Sustav upravljanja smjerom leta bespilotne letjelice konfiguracije letećeg krila

Mičuga, Hrvoje

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:762020

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Hrvoje Mičuga

Zagreb, 2016.

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Sustav upravljanja smjerom leta bespilotne letjelice konfiguracije letećeg krila

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Student:
Hrvoje Mičuga

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr. sc. Milanu Vrdoljaku na pomoći u svakoj fazi izrade rada, te na korisnim savjetima stručne i organizacijske prirode. Također, zahvaljujem se obitelji na podršci tijekom studija, bez njih ne bih uspio.

Izjava

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, srpanj 2016. Hrvoje Mičuga

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Hrvoje Mičuga** Mat. br.: 0035168136

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Sustav upravljanja smjerom leta bespilotne letjelice konfiguracije letećeg krila**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Direction Control System for Unmanned Aircraft with Flying Wing Configuration**

Opis zadatka:

Jedna je od osnovnih zadaća autopilota bespilotne letjelice osigurati njen let u zadanom smjeru, u praksi najčešće definiran navigacijskom rutom, odnosno nizom navigacijskih točaka (engl. *waypoints*). Takav sustav, kao unutrašnju petlju uobičajeno ima sustav stabilizacije valjanja.

U radu se analizira bespilotna letjelica nekonvencionalne konfiguracije letećeg krila s potencijalnom misijom nadzora za što je bitan sustav upravljanja po smjeru leta. Za poznati linearni model bočnog gibanja letjelice moguće je provesti sintezu i analizu sustava vođenja po smjeru leta.

Za bespilotnu letjelicu poznate konfiguracije letećeg krila potrebno je:

- odrediti sve potrebne geometrijske i inercijske značajke,
- procijeniti potrebne aerodinamičke koeficijente,
- napraviti linearni model bočnog gibanja letjelice,
- napraviti sustav stabilizacije bočnog gibanja,
- napraviti sustav upravljanja smjerom leta.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan: 5. svibnja 2016.

Rok predaje rada: 7. srpnja 2016.

Predviđeni datumi obrane: 13., 14. i 15. srpnja 2016.

Zadatak zadao: Izv. prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Predsjednik Povjerenstva: Prof. dr. sc. Ivica Smojver

Sadržaj

Sadržaj v

Popis slika vii

Popis tablica x

Popis oznaka xi

Sažetak xiii

Summary xiv

1. Uvod 1

2. Geometrijske karakteristike letjelice 3

2.1. Osnovni podaci o letjelici . . . 3

2.2. Podaci o motoru i propeleru . . . 4

2.3. Krilo letjelice . . . 6

2.3.1. Geometrijske i aerodinamičke karakteristike profila . . . 6

2.4. Geometrijske karakteristike trupa . . . 7

2.5. Masa letjelice . . . 8

2.5.1. Tenzor inercije . . . 9

3. Aerodinamički model letjelice 10

3.1. Definiranje aerodinamičkih koeficijenata . . . 10

3.2. Procjena aerodinamičkih koeficijenata metodom projektne aerodinamike 12
3.3. Procjena otpora . . . 12
3.3.1. Otpor krila . . . 12
3.3.2. Otpor trupa . . . 13
3.4. Rezultati analize . . . 13
3.5. Procjena aerodinamičkih koeficijenata u programskom paketu XFLR5 . . 14
3.5.1. Tijek proračuna u XFLR-u . . . 15
3.6. Usvojeni aerodinamički model . . . 19
3.7. Specifičnosti konfiguracije letećeg krila . . . 20

4. Utjecaj pogona na aerodinamičke koeficijente 22
4.1. Odabir propelera . . . 22
4.1.1. Graupner CAM Prop 11x8 . . . 22
4.2. Sila i moment propelera . . . 24

5. Linearni modeli letjelice 28
5.1. Jednadžbe gibanja u prostoru stanja . . . 31
5.2. Linearni model uzdužnog gibanja . . . 32
5.2.1. Matrice uzdužnog gibanja A i B za referentno stanje . . . 33
5.3. Linearni model bočnog gibanja . . . 37

6. Sustav stabilizacije bočnog gibanja 42
6.1. Sustav stabilizacije bočnog gibanja . . . 42
6.1.1. Uvođenje povrtane veze po kutnoj brzini valjanja p . . . 42
6.1.2. Uvođenje povratne veze po kutu valjanja ϕ . . . 47
6.1.3. Uvođenje povratne veze po kutnoj brzini r . . . 50
6.2. Sustav za upravljanje smjerom leta . . . 53

7. Zaključak 61

Literatura 63

Popis slika

2.1 Model letjelice unesene u XFLR5 4
2.2 Motor AXI GOLD 2826/10 V2 5
2.3 Aeroprofil Eppler E182 6
2.4 Aeroprofil NACA0006 7
2.5 Model trupa iz programskog paketa SolidWorks 8

3.1 Geometrija unešena u XFLR i rezultati analize letjelice 16
3.2 Koeficijent uzgona profila C_L u ovisnosti o napadnom kutu α pri promjeni Re 16
3.3 Koeficijent momenta propinjanja profila C_m u ovisnosti o napadnom kutu α pri promjeni Re 17
3.4 Koeficijent uzgona krila C_L u ovisnosti o napadnom kutu α 17
3.5 Koeficijent momenta propinjanja C_m u ovisnosti o napadnom kutu α . . 18
3.6 Polara letjelice 18
3.7 Finesa letjelice 19

4.1 Geometrijske karakteristike propelera Graupner CAM Prop 11 × 8 [9] . . 23
4.2 Izgled propelera Graupner CAM Prop 11 × 8 [9] 23
4.3 Ovisnost koeficijenta snage C_p o koraku napredovanja J [9] 24
4.4 Ovisnost koeficijenta pogonske sile C_T o koraku napredovanja J [9] . . . 25
4.5 Ovisnost korisnosti η_p o koraku napredovanja J [9] 26

5.1 Korijeni karakterističnog polinoma uzdužnog gibanja 35

5.2 Odziv na impulsnu pobudu otklona kormila visine 36
5.3 Odziv na odskočnu pobudu otklona kormila visine 36
5.4 Korijeni karakterističnog polinoma matrice **A** bočnog gibanja 39
5.5 Odziv na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku 41
5.6 Odziv na odskočnu pobudu na krilcima u trenutku t=1 s 41

6.1 Prikaz modela sustava stabilizacije sa pojačanjem K_p 43
6.2 Prirodna frekvencija ω_n u ovisnosti o K_p 43
6.3 Korijeni karakterističnog polinoma matrice **A** za $K_p = 0.1$ 44
6.4 Odziv na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku za varijable Δp i$\Delta\beta$ pri $K_p = 0.1$ 45
6.5 Odziv na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku za varijable Δp i $\Delta\beta$ pri $K_p = 0.1$ 46
6.6 Prikaz modela sustava stabilizacije sa pojačanjem K_p i K_ϕ 47
6.7 Prirodna frekvencija ω_n za $K_p = 0.1$ i $K_\phi = 0 \cdots 3.0$ 47
6.8 Prigušenje ζ_{dr} spregnutog moda valjanja i skretanja za $K_p = 0.1$ i $K_\phi = 0 \cdots 3.0$ 48
6.9 Korijeni karakteristične jednadžbe za $K_p = 0.1$ i $K_\phi = 0.8$ 49
6.10 Odziv na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku za varijable Δp i $\Delta\beta$ pri $K_p = 0.1$ i $K_\phi = 0.8$ 50
6.11 Prikaz modela sustava stabilizacije sa pojačanjem K_p,K_ϕ i K_r 50
6.12 Prirodna frekvencija ω_n spregnutog moda valjanja i skretanja za $K_p = 0.1$, $K_\phi = 0.8$ i $K_r = 0 \cdots 3.0$ 51
6.13 Prigušenje ζ_{dr} spregnutog moda valjanja i skretanja za $K_p = 0.1$, $K_\phi = 0.8$ i $K_r = 0 \cdots 3.0$ 51
6.14 Korijeni ζ_{dr} spregnutog moda valjanja i skretanja za $K_p = 0.1$, $K_\phi = 0.8$ i $K_r = 0.7$ 52
6.15 Prikaz modela sustava za upravljanje smjerom leta 54
6.16 Korijeni karakterističnog polinoma matrice **A** za sustav upravljanja smjerom leta 54
6.17 Odziv sustava upravljanja smjerom leta na zahtjevanu promjenu $\Delta\chi$ . . . 55
6.18 Promjena varijabli Δp i $\Delta\beta$ pri zahtjevanoj promjeni $\Delta\chi$ 56
6.19 Promjena varijabli Δr i $\Delta\phi$ pri zahtjevanoj promjeni $\Delta\chi$ 56

6.20 Usporedba odziva Δp za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta 57
6.21 Usporedba odziva $\Delta \beta$ za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta 58
6.22 Usporedba odziva Δr za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta 58
6.23 Usporedba odziva $\Delta \phi$ za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta 59
6.24 Usporedba odziva $\Delta \chi$ za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta 59

Popis tablica

2.1 Osnovni podaci o letjelici 4
2.2 Podaci o motoru AXI 2826/10 GOLD LINE V2 5
2.3 Geometrijske i aerodinamičke karakteristike profila 6
2.4 Geometrijske karakteristike trupa 7
2.5 Mase komponenata letjelice 8

3.1 Vrijednosti potrebne za procjenu otpora krila 13
3.2 Vrijednosti potrebne za procjenu otpora trupa 13
3.3 Gradijenti aerodinamičkih koeficijenata - projektna aerodinamika 14
3.4 Gradijenti aerodinamičkih koeficijenata - XFLR5 19
3.5 Usvojeni gradijenti aerodinamičkih koeficijenata 20

6.1 Usporedba značajki sustava upravljanja smjerom leta i otvorenog sustava 55

Popis oznaka

A	matrica sustava [-]	32
B	matrica upravljanja [-]	32
b	raspon, [m]	11
c_A	srednja aerodinamička tetiva, [m]	11
C_D	koeficijent otpora, [-]	12
C_l	koeficijent momenta valjanja, [-]	12
C_{D0}	koeficijent parazitskog otpora, [-]	13
C_L	koeficijent uzgona, [-]	12
C_m	koeficijent momenta propinjanja, [-]	12
C_n	koeficijent momenta skretanja, [-]	12
C_Y	koeficijent bočne sile, [-]	12
e	vektor ulaza [-]	32
L	uzgon, moment valjanja,[N], [Nm]	11
q_∞	dinamički tlak, [Pa]	11
M	moment propinjanja, [Nm]	11
N	moment skretanja, [Nm]	11
Re_w	Reynoldsov broj, [-]	13
$\mathbf{x}$	vektor stanja [-]	32
$\bar{x}_{cg}$	bezdimenzijski položaj centra težišta,[-]	14
Y	bočna sila, [N]	11
Z	normalna sila, [N]	11
α	napadni kut, [rad]	12

β kut klizanja, [rad] . . . 12
Δ poremećaj od referentnog stanja [-] . . . 32
δ_l otklon krilaca, [rad] . . . 20
δ_m otklon kormila visine, [rad] . . . 20

Kratice

$ADS-B$ Automatic dependent surveillance – broadcast, . . . 3
$BLDC$ Brushless Direct Current . . . 5
LLT Lifting Line Theory . . . 15
$NACA$ National Advisory Committee for Aeronautics . . . 6
RTH Return to home, . . . 3

Sažetak

Za bespilotnu letjelicu konfiguracije letećeg krila napravljen je linearni model gibanja te su na temelju linearnog bočnog modela modelirani sustavi stabilizacije i sustav upravljanja smjerom leta. Na temelju poznate geometrije je izrađen 3D model letjelice u programskom paketu Solidworks iz kojeg su dobiveni podaci o masi, položaju centra težišta i momentima inercije potrebnim za izradu linearnih modela. Potpuni aerodinamički model letjelice je dobiven metodom projektne aerodinamike, a uspoređen je sa rezultatima dobivenim iz modela u programskom paketu *XFLR5*. Analizirane su specifičnosti upravljanja konfiguracijom letećeg krila zato što letjelica ima samo dva elevona kojima treba ostvariti sve promjene stava te su uvedeni virtualni otkloni. Za potpuni linearni model bilo je potrebno analizirati utjecaj pogona na aerodinamičke karakteristike letjelice. Na temelju linearnih modela uzdužnog i bočnog gibanja izvršena je analiza uzdužne i bočne dinamičke stabilnosti te je zaključeno da letjelica nije bočno dinamički stabilna. Da bi se letjelica učinila bočno dinamički stabilnom, no i zbog poboljšanja dinamičkih karakteristika, uvedeni su sustavi stabilizacije po kutnim brzinama valjanja i skretanja te po kutu valjanja. Modeliran je i analiziran sustav upravljanja smjerom leta.

Ključne riječi: bespilotna letjelica, konfiguracija letećeg krila, linearni modeli,bočna dinamička stabilnost, sustav stabilizacije, sustav upravljanja smjerom leta

Summary

Linear models were derived for a flying wing aircraft and stability augmentation systems and direction control system were modeled based on lateral linear model. In the beginning, 3D model in Solidworks has been made based on known geometry of the aircraft. Model in Solidworks gave essential data about aircraft mass, center of gravity and moments of inertia. The complete linear aerodynamic model of the aircraft has been made using handbook aerodynamic methods and it was compared with the results of the model of the aircraft made in *XFLR5*. Analysis of specifics of manouvering with flying wing aircraft has been made and virtual deflections were introduced. For a complete linear model, analysis of propulsion system influence on aerodynamic characteristics had to be done. Analysis of longitudinal and lateral dynamic stability has been performed based on known linear models of the aircraft. Conclusion was that aircraft is not laterally dynamically stable, so stability augmentation systems were introduced with the aim of making aircraft dynamically stable and to improve dynamic characteristics of the aircraft. Direction control system has been modeled and analyzed.

Keywords: unmanned aircraft, flying wing configuration, linear models, lateral dynamic stability, stability augmentation system , direction control system

1 Uvod

Tema diplomskog rada je sustav upravljanja smjerom leta bespilotne letjelice konfiguracije letećeg krila čija svrha je nadzor strateške infrastrukture kao što su plinovodi [1], naftovodi i dalekovodi, te državne granice na kopnu i moru. Cilj rada je izrada sustava upravljanja smjerom leta, za što je potrebno izraditi linearni model bočnog i uzdužnog gibanja zrakoplova, te sustav stabilizacije bočnog gibanja. Ideja je da letjelica leti prema unaprijed određenim točkama duž rute engl. *waypoints*. Rad na letjelici je podjeljen u nekoliko faza, prva je modeliranje geometrije i određivanje masenih i inercijskih značajki letjelice, druga je određivanje aerodinamičkih karakteristika i karakteristika pogona, teća je izrada linearnih modela nakon kojih se prešlo na razvoj sustava stabilizacije i sustava upravljanja smjerom leta. Letjelica je modelirana u programskom paketu SolidWorks i u programskom paketu XFLR za potrebe određivanja aerodinamičkih koeficijenata metodama projektne aerodinamike prema [2] te u programskom paketu XFLR [3]. Izrada linearnih modela uzdužnog i bočnog gibanja, modeliranje sustava stabilizacije i sustava upravljanja smjerom leta izvršeno je u programskom paketu MATLAB i u razvojnoj okolini Simulink, sastavnom djelu istog paketa.

Izrađeni model je napravljen uz određena pojednostavljenja i pretpostavke, te iz tog razloga ima određena ograničenja. Prva pretpostavka je standardna ISO atmosfera bez vjetra,a druga pretpostavka je vezana za motor koji je modeliran do razine okretnog momenta. Utjecaj motora na bočnu stabilnost zrakoplova nije proračunavan,no utvrđen je utjecaj motora na uzdužnu stabilnost zrakoplova.
Rad je podjeljen u sljedeće cjeline:

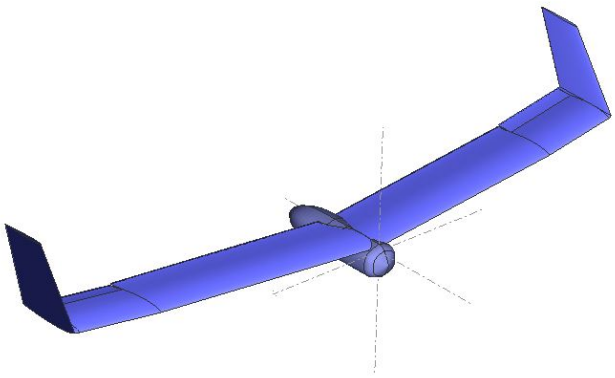
- geometrijske i inercijske značajke zrakoplova

- aerodinamički model letjelice
- karakteristike pogona
- linearni modeli gibanja zrakoplova
- sustav stabilizacije bočnog gibanja te sustav upravljanja smjerom leta

2 Geometrijske karakteristike letjelice

2.1. Osnovni podaci o letjelici

Letjelica prema masi odgovara Klasi 25 prema [4] u koju pripadaju letjelice mase između 5 i 25 kg. Letjelice tog tipa se zavisno od proračunate razine rizika i područja na kojem lete svrstavaju u kategorije letova A, B, C i D. Za Klasu 25 se letenje iznad nenaseljenih mjesta kakva su područja na kojima se nalaze infrastrukturni objekti klasificira kategorijom letova A i B. Za tu kategoriju leta se zahtjeva umjetna stabilizacija bespilotne letjelice, osim za inherentno stabilne letjelice, dok se za let iznad naseljenih i industrijskih područja kategorija leta mijenja u kategorije C i D, koje zahtjevaju umjetnu stabilizaciju i navigaciju za povratak kući (RTH).Svi navedeni zahtjevi su uzeti u obzir pri preliminarnom konstruiranju letjelice te bi iz tog razloga trebalo primjeniti autopilot sa trostrukom redudancijom. S ciljem da se omogući let u svim uvjetima letjelica je opremljena *ADS-B* transponderom jer isti omogućuje lociranje od strane kontrole zračne plovidbe i letenje u kontroliranom zračnom prostoru. U tablici (2.1) su prikazani osnovni podaci o letjelici dok slika (2.1) prikazuje geometriju letjelice unešene u programski paket XFLR5.



Slika 2.1: Model letjelice unesene u XFLR5

Tablica 2.1: Osnovni podaci o letjelici

Raspon krila	3.04 m
Površina krila	1.114 m^2
Brzina sloma uzgona	11.6 m/s
Brzina krstarenja	21 m/s
Maksimalna poletna masa	5.861 kg
Masa kamere	1.000 kg
Maksimalna operativna visina	$\leq$ 1000 m

2.2. Podaci o motoru i propeleru

Odabran je motor AXI 2826/10 GOLD LINE V2 te pripadajući propeler Graupner CAM Prop 11 $\times$ 8. U poglavlju o utjecaju pogona na aerodinamičke karakteristike je tema obrađena nešto detaljnije, a ovdje se u tablici (2.2) navode osnovi podaci o motoru.

