači da je treća jednadžba $l_{21} \cdot 0 = 1$, što je nemoguće.

Znamo da matrica A prikazuje linearni sustav

$$0 \cdot x_1 + x_2 = b_1$$

$$x_1 + x_2 = b_2$$

koji uvijek ima rješenje

$$x_2 = b_1$$

$$x_1 = b_2 - b_1$$

i možemo ga bez ikakvih posljedica zapisati kao

$$x_1 + x_2 = b_2$$

$$0 \cdot x_1 + x_2 = b_1.$$

Matrica ovog sustava je

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iz koje je jasno da postoji LU dekompozicija. Ovaj odnos između matrica A i A' zapisujemo na slijedeći način:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = PA$$

Matricu P zovemo **matrica permutacije** ili jednostavno permutacija. Njeno djelovanje na matricu A je jednostavna permutacija retka. [5]

Vratit ćemo se na matricu A četvrtog reda iz prethodnog poglavlja kako bismo pokazali da se LU faktorizacija uvijek može izračunati zamjenom redaka.

$$\mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{L^{(1)}A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Recimo da je $a_{22}^{(1)} = 0$. Više ne možemo A rastaviti po algoritmu LU dekompozicije i definirati $L^{(2)}$. U slučaju da su $a_{32}^{(1)}$ i $a_{42}^{(1)}$ jednaki nula, možemo $L^{(2)}$ definirati kao jediničnu matricu I zato jer su svi elementi druge nepoznanice ispod glavne dijagonale svedeni na nulu i nisu potrebne Gaussove eliminacije. U slučaju da je, na primjer $a_{32}^{(1)} \neq 0$ onda možemo definirati matricu

$$\mathbf{P^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i onda je

$$\mathbf{P^{(2)}A^{(1)}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Sada je jasno da možemo nastaviti računati po algoritmu LU dekompozicije i definirati matricu

$$\mathbf{L^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

te postići

$$\mathbf{A^{(2)}} = \mathbf{L^{(2)}P^{(2)}A^{(1)}} = \mathbf{L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Kod matrice $A^{(2)}$ možemo vidjeti da joj je drugi redak jednak trećem retku matrice $A^{(1)}$. Nastavljamo dalje po algoritmu LU dekompozicije i provjeravamo vrijednost elementa $a_{23}^{(2)}$. Ako je $a_{23}^{(2)} = 0$ i $a_{43}^{(2)} = 0$ onda matricu $L^{(4)}$ možemo definirati kao jediničnu matricu I, jer je u tom slučaju matrica $A^{(2)}$ gornje trokutasta i gotovi smo sa LU dekompozicijom. Ako je $a_{23}^{(2)} = 0$ i $a_{43}^{(2)} \neq 0$ definiramo matricu permutacije $P^{(3)}$

$$\mathbf{P^{(3)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sa kojom monožimo matricu $A^{(2)}$ s lijeve strane

$$\mathbf{P^{(3)}A^{(2)}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Na kraju još definiramo matrice $L^{(3)}$ i $(L^{(3)})^{-1}$

$$\mathbf{L^{(3)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{23}^{(2)}}{a_{43}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix}, \ (\mathbf{L^{(3)}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{43}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix}$$

kako bismo mogli doći do gornje trokutaste matrice U

$$\mathbf{U} = \mathbf{L^{(3)}P^{(3)}A^{(2)}} = \mathbf{L^{(3)}P^{(3)}L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Znamo da je računanje inverza donje trokutastih matrica $L^(k)$ jednostavno, ali su sad prisutne i matrice permutacije. U nastavku ćemo pokazati kako se dobiva relacija $PA = LU$.

$$\mathbf{P^{(3)}L^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{L^{(2)}})'\mathbf{P^{(3)}}$$

Sada vidimo da $P^{(3)}$ može zamjeniti stranu od $L^{(2)}$, ako u matrici $L^{(2)}$ permutiramo elemente ispod glavne dijagonale u trećem stupcu. Na taj način dolazimo do matrice $(L^{(2)})'$ koja ima istu strukturu kao matrica $L^{(2)}$. Na isti način dolazimo do $\mathbf{P^{(2)}L^{(1)}} = \mathbf{(L^{(1)})'P^{(2)}}$

$$\mathbf{P^{(2)}L^{(1)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{(L^{(1)})'P^{(2)}}$$

