

# Proračun strujanja u abdominalnoj aorti

---

Jurčević, Ante

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:207000>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-06**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Ante Jurčević**

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:  
doc. dr. sc. Severino Krizmanić

Student:  
Ante Jurčević

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

U prvom planu se zahvaljujem doc. dr. sc. Severinu Krizmaniću čiji su mi savjeti i pomoć omogućili da izradim ovaj rad.

Također bi se ovim putem htio zahvaliti i doc. dr. sc. Igoru Karšaju od koga sam i dobio samu ideju za završni rad.

Na kraju se zahvaljujem svojoj obitelji na potpori tijekom dosadašnjeg studija.

Ante Jurčević



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje
Datum: 28-02-2017 Prilog
Klasa: 002-04/17-6/4
Ur.broj: 15-1703-17-131

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ante Jurčević** Mat. br.: 0035194815

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Proračun strujanja u abdominalnoj aorti**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Calculation of flow-field in abdominal aorta**

Opis zadatka:

Pojava aneurizme abdominalne aorte predstavlja zdravstveni problem relativno male učestalosti, ali s velikom incidencijom smrtnih posljedica. Određivanje uzroka njenog nastanka i razvoja predmet su brojnih znanstvenih istraživanja, među kojima i onih koja se odvijaju u okviru domaćih znanstvenih projekata.

Za postojeće geometrijske modele područja krvotoka u abdominalnoj aorti, utvrđene u sklopu istraživanja provedenih u znanstvenom projektu, potrebno je provesti proračune strujanja krvi.

Proračune je potrebno provesti za više geometrijskih modela koji odražavaju povijest promjene geometrije prilikom nastanka aneurizme.

Pisani dio završnog rada treba sadržavati sljedeća poglavlja:

1. Uvod,
2. Opis problema i metoda primijenjenih za njihovo rješavanje,
3. Prikaz dobivenih rješenja i osvrt na rješenja,
4. Zaključak.

U radu je potrebno navesti popis korištene literature i zahvalu na pomoći pri izradi rada.

Zadatak zadan:  
30. studenog 2016.

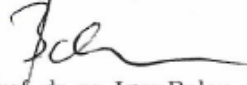
Rok predaje rada:  
**1. rok:** 24. veljače 2017.  
**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2017.  
**3. rok:** 22. rujna 2017.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 27.2. - 03.03. 2017.  
**2. rok (izvanredni):** 30. 06. 2017.  
**3. rok:** 25.9. - 29. 09. 2017.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr. sc. Severino Krizmanić

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

## Sadržaj

Sadržaj.....	I
Popis slika .....	III
Popis tablica .....	V
Popis oznaka.....	VI
Sažetak .....	VIII
Summary .....	IX
1. Uvod.....	1
1.1 Teorijske osnove mehanike fluida .....	2
1.1.1 Koncept kontrolnog i materijalnog volumena.....	3
1.2 Osnovni zakoni dinamike fluida.....	3
1.2.1 Zakon očuvanja mase .....	4
1.2.2 Zakon očuvanja količine gibanja.....	4
1.2.3 Zakon očuvanja momenta količine gibanja.....	5
1.2.4 Zakon očuvanja energije .....	5
1.2.5 Drugi zakon termodinamike.....	6
1.3 Osnove Računalne dinamike fluida.....	6
1.3.1 Metoda konačnih volumena .....	9
1.4 Kardiovaskularna mehanika fluida.....	12
1.4.1 Fizikalna svojstva krvi .....	14
1.4.2 Matematički model strujanja krvi .....	15
1.5 Aneurizma abdominalne aorte.....	21
2. Računalno modeliranje i simulacija strujanja .....	24
2.1 Generiranje mreže konačnih volumena .....	25
2.2 Implementacija rubnih uvjeta i pulsirajućeg strujanja.....	27
2.3 Računalna simulacija.....	28

---

3. Prikaz dobivenih rezultata i njihova analiza .....	30
3.1 Smično naprezanje.....	30
3.1.1 Usporedba smičnih naprezanja za slučaj stacionarnog i nestacionarnog strujanja 34	
3.2 Profili brzina.....	35
Zaključak .....	41
Literatura .....	42
Prilozi .....	43

## Popis slika

Slika 1.1.	Zastupljenost RDF – a u inženjerstvu .....	7
Slika 1.2.	Koraci pri izvedbi numeričke simulacije .....	8
Slika 1.3.	Dio diskretiziranog područja proračuna.....	9
Slika 1.4.	Čovjekov krvožilni sustav.....	12
Slika 1.5.	Tlakovi, brzine i udijeli krvnih žila u ukupnom poprečnom presjeku .....	13
Slika 1.6.	Promjena protoka uslijed pulsirajućeg strujanja za trajanje od dva pulsa .....	17
Slika 1.7.	Vremenska promjena srednje brzine na ulaznoj granici u područje proračuna uslijed pulsirajućeg strujanja za trajanje od dva pulsa .....	17
Slika 1.8.	Pojednostavljena geometrija aneurizme abdominalne aorte.....	18
Slika 1.9.	Realna geometrija aneurizme abdominalne aorte .....	18
Slika 1.10.	Ljudska aorta.....	21
Slika 1.11.	Aneurizma abdominalne aorte .....	22
Slika 2.1.	<i>STL</i> model aneurizme abdominalne aorte.....	25
Slika 2.2.	Prikaz mreže konačnih volumena .....	26
Slika 2.3.	Pulsirajuće brzine na izlazu iz abdominalne aorte za prvi geometrijski model ...	28
Slika 2.4.	Pulsirajuće brzine na izlazu iz abdominalne aorte za drugi geometrijski model ..	29
Slika 3.1.	Prosječno smično naprezanje za prvi geometrijski model .....	31
Slika 3.2.	Raspodjela $\tau_t$ i $\tau_s$ za prvi geometrijski model .....	31
Slika 3.3.	Prosječno smično naprezanje za drugi geometrijski model .....	31
Slika 3.4.	Raspodjela $\tau_t$ i $\tau_s$ za drugi geometrijski model .....	31
Slika 3.5.	Prosječno smično naprezanje za treći geometrijski model .....	32
Slika 3.6.	Raspodjela $\tau_t$ i $\tau_s$ za treći geometrijski model .....	32
Slika 3.7.	Prosječno smično naprezanje za četvrti geometrijski model .....	32
Slika 3.8.	Raspodjela $\tau_t$ i $\tau_s$ za četvrti geometrijski model .....	32
Slika 3.9.	Prosječno smično naprezanje za peti geometrijski model .....	33
Slika 3.10.	Raspodjela $\tau_t$ i $\tau_s$ za peti geometrijski model.....	33
Slika 3.11.	Raspodjela $\tau_t$ i $\tau_s$ za prvi geometrijski model – stacionarno strujanje .....	34
Slika 3.12.	Raspodjela $\tau_t$ i $\tau_s$ za drugi geometrijski model – stacionarno strujanje .....	34
Slika 3.13.	Izgled strujnica za prvi geometrijski model .....	35
Slika 3.14.	Izgled strujnica za drugi geometrijski model .....	35
Slika 3.15.	Izgled strujnica za treći geometrijski model .....	36



---

Slika 3.16. Izgled strujnica za četvrti geometrijski model .....	36
Slika 3.17. Izgled strujnica za peti geometrijski model .....	36
Slika 3.18. Presjek zakrivljenom ravninom .....	37
Slika 3.19. Polje brzine za prvi geometrijski model .....	38
Slika 3.20. Polje brzine za drugi geometrijski model .....	38
Slika 3.21. Polje brzine za treći geometrijski model.....	38
Slika 3.21. Polje brzine za četvrti geometrijski model .....	38
Slika 3.21. Polje brzine za peti geometrijski model .....	39

## **Popis tablica**

Tablica 1. Granice i rubni uvjeti za prvi geometrijski model.....	27
Tablica 2. Iznosi površina zahvaćenim s $\tau_t$ za svih pet geometrijskih modela.....	33
Tablica 3. Usporedba rješenja za stacionarno i nestacionarno strujanje .....	35

## Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
$D$	[m]	promjer
$D_{ji}$	[1/s]	tenzor brzine deformacije
$D_n$	[kg/s]	jačina difuzije
$dS$	[J/K] , [m <sup>2</sup> ]	diferencijal entropije, diferencijalna površina
$ds$	[J/kgK]	diferencijal specifične entropije
$dV$	[m <sup>3</sup> ]	diferencijal volumena
$F_n$	[kg/s]	jačina konvekcije
$J_j$	[-]	vektor fluksa fizikalne veličine
$Kn$	[-]	Knudsenov broj
$L$	[m]	karakteristična veličina
$n_j$	[-]	vektor normale
$Pe_{\Delta}$	[-]	lokalni Pecletov broj
$p$	[N/m <sup>2</sup> ]	tlak
$q_j$	[W/m <sup>2</sup> ]	vektor toplinskog toka
$Re$	[-]	Reynoldsov broj
$S$	[J/K]	entropija
$S_{KV}$	[m <sup>2</sup> ]	kontrolna površina
$S_M$	[m <sup>2</sup> ]	materijalna površina
$s$	[J/kgK]	specifična entropija
$T$	[K]	apsolutna temperatura
$t$	[s]	vrijeme
$V_{KV}$	[m <sup>3</sup> ]	kontrolni volumen
$V_M$	[m <sup>3</sup> ]	materijalni volumen
$v$	[m/s]	brzina
$v_j$	[m/s]	vektor brzine
$x_j$	[m]	vektor Karterzijevih koordinata
$\Gamma$	[kg/ms]	koeficijent difuzije
$\Delta n$	[m]	udaljenost između čvorova konačnih volumena
$\delta q$	[J/kg]	diferencijal specifične topline

---

$\delta Q$	[J]	diferencijal topline
$\delta_{ij}$	[-]	Kronekerov delta simbol
$\varepsilon_{kji}$	[-]	permutacijski simbol
$\lambda$	[m]	slobodna putanja molekule
$\mu$	[Pas]	dinamička viskoznost
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	kinematička viskoznost
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća
$\Sigma$	[J/K]	produkcija entropije
$\Sigma_{ji}$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor smičnih naprezanja
$\sigma$	[J/kgK]	produkcija specifične entropije
$\sigma_{ji}$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor ukupnog naprezanja
$\tau$	[N/m <sup>2</sup> ]	smično naprezanje
$\tau_s$	[N/m <sup>2</sup> ]	smično naprezanje iznad 0.4 N/m <sup>2</sup>
$\tau_t$	[N/m <sup>2</sup> ]	smično naprezanje ispod 0.4 N/m <sup>2</sup>
$\phi$	[-]	volumenska gustoća fizikalne veličine
$\varphi$	[-]	masena gustoća fizikalne veličine

## **Sažetak**

Aneurizma abdominalne aorte (AAA) predstavlja zdravstveni problem relativno male učestalosti, ali s velikom incidencijom smrtnih posljedica. Točan uzrok i sam razvoj AAA još uvijek nije objašnjen, a većina aneurizama dijagnosticira se slučajno. Otkriju se pri fizikalnom pregledu ili na ultrazvuku, CT-u ili MR-u trbuha vršenim zbog drugih razloga. Zbog prethodno navedenih razloga, AAA je predmet brojnih znanstvenih istraživanja u zadnjih nekoliko godina. U skladu sa sve većim mogućnostima računala, ali i razvojem novih algoritama za numeričku analizu fizikalnih problema, numeričke metode u strojarstvu kao što su Metoda konačnih elemenata (MKE) i Metoda konačnih volumena (MKV) sve više se počinju primjenjivati u području biomehanike i bioloških strujanja. Tako će tema ovog rada biti upravo numeričko modeliranje i simulacija strujanja krvi kroz abdominalnu aortu. Sam proračun je proveden za više geometrijskih modela primjenom metode konačnih volumena, pomoću programskog paketa OpenFOAM. Ukupno je analizirano pet geometrijskih modela koji odražavaju povijest geometrije aorte prilikom nastanka aneurizme.

Ključne riječi: Aneurizma abdominalne aorte, metoda konačnih volumena, numeričko modeliranje i simulacija

## **Summary**

Abdominal aortic aneurysm (AAA) is a health problem of relatively low frequency, but with a high incidence of fatal consequences. The exact cause and development of AAA is still unexplained, and most of the aneurysms are diagnosed by accident. They are detected at physical examination or on ultrasound, CT scans or MRI of the abdomen exercised for other reasons. Because of the foregoing reasons, AAA is the subject of numerous scientific studies in the last few years. In line with the increasing capabilities of computers, but also the development of the new algorithms for numerical analysis of physical problems, numerical methods in engineering such as Finite element method (FEM) and Finite volume method (FVM) are being applied more and more in the field of bio mechanics and biological fluid mechanics. Thus, the topic of this work is numerical modelling and simulation of the blood flow through abdominal aorta. The calculation itself is carried out for five geometric models using finite volume method, with use of OpenFOAM. The calculation covers five geometric models which reflect the history of the geometry of the aorta during the formation of aneurysm.

Key words: Abdominal aortic aneurysm, finite volume method, numerical modelling and simulation

# 1. Uvod

Mehanika fluida je grana fizike koja se bavi mehanikom - dakle proučavanjem sila i kretanja - uzrokovanih od i na samim fluidima. To je teorijsko eksperimentalna znanost. Predstavlja jedno od najkompleksnijih područja mehanike te osim područja klasične mehanike zalazi i u stohastičke procese i teoriju kaosa koja je i evoluirala iz proučavanja pojava u mehanici fluida (turbulencija, meteorologija). Krv koja struji kroz krvne žile, predstavlja ništa drugo već još jedan oblik strujanja fluida u određenog geometriji, koji se može opisati osnovnim zakonima mehanike fluida. Pod osnovne zakone mehanike fluida spadaju: zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja momenta količine gibanja, zakon očuvanja energije i drugi zakon termodinamike, o kojima će se detaljnije govoriti u sljedećim poglavljima.

Nažalost, u mehanici fluida strujanje je opisano parcijalnim, nelinearnim diferencijalnim jednadžbama višeg reda, te je točno (analitičko) rješenje moguće dobiti samo u vrlo malom broju slučajeva. Zbog toga se za rješavanje realnih problema, razvijaju i usavršavaju numeričke metode koje uz dobro poznavanje fizike promatranog problema ali i vrlo jaka računala, koja danas nisu rijetkost, mogu dati vrlo točna rješenja za promatrani problem. Naprotiv, danas se u velikom broju slučajeva eksperiment (kao pokazatelj točnosti rješenja) niti ne provodi, što je jasan pokazatelj sposobnosti numeričkih metoda.

Za napredak i razvitak medicine, tj. novih metoda liječenja i dijagnosticiranja zdravstvenih poteškoća, uvelike je zaslužno inženjerstvo. Brojni zdravstveni problemi, pogotovo na području kardiovaskularnog sustava danas se mogu rješavati bez operacije, tj. manje invazivnim metodama. Time se nastoji očuvati kvaliteta života i smanjiti stopa smrtnosti od danas vodećih uzroka smrti – srčanog i moždanog udara.

U sklopu poglavlja 1. dat će se detaljniji opis osnovnih zakona, tj. teorijskih osnova na kojima počiva mehanika fluida, također će se opisati danas najzastupljenija numerička metoda na području mehanike fluida – metoda konačnih volumena (MKV), koja se spomenula u sažetku i pomoću koje će se i vršiti sam proračun strujanja krvi u abdominalnoj aorti. Na posljeticu, ali ne i najmanje važno, opisat će se implementacija osnovnih zakona mehanike fluida na probleme bioloških strujanja, u ovom slučaju strujanja krvi kroz krvne žile, te će se zornije prikazati problem aneurizme abdominalne aorte i važnosti istraživanja uzroka i moguće prevencija tog zdravstvenog problema.

## 1.1 Teorijske osnove mehanike fluida

Kao što je rečeno u poglavlju 1. mehanika fluida je grana fizike koja se bavi mehanikom - dakle proučavanjem sila i kretanja - uzrokovanih od i na samim fluidima. Teorijska osnova na kojoj počiva mehanika fluida i njezini zakoni jest da su fluidi neprekidni, tj. da u potpunosti ispunjavaju prostor u kojemu se nalaze.

Naime, jasno je da je svaki realni fluid korpuskularne strukture (sastoji se od atoma i/ili molekula) te da pri definiranju svojstava izraženih po jedinici volumena, smanjivanjem volumena ka nuli može se javiti situacija da se došlo do volumena u kojem nema niti jednog atoma ili molekule [2]. Pošto su atomi i molekule osnovna građevna jedinica svake tvari, tako i fluida, oni su samim time i nositelji fizikalnih svojstava fluida. Ako bi postojao volumen u kojem nema niti jednog atoma ili molekule, onda ne bi bilo moguće definirati fizikalna svojstva. Iz tog se razloga uvodi pojam kontinuuma, tj. idealiziranog fluida koji je kontinuirano raspodijeljen po prostoru, i upravo zbog toga će se moći definirati fizikalna svojstva fluida, čak i kad volumen teži k nuli. Za gustoću se to matematički može formulirati ovako

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} . \quad (1.1)$$

Prema izrazu (1.1), definirana je čestica infinitezimalnog volumena  $dV$ , čija masa prema (1) iznosi  $dm = \rho dV$ . Iz prethodno navedenog razmatranja slijedi da svaka čestica fluida zauzima jednu točku prostora, te da se u jednoj točki prostora može definirati samo jedna čestica fluida, koja se prema konceptu kontinuuma smatra zatvorenim termodinamičkim sustavom koji se u svakom trenutku nalazi u ravnotežnom stanju.