Tablica 2.2: Podaci o motoru AXI 2826/10 GOLD LINE V2

Karakteristika	**Vrijednost**
Tip motora	BLDC
Snaga motora	740 W
Unutarnji otpor	42 mΩ
Konstanta brzine vrtnje	920 $\frac{1}{minV}$
Struja nulte snage	1.7 A
Preporučena baterija	4S
Preporučeni kontroler	20-30 A
Masa	171 g



Slika 2.2: Motor AXI GOLD 2826/10 V2

2.3. Krilo letjelice

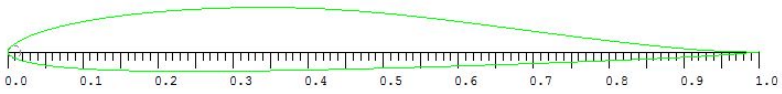
Krilo je u potpunosti izrađeno od jednousmjerenih ugljičnih vlakana, sastoji se od dvije ramenjače, prednje na $\frac{1}{4}$ tetive krila te pomoćne stražnje na $\frac{3}{4}$ tetive krila. Prednja ramenjača nosi veći dio opterećenja krila, dok se stražnja ramenjača koristi za pričvršćivanje upravljačkih površina (elevona). Krilo je modelirano u programskom paketu Solidworks, a materijal je Hexcel AS4C koji je odabran zbog mase i mehaničkih svojstava. Zbog brzina kojima letjelica leti nije moguće korištenje folije kao pokrova krila.

2.3.1. Geometrijske i aerodinamičke karakteristike profila

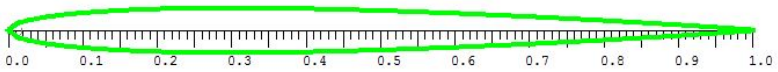
U tablici (2.3) će biti navedene geometrijske i aerodinamičke karakteristike profila koji su korišteni u konstrukciji krila. Profili su Eppler 182 za krilo te NACA0006 za *winglete*. Slike (2.3) i (2.4) prikazuju navedene profile.

Tablica 2.3: Geometrijske i aerodinamičke karakteristike profila

	E182	NACA0006
$\bar{t}$	0.0847	0.0600
$\bar{x_t}$	0.3286	0.3030
$C_{L\alpha}$	5.035	5.91
α_0	$-1°$	$0°$
C_{m0}	-0.05	0



Slika 2.3: Aeroprofil Eppler E182



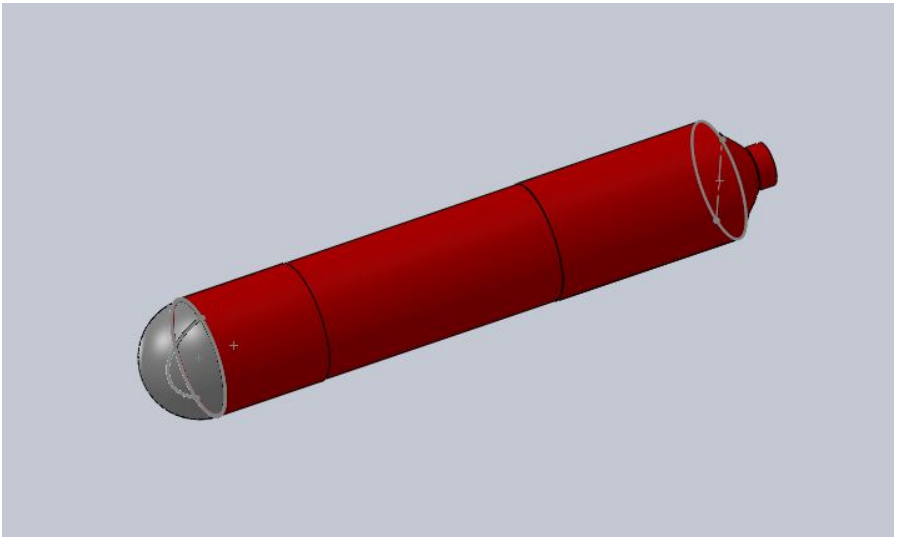
Slika 2.4: Aeroprofil NACA0006

2.4. Geometrijske karakteristike trupa

Trup je kao i krilo izrađen od jednousmjerenih ugljičnih vlakana. Zbog jednostavnosti izrade i smanjenja oplahivane površine trupa, trup je cilindričnog oblika. Služi za smještaj baterija, autopilota, transpondera te motora sa pripadajućim komponentama. Najveći utjecaj na dimenzije trupa imaju baterije, što zbog dimenzija, što zbog mase. Iako su birane baterije sa gravimetrijskom gustoćom od 167 Wh/kg, svaka od dvije baterije ima masu od 1.145 kg i duljinu od 160 mm, a širina baterije od 76 mm je utjecala na minimalni promjer trupa te time indirektno i na koeficijent otpora. U kupoli na prednjoj strani je smještena kamera koja omogućuje snimanje u svim uvjetima. Tablica (2.4) daje osnovne podatke o karakteristikama trupa.

Tablica 2.4: Geometrijske karakteristike trupa

Najveći promjer trupa	$D_b = 0.106$ m
Najmanji promjer trupa	$D_{bl} = 0.035$ m
Duljina trupa	$L_b = 0.625$ m
Volumen trupa	$V_b = 0.625\,\mathrm{m}^3$
Oplahivana površina trupa	$S_b = 0.5758\,\mathrm{m}^2$
Masa trupa	$m = 0.400$ kg



Slika 2.5: Model trupa iz programskog paketa SolidWorks

2.5. Masa letjelice

Komponente letjelice su navedene u tablici (2.5), mase većine komponenata su dobivene od proizvođača opreme, dok su mase krila i trupa određene u programskom paketu SolidWorks.

Tablica 2.5: Mase komponenata letjelice

Komponenta	**Masa komponente**
Krilo i trup	1850 g
Kamera	1000 g
Baterija	2290 g
Autopilot	330 g
Motor sa propelerom	211 g
Transponder	100 g
Servo motori	80 g
Ukupno	**5861 g**

2.5.1. Tenzor inercije

Letjelica je modelirana u programskom paketu SolidWorks te se iz modela vrlo jednostavno može doći do podataka o glavnim momentima inercije i položaju centra težišta zrakoplova. Modelirana je unutrašnjost trupa, sa nosačima za baterije te motor i kupola sa kamerom. Baterije nisu modelirane. Centar težišta zrakoplova je na:

$$x_{cg} = 249.5\,\text{mm}\,, \tag{2.1}$$

dok tenzor inercije izgleda ovako:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1.48 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1436 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix}\ \text{kgm}^2\,, \tag{2.2}$$

3 Aerodinamički model letjelice

Procjena aerodinamičkih koeficijenata metodom projektne aerodinamike je izvršena prema [2], dok je provjera rezultata rađena u programskom paketu XFLR5 [3]. U ovom poglavlju će biti prikazan tijek obje analize te dobiveni rezultati.

3.1. Definiranje aerodinamičkih koeficijenata

Prema [2] djelovanje zraka na zrakoplov se može zamjeniti silom i momentom koji djeluju u središtu mase letjelice. Rezultantna sila i moment djeluju u koordinatnom sustavu letjelice koji se poklapa sa smjerom glavnih osi tromosti zrakoplova. Sila u središtu mase ima tri komponente $[X \quad Y \quad Z]^T$ gdje oznaka komponente upućuje na smjer djelovanja sile, a sile se nazivaju aksijalna, bočna i normalna sila. Moment u središtu mase također ima tri komponente $[L \quad M \quad N]^T$, gdje L označava moment valjanja, odnosno moment oko x osi, M označava moment propinjanja, odnosno moment oko y osi, dok N označava moment skretanja, odnosno moment oko z osi. Veličine potrebne za daljnji proračun nisu sile, nego njihovi koeficijenti. Oni su bezdimenzijske veličine dobivene dijeljenjem sile sa referentnom silom, odnosno momenta sa referentnim momentom. Referentna sila se dobiva umnoškom referentne površine krila, koja podrazumjeva površinu krila sa dijelom kroz trup i dinamičkog tlaka $q_\infty = \frac{\rho V_\infty^2}{2}$, koji je posljedica brzine letjelice. Referentni moment se dobiva umnoškom prethodno opisane referentne sile i pripadajuće referentne duljine. Referentna duljina se razlikuje, pa je tako za moment propinjanja

M referentna duljina srednja aerodinamička tetiva c_A, dok je za referentni moment valjanja i skretanja referentna duljina raspon krila zrakoplova b. Jednadžbe (3.1) i (3.2) prikazuju koeficijente komponenata aerodinamičke sile i momenta:

$$\begin{aligned} C_X &= \frac{X}{q_\infty S_{ref}}, \\ C_Y &= \frac{Y}{q_\infty S_{ref}}, \\ C_Z &= \frac{Z}{q_\infty S_{ref}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{L}{q_\infty S_{refb}}, \\ C_m &= \frac{M}{q_\infty S_{refc_A}}, \\ C_n &= \frac{N}{q_\infty S_{refb}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aerodinamički koeficijenti su općem slučaju funkcije Machovog broja, Reynoldsovog broja, otklona upravljačkih površina, kuteva koje aerodinamička brzina zatvara sa osi letjelice,bezdimnezijskih kutnih brzina aerodinamičke brzine te bezdimenzijskih kutnih brzina letjelice.

Kod ove letjelice, utjecaj Reynoldsovog i Machovog broja se može zanemariti. Utjecaj Machovog broja zanemarujemo zato što letjelica leti relativno malim brzinama od 11.6 do 35 m/s, dok je Reynoldsov broj proračunavan za brzinu krstarenja. Zbog specifične konfiguracije letjelica nema kormilo pravca pa ta upravljačka površina nije razmatrana u aerodinamičkom modelu niti u modelu gibanja. Zbog nepostojanja repnih površina može se zanemariti i utjecaj bezdimenzijskih kutnih brzina aerodinamičke brzine zato jer ne postoji površina na koju utječe povijanje struje iza krila. Konačni aerodinamički model je prikazan jednadžbama (3.3) i (3.4).

$$\begin{aligned} C_D &= C_{D0} + KC_L^2 \\ C_Y &= C_{Y\beta}\beta + C_{Yp}p^* + C_{Yr}r^* \\ C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{Lq}q^* + C_{L\delta_m}\delta_m + C^*_{L\dot{\alpha}}\dot{\alpha} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} C_l &= C_{L\beta}\beta + C_{lp}p^* + C_{lr}r^* + C_{l\delta_l}\delta_l \\ C_m &= C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{mq}q^* + C_{m\delta_m}\delta_m + C_{m\dot{\alpha}}\dot{\alpha}^* \\ C_n &= C_{n\beta}\beta + C_{nr}r^* + C_{np}p^* + C_{n\delta_l}\delta_l \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. Procjena aerodinamičkih koeficijenata metodom projektne aerodinamike

3.3. Procjena otpora

Procjena aerodinamičkih koeficijenata u programskom paketu XFLR5 je korisna, no iskustvo [6] pokazuje da je analizom dobivena vrijednost koeficijenta otpora manja od stvarne vrijednosti. Iz tog razloga se pristupa procjeni otpora metodama projektne aerodinamike te će se ta vrijednost koristiti u daljnjim proračunima. Zasebno budu izračunate vrijednosti otpora krila i trupa, dok doprinose otpora od ostalih komponenti konfiguracije letjelice nije bilo potrebno računati jer ih letjelica ne posjeduje.

3.3.1. Otpor krila

Za proračun Reynoldsovog broja u obzir je uzeta brzina $V_\infty = 21$ m/s te je za tu brzinu, sa poznatim podacima o viskoznosti fluida i srednje aerodinamičke tetive dobiven Re krila. Kako je taj Reynoldsov broj u prijelaznom režimu između laminarnog i turbuletnog strujanja, korištene su pripadajuće formule iz [2]. Uvrštavanjem vrijednosti iz tablice (3.1) u prethodno spomenute jednadžbe dobiva se vrijednost nultog otpora krila i faktora K.

Tablica 3.1: Vrijednosti potrebne za procjenu otpora krila

Reynoldsov broj Re_w	398130
Bezdimenzijska debljina krila $\bar{t}$	0.0847
Položaj najveće debljine krila $\bar{x}_t$	0.3286
Faktor oblika F_{Fw}	1.1620
Nulti otpor krila C_{D0w}	0.0066
Koeficijent ind. otpora K	0.0647

3.3.2. Otpor trupa

Otpor trupa je za ovu letjelicu zbroj komponenti otpora dna i otpora uslijed trenja. Za istu brzinu kao i kod krila, no uz karakteristike trupa koje će biti spomenute u tablici (3.2), strujanje oko trupa je turbulentno pa se otpor trenja računa prema Schlichtingovoj formuli.

Tablica 3.2: Vrijednosti potrebne za procjenu otpora trupa

Reynoldsov broj Re_b	894990
Faktor oblika F_{Fb}	1.3074
Koeficijent otpora trenja trupa C_{D0b}	0.0037
Koeficijent otpora dna C_{D0bot}	0.00001582

$$C_{D0} = C_{D0w} + C_{Dob} + C_{D0bot} = 0.010315 \tag{3.5}$$

3.4. Rezultati analize

Procjena aerodinamičkih koeficijenata metodom projektne aerodinamike se izvodi prema [2]. Formule i dijagrami koji se koriste za procjenu aerodinamičkih koeficijenata

u navedenoj literaturi izvedeni su za zrakoplov konvencionalne konfiguracije, dok to konceptualno projektirana letjelica nije. Iz tog razloga je za neke koeficijente bilo potrebno koristiti izraze prema [5]. U tablici (3.3) su prikazani koeficijenti dobiveni metodom projektne aerodinamike. Koeficijenti su dobiveni za položaj težišta $\bar{x}_{cg} = 0.8693$

Tablica 3.3: Gradijenti aerodinamičkih koeficijenata - projektna aerodinamika

Uzdužni		**Bočni**	
C_{D0}	0.0103	$C_{Y\beta}$	-1.5255
K	0.0647	C_{Yp}	-0.1482
C_{L0}	0.3102	C_{Yr}	0.1149
$C_{L\alpha}$	4.361	$C_{l\beta}$	-0.1290
C_{Lq}	3.3407	C_{lp}	-0.36363
C_{m0}	-0.00317	C_{lr}	0.0992
C_{mq}	-0.86332	C_{np}	0.0157
$C_{m\delta_m}$	-0.3387	C_{nr}	-0.0122
$C_{m\alpha}$	-0.3387	$C_{n\delta_l}$	-0.0344
$C_{m\dot{\alpha}}$	-6.103410^{-6}	$C_{n\delta_n}$	0.0089
$C_{Z\dot{\alpha}}$	-4.397210^{-4}		

3.5. Procjena aerodinamičkih koeficijenata u programskom paketu XFLR5

Analiza je rađena u programskom paketu XFLR5 [3]. Program je predviđen za proračun aerodinamičkih koeficijenata modela i manjih bespilotnih letjelica koje su konstruirane za let u području niskih Reynoldosvih brojeva. U svom radu program koristi 3 metode poznate iz teorijske aerodinamike. One su redom : 3D panelna metoda, metoda vrtložne rešetke i teorija noseće linije. U radu je korištena kombinacija panelne metode i metode vrtložne rešetke za proračun stabilnosti te metoda vrtložne rešetke za proračun aerodinamičkih koeficijenata.

Panelna metoda je najsloženija, a bazira se na generiranju vrtloga na panelima duž gornjake i donjake krila. Vrtlozi se dobivaju kombinacijom izvora i dipola, a bitno je

da zadovolje uvjet da je $\Gamma = const.$ što predstavlja rubni uvjet na svakom od panela. Sa povećanjem broja panela duž krila raste i preciznost metode. Vrtlozi zamjenjuju granični sloj oko profila te je to metoda kojom se uzima debljina profila u obzir, za razliku od ostalih metoda gdje se krilo promatra kao tanka ploča. Metodom je moguće analizirati i tijelo letjelice.
Metoda noseće linije (LLT- engl. *Lifting Line Theory*) predstavlja najjednostavniju metodu, bazira se na modeliranju vrtloga duž raspona krila (jedan vezani vrtlog po segmentu krila). Metoda ima ograničenje u vidu zahtjeva da strijela jedne četvrtine krila $\Lambda_{1/4}$ mora biti nula, odnosno, da geometrijsko mjesto 1/4 profila mora biti okomito na ravninu napadnog kuta. Iz tog razloga se krila sa velikim vrijednostima strijele i dihedrala neće moći analizirati tom metodom. U analizi se koristila nelinearna analiza sa utjecajem viskoznosti.
Metoda vrtložne rešetke se temelji na modeliranju perturbacija izazvanih krilom. Nadopuna je za metodu noseće linije zato što umjesto jednog vrtloga ima niz vrtloga raspoređenih po površini krila čiji se utjecaji međusobno zbrajaju te je njom moguće analizirati krila složenije geometrije. Koristi se linearna metoda s neviskoznim strujanjem. Za proračun aerodinamičkih značajki profila koristi se *XFoil*.

3.5.1. Tijek proračuna u XFLR-u

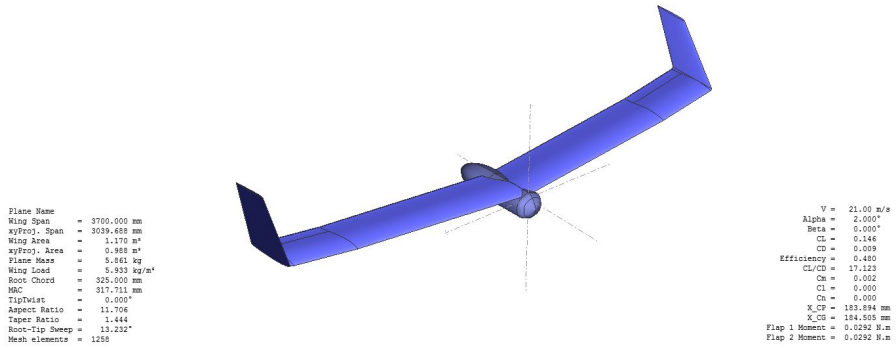
Karakteristike profila

U programskom paketu XFLR5 prvo je potrebno definirati profile koji će se koristiti za analizu. Odabrani su profili E182 za krilo zrakoplova te NACA0006 za *winglete* krila. Za te profile (i njihove modifikacije, ako se želi modelirati upravljačka površina kao što je napravljeno u ovom proračunu) je potrebno ispitati karakteristike profila pomoću XFoil-a za zadane vrijednosti Reynoldsovog broja. Na slikama (3.2) i (3.3) vide se rezultati te analize.