Došli smo do relacije

$$\mathbf{U} = \mathbf{L^{(3)}(L^{(2)})'P^{(3)}(L^{(1)})'P^{(2)}A}.$$

Preostaje nam još prebaciti $P^{(3)}$ s lijeve na desnu stranu od $(L^{(1)})'$, odnosno $\mathbf{P^{(3)}(L^{(1)})'} = \mathbf{(L^{(1)})''P^{(2)}}$

$$\mathbf{P^{(3)}(L^{(1)})'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{(L^{(1)})''P^{(3)}}$$

pa je

$$\mathbf{U} = \mathbf{L^{(3)}(L^{(2)})'(L^{(1)})''P^{(3)}P^{(2)}A}$$

što je isto kao

$$\mathbf{P^{(3)}P^{(2)}A} = \mathbf{(L^{(3)})^{-1}((L^{(2)})')^{-1}((L^{(1)})'')^{-1}U}.$$

Matrica L kao i u prijašnjem poglavlju nastaje kao jednostavno slaganje elemenata iz matrica $(L^{(3)})^{-1}$, $((L^{(2)})')^{-1}$ i $((L^{(1)})'')^{-1}$

$$(\mathbf{L^{(3)}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{43}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix}, \ ((\mathbf{L^{(2)}})')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ ((\mathbf{L^{(1)}})'')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

što znači da je

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L^{(3)}})^{-1}((\mathbf{L^{(2)}})')^{-1}((\mathbf{L^{(1)}})'')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{43}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica permutacije P nastaje kao produkt množenja matrica $P^{(3)}$ i $P^{(2)}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P^{(3)}}\mathbf{P^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na kraju dolazimo do LU dekompozicije s pivotiranjem, odnosno

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{43}^{(2)}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Jasno je kako bi ovaj postupak izgledao općenito. Na kraju eliminacija bi vrijedilo

$$U = A^{(n-1)} = L^{(n-1)}P^{(n-1)}(\dots \underbrace{(L^{(3)}P^{(3)} \underbrace{(L^{(2)}P^{(2)} \underbrace{(L^{(1)}P^{(1)}A)}_{A^{(1)}})}_{A^{(2)}})}_{A^{(3)}} \dots),$$

i $P = P^{(n-1)}P^{(n-2)} \dots P^{(2)}P^{(1)}$, gdje neke od permutacija $P^{(k)}$ mogu biti jednake identitetima (jediničnim matricama). [5]

Za proizvoljnu $n \times n$ matricu A postoji permutacija P tako da Gaussove eliminacije daju LU faktorizaciju od PA, tj $PA = LU$, gdje je L donjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali, a U je gornjetrokutasta matrica. Permutaciju P možemo odabrati tako da su svi elementi matrice L po apsulutnoj vrijednosti najviše jednaki jedinici. [5]

Pošto imamo prisutnu matricu permutacije P, linearni sustav $Ax = b$ se rješava tako što ga pomožimo sa P s lijeve strane.

$$PAx = LUx = Pb$$

Prvo računamo

$$b^{'} = Pb$$

i dobivamo permutiranu matricu b. Zatim označavamo $Ux = y$ i dobivamo dva trokutasta sustava

$$Ly = b^{'}$$

$$Ux = y$$

Prikazat ćemo na istom primjeru kao u prijašnjem poglavlju kako se pomoću LU dekompozicije s pivotiranjem dolazi do rješenja x. Matrični zapis sustava linearnih jednadžbi je