Primjenjivost hipoteze kontinuuma se ocjenjuje temeljem Knudsenova broja, koji predstavlja bezdimenzijsku veličinu, a definira se na sljedeći način

$$Kn = \frac{\lambda}{L} = \frac{\text{slobodna putanja molekule}}{\text{karakteristična veličina}} \quad (1.2)$$

gdje je slobodna putanja molekula ( $\lambda$ ) prosječna vrijednost puta koji molekula prođe između dva sudara, a  $L$  karakteristična duljina za problem koji se rješava.

Ako je Knudsenov broj puno manji od jedinice, može se primijeniti hipoteza kontinuuma, dok za Knudsenove brojeve puno veće od jedan hipoteza kontinuuma ne vrijedi.

U ovom će se radu proračunavati strujanje za koje vrijedi hipoteza kontinuuma.



### 1.1.1 Koncept kontrolnog i materijalnog volumena

Prije nego što se navedu osnovni zakoni mehanike fluida, definirat će se pojmovi: materijalni i kontrolni volumen.

Materijalni volumen predstavlja volumen kojeg ispunjavaju jedne te iste čestice. U njemu je sadržana određena količina promatrane fizikalne veličine, i svi zakoni mehanike fluida definirani su za materijalni volumen.

No, u mehanici fluida nije interes pratiti svaku od čestica fluida na njenom putu kroz prostor, nego je potrebno odrediti posljedice dodira fluida sa stijenkom neke konstrukcije ili uređaja kroz koji fluid struji. Zbog toga se definira kontrolni volumen, čije se granice poklapaju s površinom konstrukcije za koju se želi istražiti utjecaj strujanja fluida.

Budući da su svi zakoni mehanike fluida prvobitno izvedeni za materijalni volumen, potrebno ih je preformulirati za kontrolni volumen. Ovdje će se definirati dvije formule koje predstavljaju vezu između materijalnog i kontrolnog volumena, a ti se zakoni još nazivaju i Reynoldsovi transportni teoremi

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_{M(t)}} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \phi dV + \int_{S_{KV}} \phi v_j n_j dS, \quad (1.3)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_{M(t)}} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \phi dV + \int_{S_{KV}} \phi (v_j - u_j) n_j dS. \quad (1.4)$$

Jednadžba (1.3) se odnosi na mirujući kontrolni volumen, dok se jednadžba (1.4) odnosi na kontrolni volumen čija se granica  $S$  giba brzinom  $u_j$ .

## 1.2 Osnovni zakoni dinamike fluida

Pod osnovne zakone dinamike fluida ubraja se sljedećih pet zakona:

- Zakon očuvanja mase
- Zakon očuvanja količine gibanja
- Zakon očuvanja momenta količine gibanja
- Zakon očuvanja energije
- Drugi zakon termodinamike

Za svaki od prethodno navedenih zakona će se dati definicija, te će se svaki zakon prikazati u integralnom i diferencijalnom obliku.

### 1.2.1 Zakon očuvanja mase

Zakon očuvanja mase govori da je brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka nuli. Što se u integralnom obliku može napisati ovako

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho dV = 0. \quad (1.5)$$

Ako se na izraz (1.5) primjeni jednadžba (1.3), izraz (1.5) postaje

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho dV + \int_{S_{KV}} \rho v_j n_j dS = 0. \quad (1.6)$$

U diferencijalnom obliku ovaj zakon glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (1.7)$$

### 1.2.2 Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja govori da je brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen. Ishodište ovog zakona leži u Drugom Newtonovu zakonu, koji nalaže da je resultantna sila na neko tijelo jednaka umnošku mase i akceleracije tog tijela.

Integralni oblik ovog zakona glasi

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho v_i dV = \int_{V_M} \rho f_i dV + \int_{S_M} \sigma_i dS = \int_{V_M} \rho f_i dV + \int_{S_M} n_j \sigma_{ji} dS, \quad (1.8)$$

primjenom izraza (1.3) dobiva se

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho v_i v_j dV + \int_{S_{KV}} \rho v_i v_j n_j dS = \int_{V_{KV}} \rho f_i dV + \int_{S_{KV}} \sigma_i dS. \quad (1.9)$$

U diferencijalnom obliku zakon očuvanja količine gibanja glasi

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}. \quad (1.10)$$

### 1.2.3 Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Zakon očuvanja momenta količine gibanja govori da je brzina promjene momenta količine gibanja materijalnog volumena u odnosu na odabrani pol, jednaka sumi momenta vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen u odnosu na taj isti pol. U slučaju da nema spregova raspodijeljenih po materijalnom volumenu i materijalnoj površini ovaj se zakon svodi na činjenicu simetričnosti tenzora.

Sljedeća tri izraza prikazuju matematički zapis ovog zakona.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \varepsilon_{kji} x_j \rho v_i dV = \int_{V_M} \varepsilon_{kji} x_j \rho f_i dV + \int_{S_M} \varepsilon_{kji} x_j n_m \sigma_{mi} dS, \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \varepsilon_{kji} x_j \rho v_i dV + \int_{S_{KV}} \varepsilon_{kji} x_j \rho v_i v_j n_j dS = \int_{V_{KV}} \varepsilon_{kji} x_j \rho f_i dV + \int_{S_{KV}} \varepsilon_{kji} x_j \sigma_i dS, \quad (1.12)$$

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}. \quad (1.13)$$

### 1.2.4 Zakon očuvanja energije

Zakon očuvanja energije govori da je brzina promjene zbroja kinetičke i unutarnje energije materijalnog volumena, jednaka snazi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, te brzini izmjene topline između materijalnog volumena i okoline, što se matematički zapisuje na sljedeći način

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho e dV = \int_{V_M} \rho f_i v_i dV + \int_{S_M} n_j \sigma_{ji} v_i dS - \int_{S_M} q_j n_j dS, \quad (1.14)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho e dV + \int_{S_{KV}} \rho e v_j n_j dS = \int_{V_{KV}} \rho f_i v_i dV + \int_{S_{KV}} \sigma_i v_i dS - \int_{S_{KV}} q_j n_j dS, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j e)}{\partial x_j} = \rho f_i v_i + \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (1.16)$$

### 1.2.5 Drugi zakon termodinamike

Ovaj zakon ima više različitih definicija.

Jedna od definicija jest, da entropija izoliranog sustava mora rasti ili u najboljem slučaju ostati ista, odnosno produkcija entropije u otvorenom termodinamičkom sustavu mora biti pozitivna ili jednaka nuli. To se može zapisati na sljedeći način

$$\sigma = \int_1^2 \left( ds - \frac{\delta q}{T} \right) \geq 0, \quad (1.17)$$

$$\Sigma = \int_1^2 \left( dS - \frac{\delta Q}{T} \right) \geq 0. \quad (1.18)$$

Diferencijalni oblik ovog zakona glasi

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{Du}{Dt} + p \frac{\partial v_j}{\partial x_j}. \quad (1.19)$$

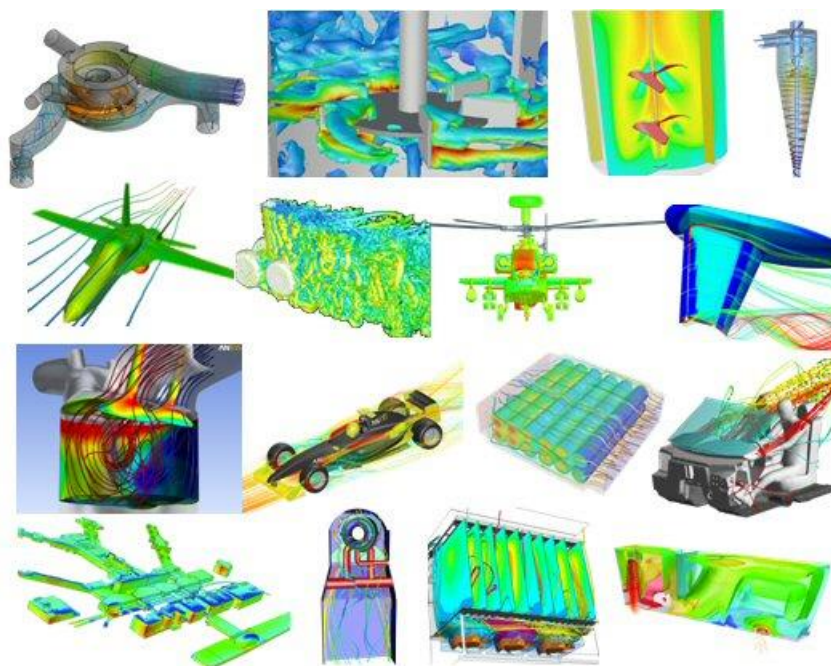
Ovaj zakon govori o jednosmjernosti fizikalnih procesa, i svaki proces koji se protivi ovom zakonu je nefizikalno, i kao takav se ne može ostvariti u prirodi. U jednadžbi (1.19) se kao nova fizikalna veličina pojavljuje i entropija, a koje nema u prethodnim jednadžbama. Zbog toga se ova diferencijalna jednadžba ne mora rješavati zajedno s diferencijalnim jednadžbama (1.7), (1.10) i (1.16), te se zbog toga naziva pasivnom jednadžbom.

## 1.3 Osnove Računalne dinamike fluida

Kao što je u poglavlju 1. rečeno, strujanje fluida je opisano parcijalnim, nelinearnih diferencijalnim jednadžbama višeg reda, za koje analitičko rješenje postoji samo u malom broju slučajeva. Zbog toga su se u prošlosti problemi u mehanici fluida uglavnom rješavali eksperimentalnim putem. No, u drugoj polovici 20. stoljeća kada počinje eksponencijalni razvoj računala i njihova primjena u rješavanju inženjerskih problema, uz teorijsku i eksperimentalnu granu počinje se razvijati i treća grana mehanike fluida: Računalna dinamika fluida (Computational Fluid Dynamics – CFD). Nakon što se vidjelo da je primjenom računala moguće s vrlo dobrom preciznošću riješiti probleme u mehanici fluida, RDF se počeo nezaustavljivo širiti i razvijati. U početku su se rješavali jednostavniji problemi, no sve većim

razvojem računala, novih algoritama za numeričku analizu fizikalnih problema, RDF je postao nezaobilazna grana modernog inženjerstva.

Iako se ova grana mehanike fluida temelji na teorijskom pristupu ima puno sličnosti i s eksperimentalnim pristupom, jer se iz jednog numeričkog rješenja nekog problema također ne može zaključivati o utjecaju pojedinih parametara, zbog toga je za rješavanje problema mehanike fluida numeričkim simulacijama nužan uvjet dobro poznavanje teorijskih osnova.



Slika 1.1: Zastupljenost RDF – a u inženjerstvu [13]

Prilikom numeričkog modeliranja i simulacije fizikalnih problema ( ne samo u mehanici fluida već i u ostalim granama fizike kao što su termodinamika, mehanika deformabilnih tijela, elektrotehnika ... ) uvijek se započinje s definiranjem problema i izborom odgovarajućeg matematičkog modela. Matematički model je najčešće prikazan sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje je potrebno riješiti numeričkim putem.

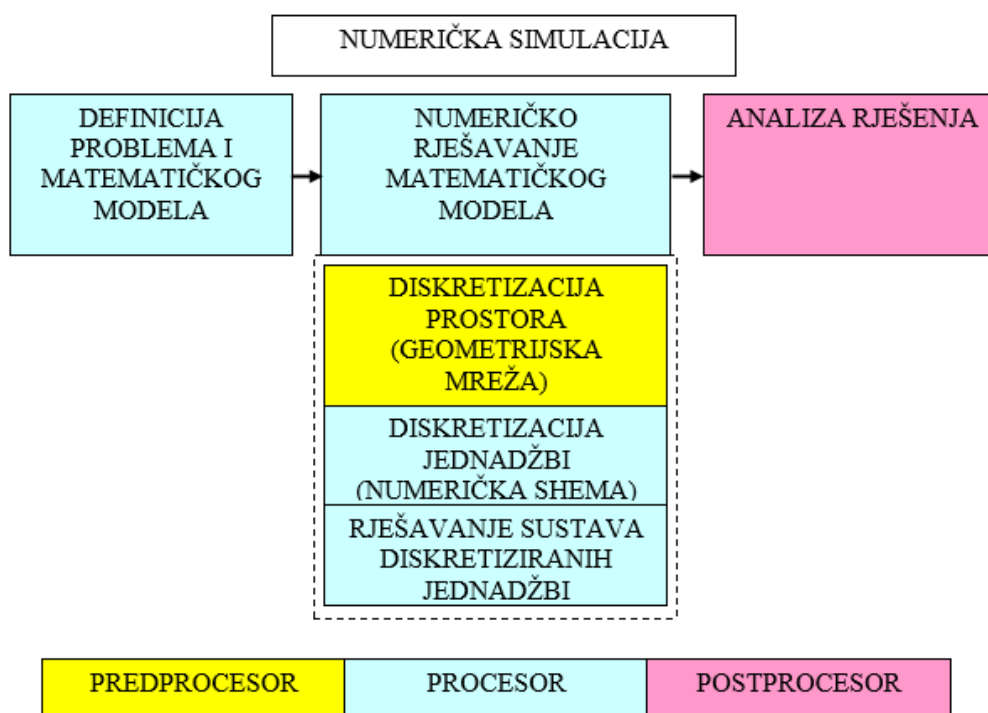
Definiranje problema i matematičkog modela ujedno predstavlja i prvi korak svake numeričke simulacije.

Drugi korak u numeričkoj simulaciji je numeričko rješavanje zadanog problema. Ovo je ujedno i najzahtjevniji dio svake simulacije i on iziskuje najviše znanja i iskustva. Za početak je potrebno diskretizirati promatrano područje na veći broj potpodručja. Tu se u pravilu mogu koristiti dvije numeričke metode a to je Metoda konačnih elemenata ( MKE ) i Metoda konačnih volumena ( MKV ). MKE se u pravilu koristi za rješavanje problema mehanike deformabilnih

tijela, dok se MKV koristi za rješavanje problema u termodinamici, mehanici fluida, elektrotehnici, odnosno za različite probleme polja. Nakon što je područje diskretizirano, sljedeći korak je diskretizacija diferencijalnih jednadžbi, tj. odabir numeričke sheme. Tu se također mogu koristiti različite numeričke metode kao što ( MKE, MKV, MKR – Metoda konačnih razlika i sl. ). Osnovni cilj diskretizacije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi jest stvaranje sustava algebarskih jednadžbi koje mogu biti linearne i nelinearne, a to ovisi o tome jesu li polazne parcijalne diferencijalne jednadžbe linearne, tj. nelinearne. Jednom kada je stvoren sustav algebarskih jednadžbi kreće se s njegovim rješavanjem. Pošto su diferencijalne jednadžbe koje opisuju neki problem u velikom broju slučajeva nelinearne, sustav jednadžbi se rješava iterativnim putem.

Nakon što je dobiveno numeričko rješenje, potrebno je provesti analizu, koja podrazumijeva prikaz skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja, integraciju protoka, sile, momenata, toplinskih tokova i sl.

U organizacijskom smislu, numerička se simulacija provodi kroz tri programa: predprocesor, procesor i postprocesor, a sljedeća slika prikazuje korake računalne simulacije koji su prethodno bili opisani.



Slika 1.2: Koraci pri izvedbi numeričke simulacije [1]

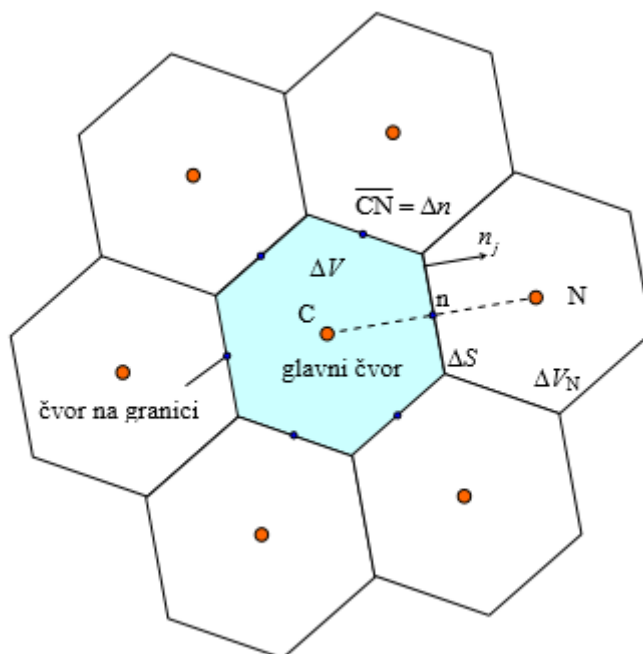
### 1.3.1 Metoda konačnih volumena

Metoda konačnih volumena je danas najzastupljenija numerička metoda na području računalne dinamike fluida. Polazna točka za diskretizaciju konačnim volumenima je podjela razmatranog područja na odgovarajući broj potpodručja koja se nazivaju konačni volumeni čijim se spajanjem razmatrano područje potpuno opisuje [3]. Metoda konačnih volumena u literaturi se često naziva i metoda kontrolnih volumena. Baš kao i metoda konačnih elemenata, metoda konačnih volumena je integralna metoda koja se temelji na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednažbi

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} - \Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = S_\varphi \quad (1.20)$$

po konačnim volumenima na koje je podijeljeno područje proračuna. Integral jednažbe (1.20) po jednom konačnom volumenu prikazanom na slici 1.3

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV. \quad (1.21)$$



Slika 1.3: Dio diskretiziranog područja proračuna [1]

Član na lijevoj strani jednakosti izraza (1.21) predstavlja brzinu promjene sadržaja fizikalne veličine  $\varphi$ . Prvi integral na desnoj strani jednakosti izraza (1.21) izražava konvekcijski i

difuzijski protok fizikalne veličine  $\varphi$  kroz granice konačnih volumena, dok drugi član na desnoj strani jednakosti označava izvor fizikalne veličine  $\varphi$ .