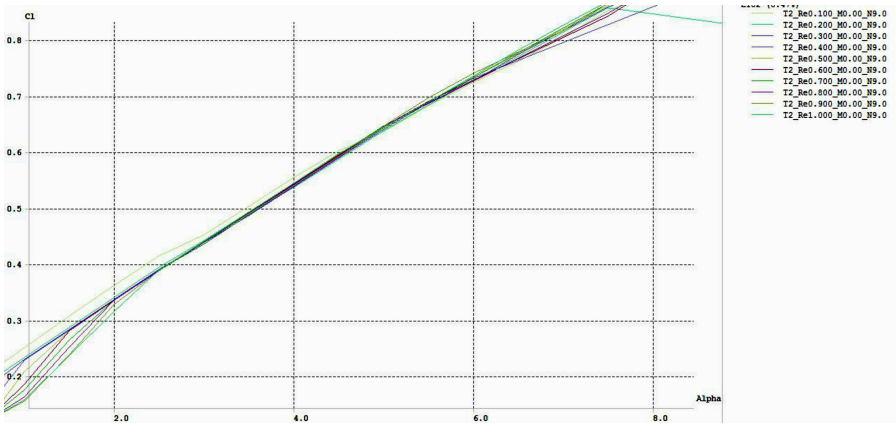
Karakteristike zrakoplova

Nakon određivanja karakteristika profila pristupa se modeliranju letjelice. Potrebno je definirati geometrijske karakteristike krila i trupa te odrediti masu i položaj težišta pojedinih komponenti letjelice. Na slici (3.1) je prikazana letjelica sa rezultatima analize,

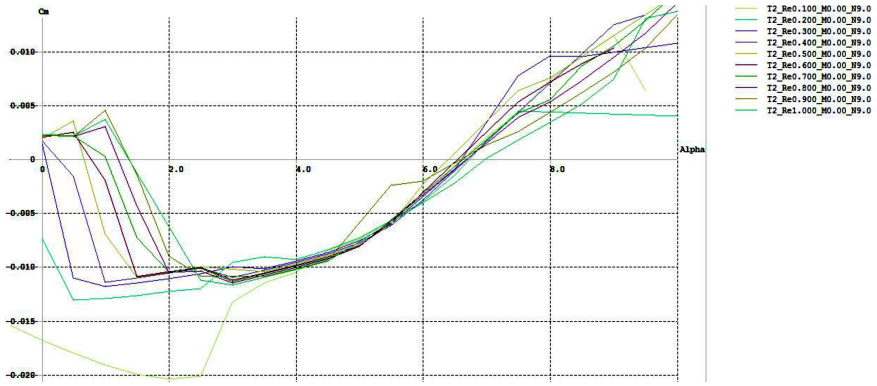
a detaljniji grafički prikaz koeficijenata uzgona, momenta propinjanja, finese i polare letjelice dobivenih analizom u XFLR-u je na slikama (3.2) do (3.7).



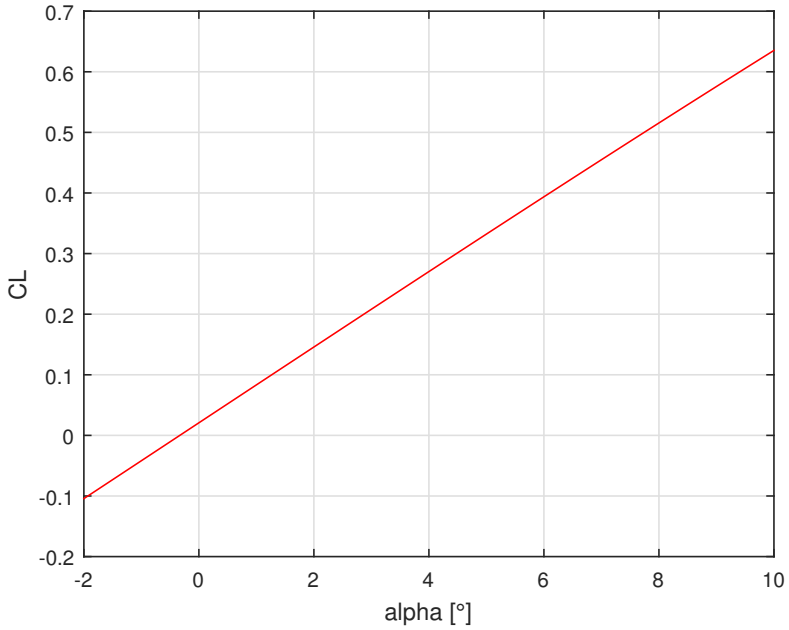
Slika 3.1: Geometrija unešena u XFLR i rezultati analize letjelice



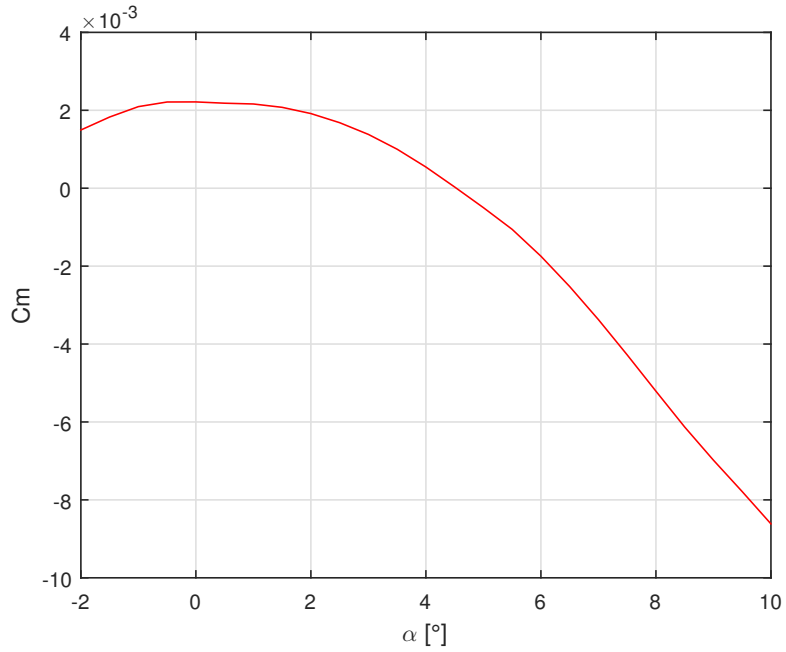
Slika 3.2: Koeficijent uzgona profila C_L u ovisnosti o napadnom kutu α pri promjeni Re



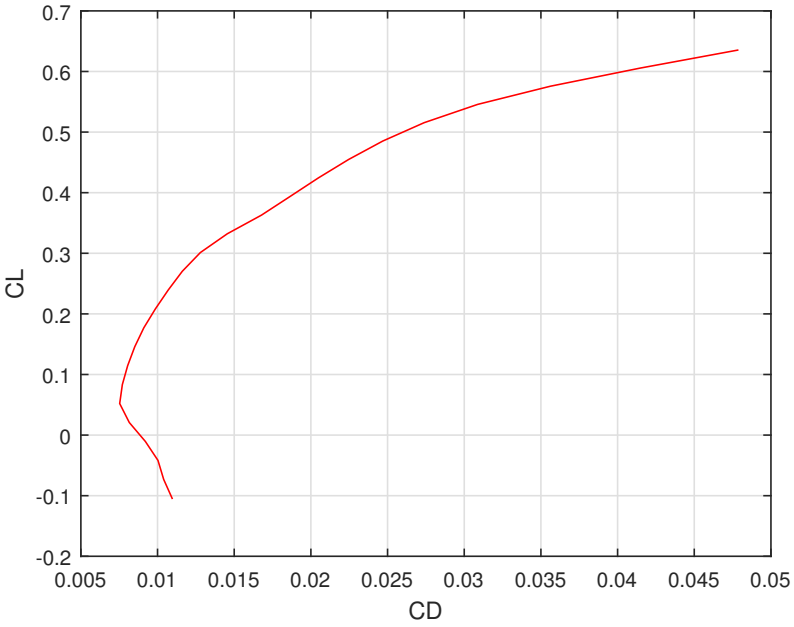
Slika 3.3: Koeficijent momenta propinjanja profila C_m u ovisnosti o napadnom kutu α pri promjeni Re



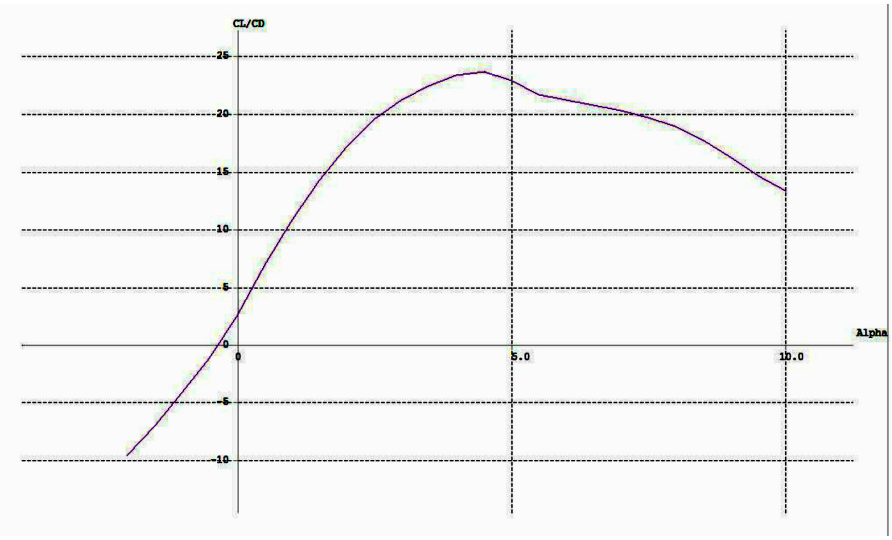
Slika 3.4: Koeficijent uzgona krila C_L u ovisnosti o napadnom kutu α



Slika 3.5: Koeficijent momenta propinjanja C_m u ovisnosti o napadnom kutu α



Slika 3.6: Polara letjelice



Slika 3.7: Finesa letjelice

Tablica 3.4: Gradijenti aerodinamičkih koeficijenata - XFLR5

Uzdužni		**Bočni**	
C_{D0}	0.0088	$C_{Y\beta}$	-0.4886
K	0.0647	C_{Yp}	-0.19069
C_{L0}	0.0246	C_{Yr}	0.096769
$C_{L\alpha}$	3.578	$C_{l\beta}$	-0.12898
C_{Lq}	3.3407	C_{lp}	-0.36363
C^*_{m0}	0.022	C_{lr}	0.051409
$C_{m\alpha}$	-0.066226	$C_{n\beta}$	0.026229
C_{mq}	-0.86332	C_{np}	-0.0055022
		C_{nr}	-0.0059394

3.6. Usvojeni aerodinamički model

Usvojeni aerodinamički model je sastavljen pretežno od aerodinamičkih koeficijenata dobivenih metodom projektne aerodinamike, a oni koeficijenti koji su preuzeti iz analize dobivene u programskom paketu XFLR5 su označeni sa *.Prikaz rezultata analize je u tablici (3.5).

Tablica 3.5: Usvojeni gradijenti aerodinamičkih koeficijenata

Uzdužni		**Bočni**	
C_{D0}	0.0103	$C_{Y\beta}$	-1.5255
K	0.0647	C_{Yp}	-0.1482
C_{L0}	0.3102	C_{Yr}	0.1149
$C_{L\alpha}$	4.361	$C_{l\beta}$	-0.1290
C_{Lq}	3.3407	C_{lp}	-0.36363
C^*_{m0}	0.022	C_{lr}	0.0992
C_{mq}	-0.86332	C_{np}	0.0157
$C_{m\delta_m}$	-0.3387	C_{nr}	-0.0122
$C_{m\alpha}$	-0.3387	$C_{n\delta_l}$	-0.0344
$C_{m\dot{\alpha}}$	-6.103410^{-6}	$C_{n\delta_n}$	0.0089
$C_{Z\dot{\alpha}}$	-4.397210^{-4}	$C^*_{n\beta}$	0.026229

3.7. Specifičnosti konfiguracije letećeg krila

Konfiguracija letećeg krila je specifična po nekoliko karakteristika. Odsutstvo repnih površina uvjetuje krila koja imaju takav moment propinjanja da se sama stabiliziraju. Naravno, na to se djelomično može utjecati i uvođenjem povratnih veza, kao i rasporedom mase. No ono što ju izdvaja je samo jedna komandna površina na svakom krilu, koja se popularno naziva elevon, što je izvedeno iz kombinacije engleskih naziva za kormilo visine i krilca. Ta površina služi za upravljanje letjelicom oko osi X i Y, dok se za upravljanje letjelicom oko osi Z koristi manevar u kojem se kombinira propinjanje i valjanje. Za takvo upravljanje letjelicom potrebno je podjeliti dio otklona koji se očituje kao otklon kormila visine od otklona koji se očituje kao otklon krilaca. Literatura [10] predlaže slijedeće matrice:

$$\begin{bmatrix} \delta_{re} \\ \delta_{le} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta'_m \\ \delta'_l \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_m \\ \delta_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{re} K_{fre} \\ \delta_{le} K_{fle} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

U navedenim jednadžbama δ_{re} i δ_{le} predstavljaju stvarne otklone kormila, dok $\delta_m^{'}$ i $\delta_l^{'}$ predstavljaju otklone koje bi zadali servomotorima za ostvarenje tih otklona. Iz aerodinamičkih razloga je korisno znati te otklone zato što se sa povećanjem otklona upravljačkih površina njihova efikasnost smanjuje. Ona je opisana funkcijom K_f koja je funkcija odnosa dijela tetive koji služi kao upravljačka površina i srednje aerodinamičke tetive čitave površine (stabilizatora ili krila) i samog kuta otklona površine δ. Kada se otkloni korigiraju za K_f dobivaju se virtualni otkloni δ_m i δ_l.

4 Utjecaj pogona na aerodinamičke koeficijente

U ovom poglavlju bude obrađen utjecaj propelera na dinamička svojstva zrakoplova, zato što se njihov utjecaj ne može zanemariti. Određivanje utjecaja ubrzanja i usporavanja brzine vrtnje motora izlazi iz okvira ovog rada.

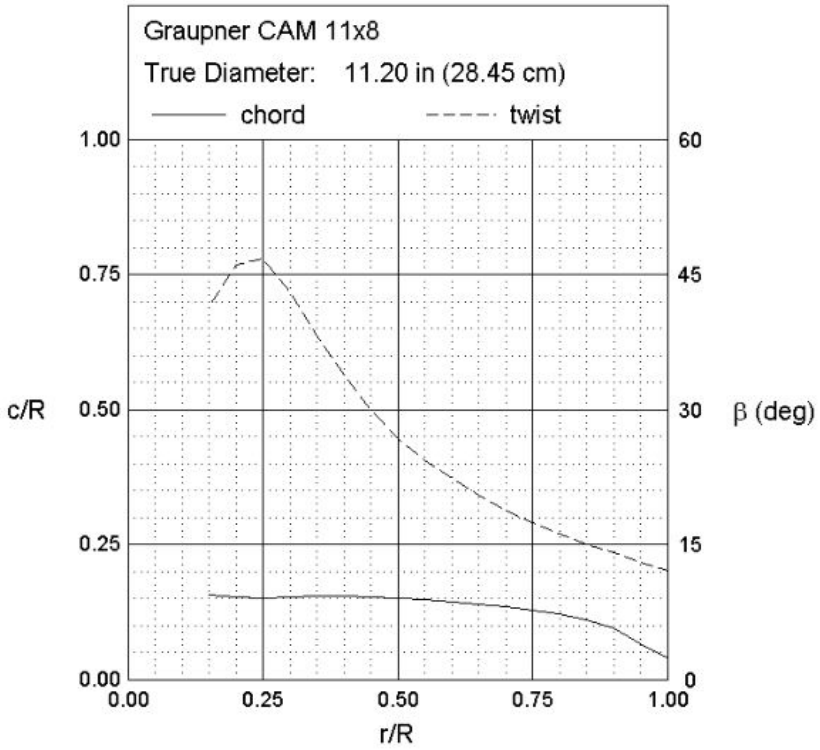
4.1. Odabir propelera

U poglavlju o masenim i inercijskim karakteristikama letjelice navedene su karakteristike motora. Odabran je snažniji motor zbog nešto većih brzina leta i mase letjelice od 5.861 kg. Potrebno je odabrati propeler koji odgovara tom motoru. Problem sa propelerima malih bespilotnih letjelica je nedostatak podataka o koeficijentima pogonske sile, snage i korisnosti. Ipak, na Sveučilištu Illinois je kroz nekoliko doktorskih radova stvorena baza karakteristika propelera [8]. U radu [9] su prikazani rezultati testiranja propelera u zračnom tunelu pri različitim vrijednostima koraka napredovanja J iz kojih se vidi da je odabir propelera iznimno bitan kod ovakvog tipa letjelice jer učinkovitost η varira od 0.27 do 0.72. Iz slika i rezultata u nastavku će biti vidljivo da su ovo realne vrijednosti koeficijenta učinkovitosti.

4.1.1. Graupner CAM Prop 11x8

Odabran je motor AXI GOLD 2826/10 V2 za koji prema preporuci proizvođača [7] postoji nekoliko optimalnih promjera i koraka propelera, ovisno o namjeni bespilotne letjelice ili modela. Za prethodno određen motor preporuča se propeler 13×6 za modele motornih jedrilica te 11×8 za akrobatske modele. Odabran je propeler CAM Prop

11×8 jer za taj propeler postoje podaci u literaturi, iako to nije optimalan propeler za predviđenu misiju letjelice. Geometrijske karakteristike navedenog propelera su prikazane na slikama (4.1) i (4.2), dok su na slikama (4.3) do (4.5) opisane aerodinamičke karakteristike propelera.