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

U prvom stupcu najveća je apsolutna vrijednost elementa a_{21} pa zamjenjujemo prvi i drugi redak matrice A

$$P^{(1)}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

zatim računamo matricu $A^{(1)}$

$$A^{(1)} = L^{(1)}P^{(1)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Nastavljamo na isti način sve dok ne dođemo do matrica P, L i U

$$P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & -2 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)} = L^{(2)}P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & -2 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{9} \\ 0 & 0 & \frac{49}{36} & \frac{25}{36} \end{bmatrix},$$

$$P^{(3)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{9} \\ 0 & 0 & \frac{49}{36} & \frac{25}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 0 & \frac{49}{36} & \frac{25}{36} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{9} \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = L^{(3)}P^{(3)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 0 & \frac{49}{36} & \frac{25}{36} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 0 & \frac{49}{36} & \frac{25}{36} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 0 & \frac{49}{36} & \frac{25}{36} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}.$$

Nakon što smo došli do matrica P, L i U, prvo računamo

$$b^{'} = Pb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zatim unosimo L u sustav

$$Ly = b^{'}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i rješavamo linearne jednadžbe

$$y_1 = 1$$
$$-\frac{1}{6}y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{6}$$
$$-\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{6}y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = \frac{13}{36}$$
$$-\frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{4}{7} + y_4 = 1 \Rightarrow y_4 = \frac{10}{7}.$$

Rješenje glasi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{13}{36} \\ \frac{10}{7} \end{bmatrix}.$$

Na kraju unosimo U i y u sustav

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \frac{1}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 0 & \frac{49}{36} & \frac{25}{36} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{13}{36} \\ \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

i rješavamo jednadžbe

$$-\frac{5}{7}x_4 = \frac{10}{7} \Rightarrow x_4 = -2$$

$$\frac{49}{36}x_3 + \frac{25}{36} = \frac{13}{36} \Rightarrow x_3 = \frac{9}{7}$$

$$6x_2 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{23}{6}x_4 = \frac{1}{6} \Rightarrow x_2 = -\frac{9}{7}$$

$$-6x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{7}$$

pa dolazimo do rješenja sustava $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ \frac{9}{7} \\ -2 \end{bmatrix}$$

.

8. LU dekompozicija u programskom jeziku Python

Python je interpreterski programski jezik. Interpreterski programski jezici su oni kod kojih se izvorni kod izvršava direktno uz pomoć interpretera. Interpreter omogućava da se programski kod izvršava odmah bez potrebe za kompajliranjem prije izvršavanja, tj. prevođenjem u izvršni oblik. Programi pisani u Pythonu su kraći i lakše pišu, ali je za njihovu izvedbu potrebno više vremena. [6]

Danas se uglavnom koristi Python verzija 3, pa ćemo ju i koristiti u ovom radu. Računanje LU dekompozicije ručno može uzeti puno vemena, pogotovo za matrice većeg reda, što nas je navelo da taj proces prebacimo u računalni program. To znatno ubrzava proces računanja i povećava korisnost LU dekompozicije. Kako bismo omogućili korištenje matrica u našem programu potrebno je koristiti NumPy biblioteku. Ogromna količina već unaprijed definiranih biblioteka je jedna od najvećih prednosti Pythona kao programskog jezika. U NumPy biblioteci se nalaze osnovne operacije koje se koriste u znanstvenom programiranju, između ostalog i operacije nad matricama.

Kako bismo pokazali implementaciju LU dekompozocije u programskom jeziku python prvo moramo učitati NumPy biblioteku.

```
import numpy
```

Zatim pišemo program po slijedećem algoritmu:

- Inicijaliziramo matricu L kao jediničnu dimenzije n, zatim postavljamo $U = A$.
- Za $i = 1, \ldots, n$ učini slijedeći korak.
- —- Za $j = i + 1, \ldots, n$ učini ostale korake.
- ——— Postavi $l_{ji} = u_{ji}/u_{ii}$
- ——— Izvedi operaciju na redcima $U_j = (U_j - l_{ji} U_i)$

```
def lu(A):

    n = A.shape[0]
    U = A.copy()
    L = numpy.eye(n)

    for i in range(n):
        l = U[i+1:, i]/U[i, i]
        L[i+1:, i] = l
        U[i+1:] = U[i+1:] - l[:, numpy.newaxis] * U[i]

    print("L=")
    print(L)
    print("U=")
    print(U)
```