Dva volumenska integrala koja su prisutna u izrazu (1.21) će se aproksimirati na sljedeći način

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = \frac{d}{dt} (\rho \bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V) \approx \frac{d}{dt} (\rho \varphi_c \Delta V) = \rho \frac{d\varphi_c}{dt} \Delta V, \quad (1.22)$$

$$\int_{\Delta V} S_\varphi dV = \bar{S}_{\varphi, \Delta V} \Delta V \approx S_c \Delta V, \quad (1.23)$$

gdje je  $\bar{\varphi}_{\Delta V}$  srednja vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  unutar konačnog volumena, a ako se uzme da je konačni volumen dovoljno mali, tada se promjena fizikalne veličine  $\varphi$  može aproksimirati linearnom raspodjelom kod koje vrijedi da je  $\bar{\varphi}_{\Delta V} = \varphi_c$ , gdje je  $\varphi_c$  vrijednost fizikalne veličine u težištu konačnog volumena. Slično vrijedi i za izvorski član, gdje je  $S_c$  vrijednost izvorskog člana u težištu konačnog volumena kao aproksimacija srednje vrijednosti izvorskog člana unutar volumena  $\Delta V$ .

Član koji se nalazi pod površinskim integralom se sastoji od vektora difuzijskog toka  $-\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$  i vektora konvekcijskog toka  $\rho v_j \varphi$ . U općem slučaju ova dva vektora nisu kolinearna, a njihov zbroj predstavlja vektor ukupnog toka  $J_j$ . Protoku fizikalnog svojstva kroz konačne volumene doprinosi samo normalna komponenta vektora  $J_j$ , pa se na temelju toga može pisati

$$\begin{aligned} J_j n_j &= \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \\ &= \int_{\Delta S} \left( \rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \left[ \rho (\bar{v}_n \bar{\varphi})_{\Delta S} - \Gamma \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right)_{\Delta S} \right] \Delta S, \end{aligned} \quad (1.24)$$

uz aproksimacije  $(\bar{v}_n \bar{\varphi})_{\Delta S} \approx \bar{v}_{n, \Delta S} \bar{\varphi}_{\Delta S} \approx v_{n, n} \varphi_n$ ,  $\left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \right)_{\Delta S} \approx \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_n$ , te uz uvođenje bezdimenzijske koordinate  $\tilde{n} = \frac{n}{\Delta n}$ , gdje je  $\Delta n$  udaljenost čvorova C i N prema slici 3, jednadžba (1.24) postaje

$$J_j n_j = \rho v_{n, n} \Delta S \varphi_n - \frac{\Gamma \Delta S}{\Delta n} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} = F_n \varphi_n - D_n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right)_n, \quad (1.25)$$

gdje je  $F_n$  jačina konvekcije, tj. maseni protok fluida kroz površinu  $\Delta S$ , a  $D_n$  jačina difuzije, tj. difuzijska vodljivost.



Omjer  $\frac{F_n}{D_n} = \frac{\rho v_{n,n} \Delta n}{\Gamma} = Pe_\Delta$  se naziva lokalni Pecletov broj i predstavlja omjer intenziteta prijenosa fizikalne veličine konvekcijom odnosno difuzijom.

Ako se izrazi (1.22), (1.23) i (1.25) uvrste u (1.21) dobiva se

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_c}{dt} = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left( F_n \varphi_n - D_n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right)_n \right)^{nb} + S_c \Delta V, \quad (1.26)$$

gdje suma po  $nb$  označuje zbrajanje po svih  $N_{nb}$  stranica konačnog volumena.

Koristeći shemu diferencije koja koristi samo čvorne vrijednosti  $\varphi_c$  i  $\varphi_N$ , izraz (1.26) se može prikazati u sljedećem obliku

$$J_j n_j = F_n \varphi_n - D_n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right)_n = F_n \varphi_c + \alpha_N (\varphi_c - \varphi_N), \quad (1.27)$$

gdje koeficijent  $\alpha_N$  zavisi od primijenjene sheme diferencije.

Uvrštavanjem (1.27) u (1.26) dobiva se

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_c}{dt} = -\varphi_c \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \alpha_N^{nb} + \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [\alpha_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + S_c \Delta V. \quad (1.28)$$

Prikazivanje izvorskog člana ovisi o načinu integriranja jednadžbe (28). Ako se ona integrira nekom od eksplicitnih metoda, tada izvorski član ostaje originalno zadan kakav je. Ukoliko je upotrebljena implicitna metoda integriranja, onda se izvorski član linearizira u obliku

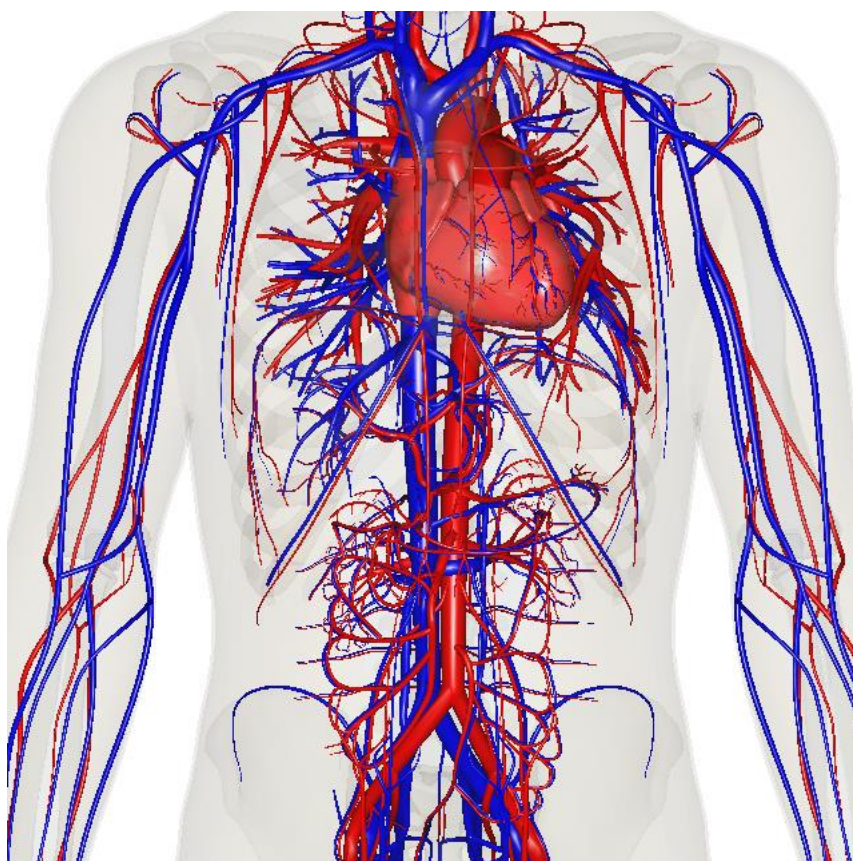
$$S_c \Delta V_C = \alpha + g \varphi_C. \quad (1.29)$$

Nakon integriranja jednadžbe (28), dobiva se algebarska jednadžba koja se odnosi na jedan promatrani konačni volumen, a rezultat primjene gore opisanog postupka na sve konačne volumene jest sustav  $n$  – algebarskih jednadžbi s  $n$  – nepoznanica. Njegovim rješavanjem dobivaju se tražene veličine ( tlak, brzina, temperatura ... ) u čvorovima mreže konačnih volumena.

## 1.4 Kardiovaskularna mehanika fluida

Sam pojam „Kardiovaskularna mehanika fluida“ danas predstavlja primjenu osnovnih zakona i jednažbi mehanike fluida u svrhu matematičkog modeliranja strujanja krvi kroz krvožilni sustav. William Harvey (1578 – 1657 ) prvi je otkrio da u ljudskom tijelu postoji konstantna cirkulacija krvi [4]. Sam krvožilni sustav se sastoji od srca – pumpe koja stvara odgovarajući gradijent tlaka nužan za samo strujanje, tj. cirkulaciju krvi , krvnih žila – koje predstavljaju rutu kojim sama krv putuje i na kraju od krvi – fluida koji donosi kisik i potrebne tvari do svih stanica tijela.

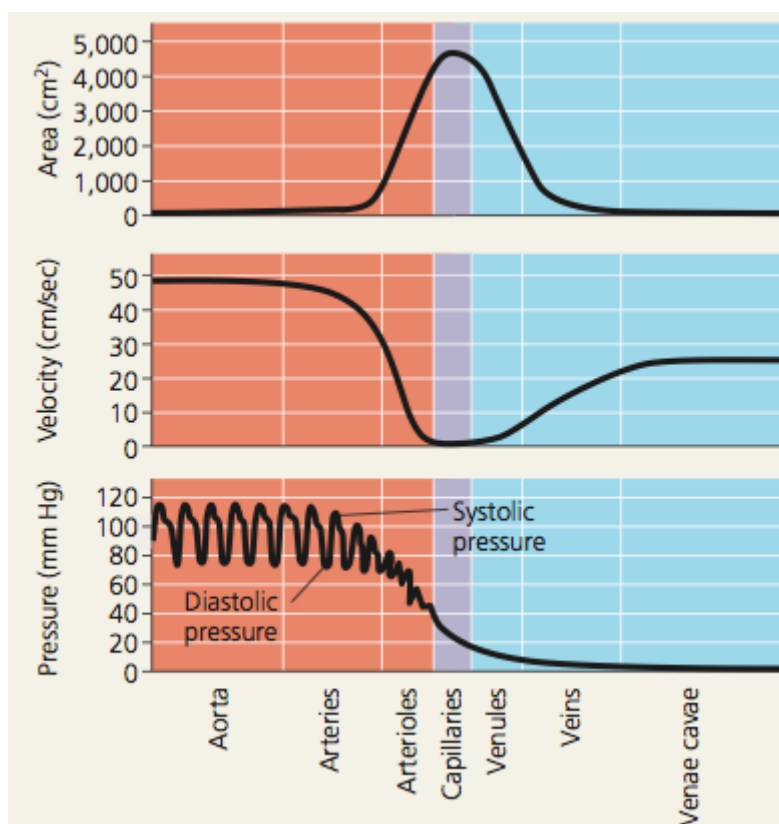
Cjelokupni volumen krvi je nejednoliko raspodijeljen u ljudskom tijelu. Oko 84 % cjelokupnog volumena se nalazi u sistemske cirkulaciji, od čega u venama 64 %, 13% u arterijama i 7% u kapilarama i arteriolama. Srce sadrži oko 7% ukupnog volumena dok ostalih 9% otpada na plućne žile.



Slika 1.4: Čovjekov krvožilni sustav [12]

U normalnom stanju srce pumpa krv s jačinom od 75 otkucaja po minuti, dok sam volumen krvi koji se za jednu minutu transportira iznosi približno 5 litara [9]. Ove veličine se s dobi postupno smanjuju. No, u stanju fizičkih napora srce može povećati broj otkucaja i na 150 po minuti, a ukupni protok može iznositi i 20 litara po minuti, odnosno 130 mililitara po otkucaju. Zbog vrlo različitih brzina otkucaja i volumenskog protoka, brzina strujanja krvi i tlak u krvnim žilama se uvelike mogu mijenjati. Pri normalnim uvjetima otkucaja srca, brzina strujanja krvi kroz velike žile kao što je aorta se kreće između vrijednosti od 40 odnosno 50 centimetara po sekundi, dok je za male krvne žile kao što su kapilare ona puno manja, i iznosi oko 0.3 mm/s. Kao i sama brzina i tlak koji se javlja u krvnim žilama se razlikuje od žile do žile. Pri normalnim uvjetima, pulsirajuće djelovanje srca inducira arterijski tlak koji oscilira između 120 mmHg i 80 mmHg. To je ujedno i najveći tlak koji se javlja u žilama (pri normalnim uvjetima). Baš kao i kod brzine, u manjim žilama tlak je bitno niži. Tako za kapilare on oscilira između 35 i 17 mmHg. U aorti i skoro svim arterijama tlak je pulsirajući, dok se za sve druge krvne žile on može smatrati konstantnim.

Sljedeća slika prikazuje ovisnost tlaka i brzine strujanja o vrsti krvnih žila u tijelu, te udio pojedinih krvnih žila u ukupnom poprečnom presjeku.



Slika 1.5: Tlakovi, brzine i udjeli krvnih žila u ukupnom poprečnom presjeku [9]

### 1.4.1 Fizikalna svojstva krvi

Kao što je u samom uvodu rečeno da je krv još samo jedan fluid, i zbog toga posjeduje određena fizikalna svojstva kao što su viskoznost, gustoća, toplinska provodnost i sl.

Krv se sastoji od dva osnovna dijela:

- Tekućeg – krvna plazma
- Krvnih stanica – leukocita, eritrocita i trombocita

Krvna plazma je bijela tekućina koja se većinom sastoji od vode ( oko 90% ) dok na ostalih 10% otpadaju proteini, glukoza i neke anorganske soli. Upravo zbog velikog udjela, krv i voda imaju određene sličnosti u fizikalnim svojstvima. Kada je riječ o krvnim stanicama, najveći utjecaj na fizikalna svojstva ( a pogotovo viskoznost ) imaju eritrociti koji u broju za nekoliko redova nadmašuju trombocite i leukocite.

Viskoznost i gustoća, kao dva glavna fizikalna svojstva potrebna za proračun strujanja ovise o nekoliko faktora.

Viskoznost krvi ovisi o sljedećih pet čimbenika :

- Razini hematokrita
- Deformiranošću eritrocita
- Viskoznosti plazme
- Skupljanju (lijepljenju) eritrocita
- Temperaturi

Razina hematokrita predstavlja ukupni postotak crvenih krvnih stanica ( eritrocita ) u krvi, i s njegovim porastom raste i sama viskoznost. Viskoznost će također rasti s povećanom deformiranošću i sljepljenošću eritrocita. To se pogotovo može osjetiti u vrlo uskim krvnim žilama kao što su kapilare, jer se zbog vrlo malog poprečnog presjeka eritrociti moraju deformirati i međusobno približiti jedan drugom što ima za rezultat povećanje viskoznosti. Iako sadrži oko 90% vode u sebi, plazma ima viskoznost koja se kreće između  $1.1$  i  $1.3 \cdot 10^{-6}$   $m^2/s$ , na takvu razliku najviše utječu proteini kao fibrinogen i imunoglobulin. Kao i s većinom fluida, i krv će imati manju viskoznost pri većim temperaturama. Istraživanja su pokazala da za svako povećanje temperature od  $1^\circ C$ , viskoznost krvi pada za 2%.

Gustoća krvi ovisi o tlaku i temperaturi. Ona nije toliko „osjetljiva „ kao što je to slučaj s viskoznošću. S povećanjem temperature gustoća krvi se smanjuje, dok se s povećanjem tlaka ona povećava. Ono što je zanimljivo jest činjenica da je gustoća krvi veća u slučaju da se osoba

nalazi u sjedećem položaju nego u stojećem ili ležećem. Razlog tome je viša razina tlaka koja se javlja u krvnim žilama, potrebna za normalnu cirkulaciju krvi. Naravno, ta promjena gustoće je zanemarivo mala i nikada se ne uzima u obzir.

Pri normalnoj razini hematokrita od 45% , vrijednosti temperature od 37°C, te za slučaj strujanja kroz krvne žile većeg poprečnog presjeka (aorta, donja šuplja vena i još neke) u kojima ne dolazi do bitnijeg skupljanja i deformiranja eritrocita za gustoću , kinematičku i dinamičku viskoznost krvi se mogu uzeti sljedeće vrijednosti

$$\begin{aligned}\rho &= 1060 \text{ kg/m}^3, \\ \nu &= 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \\ \mu &= \rho\nu = 4.24 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s.}\end{aligned}\tag{1.30}$$

Za potrebe ovog rada, vrijednosti fizikalnih svojstava odgovaraju vrijednostima pod (1.30). Njihova vrijednost će se uz zanemarivo narušavanje točnosti smatrati konstantnom, a razlog za to će biti dan u poglavlju 2.

### 1.4.2 Matematički model strujanja krvi

U ovom će se poglavlju prikazati implementacija mehanike fluida na problem strujanja krvi, tj. upotreba jednadžbi i određenih pretpostavki s ciljem matematičkog modeliranja strujanja krvi. S obzirom na to da je tema ovog rada strujanje u abdominalnoj aorti, arterije će biti jedine krvne žile za koje će biti prikazan matematički model.