Slika 4.1: Geometrijske karakteristike propelera Graupner CAM Prop 11×8 [9]



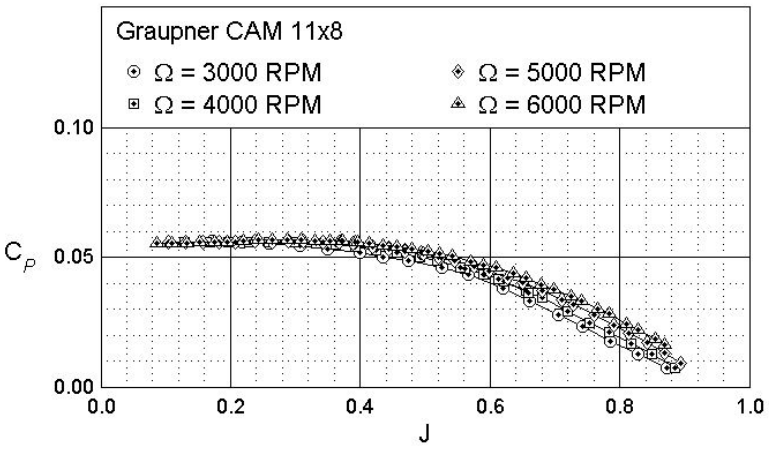
Slika 4.2: Izgled propelera Graupner CAM Prop 11×8 [9]

4.2. Sila i moment propelera

Utjecaj pogonske sile je određen prema [2]. Pogonska sila se dobiva kao funkcija koeficijenta pogonske sile C_T, koji pak ovisi o koraku napredovanja J prema slijedećim formulama:

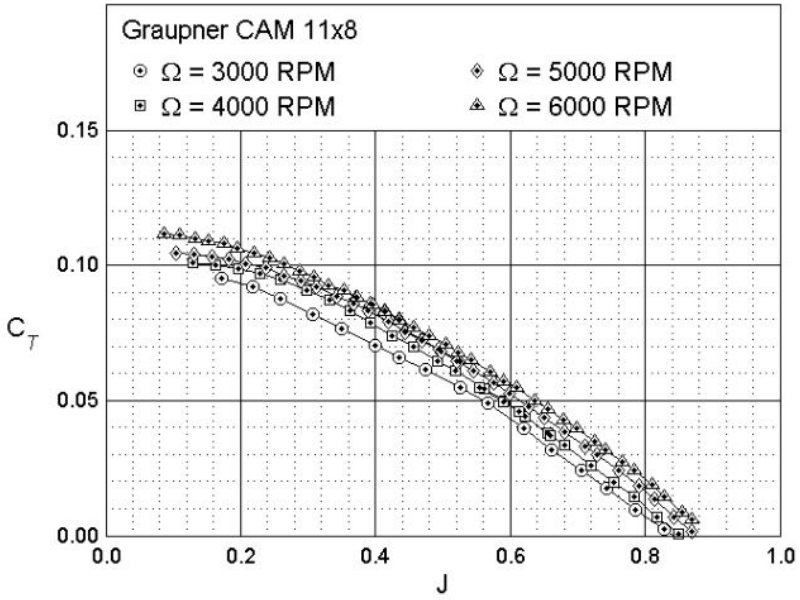
$$\begin{aligned} T &= \rho n^2 D^4 C_T \\ J &= \frac{V}{nD} \end{aligned} \tag{4.1}$$

U nastavku su prikazane aerodinamičke karakteristike propelera.



Slika 4.3: Ovisnost koeficijenta snage C_p o koraku napredovanja J [9]

Za brzinu krstarenja od 21 m/s pri brzini vrtnje propelera od 6000 okretaja u minuti te uz promjer od 0.2845 m, dobiva se koeficijent napredovanja $J = 0.738$. Sa slike (4.5) vidi se da je korisnost propelera $\eta = 0.72$. Za veće brzine leta bilo bi potrebno povećati broj okretaja propelera jer je za navedeni korak napredovanja korisnost propelera najveća te sa daljnim povećanjem istoga korisnost drastično pada. Sa prikazanih dijagrama je vidljivo da vrijednosti C_T, C_P i η konvergiraju sa porastom broja okretaja pri smanjenju J. Za odabrani propeler je određeno da radi pri 6000 okretaja u minuti jer je za taj broj okretaja učinkovitost propelera η najveća.



Slika 4.4: Ovisnost koeficijenta pogonske sile C_T o koraku napredovanja J [9]

Na slici (4.4) je dana ovisnost potisne sile propelera o koraku napredovanja. Ta ovisnost je za 6000 okretaja u minuti aproksimirana funkcijom polyfit u programskom paketu MATLAB te su dobivene vrijednosti:

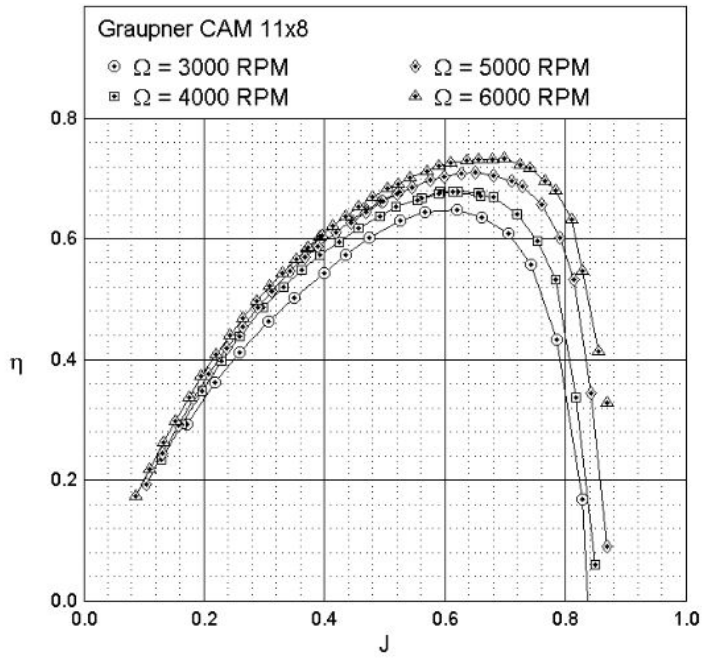
$$C_T = 0.0296J^3 - 0.1469J^2 - 0.02J + 0.1161 \tag{4.2}$$

Sila koja se javlja na propeleru ima dvije komponente, silu T u smjeru leta te silu $F_{P\sigma}$, koja djeluje u ravnini vrtnje propelera. Veličina $F_{P\sigma}$ može iznositi i do 30 % vrijednosti potisne sile te se računa prema formuli (4.3):

$$F_{P\sigma} = \frac{\rho V^2}{2} N_B S_P \frac{\partial C_{Nblade}}{\partial \alpha} f(T) \tag{4.3}$$

U jednadžbi (4.3) N_B predstavlja broj krakova propelera, što je u ovom slučaju 2, S_P predstavlja površinu diska propelera, dok je $\frac{\partial C_{Nblade}}{\partial \alpha}$ gradijent ploštice elise, čija je vrijednost dobivena aproksimacijom dijagrama iz [2], a funkcija je koraka napredovanja propelera J. Vrijednosti su vidljive u jednadžbi (4.4).

$$\frac{\partial C_{Nblade}}{\partial \alpha} = 0.00084358J^3 - 0.0108J^2 + 0.0529J - 0.00054048 \tag{4.4}$$



Slika 4.5: Ovisnost korisnosti η_p o koraku napredovanja J [9]

Funkcija pogonske sile je funkcija brzine leta i promjera propelera, također je dobivena aproksimacijom dijagrama iz [2], a vrijednosti polinoma su vidljive u jednadžbi (4.5).

$$f(T) = 0.0406\left(\frac{T}{\rho V^2 D^2}\right)^3 - 0.2509\left(\frac{T}{\rho V^2 D^2}\right)^2 + 0.7836\left(\frac{T}{\rho V^2 D^2}\right) + 1.0264 \quad (4.5)$$

Na propeler zrak nastrujava pod dva kuta, α_p i β_p. Kut α_p se u općem slučaju računa prema slijedećoj formuli:

$$\alpha_p = \alpha - \alpha_T - \epsilon_p, \quad (4.6)$$

gdje α_T označava kut koji os rotacije propelera (vratila elektromotora) zatvara sa koordinatnim sustavom letjelice i u ovom slučaju je $\alpha_T = 0°$. Kut ϵ_p označava kut povijanja struje, koji nije razmatran u analizi. Naime, letjelica je visokokrilac, a propeler je potisni, što znači da je propeler uvijek u struji zraka s krila te postoji povijanje struje. Iz tog razloga je efikasnost propelera niža. Kut β_p je jednak kutu klizanja β. Zbog kuteva α_p i β_p dolazi do pojave sile u osi vrtnje propelera $F_{P\sigma}$. Ta sila uzrokuje pojavu dodatnih

sila oko osi Y i Z te utječe na momente L, M i N, što je prikazano jednadžbama (4.7) i (4.8).

$$\begin{aligned} F_X^F &= T \\ F_Y^F &= -F_{P\sigma}\beta_p \\ F_Z^F &= F_{P\sigma}\alpha_p \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} L^F &= z_T F_{P\sigma}\beta_p \\ M^F &= -z_T T + x_T F_{P\sigma}\alpha_p \\ N^F &= -x_T F_{P\sigma}\beta_p \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ovom analizom nije pokriven utjecaj naglog povećanja ili smanjenja brzine vrtnje propelera na sile i momente.

5 Linearni modeli letjelice

Model gibanja letjelice se sastoji od gibanja središta mase letjelice te gibanja oko središta mase letjelice. Taj model letjelice se naziva model sa šest stupnjeva slobode gibanja (6DOF) i služi za detaljne analize dinamičke stabilnosti zrakoplova. Prema [11] model 6DOF se sastoji od četiri grupe matričnih jednadžbi, a one su:

1. Derivacija vektora položaja središta mase letjelice
2. Derivacija brzine leta središta mase letjelice
3. Derivacija kinetičkog momenta letjelice za središte mase
4. Derivacija stava letjelice

Model se zavisno od toga kako je zadan sastoji od 13 ili 14 varijabli zadanih diferencijalnim jednadžbama. Broj varijabli zavisi da li koristimo derivaciju stava (derivaciju Eulerovih kuteva) ili derivaciju Eulerovih parametara. Taj model povezuje sve varijable gibanja letjelice i nemoguće ga je raspregnuti. Za analizu dinamičke stabilnosti letjelica u praksi se češće koriste linearizirani modeli gibanja. Linearizirani modeli se temelje na pretpostavci referentnog gibanja i malih poremećaja oko ravnotežnog stanja. Referentno gibanje podrazumjeva ravnotežni let na nekoj visini sa otklonom upravljačkih površina koji osigurava ravnotežu sila i momenata. Jednadžbe (5.1) do (5.3) opisuju koeficijente dinamičke stabilnosti uz poremećaje dobivene pri linearizaciji aerodinamičkih sila.

$$\begin{aligned} X_u^0 &= \frac{1}{m}\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\rho V^0 S}{m} C_X^0 \\ X_\alpha^0 &= \frac{1}{m}\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{\rho V^{0^2} S}{2m} C_{X\alpha}^0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$
\begin{aligned}
Y_{\beta}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial \beta} = \frac{\rho {V^{0}}^{2} S}{2m} C_{Y\beta}^{0} \\
Y_{p}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial p} = \frac{\rho V^{0} S b}{2m} C_{Yp}^{0} \\
Y_{r}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{\rho V^{0} S b}{2m} C_{Yr}^{0} \\
Y_{\delta_n}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial \delta_n} = \frac{\rho {V^{0}}^{2} S}{2m} C_{Y\delta_n}^{0}
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_{u}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\rho V^{0} S}{m} C_{Z}^{0} \\
Z_{\alpha}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = \frac{\rho {V^{0}}^{2} S}{2m} C_{Z\alpha}^{0} \\
Z_{\dot{\alpha}}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\rho {V^{0}}^{2} S c_A}{2m} C_{\dot{\alpha}}^{0} \\
Z_{q}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\rho V^{0} S c_A}{2m} C_{Zq}^{0}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Jednadžbe (5.4) do (5.6) opisuju koeficijente dinamičke stabilnosti uz poremećaje dobivene pri linearizaciji aerodinamičkih momenata.

$$
\begin{aligned}
L_{\delta_m}^{0} &= \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial \delta_m} = \frac{\rho {V^{0}}^{2} S}{2m} C_{Z\delta_m}^{0} \\
L_{\beta}^{0} &= \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\rho {V^{0}}^{2} S b}{2I_x} C_{l\beta}^{0} \\
L_{p}^{0} &= \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\rho V^{0} S b^2}{2I_x} C_{lp}^{0} \\
L_{r}^{0} &= \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\rho V^{0} S b^2}{2I_x} C_{lr}^{0} \\
L_{\delta_n}^{0} &= \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial \delta_n} = \frac{\rho {V^{0}}^{2} S b^2}{2I_x} C_{l\delta_n}^{0} \\
L_{\delta_l}^{0} &= \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial \delta_l} = \frac{\rho {V^{0}}^{2} S b^2}{2I_x} C_{l\delta_l}^{0}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\alpha}^{0} &= \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{\rho {V^0}^2 S c_A}{2I_y} C_{m\alpha}^{0} \\
M_{\dot{\alpha}}^{0} &= \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\rho V^0 S c_A^2}{2I_y} C_{m\dot{\alpha}}^{0} \\
M_{q}^{0} &= \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial q} = \frac{\rho V^0 S c_A^2}{2I_y} C_{mq}^{0} \\
M_{\delta_m}^{0} &= \frac{1}{I_z}\frac{\partial M}{\partial \delta_m} = \frac{\rho {V^0}^2 S c_A}{2I_z} C_{m\delta_m}^{0}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
N_{\beta}^{0} &= \frac{1}{I_z}\frac{\partial N}{\partial \beta} = \frac{\rho {V^0}^2 S b}{2I_z} C_{n\beta}^{0} \\
N_{p}^{0} &= \frac{1}{I_z}\frac{\partial N}{\partial p} = \frac{\rho V^0 S b^2}{2I_z} C_{np}^{0} \\
N_{r}^{0} &= \frac{1}{I_z}\frac{\partial N}{\partial r} = \frac{\rho V^0 S b^2}{2I_z} C_{nr}^{0} \\
N_{\delta_n}^{0} &= \frac{1}{I_z}\frac{\partial N}{\partial \delta_n} = \frac{\rho {V^0}^2 S b^2}{2I_z} C_{n\delta_n}^{0}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Osim referentnog stanja, potrebno je definirati i jednadžbe poremećaja koje utječu na promjenu odziva letjelice. Jednadžbe (5.7) do (5.15) su gore spomenute jednadžbe poremećaja. Radi se o 9 jednadžbi koje opisuju gibanje letjelice, no kasnije će biti vidljivo da je moguće raspregnuti taj sustav jednadžbi, odnosno smiju se odvojiti jednadžbe uzdužnog i bočnog gibanja.

$$
\Delta \dot{u} = \left(X_u^0 - \frac{T^0 \cos \alpha_T}{mu} \right) \Delta u + X_{\alpha}^{0} \Delta \alpha - g \cos \theta^0 \Delta \theta \tag{5.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \dot{\alpha} = {} & \frac{Z_u^0 - \frac{T^0 \sin \alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^{0}} \Delta u + \frac{Z_{\alpha}^{0}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \Delta \alpha + \frac{u^0 + Z_q^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \Delta q \\
& - \frac{g \sin \theta^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \Delta \theta + \frac{Z_{\delta_m}^{0}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \Delta \delta_m
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \dot{q} = {} & M_{\dot{\alpha}}^{0} \frac{Z_u^0 - \frac{T^0 \sin \alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^{0}} \Delta u + \left(M_{\alpha}^{0} + \frac{M_{\dot{\alpha}}^{0} Z_{\alpha}^{0}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \right) \Delta \alpha + - \frac{M_{\dot{\alpha}}^{0} g \sin \theta^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \Delta \theta + \\
& \left(M_q^0 + M_{\dot{\alpha}}^{0} \frac{u^0 + Z_q^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \right) \Delta q + \left(M_{\delta_m}^{0} + \frac{M_{\dot{\alpha}}^{0} Z_{\delta_m}^{0}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \right) \Delta \delta_m
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$$\Delta\dot{\theta} = \Delta q \tag{5.10}$$

$$\Delta\dot{\beta} = \frac{Y_B^0}{u^0}\Delta\beta + \frac{Y_p^0}{u^0}\Delta p + \left(\frac{Y_r^0}{u^0}\right)\Delta r + \frac{g\cos\theta^0}{u^0}\Delta\phi + \frac{Y_{\delta_n}^0}{u^0}\Delta\delta_n \tag{5.11}$$

$$\Delta\dot{p} = L_\beta^0\Delta\beta + L_p^0\Delta p + L_r^0\Delta r + L_{\delta_l}^0\Delta\delta_l + L_{\delta_n}^0\Delta\delta_n \tag{5.12}$$

$$\Delta\dot{r} = N_\beta^0\Delta\beta + N_p^0\Delta p + N_r^0\Delta r + N_{\delta_l}^0\Delta\delta_l + N_{\delta_n}^0\Delta\delta_n \tag{5.13}$$

$$\Delta\dot{\phi} = \Delta p + \tan\theta^0\Delta r \tag{5.14}$$

$$\Delta\dot{\chi} = \frac{\Delta r}{\cos\theta^0} \tag{5.15}$$

5.1. Jednadžbe gibanja u prostoru stanja

Prema [11] linearizirane jednadžbe 6DOF modela leta za uzdužno gibanje mogu se zapisati u prostoru stanja što je za numeričku analizu vrlo pogodno. Kako se ove jednadžbe gibanja često koriste i za sintezu i analizu sustava upravljanja na zrakoplovima, u interesu je izravno primijeniti alate teorije upravljanja više-varijabilnim sustavima. Za slučaj malih poremećaja oko referentnog stanja linearizirane jednadžbe gibanja zrakoplova predstavljaju klasični primjer linearnog sustava više varijabli s konstantnim koeficijentima (vremenski neovisnim, engl. *linear time invariant system*, LTI system). Gibanje, odnosno stanje, bilo kakvog linearnog dinamičkog sustava može se opisati minimalnim brojem varijabli koje nazivamo vektor stanja $\mathbf{x}$. Pri tome broj elemenata vektora stanja n potreban za cjeloviti opis gibanja sustava ovisi o broju stupnjeva slobode

gibanja sustava. Time bi sustav bio opisan u više-dimenzionalnom prostoru, prostoru stanja.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{5.16}$$

U općem opisu prostora stanja potrebno je dodati još jednu jednadžbu kojom se definiraju izlazi sustava, odnosno vektor izlaza $\mathbf{y}(t)$. Ta jednadžba je:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{5.17}$$

Za opisivanje sustava sa n elemenata vektora stanja $\mathbf{x}$, m elemenata vektora upravljanja $\mathbf{u}$ te r izlaza matrice y matrica $\mathbf{A}$ ima dimenziju $n \times n$, matrica $\mathbf{B}$ ima dimenziju $n \times m$. Dok matrica $\mathbf{C}$ ima dimenziju $r \times n$ a matrica $\mathbf{D}$ $r \times m$. Najčešće je kod zrakoplova matrica $\mathbf{C}$ jedinična matrica, dok je matrica $\mathbf{D}$ nul matrica.