Definiramo funkciju $lu(A)$ koja prima jedan argument. U njoj se izvršava LU dekompozicija i koja na kraju ispisuje donjetrokutastu matricu L i gornjetrokutastu matricu U. $n = A.shape[0]$ dohvaća broj redaka u matrici koju smo zadali u argumentu funkcije i zapisuje u varijablu n. Zatim postavljamo $U = A$ sa linijom $U = A.copy()$. ovdje korisitimo ugrađenu funkciju $.copy$ koja preslikava vrijednosti iz liste A u listu U. Ovdje treba napomenuti kako liste koje nastaju pomoću funkcija iz biblioteke NumPy nisu iste kao standardne liste iz programskog jezika Python. Recimo da smo zadali listu uz pomoć funkcije $numpy.array()$. Takva lista se ponaša kao matrica i puno je brža obrada podataka u njoj. Nad takvom listom možemo koristiti razne operacije iz biblioteke NumPy koje ne bi bile moguće nad običnim listama. U slijedećoj liniji inicijaliziramo $L = I$ uz pomoć funkcije $numpy.eye()$. Funkcija $.eye(n)$ iz biblioteke NumPy generira jediničnu matricu dimenzije n. U prvoj iteraciji for petlje eliminiramo elemente u prvom stupcu i drugom, trećem, itd. redku. Na taj način eliminiramo prvi vrijednosti prve nepoznanice ispod glavne dijagonale. Zapisujemo odgovarajuće vrijednosti u prvi stupac matrice L i na kraju vršimo računanje na odgovarajućim redcima u matrici U. U slijedećoj iteraciji for petlje, mičemo se za jedno mjesto pa eliminiramo elemente u drugom stupcu ispod glavne dijagonale i tako sve do kraja. Kada petlja dođe do kraja funkcija ispisuje donjetrokutastu matricu L i gornjetrokutastu matricu U.

Kako bismo pokrenuli funkciju $lu(A)$ prvo moramo definirati varijablu A u koju zapisujemo nasumičnu matricu dimenzije 10x10. Nasumičnu matricu možemo generirati sa funkcijom $.random.rand(10, 10)$ iz biblioteke NumPy. Zatim pozivamo funkciju $lu()$ kojoj prosljeđujemo varijablu A kao argument.

```
A = numpy.random.rand(10,10)
lu(A)
```

Postoje i gotove funkcije u programskom jeziku Python za računanje LU dekompozicije. Njihova prednost je što koriste optimizirane algoritme za računanje LU dekompozicije pa ih je preporučljivo koristiti u praksi, zato jer su znatno brže u obradi. U ovom slučaju koristimo biblioteku SciPy, točnije njenu podbiblioteku za linearnu algebru $linalg$. Funkcija glasi $scipy.linalg.lu(A)$. Ova funkcija već predefinirano računa i matricu permutacije pa za rezultat možemo ispisati matrice P, L i U.

```
import scipy.linalg
import numpy

A = numpy.random.rand(10,10)
P, L, U = scipy.linalg.lu(A)

print(P)
print(L)
print(U)
```

Nasumična matrica A dimenzije 5x5 koju smo generirali sa $A = numpy.random.rand(5, 5)$.

```
A =
[[0.25689975 0.86291276 0.52243291 0.86578717 0.97663002]
 [0.92925502 0.87682461 0.81889463 0.70211495 0.56858551]
 [0.48257307 0.1156858  0.29834724 0.25771618 0.87613485]
 [0.66568189 0.4558482  0.52346356 0.77857425 0.87205389]
 [0.42557183 0.47352213 0.78422828 0.65626165 0.86811662]]
```

Slika 1: Nasumična matrica A

Matrice L i U koje smo dobili kao rezultat obrade matrice A kroz funkciju $lu()$.

```
L =
[[ 1.          0.          0.          0.          0.        ]
 [ 3.6171892   1.          0.          0.          0.        ]
 [ 1.87844892  0.67064187  1.          0.          0.        ]
 [ 2.59121264  0.79311514  0.54164152  1.          0.        ]
 [ 1.65656768  0.42590945 10.66881228 -7.87080904  1.        ]]
U =
[[ 0.25689975  0.86291276  0.52243291  0.86578717  0.97663002]
 [ 0.         -2.24449412 -1.07084407 -2.42960104 -2.96407005]
 [ 0.          0.          0.03513656  0.26077141  1.02941474]
 [ 0.          0.          0.          0.32084434  0.13467291]
 [ 0.          0.          0.          0.         -9.40995949]]
```