Pretpostavke koje će biti prisutne prilikom samog modeliranja su sljedeće:

1. Tok krvi je pulsirajući, i samim time brzina i protok nisu konstantni tijekom jednog otkucaja srca, već se mijenjaju
2. Arterije se smatraju krutim cijevima koje se postupno sužavaju
3. Geometrija arterija je složena i sadrži suženja, zaobljenja i brojna grananja
4. U arterijama malog poprečnog presjeka viskoznost se može bitnije mijenjati, što nije slučaj kod arterija velikog poprečnog presjeka
5. Za velike arterije kao što je aorta, krv se može smatrati Newtonovskim fluidom i samim time vrijedi Newtonov zakon viskoznosti
6. Gustoća krvi se ne mijenja s vremenom
7. Samo strujanje je nestlačivo, podzvučno, nestacionarno i izotermičko

Uz svojstvene pretpostavke, strujanje krvi se može smatrati nestlačivim međutim, prisutnost pulsirajućeg strujanja sprječava mogućnost razmatranja toka krvi kroz arterije kao stacionarnog. Sama promjena protoka s vremenom je izuzetno nelinearna, slika 6., i zbog toga se mora uzeti u obzir prilikom modeliranja. Kod normalnog broja otkucaja (75/min) jedan puls ima vrijednost trajanja od 0.8 s. U tom vremenskom razdoblju protok i brzina doživljavaju svoje maksimalne i minimalne vrijednosti, slika 6 i 7.

Reynoldsov broj, koji se definira kao

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} = \frac{\text{inercijske sile}}{\text{viskozne sile}}, \quad (1.31)$$

također je funkcija vremena. S obzirom na to da vrijednost istog određuje prisutnost turbulentnog, odnosno laminarnog strujanja, sam problem može prelaziti iz jednog tipa strujanja u drugo. No, promjer abdominalne aorte (za koju će se i implementirati samo pulsirajuće strujanje) je približno 1.65 cm, dok maksimalna brzina tijekom jednog pulsa iznosi približno 42 cm/s, pa se za maksimalni Reynoldsov broj može pisati sljedeće

$$Re_{max} = \frac{1060 \cdot 0.0165 \cdot 0.42}{4.24 \cdot 10^{-3}} = 1732.5, \quad (1.32)$$

što je manje od kritične vrijednosti, odnosno  $Re_{kr} = 2300$  iznad koje strujanje u cijevi više nije laminarno već se smatra prijelaznim i samim time posjeduje karakteristike turbulentnog i laminarnog strujanja.

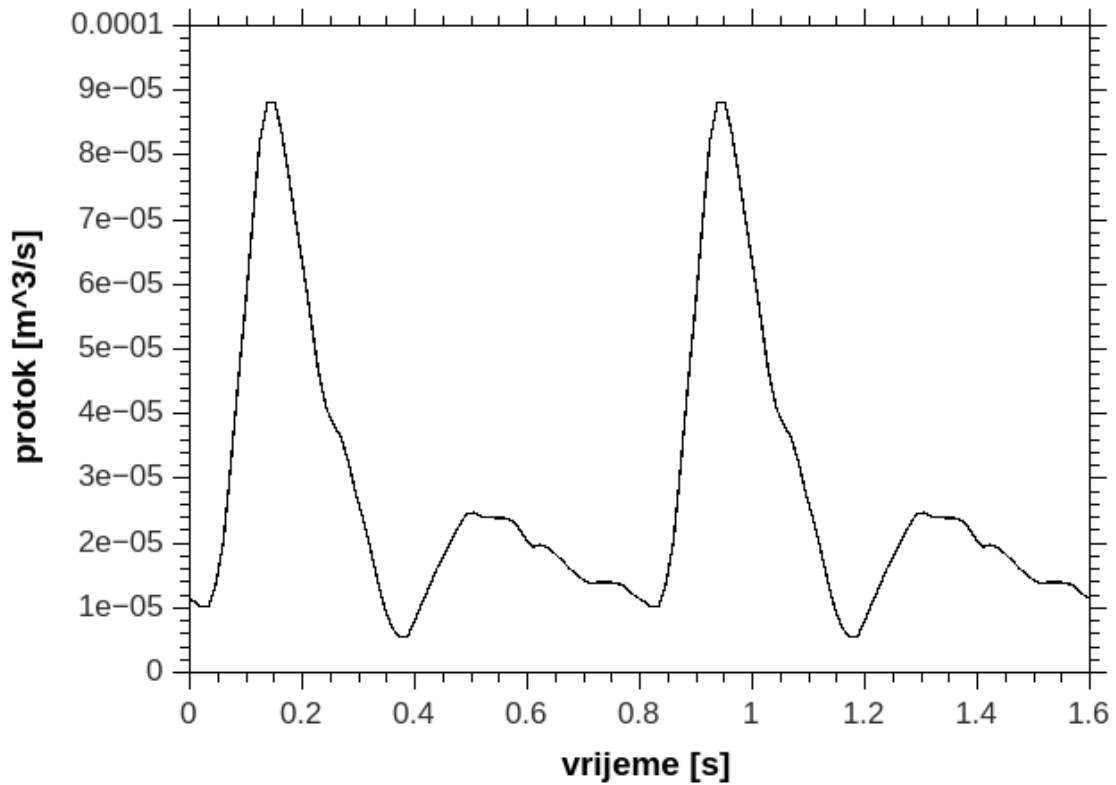
Proračun bi se naravno mogao provesti i pomoću srednje vrijednosti protoka krvi. Pri takvom načinu računanja strujanje se može smatrati stacionarnim i njegova se pulsirajuća priroda u potpunosti zanemaruje. Srednja vrijednost protoka se može dobiti integriranjem funkcije istog po vremenskom intervalu, tj.

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \int_0^{0.8} Q(t) dt, \quad (1.33)$$

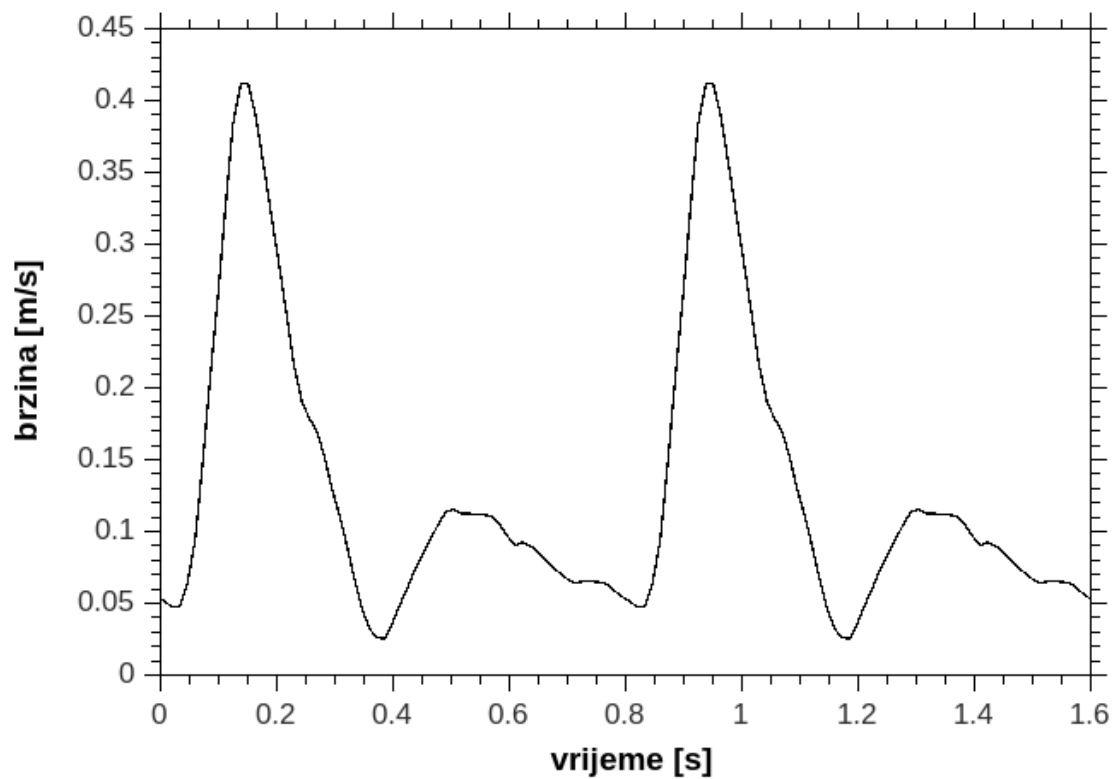
gdje je  $T$  vremenski period trajanje jednog pulsa i iznosi  $T = 0.8$  s. Ako se izraz (1.33) primjeni na funkciju protoka koja je prikazana grafom na slici 7, srednji protok iznosi

$$\bar{Q} = 2.834 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}. \quad (1.34)$$

U svrhu usporedbe, ovaj rad će obuhvaćati i proračun strujanja za slučaja konstantnog protoka, ali kako to nije glavni cilj, proračun će se izvršiti i usporediti samo s prva dva modela.



Slika 1.6: Promjena protoka uslijed pulsirajućeg strujanja za trajanje od dva pulsa

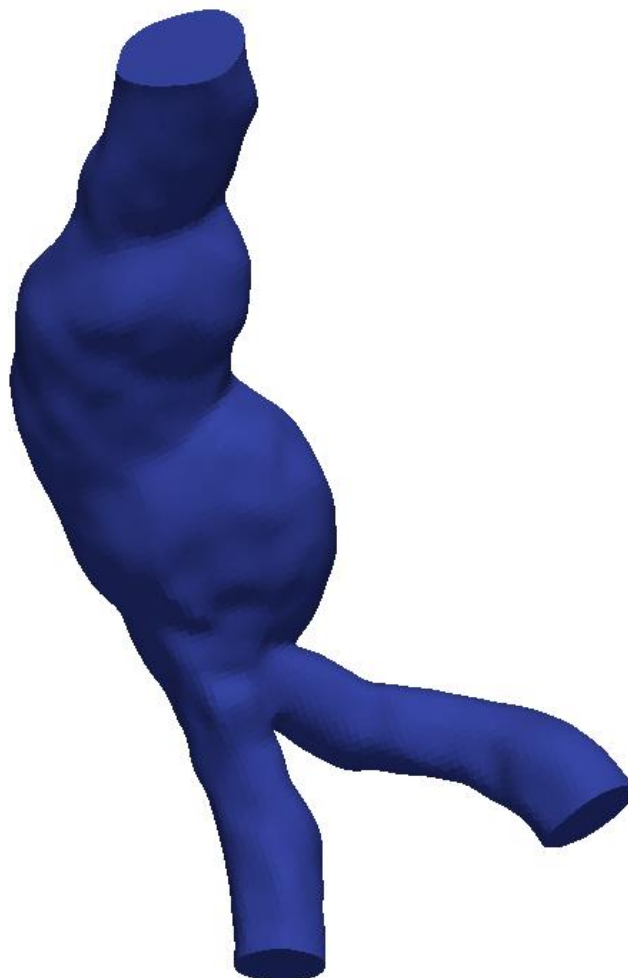


Slika 1.7: Vremenska promjena srednje brzine na ulaznoj granici u područje proračuna uslijed pulsirajućeg strujanja za trajanje od dva pulsa

Nelinearno ponašanje prilikom opterećenja, i vrlo složena geometrija samih arterija (i naravno svih krvnih žila) predstavljaju veliki problem pri modeliranju i proračunu strujanja ili samog naprežanja. Zbog toga se većina proračuna vrši na pojednostavljenim modelima oblika cilindra, slika 9, za koji se mogu primijeniti postojeći algoritmi i time dobiti zadovoljavajuća rješenja, a ne na stvarnim modelima, koje je danas moguće izraditi temeljem CT snimaka. Jedan takav model je prikazan na slici 10.



Slika 1.8: Pojednostavljena geometrija aneurizme abdominalne aorte [6]



Slika 1.9: Realna geometrija aneurizme abdominalne aorte

Oba modela predstavljaju unutarnji volumen u kojem se odvija strujanje krvi. U postupku pretprocesiranja to područje se dijeli na odgovarajući broj konačnih volumena.

Postupak generiranja mreže konačnih volumena na realnoj geometriji aneurizme abdominalne aorte, a i njezin izgled detaljno će se opisati u poglavlju 2.



U prethodnom poglavlju je bilo riječi o samoj viskoznosti krvi, koja je funkcija nekoliko parametara. Kod arterija malog poprečnog presjeka, „sljepljenost“ eritrocita osigurava veću vrijednost dinamičke, a samim time i kinematičke viskoznosti od vrijednosti navedenih pod (1.30).

Upravo „sljepljenost“ eritrocita utječe i na mogućnost razmatranja krvi kao Newtonovskog fluida.

Općenito se krv koja struji kroz arterije malog poprečnog presjeka nikada ne tretira kao Newtonovski fluid, te se za takav problem razvio niz modela, a jedan od najpoznatijih je Ostwald-de Waele model koji definira smično naprezanje kao

$$\tau = K \left( \frac{dv}{dy} \right)^n, \quad n > 0, \quad (1.35)$$

gdje  $K$  predstavlja koeficijent strujanja, a  $n$  index ponašanja toka.

Korisno je spomenuti još jedan model, a to je Cassanov, gdje se smično naprezanje definira na sljedeći način

$$\sqrt{\tau} = K \sqrt{\left( \frac{dv}{dy} \right)^2 + \tau_y}, \quad (1.36)$$

gdje  $\tau_y$  minimalna vrijednost smičnog naprezanja kod koje se pojavljuje strukturirano tečenje fluida.

Za slučaj strujanja u aorti – poprečnim presjekom najvećoj krvnoj žili u tijelu, međusobna „sljepljenosti“ i sama deformiranost eritrocita je minimalna. Prethodno naveden razlog omogućuje tretiranje krvi (i općenito u svim krvnim žilama većeg poprečnog presjek, a ne samo u aorti) kao Newtonovskog fluida. Za smično naprezanje kod Newtonovskih fluida vrijedi sljedeći izraz

$$\tau = \mu \left( \frac{dv}{dy} \right). \quad (1.37)$$

U prethodnom poglavlju je također bilo riječi o samoj gustoći krvi, koja se puno teže mijenja od viskoznosti, i zbog toga se u većini proračuna (kao što je slučaj i ovog rada) njena vrijednost tretira kao konstanta. Ako se to uzme u obzir onda izrazi (1.7) i (1.10) postaju

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.38)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}.$$

Ako se na jednadžbu količine gibanja primjeni Newtonov zakon viskoznosti koji nalaže linearnu vezu između tenzora naprezanja (smičnog tenzora) i tenzora brzine deformacije (simetričnog dijela gradijenta brzine), onda se može pisati

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji}. \quad (1.39)$$

Simetrični tenzor viskoznosti naprezanja ( uz pretpostavku izotropnosti fluida) je

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left( \mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji} = 2\mu D_{ji} + \left( \mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) D_{kk} \delta_{ji}. \quad (1.40)$$

Uvrštavanjem (38) u (37) dobiva se

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + 2\mu D_{ji} - \frac{2}{3}\mu D_{kk} \delta_{ji} + \mu_v D_{kk} \delta_{ji}. \quad (1.41)$$

Na kraju, ako se uzme slučaj nestlačivog strujanja, te uz zanemarivanje volumenske viskoznosti, izraz (1.36) postaje

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 2\mu D_{ji}. \quad (1.42)$$

Pomoću izraza (37) i (40) jednadžba količine gibanja poprima novi oblik, dok jednadžba kontinuitete ostaje nepromijenjena

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \quad (1.43)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

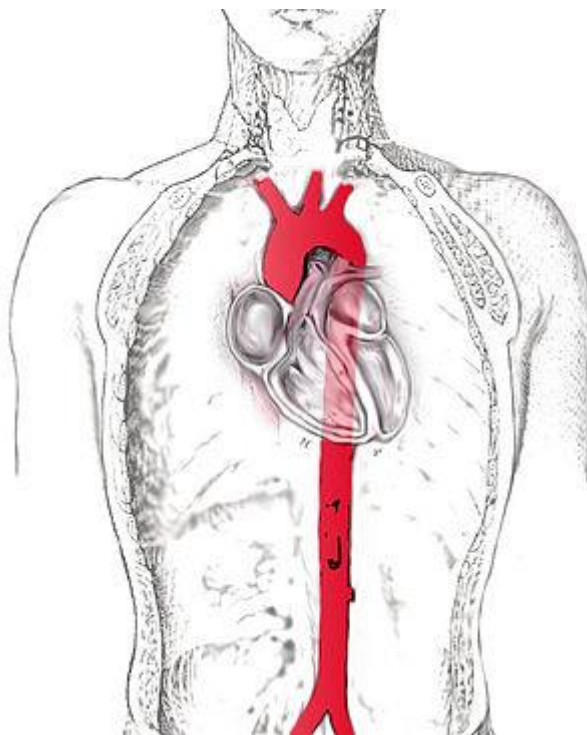
Sustav jednadžbi (1.34) predstavlja jednadžbe nestacionarnog i izotermnog strujanja Newtonovskog nestlačivog fluida konstantne viskoznosti. U skladu s pretpostavkama usvojenim na početku ovog poglavlja, ovo je ujedno i potpuni zapis matematičkog modela strujanja koje se primjenjuje u ovom radu.

## 1.5 Aneurizma abdominalne aorte

Aorta je najveća arterija u ljudskom tijelu. Ona je ujedno i najveća krvna žila koja izlazi iz lijeve klijetke srca a završava u abdomenu gdje se dijeli na dva ogranka – ilijačne arterije, slika 8.