5.2. Linearni model uzdužnog gibanja

U početnom razmatranju je spomenuto da se sustav od 9 jednadžbi gibanja zrakoplova može podjeliti u dva sustava čija se rješenja mogu tražiti odvojeno. Posljedica ovog je da mali kutevi valjanja i skretanja ne utječu na varijable uzdužnog gibanja (modovi gibanja nisu spregnuti) te se jednadžbe mogu razdvojiti . Za uzdužno gibanje postoje 4 jednadžbe sa 4 varijable, a varijable su: Δu, $\Delta\alpha$, $\Delta\theta$ i Δq. Za propelerom pogonjen zrakoplov, jednadžbe su (5.18) do (5.21).

$$\Delta\dot{u} = \left(X_u^0 - \frac{T^0 \cos\alpha_T}{mu}\right)\Delta u + X_\alpha^0 \Delta\alpha - g\cos\theta^0 \Delta\theta \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\alpha} = {} & \frac{Z_u^0 - \frac{T^0 \sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta u + \frac{Z_\alpha^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\Delta\alpha + \frac{u^0 + Z_q^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\Delta q \\ & - \frac{g\sin\theta^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\Delta\theta + \frac{Z_{\delta_m}^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\Delta\delta_m\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}\Delta\dot{q} = {} & M_{\dot{\alpha}}^0 \frac{Z_u^0 - \frac{T^0 \sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0}\Delta u + \left(M_\alpha^0 + \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 Z_\alpha^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\right)\Delta\alpha + -\frac{M_{\dot{\alpha}}^0 g\sin\theta^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\Delta\theta + \\ & \left(M_q^0 + M_{\dot{\alpha}}^0 \frac{u^0 + Z_q^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\right)\Delta q + \left(M_{\delta_m}^0 + \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 Z_{\delta_m}^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\right)\Delta\delta_m\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\Delta\dot{\theta} = \Delta q \tag{5.21}$$

Jednadžbe uzdužnog gibanja su linearne jednadžbe sa konstantnim koeficijentima, pa ih se smije pisati u prostoru stanja uz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Delta X}(t)$ i $\mathbf{D} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta\dot{X}}(t) &= \mathbf{A\Delta X}(t) + \mathbf{B\Delta e}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{\Delta X}(t) \end{aligned}, \tag{5.22}$$

gdje je vektor stanja $\mathbf{\Delta X} = \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta\alpha & \Delta q & \Delta\theta \end{bmatrix}^T$, dok ulaz sustava predstavlja $\mathbf{\Delta e} = \begin{bmatrix} \delta_m \end{bmatrix}$.

Elementi matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ se računaju za referentna stanja. Općeniti prikaz elemenata matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je izveden u (5.23) i (5.24).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(X_u^0 - \frac{T^0\cos\alpha_T}{mu}\right) & X_\alpha^0 & 0 & -g\cos\theta^0 \\ \frac{Z_u^0 - \frac{T^0\sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0} & \frac{Z_\alpha^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} & \frac{u^0 + Z_q^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} & -\frac{g\sin\theta^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ M_{\dot{\alpha}}^0 \frac{Z_u^0 - \frac{T^0\sin\alpha_T}{mu}}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}^0} & \left(M_\alpha^0 + \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 Z_\alpha^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\right) & \left(M_q^0 + M_{\dot{\alpha}}^0 \frac{u^0 + Z_q^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\right) & -\frac{M_{\dot{\alpha}}^0 g\sin\theta^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.23}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Z_{\delta_m}^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}} \\ \left(M_{\delta_m}^0 + \frac{M_{\dot{\alpha}}^0 Z_{\delta_m}^0}{u^0 - Z_{\dot{\alpha}}}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

5.2.1. Matrice uzdužnog gibanja A i B za referentno stanje

Kao što je spomenuto u ranijim potpoglavljima, potrebno je odrediti referentno stanje. Za letjelicu je to ravnotežni let sa sljedećim parametrima:

$$\begin{aligned} H &= 1000\,\text{m} \\ \gamma^0 &= 0^\circ \\ V^0 &= 21\,\text{m/s} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Za taj ravnotežni let je potrebno izračunati ravnotežni napadni kut i ravnotežni otklon kormila visine. Prema (5.26) njihove vrijednosti su:

$$\begin{aligned} \alpha_{rav} &= 0.37656^\circ \\ \delta_m &= -3.345^\circ \end{aligned} \tag{5.26}$$

Sa ovim podacima konačno je moguće izračunati vrijednosti elemenata matrice **A** i **B** uzdužnog linearnog modela. Matrice **A** i **B** su prikazane u jednadžbama (5.27) i (5.28).

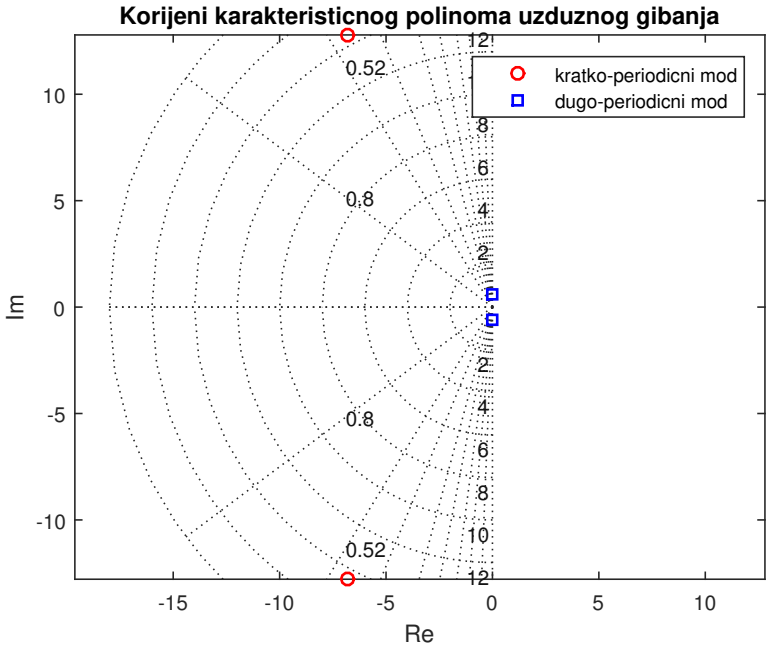
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.08768355 & 3.112919 & 0 & -9.8097 \\ -0.044489296 & -8.40857781 & 1.08754659238991 & 0.003070 \\ 1.620824e-06 & -152.720506 & -5.15327920 & -1.118490e-07 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.27}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.29555 \\ -152.72076 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

Kada su određene vrijednosti koeficijenata matrica **A** i **B**, može se ispitati uzdužna dinamička stabilnost zrakoplova. Izraz (5.29) prikazuje korijene karakterističnog polinoma matrice **A**. S obzirom da su oba para korijena u lijevoj poluravnini, zaključuje se da je letjelica uzdužno dinamički stabilna.

$$\begin{aligned} r_1 &= -6.7895 \pm 12.7866i \\ r_2 &= -0.0282 \pm 0.5630i \end{aligned} \tag{5.29}$$

Na slici (5.1) su prikazani korijeni iz izraza (5.29).



Slika 5.1: Korijeni karakterističnog polinoma uzdužnog gibanja

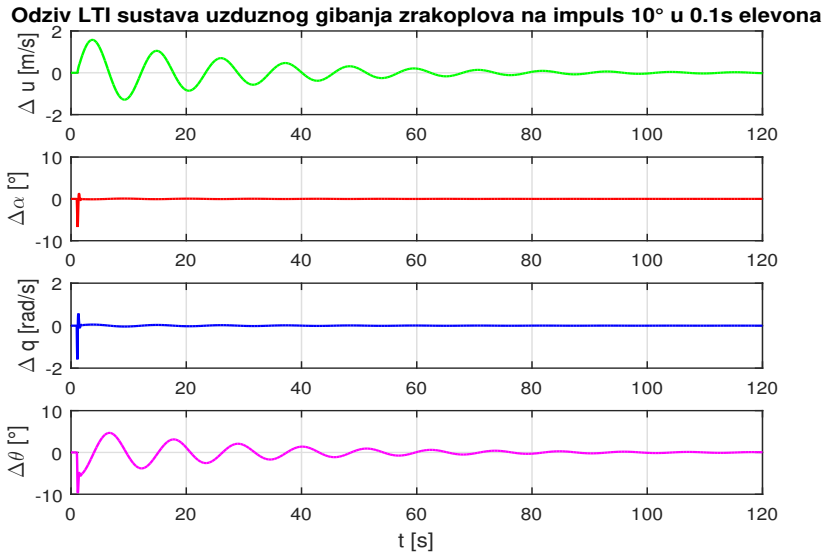
Na temelju vrijednosti korijena računaju se prirodne frekvencije i prigušenja sustava. Indeks 1 se odnosi na veličine kratkoperiodičnog moda, a indeks 2 na veličine dugoperiodičnog moda.

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= 14.4722\,\text{rad/s} \\ \zeta_{n1} &= 0.46907 \\ T_{n1} &= 0.9256\,\text{s} \\ \tau_{1/2} &= 0.1021\,\text{s} \end{aligned} \tag{5.30}$$

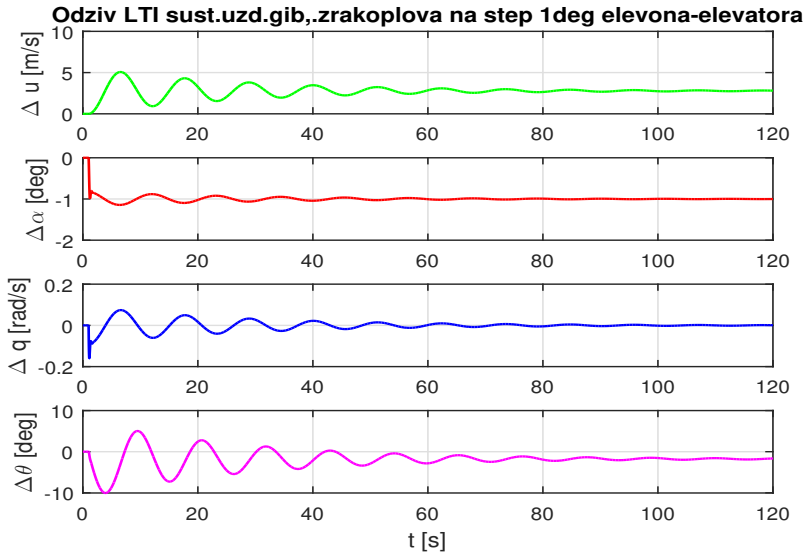
$$\begin{aligned} \omega_{n2} &= 0.56429\,\text{rad/s} \\ \zeta_{n2} &= 0.064398 \\ T_{n2} &= 172.9028 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Usporedbom sa [11] u dijelu je posvećen kriterijima kvalitete upravljanja uzdužog gibanja vidi se da letjelica prema prigušenju dugoperiodičnog i kratkoperiodičnog moda pripada u prvu klasu kvalitete upravljanja. Slike (5.2) i (5.3) pokazuju da unatoč visokoj

ocjeni kvalitete upravljanja, pri određenom tipu pobude postoji greška u stacionarnom stanju. Posebno su osjetljive varijable dugoperiodičnog moda. U oba slučaja se pobuda javlja u 0.1 sekundi simulacije, razlika je samo u tipu pobude, u prvom slučaju se radi o impulsnoj, a u drugom o odskočnoj pobudi na kormilu visine.



Slika 5.2: Odziv na impulsnu pobudu otklona kormila visine



Slika 5.3: Odziv na odskočnu pobudu otklona kormila visine

5.3. Linearni model bočnog gibanja

Linearni model bočnog gibanja se sastoji od pet preostalih jednadžbi gibanja zrakoplova, popraćenih sa pet pripadajućih varijabli. Varijable su $\begin{bmatrix}\Delta\beta & \Delta p & \Delta r & \Delta\phi\end{bmatrix}$ Dodatno, za razliku od uzdužnog linearnog modela, kod bočnog linearnog modela su gibanja koja se javljaju spregnuta. Jednadžbe su potpuno neovisne o varijablama uzdužnog gibanja, no postoji sprega između valjanja i skretanja. Jednadžbe koje opisuju bočno gibanje zrakoplova su (5.32) do (5.36).

$$\Delta\dot{\beta} = \frac{Y_B^0}{u^0}\Delta\beta + \frac{Y_p^0}{u^0}\Delta p + \left(\frac{Y_r^0}{u^0}\right)\Delta r + \frac{g\cos\theta^0}{u^0}\Delta\phi + \frac{Y_{\delta_n}^0}{u^0}\Delta\delta_n \tag{5.32}$$

$$\Delta\dot{p} = L_\beta^0\Delta\beta + L_p^0\Delta p + L_r^0\Delta r + L_{\delta_l}^0\Delta\delta_l + L_{\delta_n}^0\Delta\delta_n \tag{5.33}$$

$$\Delta\dot{r} = N_\beta^0\Delta\beta + N_p^0\Delta p + N_r^0\Delta r + N_{\delta_l}^0\Delta\delta_l + N_{\delta_n}^0\Delta\delta_n \tag{5.34}$$

$$\Delta\dot{\phi} = \Delta p + \tan\theta^0\Delta r \tag{5.35}$$

$$\Delta\dot{\chi} = \frac{\Delta r}{\cos\theta^0} \tag{5.36}$$

U osnovi postoji 5 jednadžbi sa pet varijabli, no zadnja varijabla se u većini slučajeva izostavlja. Kako se u radu modelira sustav u kojem je ta varijabla iznimno bitna, matrica **A** se u poglavlju o stabilizaciji bočnog gibanja proširuje za taj član. Time dobivamo 5 varijabli koje čine vektor stanja $\mathbf{\Delta X}$:

$$\mathbf{\Delta X} = \begin{bmatrix}\Delta\beta & \Delta p & \Delta r & \Delta\phi & \Delta\chi\end{bmatrix}^T \tag{5.37}$$

Potreban je i vektor upravljanja kao i kod uzdužnog gibanja. Ovdje dolazimo do specifičnosti konfiguracije letećeg krila. Uobičajeno je da se vektor upravljanja sastoji od

dvije komande, δ_l i δ_n jer se očekuje postojanje krilaca i kormila visine, no kako promatrana konfiguracija ima samo krilca, vektor upravljanja ima samo jedan član, δ_l, što je vidljivo iz (5.38). Vektor upravljanja

$$\mathbf{\Delta e} = \begin{bmatrix} \delta_l \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Pri računanju vrijednosti koeficijenata matrica **A** i **B** bočnog gibanja vrijede isti parametri za ravnotežni let kao i kod uzdužnog gibanja, uz dodatak da kut klizanja β mora biti jednak nuli. Aerodinamički koeficijenti koji služe za izračun matrica **A** i **B** su prikazani jednadžbama (5.39) i (5.40).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{Y_B^0}{u^0} & \frac{Y_p^0}{u^0} & \frac{Y_r^0}{u^0} - 1 & \frac{g\cos\theta^0}{u^0} & \\ L_B^0 & L_p^0 & L_r^0 & 0 & 0 \\ N_B^0 & N_p^0 & N_r^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan\theta^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g}{u^0} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

U općem slučaju matrica B ima dva stupca, u prvom su koeficijenti vezani za upravljanje krilcima, a u drugom koeficijenti vezani za upravljanje kormilom pravca, dok je za promatranu letjelicu zbog specifične konfiguracije dovoljan samo prvi stupac matrice **B**.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_{\delta_l}^0 \\ N_{\delta_l}^0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

Vrijednosti ravnotežnog napadnog kuta α_{rav} i δ_m u referentnom stanju prema (5.41 su:

$$\begin{aligned} \alpha_{rav} &= 0.37656^\circ \\ \delta_m &= -3.345^\circ \end{aligned} \tag{5.41}$$

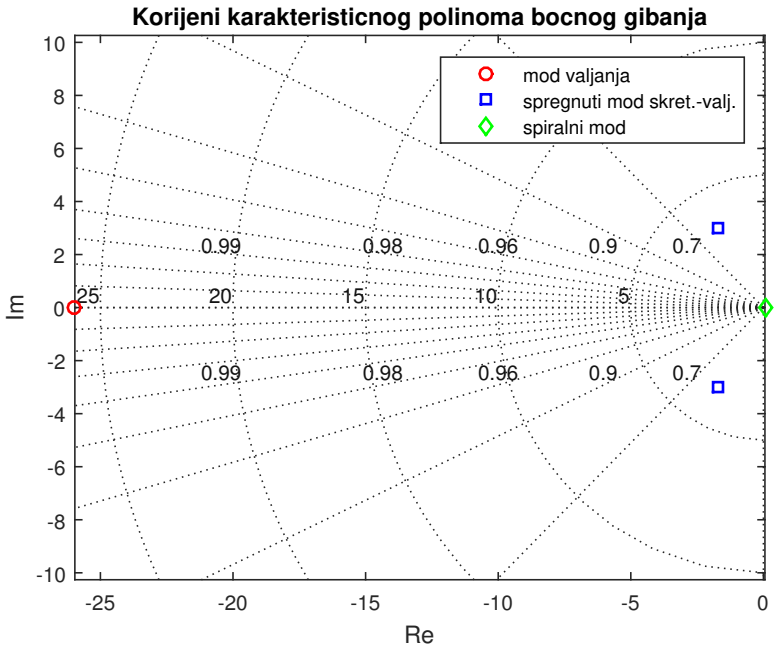
Uvrštavanjem vrijednosti koeficijenata za referentno stanje dobiju se matrice (5.42) i (5.43).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.9410 & -0.041361 & -0.967932 & 0.4671426 \\ -62.78130 & -25.622525 & 6.9899473 & 0 \\ 11.8254559 & 1.0246843 & -0.796251 & 0 \\ 0 & 1.000 & -0.0010111620 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.42}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 114.5814725 \\ -15.509385 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.43}$$

Kao i kod linearnog modela uzdužnog gibanja, kada je poznata matrica $\mathbf{A}$, moguće je dobiti korijene karakterističnog polinoma matrice $\mathbf{A}$, koji opisuju dinamičko ponašanje sustava. Jednadžba (5.44) prikazuje dobivene korijene. Korijen r_3 je korijen moda valjanja, nalazi se u lijevoj poluravnini (negativan je) i prema tom kriteriju letjelica je dinamički stabilna. Korijen r_2 je korijen spregnutog moda valjanja i skretanja(engl. *Dutch roll*), to je mod gibanja koji je najsličniji dugoperiodičnom modu uzdužnog gibanja i iz vrijednosti korijena je vidljivo da i on letjelicu čini dinamički stabilnom.

$$\begin{aligned} r_3 &= -25.9632 \\ r_4 &= -1.7271 \pm 2.9692i \\ r_5 &= 0.0575 \end{aligned} \tag{5.44}$$



Slika 5.4: Korijeni karakterističnog polinoma matrice $\mathbf{A}$ bočnog gibanja