Slika 2: Matrice L i U

9. Zaključak

Matrice nam omogućuju da lakše i brže riješimo sustav linearnih jednadžbi, ali to nije njihova jedina uporaba. Matrice se u praksi koriste za zapise velikih količina podataka. One pojednostavljuju korištenje podataka iz takvih zapisa i ubrzavaju operacije nad njima. Operacije nad matricama su same po sebi jednostavne, što smo se trudili predočiti u ovom radu, ali kada se radi o matricama velikih dimenzija, klasične metode poput Gaussovih eliminacija postaju nepraktične. Zato se češće u praksi koristi metoda LU dekompozicije matrica, koja je specifična po tome što se matrica u kojoj se zapisuju rezultati ne dira sve do završne obrade, pa imamo mogućnost promjene vrijednosti elemenata u njoj.

Danas je Python jedan od najpopularnijih programskih jezika. Karakterizira ga njegova jednostavnost koja je dvosjekli mač. Dok su programi izuzetno jednostavni za napisat, sporo se izvode. Matrice velikih dimenzija, koje se recimo koriste u računalnoj grafici, mogu biti problematične za izvorni Python, iz tog razloga je napravljena biblioteka NumPy koja znatno doprinosi brzini izvedbe operacija nad matricama. Osim što doprinosi brzini, NumPy biblioteka omogućava operacije nad matricama koje standardni Python nema. Za već gotove funkcije računanja LU dekompozicije koristimo biblioteku SciPy, točnije podbibliteku linalg koja ima definiranu funkciju lu().

Popis literature

[1] G. Pavic, „Matricne dekompozicije i primjene," adresa: `http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/PAV112.pdf`.

[2] D. Bakic, „Linearna algebra," *Školska knjiga, Zagreb*, 2008. adresa: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/2019_LA_drugo_izdanje_v6.pdf`.

[3] B. Divjak, „Matematika (PITUP) Dio IV "Matrice i determinante"," adresa: `https://elfarchive1516.foi.hr/pluginfile.php/58317/mod_page/content/5/Matrice_i_determinante.pdf`.

[4] K. Horvatic, *Linearna algebra*. 2004.

[5] Z. Drmac, V. Hari, M. Marušic, M. Rogina, S. Singer i S. Singer, „Numericka analiza," *PMF-Matematicki odjel, Sveucilište u Zagrebu*, 2003. adresa: `http://https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf`.

[6] M. Hruška, J. Domšić, G. Kurtović i M. Kožul, „Osnove programiranja (Python): priručnik za polaznike," 2018. adresa: `https://repozitorij.srce.unizg.hr/islandora/object/srce:428/datastream/FILE0/download`.

[7] N. Elezovic, *Linearna algebra*. 1999.

[8] B. Divjak, „Matematika (PITUP) Dio V "Sustavi linearnih jednadzbi"," adresa: `https://elfarchive1516.foi.hr/pluginfile.php/58354/mod_page/content/5/Sustavi_linearnih_jednadzbi.pdf`.

[9] D. Keček, „Metode izračunavanja determinanti matrica n-tog reda," *Osječki matematički list*, sv. 10, br. 1, str. 31–42, 2010. adresa: `https://hrcak.srce.hr/file/89410`.

[10] „Gaussove eliminacije i LR faktorizacija," adresa: `https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/OldWeb/2.pdf`.

[11] M. Klaricic Bakula, „Uvod u numericku matematiku," 2009. adresa: `https://mapmf.pmfst.unist.hr/~milica/Numericka_matematika/Folije_za_predavanja/UNM_SustaviLJ.pdf`.

[12] J. T. Foster, „LU Factorization," adresa: `https://johnfoster.pge.utexas.edu/numerical-methods-book/LinearAlgebra_LU.html`.

[13] „LU Decomposition in Python and NumPy," adresa: `https://www.quantstart.com/articles/LU-Decomposition-in-Python-and-NumPy/`.

Popis slika