Aorta se dijeli na tri osnovna dijela:

- Ulazna (ascendentna ) aorta- dio aorte od srca od luka aorte
- Luk aorte – vršni dio aorte koji izgleda poput slova u
- Silazna (descendentna) aorta – dio od luka aorte do dijeljenja aorte na dvije ilijačne arterije; sastoji se od dva dijela:
  - Torakalna aorta – dio silazne aorte iznad ošita
  - Abdominalna aorta – dio silazne aorte ispod ošita



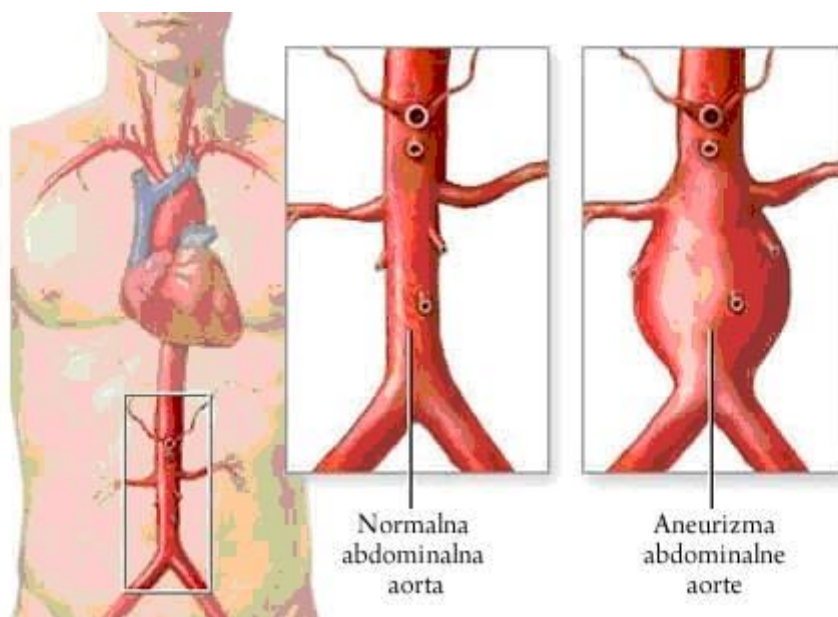
Slika 1.10: Ljudska aorta [10]

Pojam aneurizma predstavlja abnormalno lokalno proširenje krvnih žila ( arterija ili vena ).

Kako bi se definirala, fokalno proširenje krvnih žila mora iznositi bar 50% povećanja njenog normalnog promjera. Aneurizma je puno učestalija kod arterija, a najčešće zahvaća aortu i arterije na bazi mozga. Aneurizma se može javiti u bilo kojem dijelu aorte.

Kada se nalazi u gornjem dijelu aorte, naziva se torakalna ( grudna ) aneurizma. Puno češće se aneurizma formira u donjem dijelu aorte te se naziva aneurizma abdominalne aorte, slika 12.

Ako se aneurizma pojavi između gornjeg i donjeg dijela aorte, onda se govori o torakalno – abdominalnoj aneurizmi, što je vrlo rijetko.



Slika 1.11: Aneurizma abdominalne aorte [11]

Točan uzrok nastanka aneurizme abdominalne aorte još uvijek je nepoznat, ali se sa sigurnošću može tvrditi da pušenje, visok krvni tlak, te različite infekcije u aorti mogu povećati mogućnosti nastanka aneurizme. Aneurizme abdominalne aorte često rastu sporo i obično bez simptoma, pa ih je teško otkriti. Neke aneurizme nikada neće puknuti, a mnoge ostaju male, iako se mogu proširiti s vremenom. Aneurizme se mogu povećavati polako (manje od 1.2 centimetra godišnje), dok se druge šire bržim tempom, što povećava rizik od rupture. Istraživanja su pokazala da, iako je rizik od rupture zasigurno povezan s maksimalnim promjerom, korištenje samo tog pokazatelja za odlučivanje o odlasku na operaciju ne samo da može dovesti do nepotrebnih operativnih zahvata u slučaju stabilnih velikih aneurizmi, nego može isključiti neke potrebne (aneurizme promjera manjeg od 5 cm kod kojih je došlo do rupturu). Istraživanja su pokazale da u 10-24% slučajeva aneurizme manje od 5 cm dožive rupturu, ali i da 25-54% aneurizmi većih od 7,1 cm ne rupturira, što je pokazatelj izuzetne nelinearnosti samog problema.

Jedan od značajnih čimbenika koji se mora uzeti pri istraživanju aneurizme jest i intraluminalni tromb, koji se pojavljuje u gotovo 80% svih aneurizmi. On ima značajan utjecaj na biokemijske reakcije vezane uz kronične upale i na protok kisika kroz aortu. Sam razvoj i nastanak intraluminalnog tromba još uvijek je nepoznat, a današnja se istraživanja baziraju na

kombinaciji realnog modela ponašanja abdominalne aorte (slika 10) s modelom rasta i razvoja intraluminalnog tromba i praćenjem koncentracije pojedinih proteina nastalih u formiranju tromba, što se provodi na pojednostavljenim modelima (slika 9).

Prilikom strujanja kroz abdominalnu aortu stvara se određeno smično naprezanje koje utječe na sam nastanak tromba. Ukoliko naprezanje posjeduje dovoljno veliku vrijednost formiranje intraluminalnog tromba iščezava. Istraživanja su pokazala da je granična vrijednost iznad koje nema mogućnosti za nastanak tromba  $\tau = 0.4 \text{ N/m}^2$ . [6]

Osim smičnog naprezanja, sama slika strujanja također je bitan čimbenik koji se mora razmotriti. U aneurizmi je slika strujanja bitno drugačija u odnosu na zdravi dio abdominalne aorte, a uz različite kemijske i difuzijske procese tkivo abdominalne aorte nije ravnomjerno opskrbljeno kisikom što dovodi do postupnog slabljenja mehaničkih svojstava i samog odumiranja tkiva. Podatci koji se dobiju proračunom strujanja uvelike pomažu ka boljem razumijevanju mijenjanja i vjerojatnosti rupture aneurizme abdominalne aorte, što prije svega služi liječnicima kao crta vodilja u donošenju ispravnih odluka za pravilno liječenje ovog zdravstvenog problema.

## 2. Računalno modeliranje i simulacija strujanja

U odjeljku 1.3 je bilo riječi o osnovnim koracima numeričke simulacije i načinu njene provedbe. Ovo poglavlje obuhvaća detaljan opis prethodno navedenog.

Prije nego što se počne opisivati način modeliranja i simulacije strujanja, potrebno je jasno definirati o kakvom se strujanju radi. Iz prethodnih poglavlja se dakle izvodi zaključak, da je strujanje u abdominalnoj aorti nestacionarno, pulsirajuće, nestlačivo, izotermičko i laminarno. Vrijednosti fizikalnih svojstava krvi navedenih u (1.30) vrijede za normalnu razinu hematokrita od 45 % i za normalnu vrijednost temperature od 37°C. Bitno je istaknuti da se pojam aneurizme odnosi isključivo na abnormalno lokalno proširenje krvnih žila i zbog toga ne utječe na sastav, temperaturu i općenito na svojstva krvi. Iz prethodno navedenog razloga gustoća, kinematička i dinamička viskoznost krvi se smatraju konstantnima i kao takve ulaze u proračun.

Cijeli postupak modeliranja se može svesti na dva osnovna dijela, a to su:

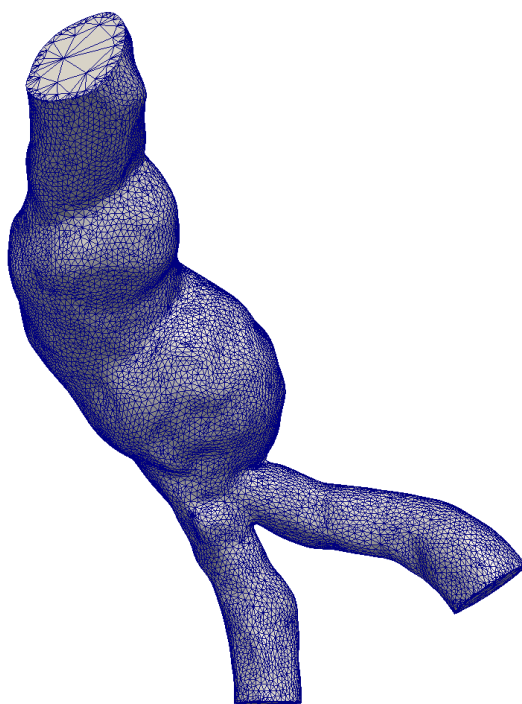
- a) Stvaranje, tj. generiranje mreže konačnih volumena
- b) Odabir numeričkog postupka i rubnih uvijeta prikladnih za rješavanje nestacionarnog pulsirajućeg strujanja fluida zadanih svojstava

Postupak pod a) i pod b) će se opisati u sljedeća dva potpoglavlja, i svaki od njih će se potkrijepiti odgovarajućim slikama. Kao što je i u samom sažetku rečeno, modeliranje i simulacija će se provesti na pet različitih modela koji predstavljaju povijest geometrije aorte prilikom nastanka aneurizme. Sa stajališta generiranja mreže konačnih volumena i implementacije rubnih uvjeta te pulsirajućeg strujanja, postupak za sve modele se provodi na identičan način. Zbog već navedenog razloga postupak računalnog modeliranja i same simulacije će se prikazati samo na prvom modelu.

Za potrebe usporedbe rezultata (o čemu je bilo riječi u odjeljku 1.4.2) provest će se još dva proračuna na prva dva geometrijska modela, gdje će se promjenjivi, tj. pulsirajući protok zamijeniti s konstantnim, osrednjenim protokom prema (1.34), gdje je strujanje modelirano kao stacionarno. Vrijednosti dobivene putem osrednjenog protoka na prva dva modela će se usporediti s vrijednostima dobivenim za pulsirajući protok, a njihova razlike (sličnosti) će se kratko prokomentirati.

## 2.1 Generiranje mreže konačnih volumena

Zadana stvarna geometrija krvne žile je izuzetno složena. Iz tog razloga programski paketi za generiranje mreže na geometrijskim oblicima koji se tipično pojavljuju u strojarskim konstrukcijama (poput paketa Salome) nisu pogodni. Mreže korištene u ovom radu napravljene su pomoću programskog paketa *cfMesh*, koji se temelji na biblioteci OpenFOAM paketa. Taj program omogućuje automatsko generiranje nestrukturiranih mreža određene kompleksnosti. Pošto je prvobitni geometrijski model abdominalne aorte zadani u obliku *STL* datoteke, nije moguće direktno krenuti s generiranjem mreže. Za početak će se *STL* datoteka otvoriti u programskom paketu ParaView, slika 13. Iz slike 13 je vidljivo da se model sastoji od mreže koju sačinjava određen broj trokuta. Kako bi se stvorio volumen s kojim će se moći generirati mreža i implementirati odgovarajući rubni uvjeti i pulsirajuće strujanje, potrebno je izlučiti odgovarajuće površine koje tvore zatvoreni volumen prikazan na slici 13. Ovome postupku je posvećena pažnja jer se u ovome koraku izravno određuju dijelovi geometrije koji će po dovršenom postupku diskretizacije predstavljati odvojene granice globalnog kontrolnog volumena na kojima se imaju zadati različiti rubni uvjeti.



Slika 2.1: *STL* model aneurizme abdominalne aorte

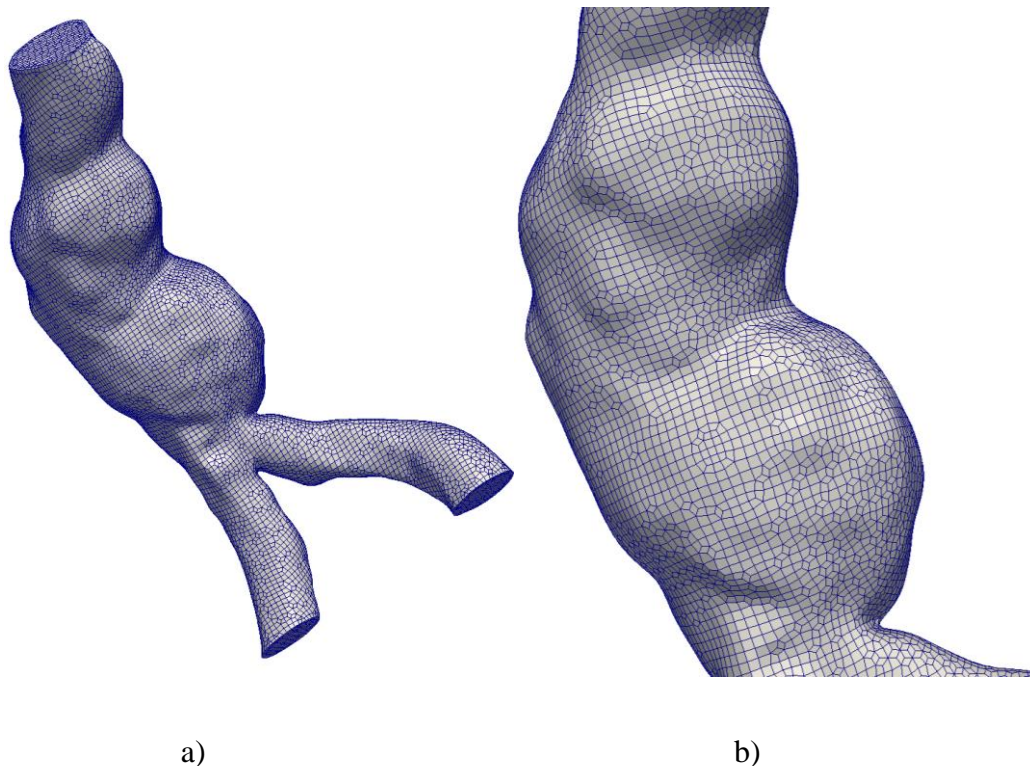
Ukupno četiri plohe ( površine ) tvore ovaj volumen – ulaz, stijenka i dva izlaza. Nazivi koji su se na kraju koristili su:

- ulaz – gornja (ravna) ulazna ploha, kroz koje ulazi fluid
- stijenka – zakrivljena ploha, ujedno sadrži najveći broj trokuta
- izlaz\_1 – lijevi izlaz, tj. ravna ploha na duljem ogranku
- izlaz\_d – desni izlaz, tj. ravna ploha na kraćem ogranku

Orijentacija ogranaka (lijevo – desno) je odabrana sa stajališta stvarnog položaja aorte u ljudskom tijelu, tj. „izlaz\_1“ predstavlja izlaz na ogranku koji krv vodi u lijevu nogu, dok „izlaz\_d“ izlaz na ogranku koji krv vodi u desnu nogu.

Nakon što su stvorene grupe ploha potrebno ih je pohraniti u obliku .vtk datoteka, kojima će se onda manipulirati putem tekstualnog komandnog sučelja i programa cfMes . Programski paket cfMesh koristi datoteku meshDict u kojoj su definirani parametri prostorne diskretizacije. Unutar datoteke meshDict definirane su željene veličine konačnih volumena u području geometrijskog modela i posebno u blizini pojedinih granica.

U ovom je radu generirano ukupno šest mreža, odnosno za svaki model po jedna. Mreže su hibridne s prevladavajućim heksaedarskim volumenima, te uz prisustvo trokutnih prizmi, poliedara te tetraedarskih i piramidalnih volumena kako bi se sačuvala definicija geometrije. Broj konačnih volumena iznosi približno 60000, a sljedeće dvije slike prikazuju površinski dio mreže konačnih volumena za prvi geometrijski model.



Slika 2.2: Prikaz mreže konačnih volumena:

a) za cijelokupni model, b) u području aneurizme



## 2.2 Implemetacija rubnih uvjeta i pulsirajućeg strujanja

Rubni uvjeti uvelike utječu na rješenja jednadžbi strujanja fluida. Upravo zato, vrlo je bitno pravilno odabrati rubne uvjete kako bi se dobila što realnija slika strujanja i osigurao konvergentan numerički postupak. Strujanje u abdominalnoj aorti zapravo predstavlja strujanje fluida (krvi) kroz cijev složene geometrije, pa će se zbog toga metodologija rješavanja strujanja fluida u cijevi moći primijeniti na ovaj problem.

Iz slika 13, tj. 14, je jasno vidljivo da se aorta grana na dva ogranka koji krv vode u desnu, tj. lijevu nogu. Iz tog razloga lijevi i desni izlaz moraju imati približno iste protoke, što će se osigurati nametanjem rubnog uvijeta jednakog tlaka na ovim granicama.

Kao što je već nekoliko puta rečeno strujanje je pulsirajuće, i zbog toga se ne može tretirati kao stacionarno, Protok i brzina se mijenjaju u vremenu i zbog toga na ulazu nije moguće zadati uniformnu vrijednost istih. U sklopu paketa OpenFOAM pronađen je pogodno osmišljen rubni uvjet kojim se brzinu na granici zadaje putem protoka uz dodatnu pogodnost variranja njegove vrijednosti po vremenskim trenucima. U ovome slučaju se raspodjela protoka u vremenu pogodno može zadati u obliku tekstualne datoteke. Radi preciznosti, uzet je vrlo fin vremenski korak od 0.013 sekundi. Sljedeća tablica daje jednostavan prikaz svih granica i rubnih uvjeta.