Vrijednost korijena r_5 koja je pozitivna ukazuje na činjenicu da letjelica nije bočno dinamički stabilna što se vidi i iz (5.4), odnosno potrebno je uvođenje povratnih veza kako bi se letjelica učinila stabilnom. Korijen r_5 je korijen spiralnog moda gibanja letjelice, njegov se utjecaj vidi kroz povećanje vrijednosti svih varijabli bočnog gibanja u vremenu simulacije prikazane na slikama (5.5) i (5.6).
U nastavku su određeni parametri bitni za ocjenu kvalitete upravljanja letjelicom. Za mod valjanja određene su vremenska konstanta moda valjanja τ_v, period T_v i vrijeme prepolovljenja amplitude moda valjanja $\tau_{1/2}$:

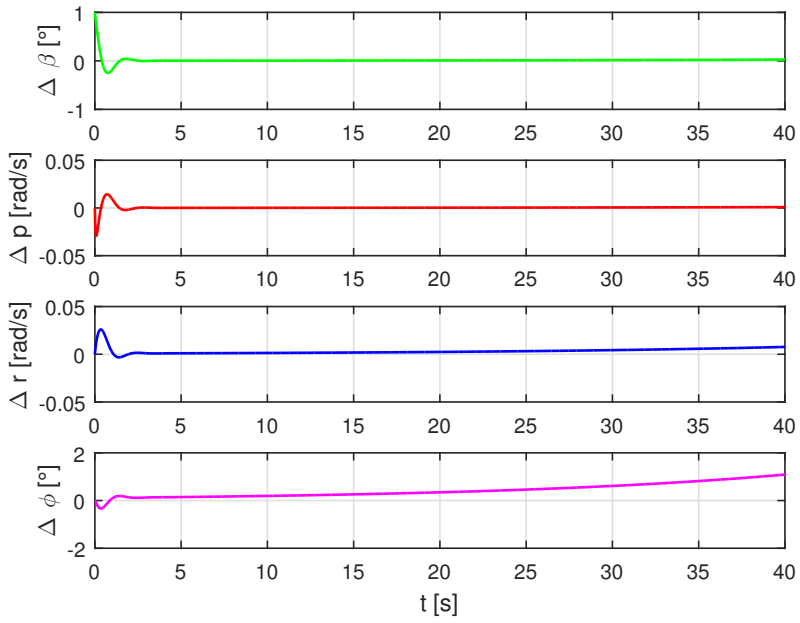
$$\begin{aligned} \tau_v &= 0.038516\,\text{s} \\ T_v &= 0.242\,\text{s} \\ \tau_{1/2} &= 19.0743\,\text{s} \end{aligned} \tag{5.45}$$

Za spregnuti mod valjanja i skretanja određene su prirodna frekvencija ω_n i prigušenje ζ :

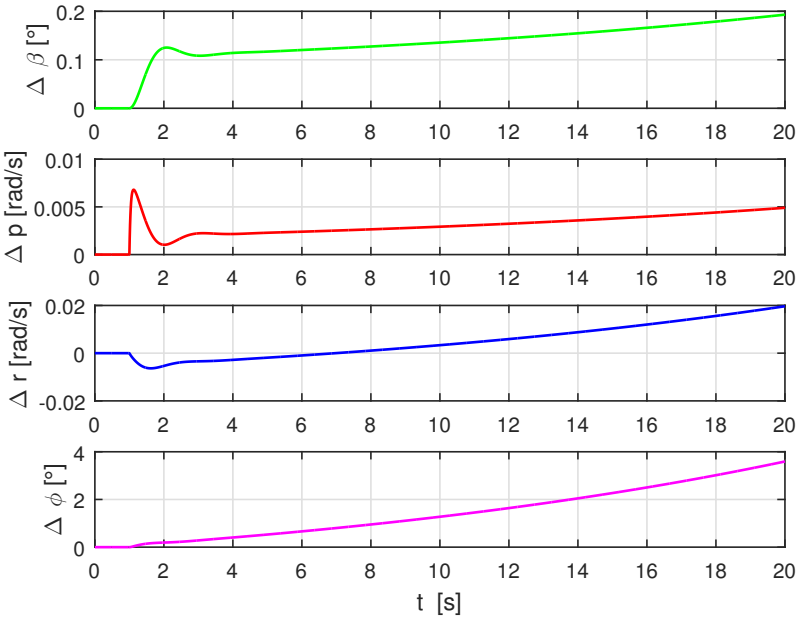
$$\begin{aligned} \omega_{dr} &= 3.4311\,\text{rad/s} \\ \zeta_{dr} &= 0.50219 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Za spiralni mod određeni su vremenska konstanta spiralnog moda, period spiralnog moda T_{sp} i vrijeme udvostručenja amplitude τ_2 :

$$\begin{aligned} \tau_{sp} &= 20.177\,\text{s} \\ T_{sp} &= 126.776\,\text{s} \\ \tau_2 &= 13.9856\,\text{s} \end{aligned} \tag{5.47}$$



Slika 5.5: Odziv na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku



Slika 5.6: Odziv na odskočnu pobudu na krilcima u trenutku t=1 s

6 Sustav stabilizacije bočnog gibanja

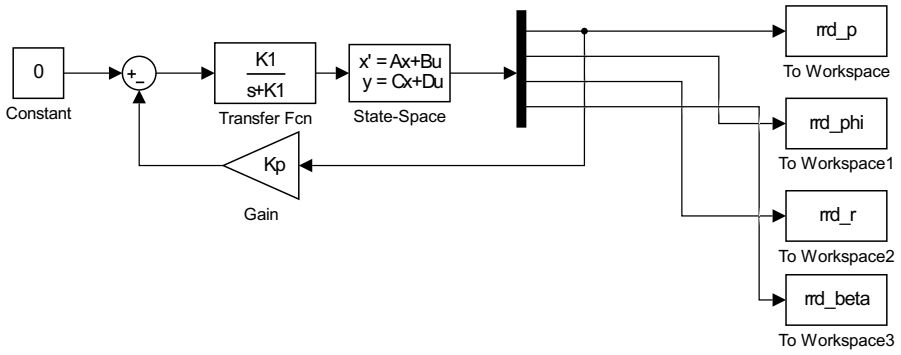
Poglavlje je podjeljeno u dva dijela, dio u kojem se obrađuju sustavi stabilizacije sa povratnim vezama po kutnoj brzini valjanja p , kutu valjanja ϕ i kutnoj brzini skretanja r, te dio u kojem se modelira sustav upravljanja smjerom leta.

6.1. Sustav stabilizacije bočnog gibanja

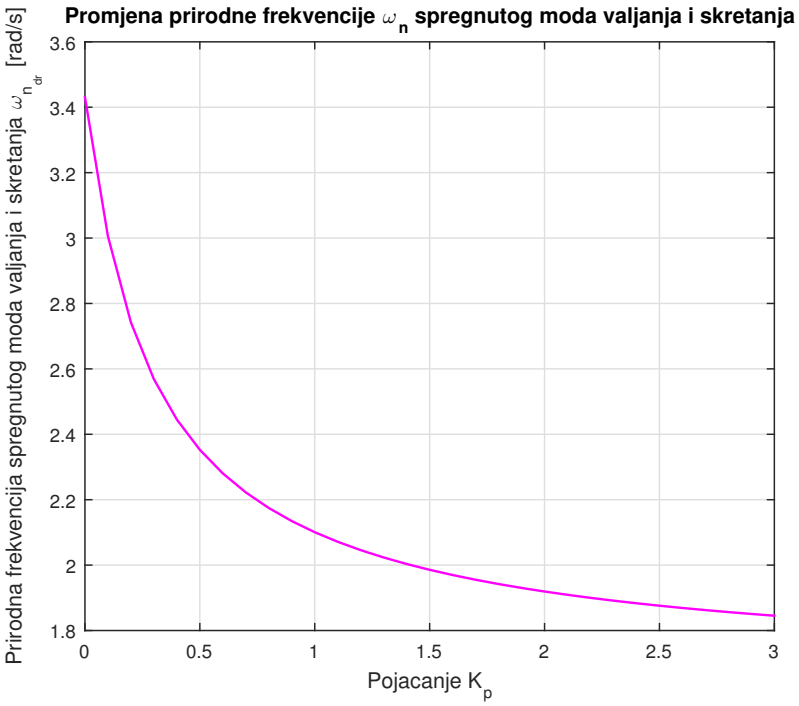
U prethodnom poglavlju su određeni korijeni karakterističnog polinoma matrice **A** za bočno gibanje i iz njih je vidljivo da letjelica nije bočno dinamički stabilna. Kako bi se to ispravilo, uvode se povratne veze po kutnoj brzini p , kutu valjanja ϕ i kutnoj brzini r. Razvoj sustava stabilizacije letjelice će biti prikazan u nastavku.

6.1.1. Uvođenje povrtane veze po kutnoj brzini valjanja p

Slika (6.1) prikazuje Simulink model susutva sa pojačanjem po kutnoj brzini p. Da bi se doznalo kako pojačanje utječe na parametre kvalitete upravljanja, pojačanje K_p u povratnoj vezi je varirano od 0 do 3.



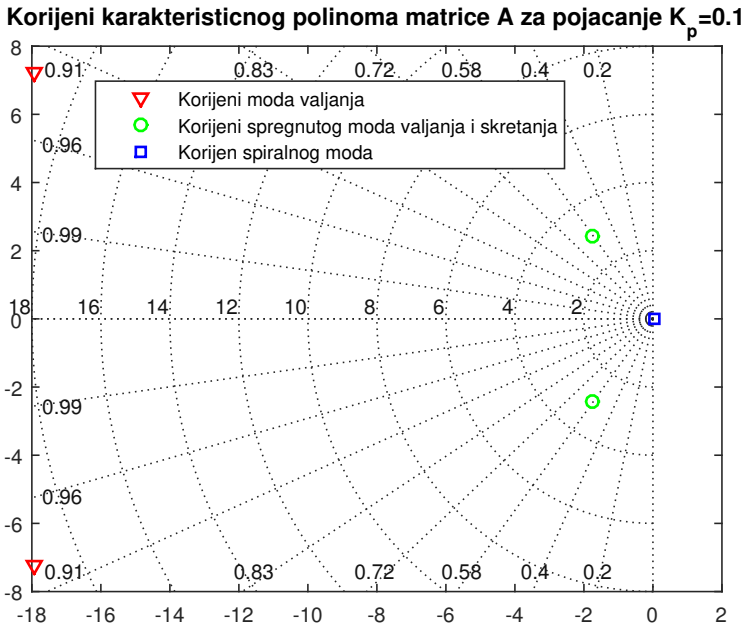
Slika 6.1: Prikaz modela sustava stabilizacije sa pojačanjem K_p



Slika 6.2: Prirodna frekvencija ω_n u ovisnosti o K_p

Sa slike (6.2) se uočava da pojačanje K_p znatno utječe na prirodnu frekvenciju spregnutog moda valjanja i skretanja. Kako nije cilj smanjivati prirodnu frekvenciju, odabrano je pojačanje $K_p = 0.1$ jer je kod njega najmanji utjecaj pojačanja na prirodnu frekvenciju. Dodatni razlog za odabir ovakvog pojačanja su korijeni karakterističnog polinoma kod kojih mod valjanja prestaje biti aperiodski i poprima oscilatoran karakter

što nije poželjno. Slika (6.3) prikazuje korijene karakterističnog polinoma matrice $\mathbf{A}$ za pojačanje $K_p = 0.1$.



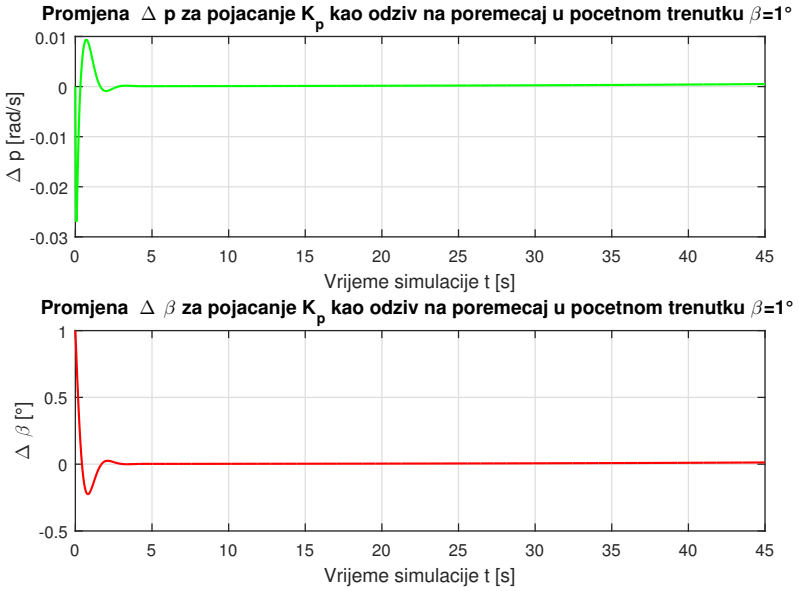
Slika 6.3: Korijeni karakterističnog polinoma matrice $\mathbf{A}$ za $K_p = 0.1$

$$\begin{aligned} r_3 &= -17.944 \pm 7.2462i \\ r_4 &= -1.7583 \pm 2.4377i \\ r_5 &= 0.0447 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Korijeni r_3, r_4 i r_5 su definirani na isti način kao i u prethodnom poglavlju, odnosno označavaju korijene moda valjanja, moda spregnutog valjanja i skretanja i spiralnog moda.

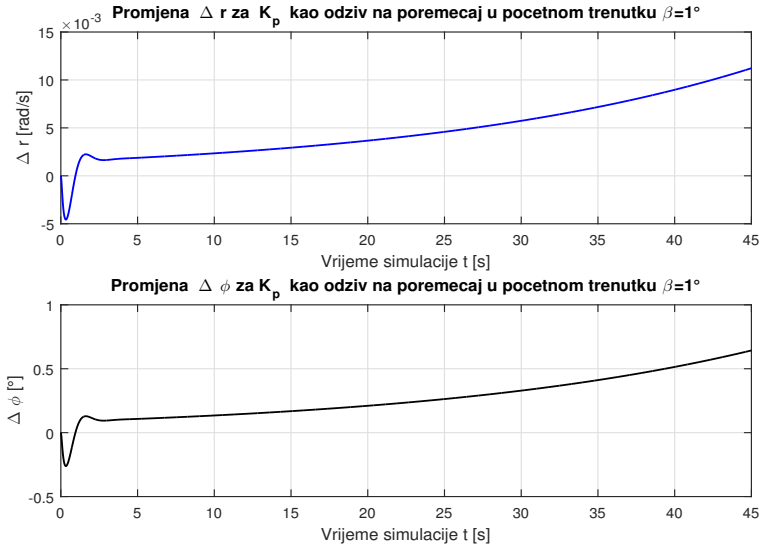
Iz rezultata (6.1) se uočava da je vrijednost korijena spiralnog moda ostala pozitivna, što znači da je letjelica sa uvođenjem povratne veze po p ostala nestabilna. Nužno je uvesti dodatnu povratnu vezu po ϕ.

U nastavku će biti prikazani odzivi sustava na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku iz kojeg će se vidjeti na što je utjecalo pojačanje K_p.



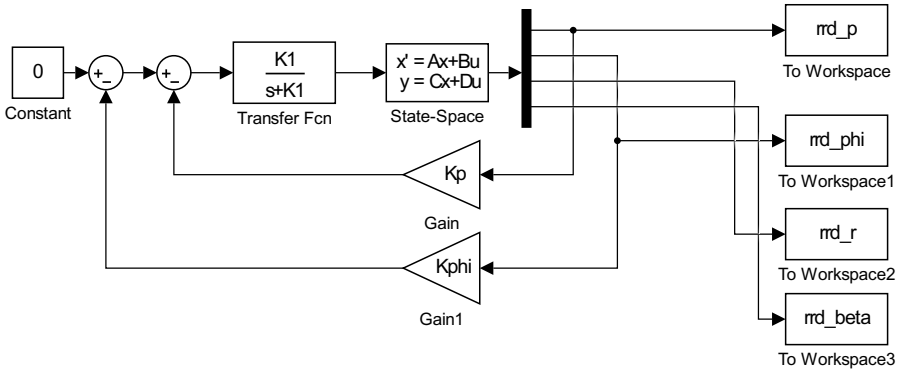
Slika 6.4: Odziv na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku za varijable Δp i$\Delta\beta$ pri $K_p = 0.1$

Kao što se vidi sa (6.4), uvođenje povratne veze po kutnoj brzini valjanja p nije izazvalo promjene u odnosu na otvoreni sustav, nakon poremećaja u početnom trenutku, varijable istitravaju u nulu. Sa slike (6.5) se može uočiti da i dalje postoji utjecaj spiralnog moda koji je nestabilan, unatoč uvođenju pojačanja.



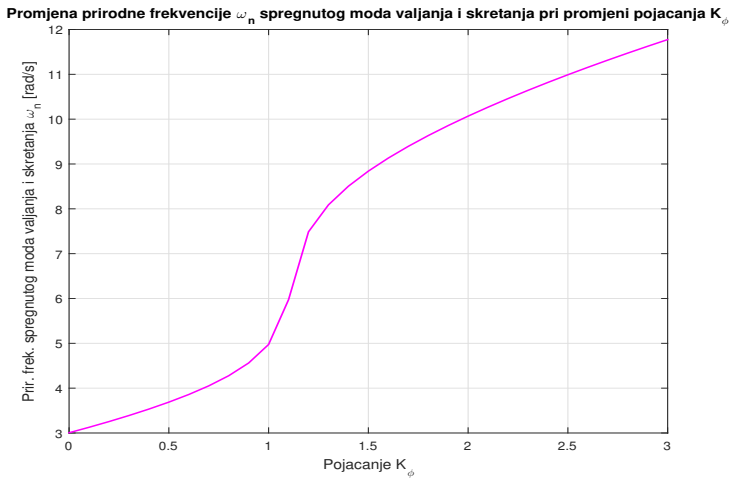
Slika 6.5: Odziv na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku za varijable Δp i $\Delta\beta$ pri $K_p = 0.1$

6.1.2. Uvođenje povratne veze po kutu valjanja ϕ

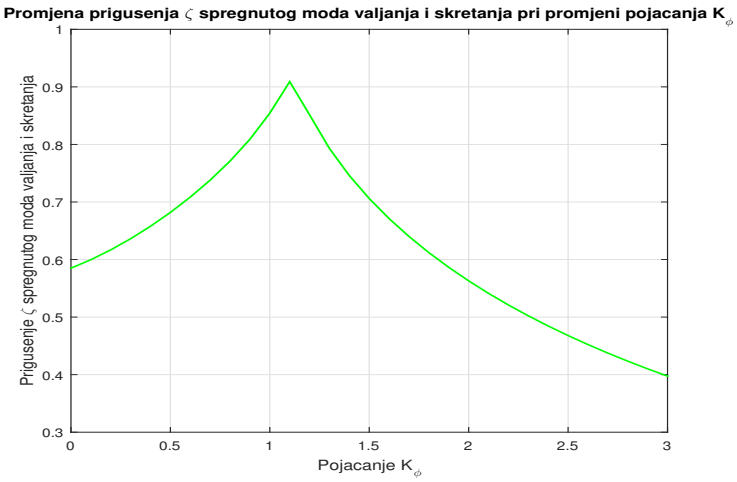


Slika 6.6: Prikaz modela sustava stabilizacije sa pojačanjem K_p i K_ϕ

Kao što je spomenuto ranije, u sustav treba uvesti povratnu vezu po kutu ϕ da bi se letjelicu učinilo bočno dinamički stabilnom. Slika (6.6) prikazuje Simulink model sustava sa pojačanjima po K_p i K_ϕ. Kao i kod pojačanja po K_p, pojačanje je varirano između 0 i 3 te je dobivena ovisnost prigušenja ζ i prirodne frekvencije ω_n spregnutog moda valjanja i skretanja o pojačanju K_ϕ. Slike (6.7) i (6.8) prikazuju tu ovisnost.