Naziv granice	Rubni uvjet	brzina	tlak
Ulaz	flowRateInletVelocity	$v_n = f(Q, t)$	$\frac{dp}{dn} = 0$
Stijenka	fixedValue	$v = (0,0,0)$	$\frac{dp}{dn} = 0$
Izlaz_l	pressureInletOutletVelocity	$\frac{dv_i}{dn} = 0$	$p = 0$
Izlaz_d	pressureInletOutletVelocity	$\frac{dv_i}{dn} = 0$	$p = 0$

Tablica 1. Granice i rubni uvjeti za prvi geometrijski model

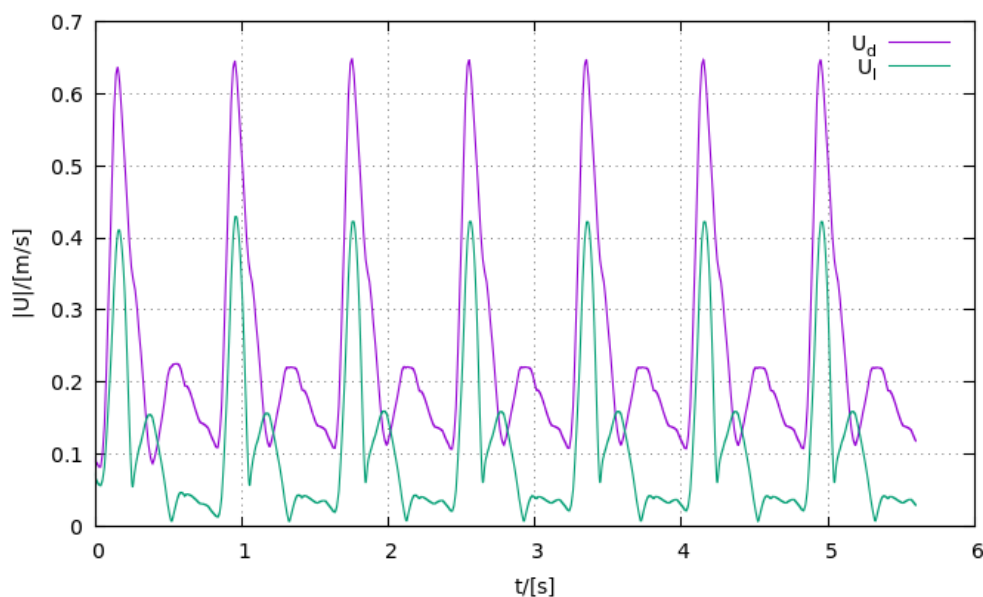
U oznakama u tablici 1,  $n$  ozačuje smjer vanjske normale pripadne granice. Za slučaj stacionarnog strujanja, tj. proračuna pomoću srednje vrijednosti protoka, rubni uvjet brzine je zadan putem konstantne vrijednosti protoka, prema izrazu (1.34).

## 2.3 Računalna simulacija

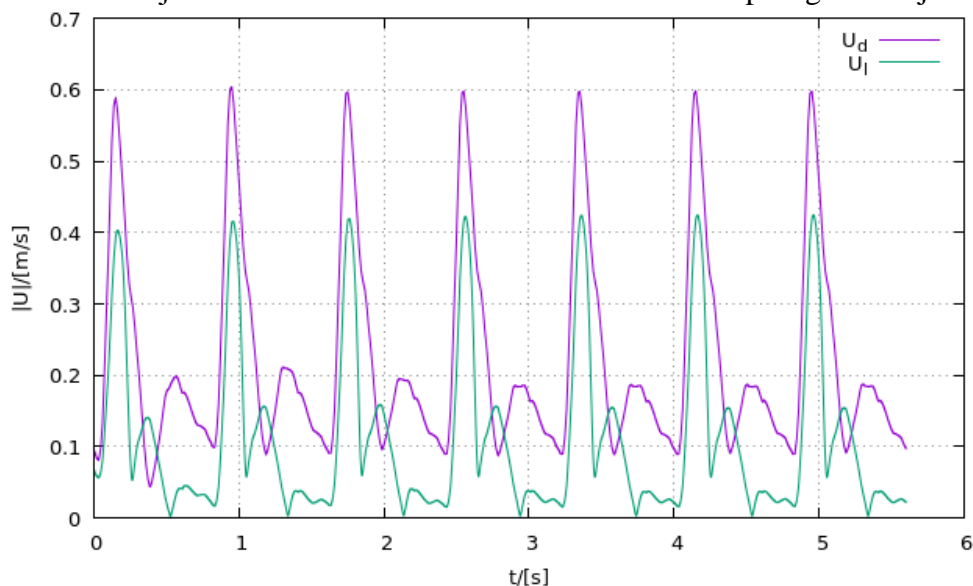
Proračuni strujanja u abdominalnoj aorti za pet zadanih modela izvedeni su pomoću slobodno dostupnog programskog paketa OpenFOAM. OpenFOAM (eng. „Open source Field Operation And Manipulation“) programski je paket za operacije nad skalarnim transportnim jednadžbama te omogućava efikasne proračune za kompleksne tipove strujanja fluida, prijenosa topline, kemijskih reakcija, turbulencije i dr. Jedna od glavnih značajki samog programa je postojanje velike biblioteke primjera koji se mogu vrlo lako promijeniti i prilagoditi tipu problema koji se analizira. Program također ima dobro svojstvo paralelizacije s kojom postiže skoro pa linearno skaliranje kod upotrebe više procesora.

U uvodnom dijelu poglavlja 2., je bilo riječi o samoj prirodi strujanja koje će se proračunavati. U svim provedenim proračunima, za prostornu diskretizaciju brzine korištena je linearna uzvodna shema koja je drugog reda točnosti. Pošto je strujanje nestacionarno, za izvršavanje proračuna koristio se program *pimpleFoam*, koji se izvršava kao SIMPLE postupak za nestacionarno strujanje. Tom prilikom nisu korišteni podrelaksacijski faktori.

Radi točnosti glavnih proračuna, s pulsirajućim protokom koristila se CRANCK-Nicholson metoda vremenske integracije koja je drugog reda točnosti uz vremenski korak od  $\Delta t = 10^{-4}$  s. Primjena ovog vremenskog koraka osigurala je izvođenje proračuna s najvećom vrijednosti Courantova broja 1-1.5. Podatci koje je bilo potrebno dobiti su polje brzine u unutrašnjosti i smična naprezanja na samoj stijenci abdominalne aorte. Prethodno spomenute podatke bilo je potrebno dobiti samo za trajanje jednog pulsa, a pošto se brzine na oba izlaza ne mogu odmah ustaliti, provedena su dva dopunska proračuna, s prethodno spomenutim vremenskim korakom integracije, na prva dva geometrijska modela, s ciljem određivanja broja pulseva koji su potrebni da polje brzine na izlaznim granicama dobije ciklički oblik, a to je jasno prikazano slikama 2.3., tj. 2.4.



Slika 2.3: Pulsirajuće brzine na izlazu iz abdominalne aorte za prvi geometrijski model



Slika 2.4: Pulsirajuće brzine na izlazu iz abdominalne aorte za drugi geometrijski model

Slike 15., tj. 16. pokazuju da se nakon prvih tri pulsa brzine na lijevom, odnosno desnom izlazu prestaju mijenjati, i zbog toga će se dobivene vrijednosti brzine i smičnog napreznjanja za sve geometrijske modele odnositi upravo na četvrti puls.

Pregledom slike 2.4. može se uočiti razlika u brzinama iskazanim za pojedinu izlaznu granicu. Uzrok ovome je dijelom u postojanju stvarne razlike u iznosima poprečnog presjeka arterije lijeve i desne noge i u geometriji koja se razlikuje spram geometrije zdravog čovjeka, a dijelom u tome što je riječ o očitanjima vrijednosti brzina s dvije proizvoljno odabrane točke na izlaznim granicama. Ova očitavanja služila su prvenstveno u svrhu ocjene konvergencije proračuna, gdje se razmatra njihova cikličnost, a ne i konkretan iznos.

### 3. Prikaz dobivenih rezultata i njihova analiza

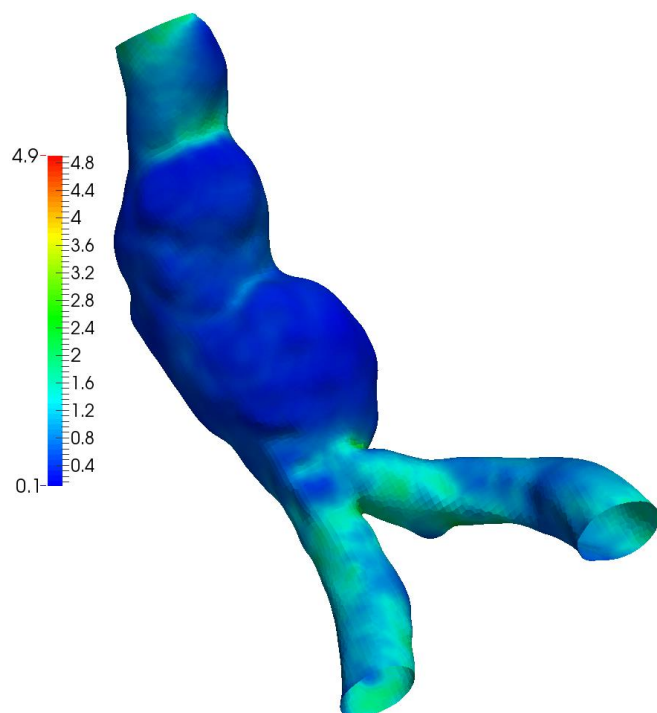
Pet geometrijskih modela aneurizmi abdominalne aorte koji su razmatrani u ovom radu predstavljaju postupnu promjenu veličine i oblika aneurizme abdominalne aorte jedne osobe kroz određeni period. Od prvog do petog modela aneurizma se sve više širila, tj. povećavala. Rezultati dobiveni ovim proračunom će dati sliku promjene smičnog naprezanja i same brzine u području aneurizme, te će samim time omogućiti bolje razumijevanje ponašanje i samog razvoja aneurizme.

Podatci dobiveni proračunom će se prikazati slikama i tablično. Strujanje je nestacionarno i zbog toga su u rezultatima dane isključivo prosječne vrijednosti traženih veličina.

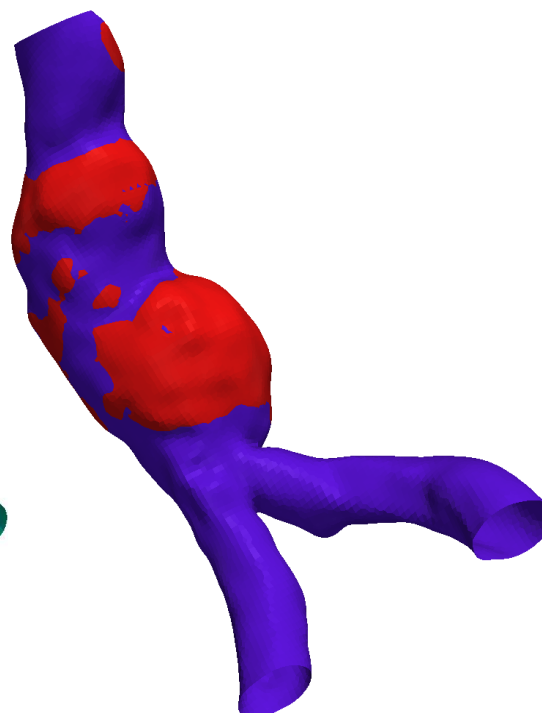
#### 3.1 Smično naprezanje

Prvi dio rezultata koji će se analizirati su smična naprezanja. Detaljniji opis aneurizme abdominalne aorte je bio dan u odjeljku 1.5. U njemu se također spominjao utjecaj smičnog naprezanja, te je bilo rečeno da jedan pojednostavljeni model nastanka intraluminalnog tromba uzima iznos tangencijalnih naprezanja na stijenci od  $\tau = 0.4$  Pa kao kriterij za nastajanje tromba.

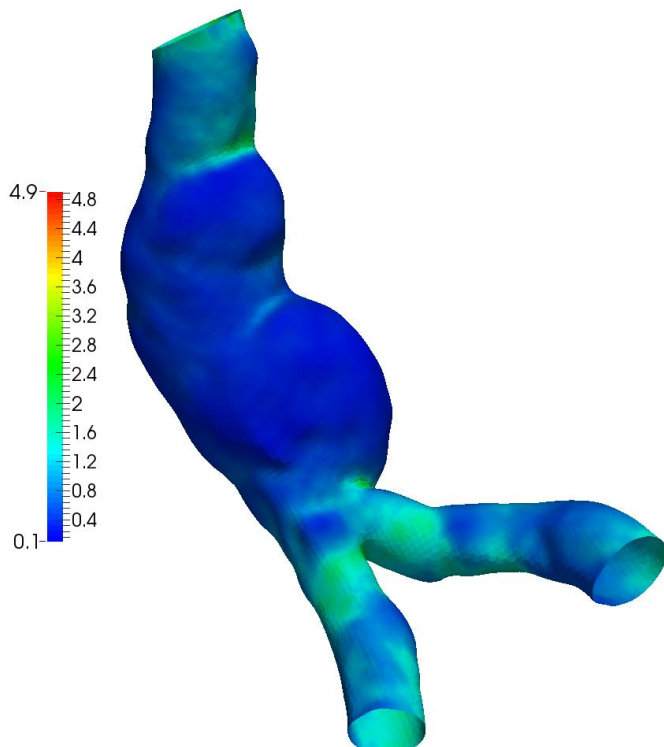
Za svaki od pet geometrijskih modela su dane po dvije slike. Prva slika prikazuje raspodjelu prosječnog smičnog naprezanja po stijenci žile, dok druga slika prikazuje područje stijenke koje je zahvaćene s naprezanjem manjim od 0.4 Pa, (crvena), na kojem postoji mogućnost nastanka intraluminalnog tromba, i područje stijenke koje trpi smična naprezanja  $\tau \geq 0.4$  N/m<sup>2</sup> (plava). U svrhu prikaza rezultat u nastavku teksta uvode se oznake za dva područja vrijednosti smičnih naprezanja na stijenci. Smična naprezanja čije vrijednosti ne prelaze 0.4 Pa će se označiti s  $\tau_t$ , dok će se naprezanja za koje vrijedi  $\tau \geq 0.4$  N/m<sup>2</sup> označiti s  $\tau_s$ .



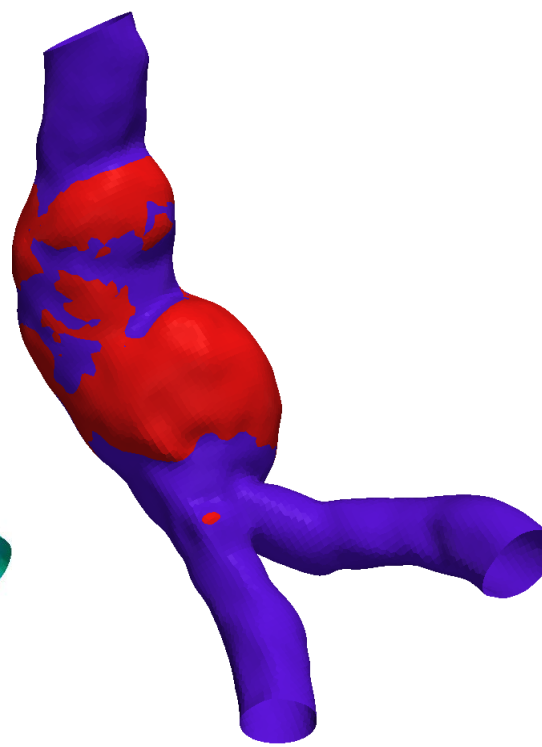
Slika 3.1: Prosječno smično naprezanje za prvi geometrijski model



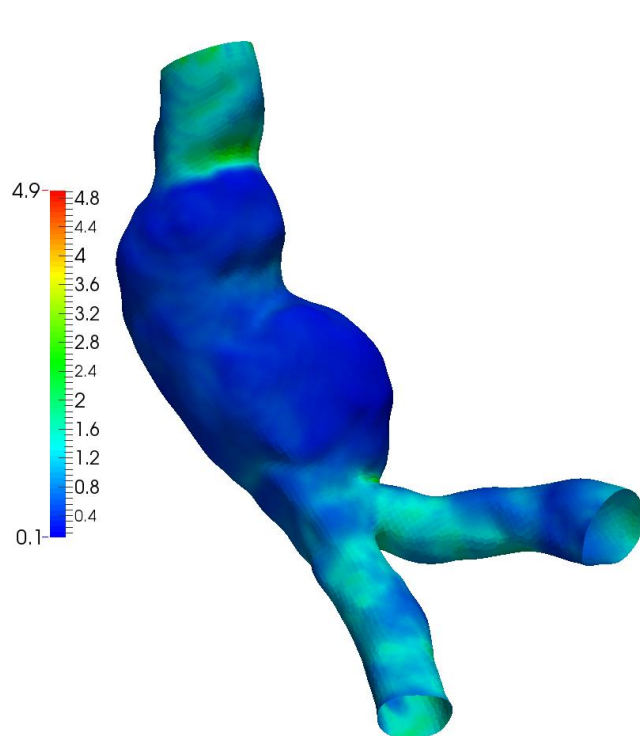
Slika 3.2: Raspodjela  $\tau_t$  i  $\tau_s$  za prvi geometrijski model