Slika 6.7: Prirodna frekvencija ω_n za $K_p = 0.1$ i $K_\phi = 0 \cdots 3.0$



Slika 6.8: Prigušenje ζ_{dr} spregnutog moda valjanja i skretanja za $K_p = 0.1$ i $K_\phi = 0 \cdots 3.0$

Odabrano je pojačanje $K_\phi = 0.8$ jer je za to pojačanje prigušenje ζ idealno. Dodatni razlog odabira takvog pojačanja su vrijednosti korijena karakteristične jednadžbe prikazane u (6.11).

$$\begin{aligned} r_3 &= -17.851 \\ r_4 &= -3.2977 \pm 2.7233i \\ r_5 &= -0.5112 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Slika (6.9) prikazuje gore navedene korijene. Nakon korijena određeni su parametri kvalitete upravljanja.

Za mod valjanja određene su vremenska konstanta moda valjanja τ_v, period T_v i vrijeme prepolovljenja amplitude moda valjanja $\tau_{1/2}$:

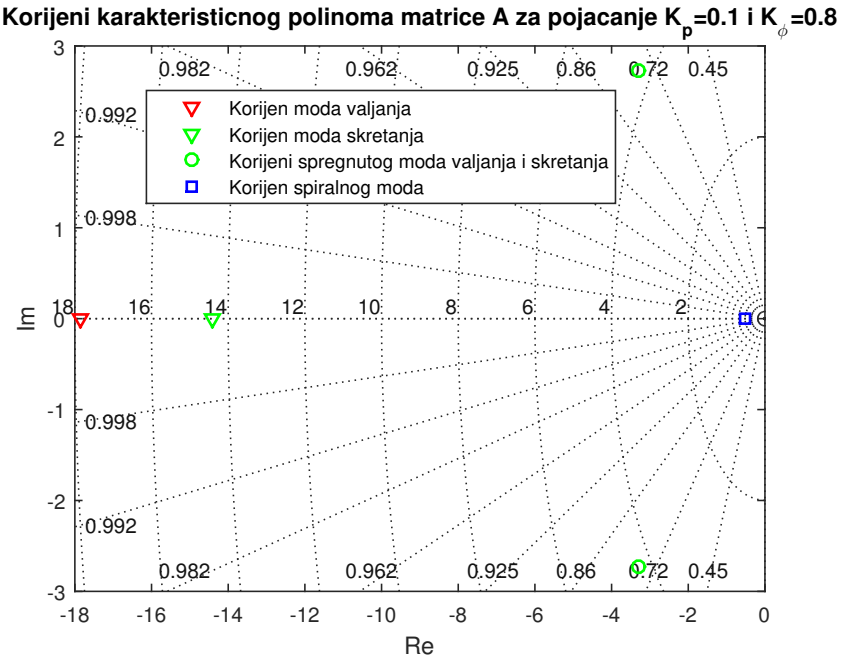
$$\begin{aligned} \tau_v &= 0.056019\,\text{s} \\ T_v &= 0.35198\,\text{s} \\ \tau_{1/2} &= 0.03883\,\text{s} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Za spregnuti mod valjanja i skretanja određene su prirodna frekvencija ω_n i prigušenje ζ :

$$\begin{aligned} \omega_{dr} &= 4.2768\,\text{rad/s} \\ \zeta_{dr} &= 0.77107 \end{aligned} \tag{6.4}$$

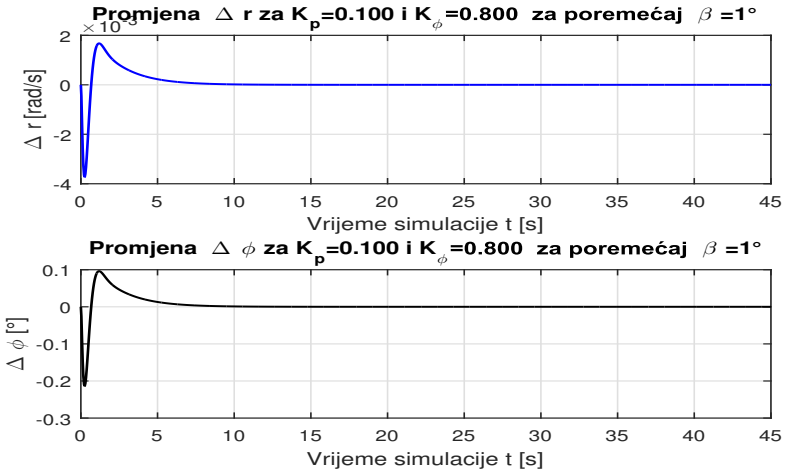
Za spiralni mod određeni su period spiralnog moda T_{sp} i vrijeme udvostručenja amplitude τ_2 :

$$\begin{aligned} T_{sp} &= 12.29\,\mathrm{s} \\ \tau_2 &= 1.356\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{6.5}$$



Slika 6.9: Korijeni karakteristične jednadžbe za $K_p = 0.1$ i $K_\phi = 0.8$

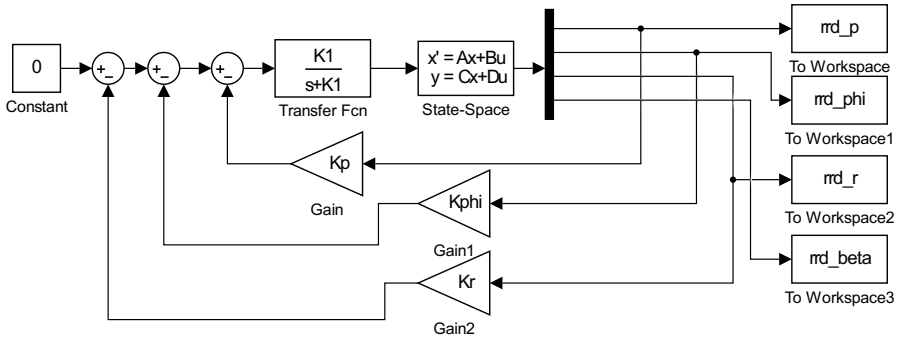
Ako se usporedi odziv sa slike (6.5) sa (6.10) vidi se da je uvođenje pojačanja $K_\phi = 0.8$ popravilo ponašanje sustava jer vrijednosti kutne brzine r i kuta ϕ ne divergiraju pod utjecajem spiralnog moda.



Slika 6.10: Odziv na poremećaj $\beta = 1°$ u početnom trenutku za varijable Δp i $\Delta\beta$ pri $K_p = 0.1$ i $K_\phi = 0.8$

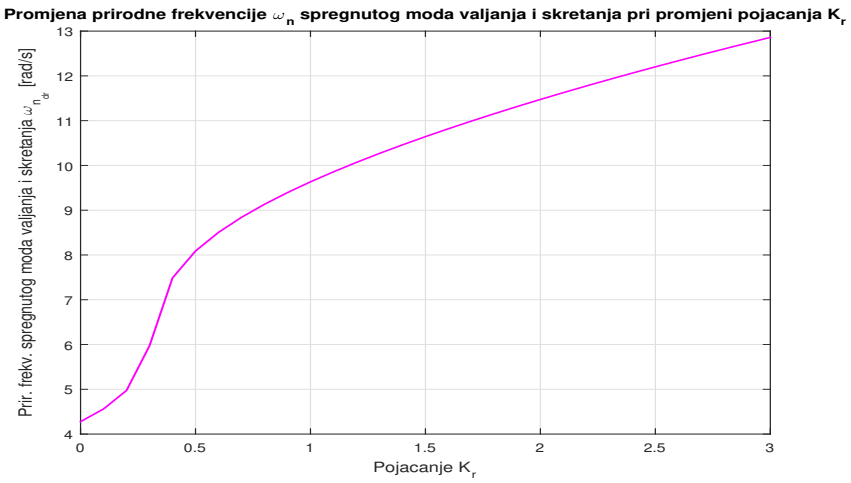
6.1.3. Uvođenje povratne veze po kutnoj brzini r

Uvođenje povratne veze po kutnoj brzini skretanja r je izvršeno na isti način kao i kod dosadašnjih modela. Slika (6.11) prikazuje model u Simulinku.

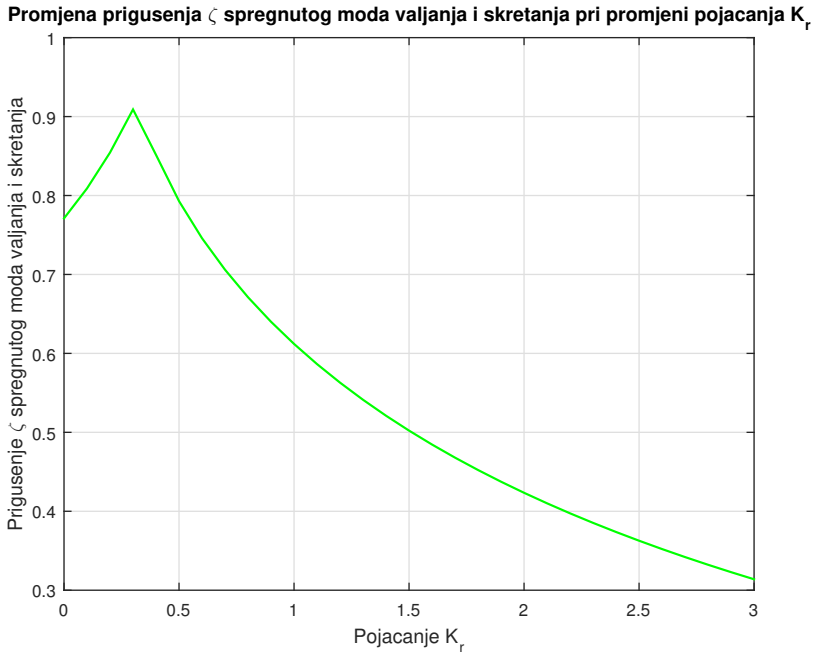


Slika 6.11: Prikaz modela sustava stabilizacije sa pojačanjem K_p,K_ϕ i K_r

Na postojeći model dodana je negativna povratna veza po kutnoj brzini r. Ponovno je vrijednost pojačanja, ali sada K_r varirana od 0 do 3, a rezultati su prikazani u nastavku. Sa slike (6.13) se uočava da je vrijednost pojačanja za koju je prigušenje optimalno $K_p = 0.7$, te se sa tom vrijednosti vrši daljnji proračun.



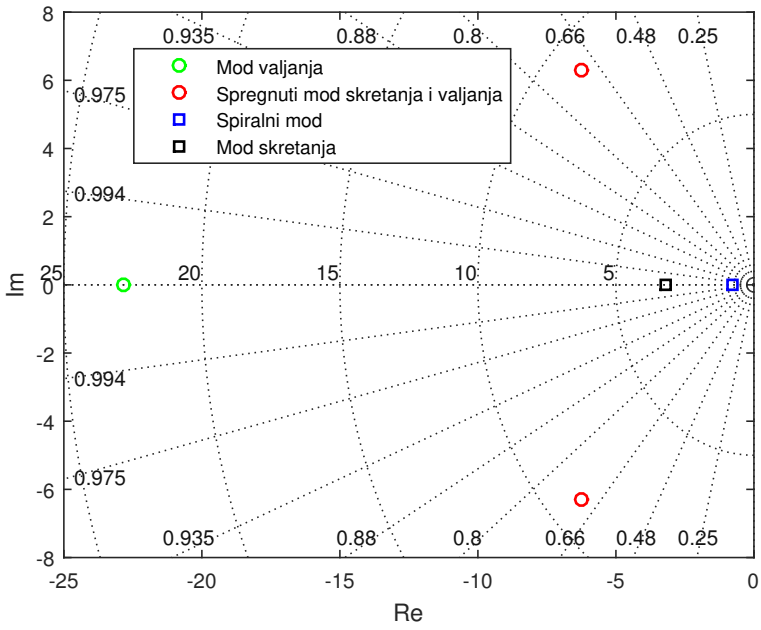
Slika 6.12: Prirodna frekvencija ω_n spregnutog moda valjanja i skretanja za $K_p = 0.1$, $K_\phi = 0.8$ i $K_r = 0 \cdots 3.0$



Slika 6.13: Prigušenje ζ_{dr} spregnutog moda valjanja i skretanja za $K_p = 0.1$, $K_\phi = 0.8$ i $K_r = 0 \cdots 3.0$

Slika (6.14) prikazuje korijene karakterističnog polinoma matrice $\mathbf{A}$ za ovaj novi

sustav.



Slika 6.14: Korijeni ζ_{dr} spregnutog moda valjanja i skretanja za $K_p = 0.1$, $K_\phi = 0.8$ i $K_r = 0.7$

$$\begin{aligned} r_3 &= -22.8663 \\ r_4 &= -6.2414 \pm 6.2614i \\ r_5 &= -0.8114 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Slika (6.14) prikazuje korijene iz (6.6). Nakon korijena određeni su parametri kvalitete upravljanja.

Za mod valjanja određene su vremenska konstanta moda valjanja τ_v, period T_v i vrijeme prepolovljenja amplitude moda valjanja $\tau_{1/2}$:

$$\begin{aligned} \tau_v &= 0.043732\,\mathrm{s} \\ T_v &= 0.27478\,\mathrm{s} \\ \tau_{1/2} &= 0.0303\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Za spregnuti mod valjanja i skretanja određene su prirodna frekvencija ω_n i prigušenje ζ :

$$\begin{aligned} \omega_{dr} &= 8.8409 \text{ rad/s} \\ \zeta_{dr} &= 0.70597 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Za spiralni mod određeni su period spiralnog moda T_{sp} i vrijeme udvostručenja amplitude τ_2 :

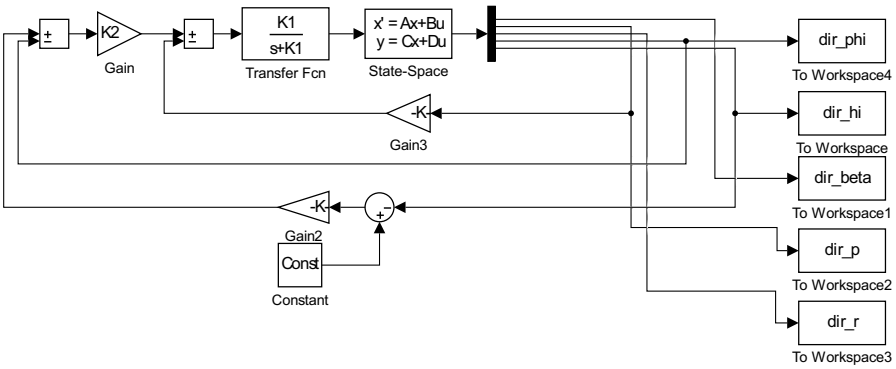
$$\begin{aligned} T_{sp} &= 7.743 \text{ s} \\ \tau_2 &= 0.85425 \text{ s} \end{aligned} \tag{6.9}$$

6.2. Sustav za upravljanje smjerom leta

Sustav upravljanja smjerom leta je temeljni sustav za sustave VOR i ILS. U nastavku je na slici (6.15) prikazan model sustava upravljanja iz razvojne okoline Simulink. Sustav koristi povratne veze po kutnoj brzini valjanja p i po kutu skretanja χ. Potrebno je odrediti pojačanja sustava. Analizom kakva je provedena u prethodnih potpoglavljima došlo se do vrijednosti pojačanja $K_2 = 45$ i $K_\chi = 1$, dok je za pojačanje po kutnoj brzini p bilo potrebno odrediti dinamiku žirokompasa. U literaturi [10] su objašnjeni parametri koji utječu na dinamiku tog senzora, te je dana potrebna vrijednost za uređaj Analog Devices ADXRS450.

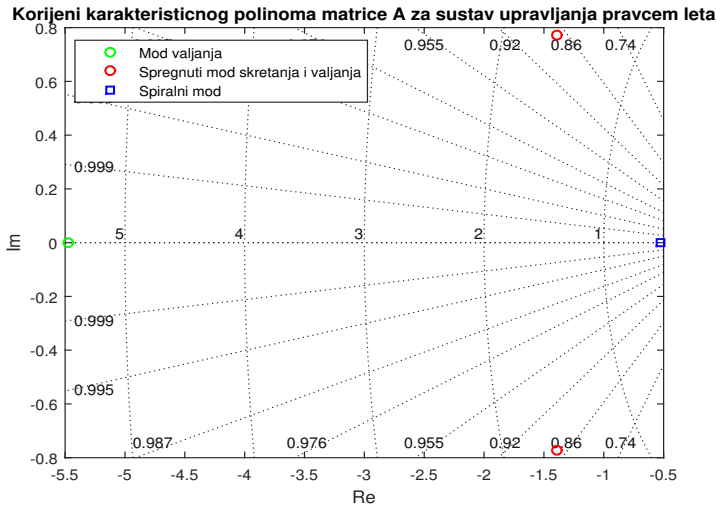
Dodatno, ovaj model zahtjeva kut skretanja χ kao varijablu, za što nam je potrebna proširena matrica **A** koja uključuje jedan dodatni član $\frac{g}{U^0}$ gdje g predstavlja gravitacijsku konstantu, a U^0 brzinu leta letjelice. Matrica je dimenzija 5×5, a koeficijente koji figuriraju u proširenoj matrici **A** prikazuje (6.10).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{Y_B^0}{u^0} & \frac{Y_p^0}{u^0} & \frac{Y_r^0}{u^0} - 1 & \frac{g\cos\theta^0}{u^0} & \\ L_B^0 & L_p^0 & L_r^0 & 0 & 0 \\ N_B^0 & N_p^0 & N_r^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan\theta^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g}{u^0} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$



Slika 6.15: Prikaz modela sustava za upravljanje smjerom leta

Slika (6.16) prikazuje korijene karakterističnog polinoma matrice **A** za sustav upravljanja smjerom leta. Navedeni korijeni služe za izračun parametara za ocjenu kvalitete upravljanja letjelicom.