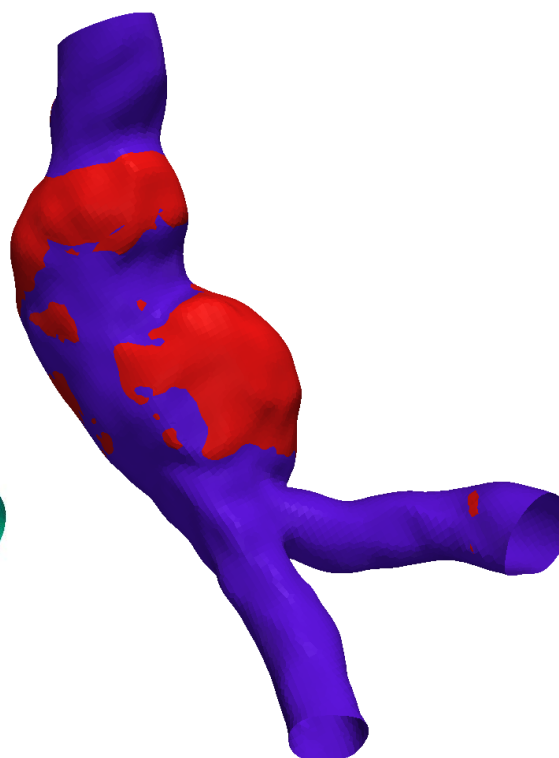
Slika 3.3: Prosječno smično naprezanje za drugi geometrijski model



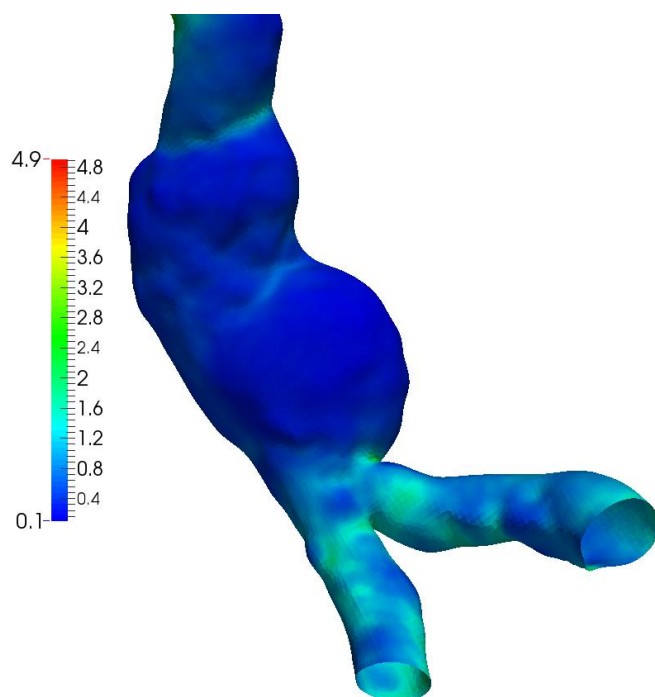
Slika 3.4: Raspodjela  $\tau_t$  i  $\tau_s$  za drugi geometrijski model



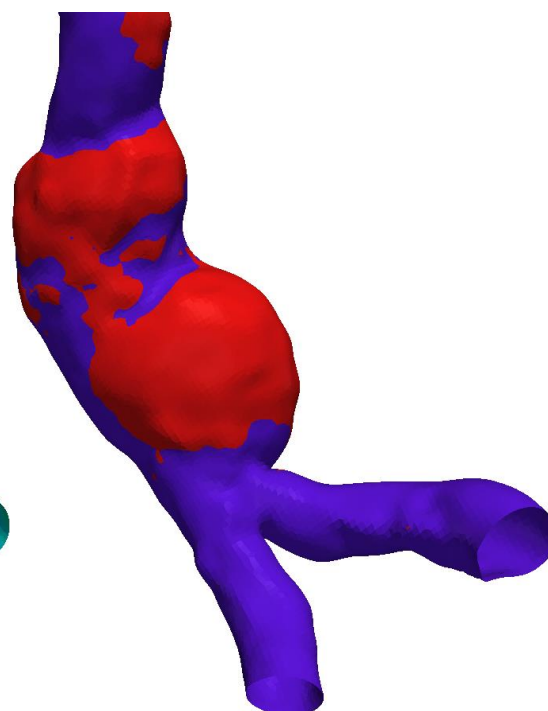
Slika 3.5: Prosječno smično naprezanje za treći geometrijski model



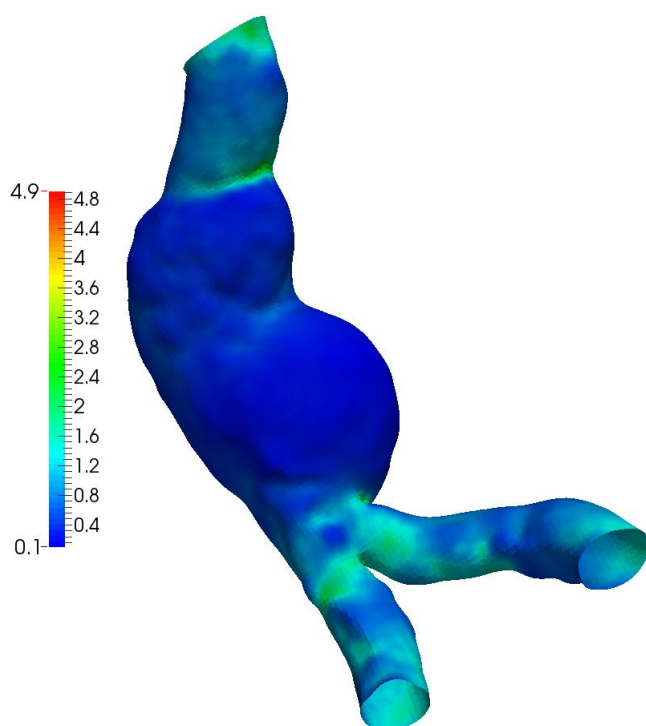
Slika 3.6: Raspodjela  $\tau_t$  i  $\tau_s$  za treći geometrijski model



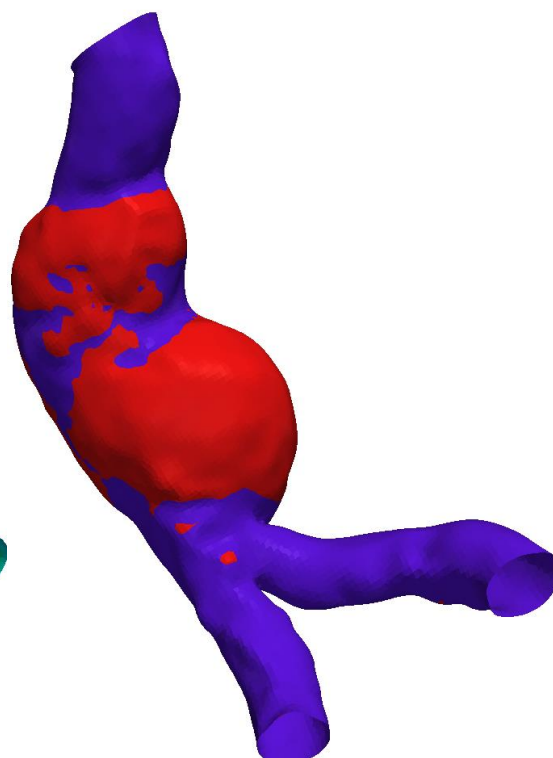
Slika 3.7: Prosječno smično naprezanje za četvrti geometrijski model



Slika 3.8: Raspodjela  $\tau_t$  i  $\tau_s$  za četvrti geometrijski model



Slika 3.9: Prosječno smično naprezanje za peti geometrijski model



Slika 3.10: Raspodjela  $\tau_t$  i  $\tau_s$  za peti geometrijski model

Prikazani slijed slika 3.1 – 3.10 pokazuje promjenu srednjeg tangencijalnog naprezanja na stijenci s rastom aneurizme, gdje su usporedno dodatno označena područja  $\tau_t$  i  $\tau_s$ . Slijed pokazuje kako se rastom aneurizme povećava i područje  $\tau_t$  – ono koje je pogodno za nastanak i rast tromba. Prikazani porast područja  $\tau_t$  – područja u kojem je prosječno naprezanje manje od 0.4 Pa numerički je iskazan u tablici 2.

Geometrijski modeli aneurizme	Iznos površine zahvaćene s $\tau_t$ , [m <sup>2</sup> ]
1.	0.003046
2.	0.003167
3.	0.003508
4.	0.004214
5.	0.004959

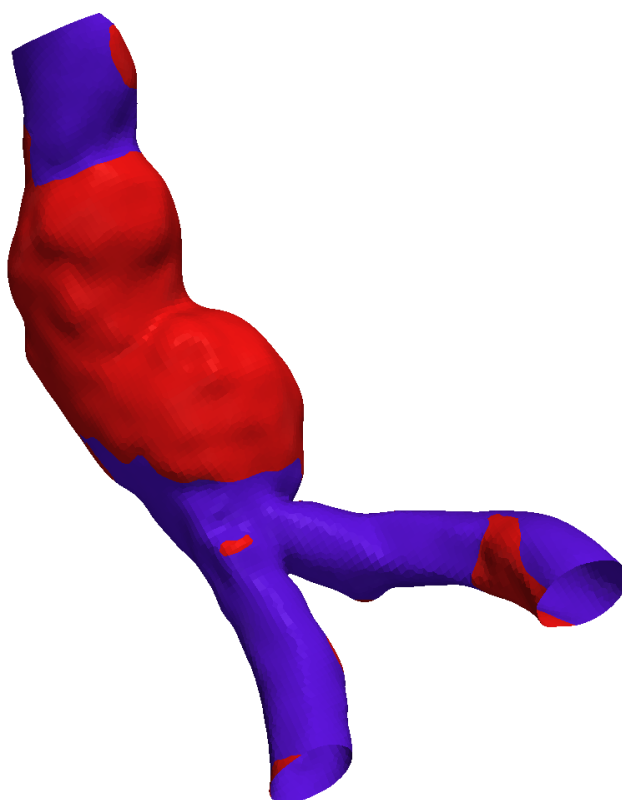
Tablica 2: Iznosi površina zahvaćenim s  $\tau_t$  za svih pet geometrijskih modela

Iz dobivenih se rezultata može zaključiti da svako povećanje aneurizme nužno dovodi do povećanja mogućnosti nastanka intraluminalnog tromba, razlog niskim vrijednostima smičnog

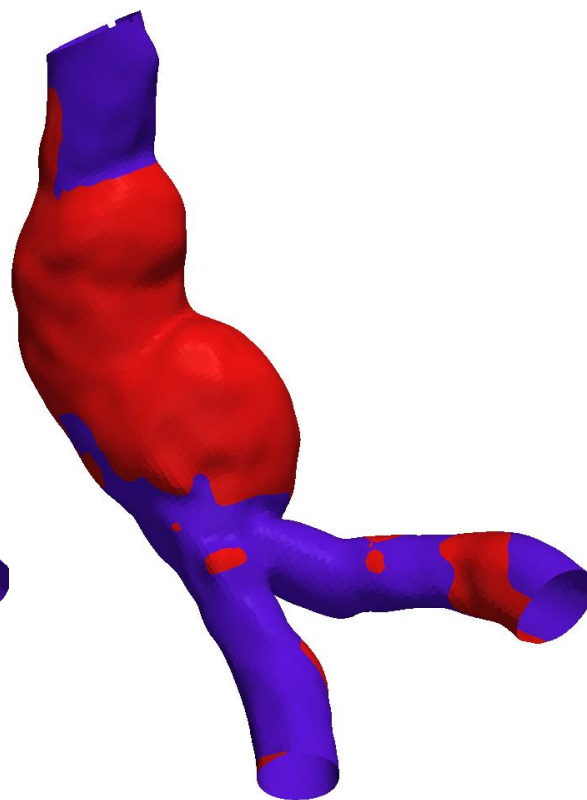
Naprezanja na stijenkama, objasniti će se u osvrtu na srednje polje brzine u poglavlju 3.2.

### 3.1.1 Usporedba smičnih naprezanja za slučaj stacionarnog i nestacionarnog strujanja

Prije nego što se počne govoriti o slici strujnica i polju brzine u području aneurizme, prikazat će se vrijednosti smičnih naprezanja i površina zahvaćenih sa  $\tau_t$  za prva dva geometrijska modela, dobivene putem stacionarnog modela strujanja. općenito, proračuni koji se izvršavaju na finijoj prostornoj diskretizaciji uz povećani broj konačnih volumena podrazumijevaju i smanjivanje vremenskog koraka u metodi vremenske integracije radi osiguravanja odgovarajuće točnosti. Ovo uz povećanje potrebnog memorijskog prostora, dovodi i do znatnog povećanja potrebnog računalnog vremena potrebnog za dovršenje proračuna. Stoga su u ovome radu provedena i dva proračuna stacionarnog strujanja sa svrhom usporedbe s rezultatim realnog nestacionarnog modela.



Slika 3.11: Raspodjela  $\tau_t$  i  $\tau_s$  za prvi geometrijski model – stacionarno strujanje



Slika 3.12: Raspodjela  $\tau_t$  i  $\tau_s$  za drugi geometrijski model – stacionarno strujanje



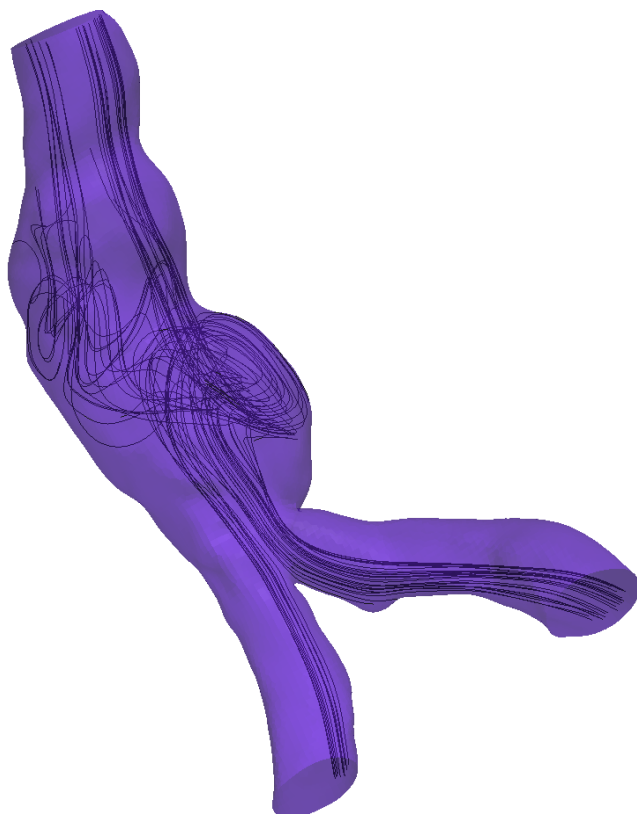
Već iz samih slika nije teško zaključiti da proračun proveden uz pretpostavku stacionarnog strujanja u abdominalnoj aorti ne daje ni približno točna rješenja, što pokazuje i tablica 3. To dovodi do zaključka da se brzina, tj. protok u slučaju pulsirajućeg strujanja koje je prisutno u arterijama i srcu, nikako ne može osrednjiti po vremenu, već se utjecaj nestacionarnog člana u jednadžbama količine gibanja, tj. nestacionarnost rješenja ne smiju zanemariti.

Geometrijski modeli aneurizme	Iznos površine zahvaćene s $\tau_t$ , [m <sup>2</sup> ]	
	Stacionarno strujanje	Nestacionarno strujanje
1.	0.004731	0.003046
2.	0.005082	0.003167

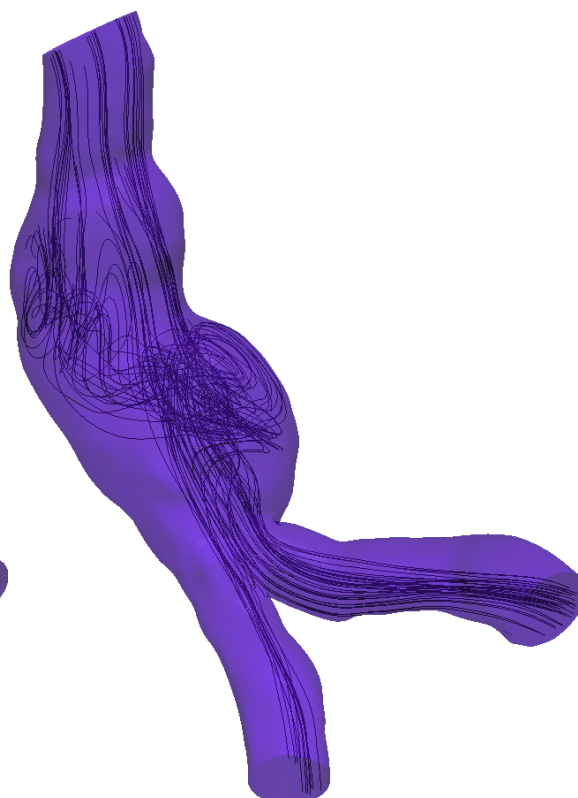
Tablica 3: Usporedba rješenja za stacionarno i nestacionarno strujanje

### 3.2 Profili brzina

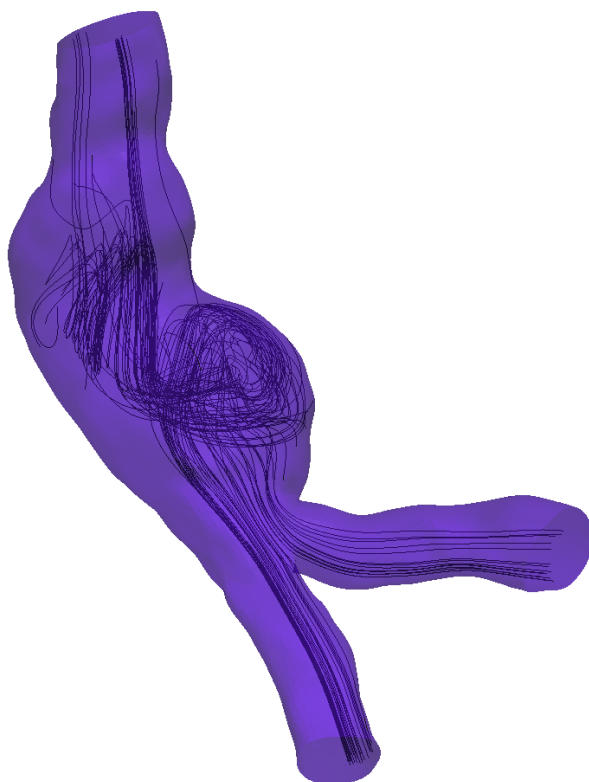
Profil brzina ima direktan utjecaj na vrijednosti smičnih naprezanja, a o tome govori i sam Newtonov zakon viskoznosti, tj. izraz (1.37). Povećanjem gradijenta brzine, dolazi i do povećanja smičnog naprezanja i zbog toga je potrebno ustanoviti kakvo polje brzine vlada u području same aneurizme, kojom se brzinom mijenja to polje i kakva je općenito slika strujanja u samoj aneurizmi. Zbog toga će se za svaki model dati slika samih strujnica i polja brzina. Iz slika će biti vidljivo zašto s vremenom dolazi do sve manjeg naprezanja u samoj aneurizmi, i povećanja površine zahvaćene naprezanjem  $\tau_t$ .



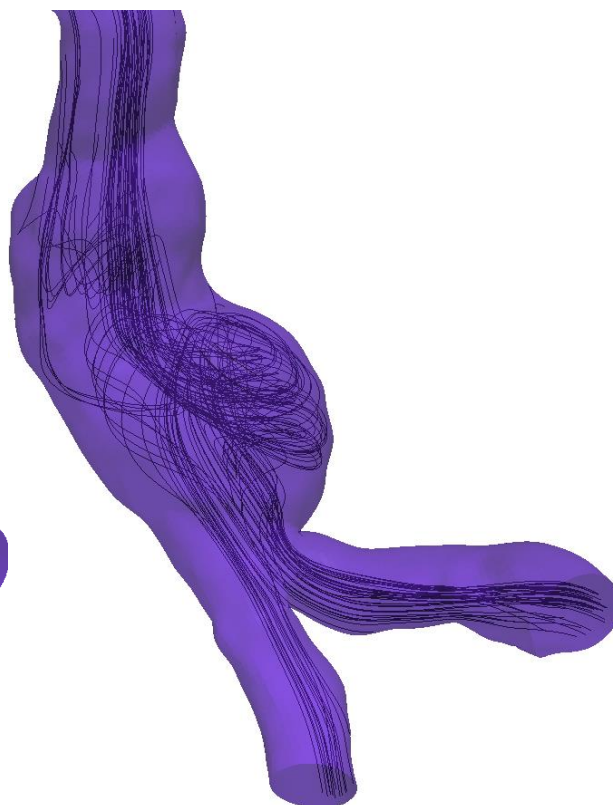
Slika 3.13: Izgled strujnica za prvi geometrijski model



Slika 3.14: Izgled strujnica za drugi geometrijski model



Slika 3.15: Izgled strujnica za treći geometrijski model



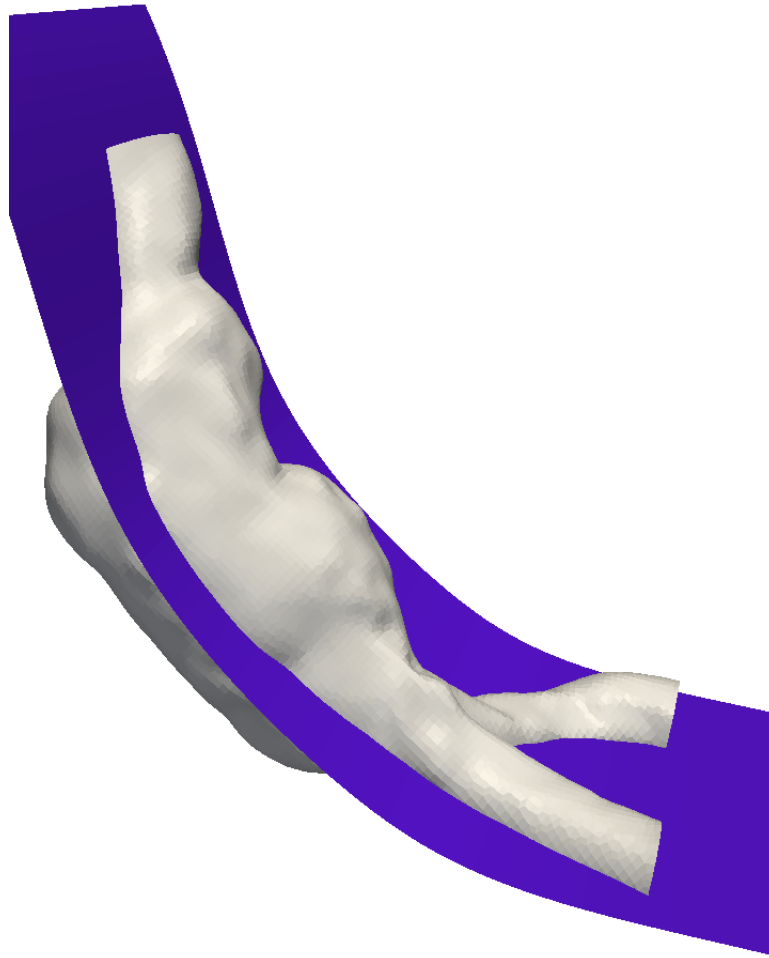
Slika 3.16: Izgled strujnica za četvrti geometrijski model



Slika 3.17: Izgled strujnica za peti geometrijski model

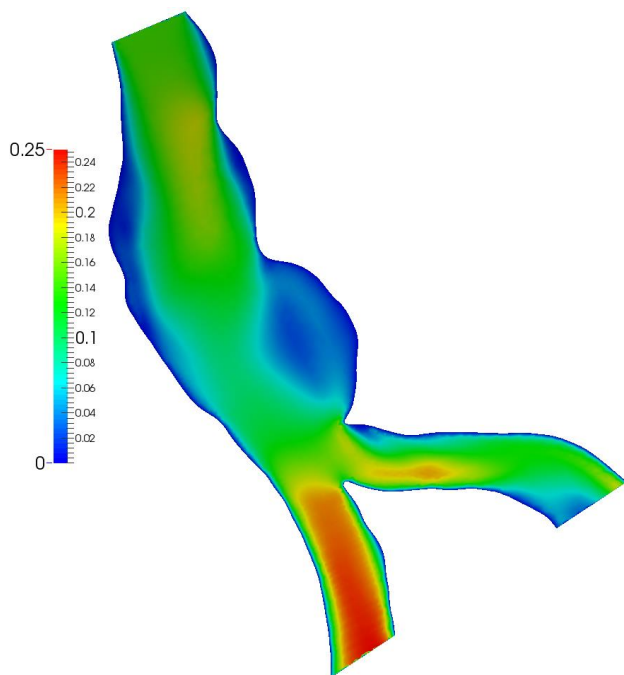
Proširenje kanala pojavom aneurizme i nestacionarno strujanje uzrokuju natražno strujanje u okolišu mlaza krvi u kojemu su brzine ali i njezini gradijenti (što će se pokazati slikama u nastavku) puno manji nego u mlazu, pa su zbog ovog tangencijalna naprezanja u području aneurizme u kojoj se i dovija recirkulacija puno manja. Upravo u ovoj činjenici leži razlog niskog tangencijalnog naprezanja i povećane mogućnosti nastanka intraluminalnog tromba u području aneurizme.

U sklopu ovog poglavlja, prikazat će se i samo polje brzina. Pošto je na samoj stijenci brzina u svim smjerovima jednaka nuli, za dobivanja kvalitetne slike polja brzina potrebno je napraviti presjek same aorte. No, zbog složene geometrije to predstavlja problem, jer se presjek cijele aorte ne može dobiti ravnom ravninom već isključivo zakrivljenom, slika 3.18.

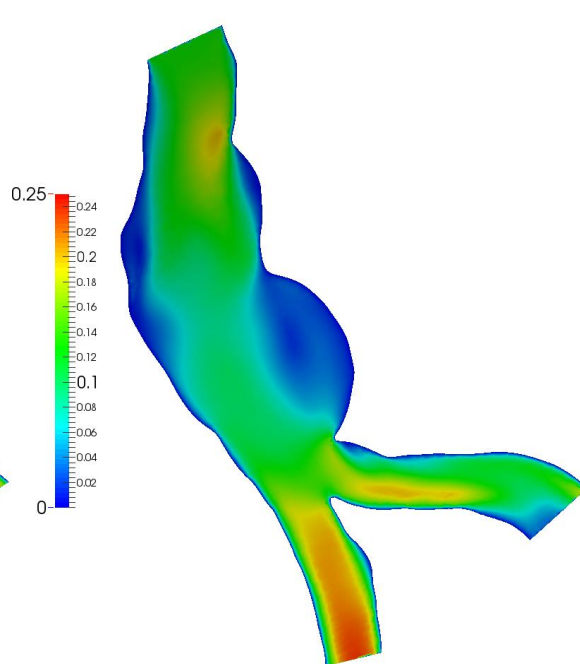


Slika 3.18: Presjek zakrivljenom ravninom

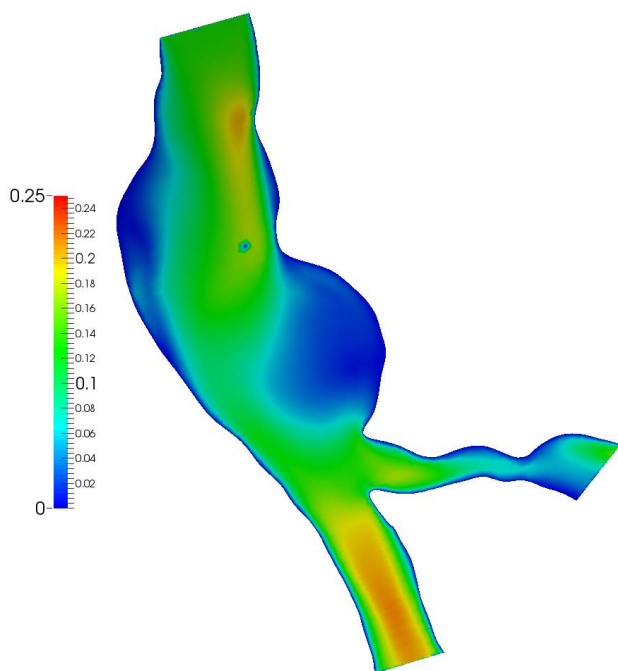
Idealno zakrivljenu ravninu koja bi točno po sredini presjecala geometrijski model izrazito je teško napraviti, ali nužan i dovoljan uvjet za prikazivanje polja brzine jest taj da zakrivljena ravnina presječe aneurizmu približno na njenoj polovici, što je i postignuto.



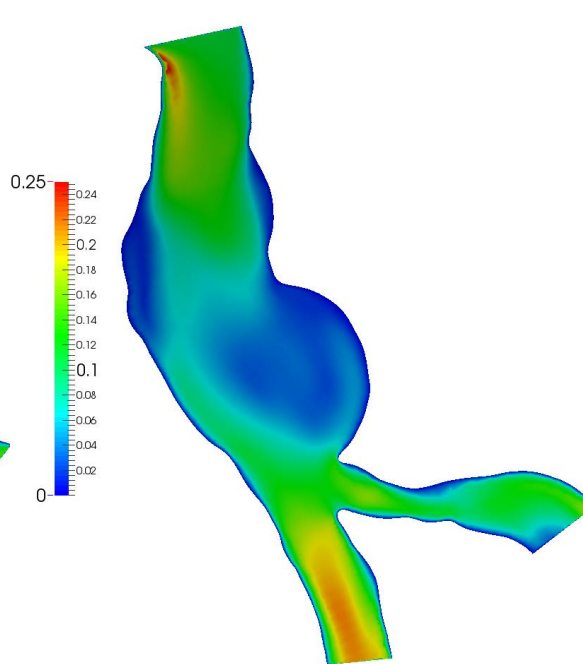
Slika 3.19: Polje brzine za prvi geometrijski model



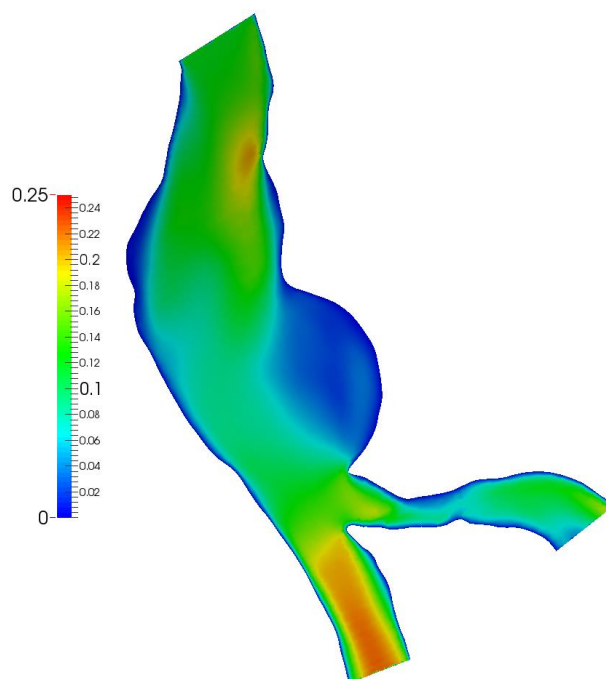
Slika 3.20: Polje brzine za drugi geometrijski model



Slika 3.21: Polje brzine za treći geometrijski model



Slika 3.22: Polje brzine za četvrti geometrijski model



Slika 3.23: Polje brzine za peti geometrijski model

Slike polja brzina za sve geometrijske modele pokazuju da se u području aneurizme javljaju male vrijednosti brzina i gradijenata istih, što je i bilo za očekivati.

## **Zaključak**

Područje biomehanike relativno je novo, ali se razvija velikom brzinom. Za to je djelomično odgovorna populacija ljudi kojoj bi se napretkom ove grane strojarstva mogla poboljšati kvaliteta života te, intenzivan napredak novih algoritama i numeričkog modeliranja fizikalnih procesa. Iako se na tom području intenzivno radi još uvijek postoje velike mogućnosti za napredak i nova otkrića.

Zbog izrazite kompleksnosti, za bolje razumijevanje rasta i razvoja aneurizme abdominalne aorte potrebno je provesti još puno numeričkih simulacija naprezanja stijenke i strujanja krvi. Ovaj rad daje djelomičnu sliku utjecaja krvi, tj. njenog strujanja na aneurizmu i može poslužiti kao vodilja za daljnje proračune naprezanja i deformacija u samoj aneurizmi.

Uvidom u kompleksnost problematike ljudske fiziologije i patologije, inženjeri nalaze sve više prostora za implementaciju numeričkih metoda u konvencionalnu medicinsku dijagnostiku i terapiju te rade za napredak obje znanosti, a i čovječanstva općenito.

## Literatura

- [1.] Virag, Z., Džijan, I.: Računalna dinamika fluida, Zagreb 2014
- [2.] Virag, Z.: Dinamika plinova, Zagreb 2013
- [3.] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I.: Mehanika fluida 2, Zagreb 2015
- [4.] Elad, D., Einav, S.: Physical and flow properties of blood, Tel Aviv 2004
- [5.] van de Vosse, F., N., van Dongen, M., E., H.: Cardiovascular fluid mechanics, Eindhoven 1998
- [6.] Horvat, N., Zambrano, B., Beak, S., Karšaj, I.: Numerical model of fluid solid growth in abdominal aortic aneurysm, 2017
- [7.] Karšaj, I.: Trodimenzijski materijalni model razvoja aneurizme abdominalne aorte, Zagreb 2013
- [8.] Sorić, J.: Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Zagreb 2009
- [9.] <http://biology.stackexchange.com/questions/36443/how-does-bernoulli-s-principle-apply-to-the-cardiovascular-system>
- [10.] Gray, H.: Anatomy of the human body, Baltimore
- [11.] <http://www.zzzjzpgz.hr/nzl/80/aorta.htm>
- [12.] [https://en.wikipedia.org/wiki/Circulatory\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Circulatory_system)
- [13.] <http://www.ansys.com/zh-CN/products/fluids/better-faster-prep-and-meshing-in-cfd>



## **Prilozi**

- [1.] CD – R disc