Slika 6.16: Korijeni karakterističnog polinoma matrice **A** za sustav upravljanja smjerom leta

$$
\begin{aligned}
r_3 &= -5.4732 \\
r_4 &= -1.3885 \pm 0.7729i \\
r_5 &= -0.5297
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Za mod valjanja (MV) određene su vremenska konstanta moda valjanja τ_v, period T_v i vrijeme prepolovljenja amplitude moda valjanja $\tau_{1/2}$, za spregnuti mod valjanja i skretanja (MSV) određene su prirodna frekvencija ω_n i prigušenje ζ dok su za spiralni mod (SP) određeni period spiralnog moda T_{sp} i vrijeme udvostručenja amplitude τ_2. Tablica (6.1) prikazuje usporedbu parametara dva sustava.

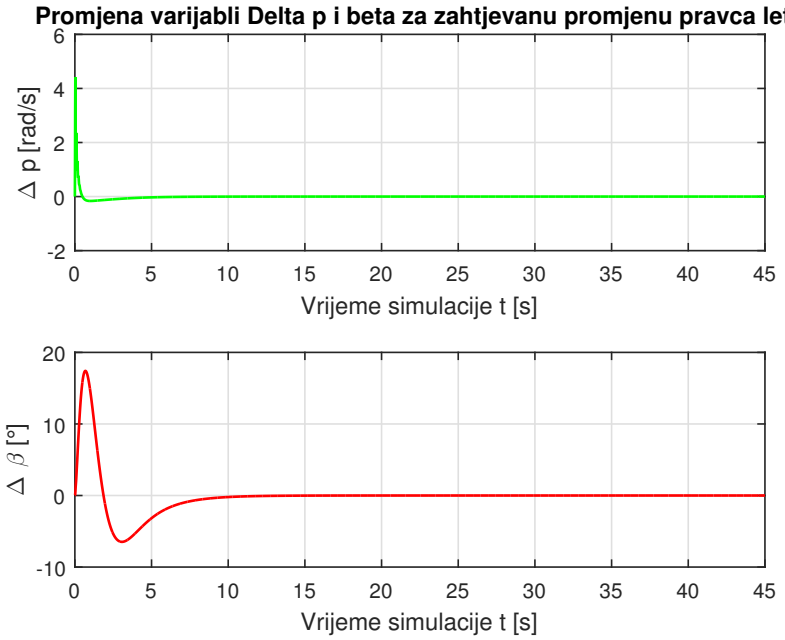
Tablica 6.1: Usporedba značajki sustava upravljanja smjerom leta i otvorenog sustava

Mod gibanja	**Otvoreni**	**Upravljanje smjerom leta**
MV	$\tau_v = 0.038516$ s $T_v = 0.242$ s $\tau_{1/2} = 19.0743$ s	$\tau_v = 0.18271$ s $T_v = 1.148$ s $\tau_{1/2} = 0.1264$ s
MSV	$\omega_{sv} = 3.4311$ rad/s $\zeta_{sv} = 0.50219$	$\omega_{sv} = 1.5891$ rad/s $\zeta_{sv} = 0.87376$
SP	$T_{sp} = 126.776$ s $\tau_2 = 13.9856$ s	$T_{sp} = 11.861$ s $\tau_{1/2} = 1.308$ s

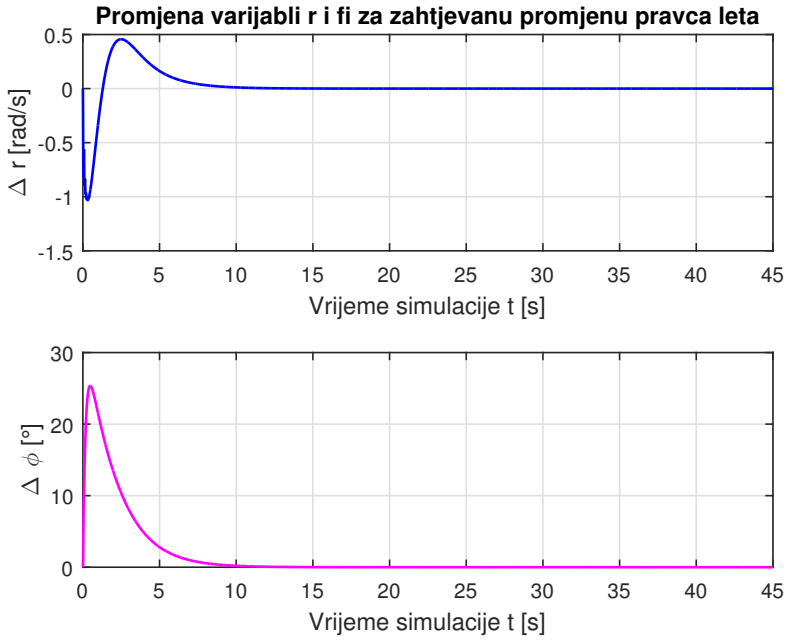
Slike (6.17) do (6.19) prikazuju promjene varijabli bočnog gibanja pri zahtjevu za promjenom smjera od 30 °.



Slika 6.17: Odziv sustava upravljanja smjerom leta na zahtjevanu promjenu $\Delta\chi$

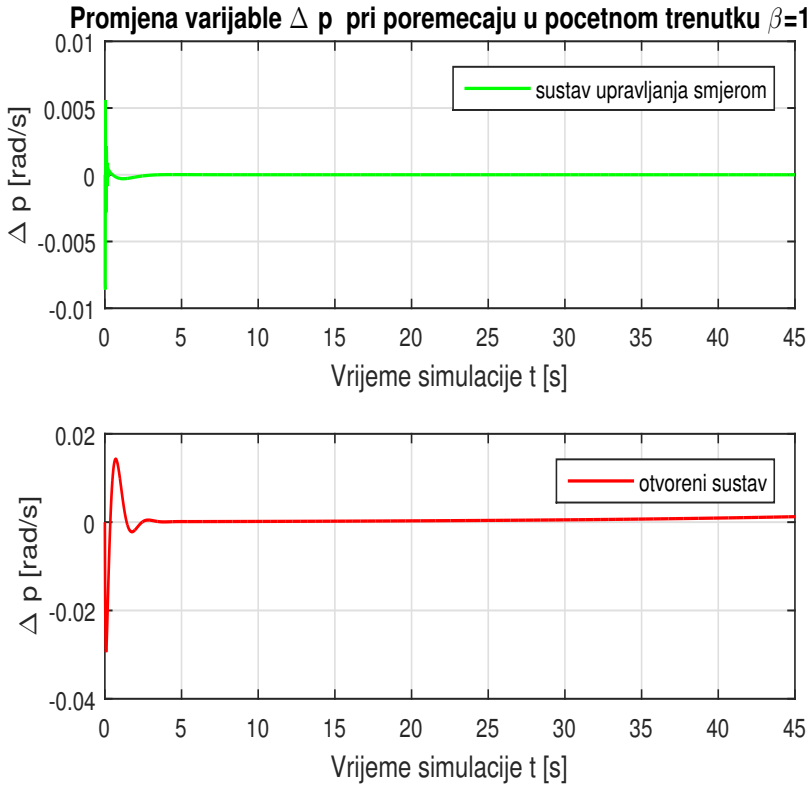


Slika 6.18: Promjena varijabli Δp i $\Delta\beta$ pri zahtjevanoj promjeni $\Delta\chi$

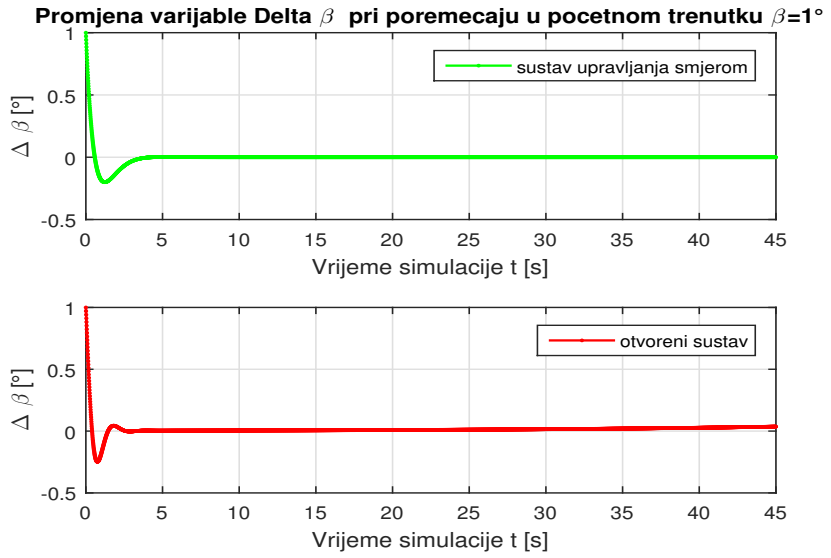


Slika 6.19: Promjena varijabli Δr i $\Delta\phi$ pri zahtjevanoj promjeni $\Delta\chi$

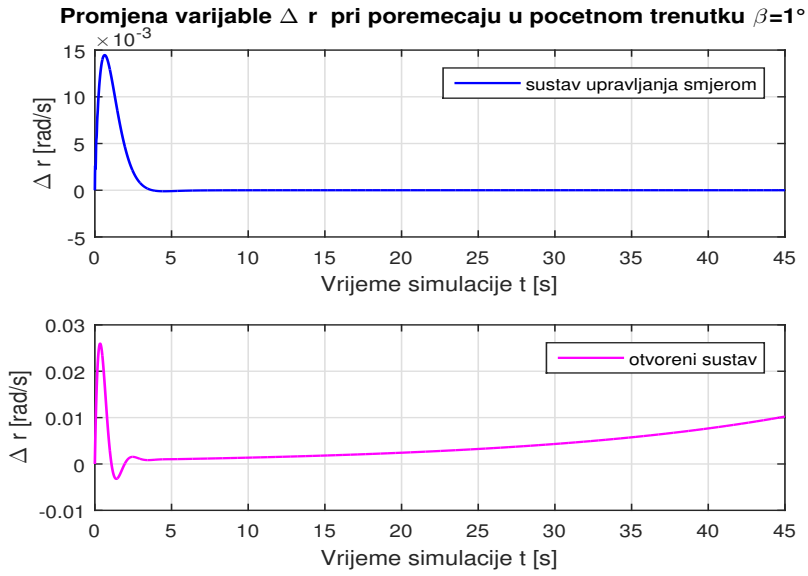
Slike (6.20) do (6.24) prikazuju odzive sustava po varijablama Δp , $\Delta\beta$, Δr , $\Delta\phi$ i $\Delta\chi$ za poremećaj u početno trenutku $\Delta\beta = 1°$. Posebno su zanimljive slike (6.22) i (6.24) jer pokazuju razlike u odzivu kod kuta valjanja ϕ i kuta zanosa χ za sustav upravljanja smjerom leta i otvoreni sustav. Vidljivo je da su iznosi amplituda za otvoreni sustav značajno veći od iznosa amplitude za sustav upravljanja smjerom leta.



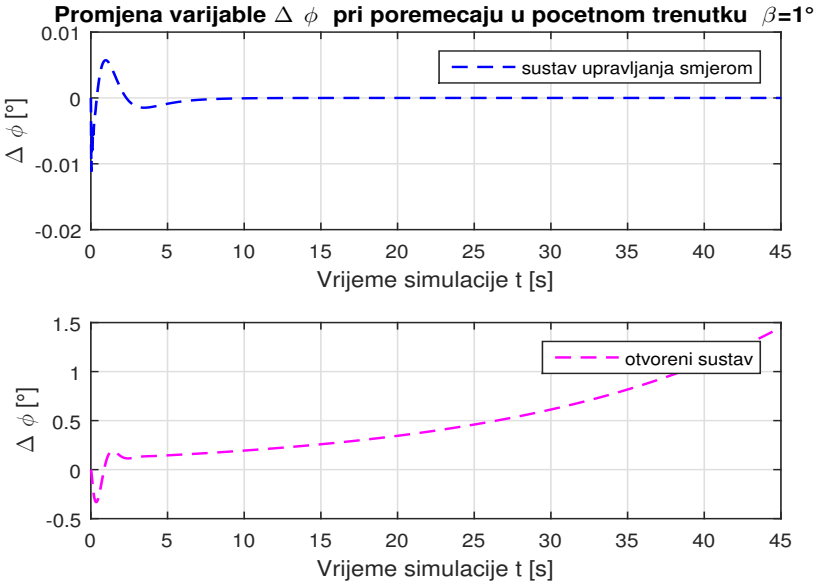
Slika 6.20: Usporedba odziva Δp za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta



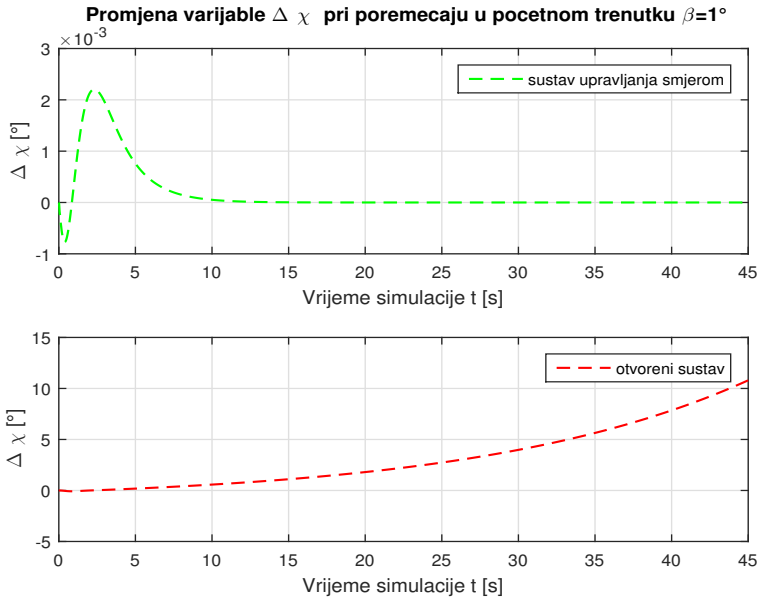
Slika 6.21: Usporedba odziva $\Delta\beta$ za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta



Slika 6.22: Usporedba odziva Δr za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta



Slika 6.23: Usporedba odziva $\Delta\phi$ za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta



Slika 6.24: Usporedba odziva $\Delta\chi$ za otvoreni sustav i sustav upravljanja smjerom leta

7 Zaključak

U diplomskom radu su određeni linearni modeli gibanja letjelice konfiguracije letećeg krila te je na temelju bočnog linearnog modela modeliran sustav stabilizacije i sustav upravljanja smjerom leta. Letjelica je razmatrana pod uvjetima standardne atmosfere bez vjetram te je
U radu je izvršeno slijedeće:

- izrađen je 3D model letjelice sa ciljem dobivanja podataka o masi i inerciji letjelice
- metodom projektne aerodinamike je u programskom paketu MATLAB određen linearni model letjelice, koji je provjeren i nadopunjen rezultatima analize izvršene u programskom paketu XFLR5
- analizirane su specifičnosti upravljanja modelom letjelice konfiguracije letećeg krila
- određen je utjecaj pogona na aerodinamičke koeficijente letjelice
- izrađeni su linearni modeli gibanja za uzdužno i bočno gibanje
- na temelju razvijenog linearnog modela definirani su sustavi stabilizacije bočnog gibanja letjelice u razvojnoj okolini Simulink programskog paketa MATLAB
- izrađen je model sustava upravljanja smjerom leta.

Rezultati dobiveni analizom dinamičke stabilnosti upućuju na zaključak da je letjelica uzdužno dinamički stabilna, no ne i bočno, isključivo zbog pozitivnog korijena spiralnog moda. Uvedene su povratne veze po kutnoj brzini p koji je nadograđen sustavom stabilizacije po ϕ te konačno po kutnoj brzini skretanja r. Uvođenjem sustava

stabilizacije (povratnim vezama po varijablama stanja) popravljeni su nedostaci koje je letjelica imala te se letjelica ponaša stabilno, odziv na pobudu ili poremećaj u početnom trenutku je relativno brz i dovoljno prigušen. Daljnji razvoj bi mogao ići u pravcu sustava stabilizacije uzdužnog gibanja te modeliranja složenijih sustava upravljanja trajektorijom zrakoplova. U modelu bi se mogla poboljšati dinamika aktuatora i senzora, sustav bi se mogao učiniti robusnijim s obzirom na promjene visine, brzine te promjenu mase letjelice i položaja centra mase. Dodatno poboljšanje modela bi se moglo postići ispitivanjem utjecaja pogona na bočnu stabilnost letjelice.

Literatura

[1] Dieter Hausmann, Werner Ziernig, Gunter Schreier & Peter Strobl, *Monitoring of gas pipelines- a civil UAV application*, Aircraft Engineering and Aerospace Technology; An International Journal, Vol. 77, No. 5, 2005.

[2] Slobodan Janković, Mehanika leta zrakoplova, FSB Zagreb, 2001.

[3] XFLR5, XFLR Guidelines, 2014., https://sourceforge.net/projects/xflr5/files/Guidelines.pdf/download, srpanj 2016.

[4] Pravilnik o sustavima bespilotnih zrakoplova, NN 49/15, http://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2015_05_49_974.html, travanj 2016.

[5] D.P. Raymer, Aircraft Design: A Conceptual Approach. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington D.C., 1992.

[6] About XFLR5 calculations and experimental measurements, http://www.xflr5.com/docs/Results_vs_Prediction.pdf, srpanj 2016.

[7] AXI GOLD 2826/10 V2 Technical Specification, https://www.modelmotors.cz/product/detail/394/, srpanj 2016.

[8] John B. Brandt , Michael S. Selig, Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers, 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper 2011-1255, Orlando, siječanj 2011.

[9] UIUC Propeller Database http://aerospace.illinois.edu/m-selig/props/propDB.html, srpanj 2016.

[10] Randal W. Beard, Timothy W. McLain, Small Unmanned Aircraft, Theory and Practice, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2012.

[11] Slobodan Janković, Todor Kostić, Milan Vrdoljak, Stabilnost i upravljvost zrakoplova, Interne skripte, 2008/2009.

[12] MathWorks Inc. , MATLAB *product help*, 2015.