H-beskonačno optimalno upravljanje nestabilnim elektromehaničkim sustavom

Jukić, Krešimir

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:672265

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Krešimir Jukić

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Marko Jokić

Student:
Krešimir Jukić

Zagreb, 2020.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Marku Jokiću na ukazanom povjerenju, zanimljivoj temi i vodstvu u izradi ovog rada.

Veliko hvala mag. ing. Mihaelu Lobroviću i doc. dr. sc Vladimiru Miliću na strpljenju, uloženom vremenu i ustupljenim materijalima.

Na kraju, hvala obitelji i prijateljima na podršci tokom studija.

Krešimir Jukić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa: 602 - 04 / 20 - 6 / 3	
Ur. broj: 15 - 1703 - 20 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Krešimir Jukić** Mat. br.: 0035204233

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **H-beskonačno optimalno upravljanje nestabilnim elektromehaničkim sustavom**

Naslov rada na engleskom jeziku: **H-infinity optimal control of unstable electromechanical system**

Opis zadatka:

Matematičko modeliranje i računalna simulacija složenih mehaničkih i elektromehaničkih sustava nužni su prilikom projektiranja takvih sustava, te predstavljaju osnovu za sintezu sustava upravljanja. Primjer složenog elektromehaničkog sustava je razvijen u okviru projekta „Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima" (projekt HRZZ-UIP-2013-11-9354), i sastoji se od kolica upravljanih istosmjernim elektromotorom koja su smještena na nestabilnoj klackalici. Pomicanjem kolica, klackalica se dovodi u ravnotežni položaj.

U radu je potrebno odrediti matematički model sustava klackalica-kolica koji opisuje nelinearno dinamičko ponašanje sustava. Nadalje, na temelju takvog modela, potrebno je izvesti linearizirani model prostora stanja. Koristeći linearizirani model, izvršiti sintezu optimalnog H-beskonačno sustava upravljanja koji će stabilizirati sustav u ravnotežnom položaju. Istražiti utjecaj primjene težinskih frekvencijskih filtera na učinkovitost sustava upravljanja. Rezultirajući sustav upravljanja implementirati u vidu računalnog programa, te provesti eksperimentalnu provjeru na modelu kolica na nestabilnoj klackalici.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Datum predaje rada:	Predviđeni datum obrane:
30. travnja 2020.	2. srpnja 2020.	6. – 10.7.2020.

Zadatak zadao: Predsjednica Povjerenstva:

Doc. dr. sc. Marko Jokić Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

Sadržaj **II**

Popis slika **IV**

Popis tablica **V**

Popis oznaka **VI**

Sažetak **X**

Summary **XI**

1 Uvod **1**

2 Linearni sustavi i upravljanje **3**

2.1 Opisivanje linearnih sustava 3

2.1.1 Rješenja linearnih sustava 3

2.1.2 Linearizacija nelinearnih sustava 4

2.2 H_∞ optimalno upravljanje 5

2.2.1 Singularne vrijednosti 6

2.2.2 H_∞ norma 8

2.2.3 Matematički model sustava 9

2.2.4 H_∞ optimizacija 11

2.3 Robusno upravljanje 15

2.3.1 Modeliranje nesigurnosti 15

2.3.2 Strukturirane singularne vrijednosti 17

2.3.3 μ sinteza 19

3 Modeliranje dinamike sustava **21**

3.1 Lagrangeove jednadžbe 21

3.2 Dinamika sustava kolica na njihalu 23

3.2.1 Linearizacija i zapisivanje u prostor stanja 27

3.3 Dinamika sustava triju oprugama povezanih sustava kolica na njihalu . . 29
3.3.1 Linearizacija i zapisivanje u prostor stanja 35
3.4 Model elektromotora 37
3.5 Parametri sustava 38

4 Sinteza regulatora **39**
4.1 Sinteza regulatora za sustav kolica na njihalu 39
4.1.1 Rezultati simulacije 44
4.1.2 Utjecaj težinskih filtera na odbacivanje poremećaja 47
4.1.3 Sinteza regulatora za vođenje po referenci 52
4.1.4 Utjecaj težinskih filtera na vođenje sustava 55
4.1.5 Zaključak 59
4.2 Sinteza regulatora za sustav triju oprugama povezanih podsustava kolica na njihalu 62
4.2.1 Centralizirano upravljanje 63
4.2.2 Decentralizirano upravljanje 65
4.2.3 Distribuirano upravljanje 66
4.2.4 Posebni slučajevi 71
4.2.5 Zaključak 74

5 Eksperimentalna provjera **77**
5.1 Opis eksperimentalnog postava 77
5.2 Rezultati 78

6 Zaključak **85**

Popis literature **87**

Prilog **89**

POPIS SLIKA

1 Uz objašnjenje singularnih vrijednosti 8
2 Poopćeni sustav i regulator 10
3 Prikaz sustava s aditivnom nesigurnosti (lijevo) i ulaznom multiplikativnom nesigurnosti (desno)[10] 16
4 Standardna $\mathbf{M} - \Delta$ konfiguracija [10] 16
5 Blok dijagram za analizu robusnih performansi [16] 18
6 Sustav kolica na njihalu 24
7 Pojednostavljeni prikaz sustava triju kolica i njihala povezanih oprugama 30
8 Veza i-tog njihala s j-tim njihalom s jednom oprugom s desne strane . . 33
9 Rezultati simulacije za impulsni poremećaj (moment iznosa 1 Nm u trajanju 0,1 s) 45
10 Bodeovi dijagrami 45
11 Utjecaj mjernog šuma na naponski signal 46
12 Rezultati simulacije za slučaj s početnom kutnom brzinom $\dot{\varphi} = 0,1$ . . . 47
13 Odziv sustava dobivenih s različitim frekvencijama ω_{W}, odziv na impulsni moment 49
14 Bodeovi dijagrami za sustave dobivene s različitim frekvencijama ω_{W} . . 49
15 Odziv sustava dobivenih s različitim pojačanjimaA_{m}, odziv na impulsni moment 50
16 Bodeovi dijagrami za sustave dobivene s različitim pojačanjima A_{m} . . . 50
17 Rezultati simulacija za slučajeve s ograničenim naponom izvora 51
18 Odziv sustava dobivenih s različitim pojačanjima A_{e}, odziv na step referencu 56
19 Bodeovi dijagrami za sustave dobivene s različitim pojačanjima A_{e} 56
20 Odziv sustava dobivenih s različitim frekvencijama ω_{e}, odziv na step referencu 57
21 Bodeovi dijagrami za sustave dobivene s različitim frekvencijama ω_{e} . . . 57
22 Odziv sustava dobivenih s različitim pojačanjima A_{e}, odziv na impulsni moment 58
23 Odziv sustava dobivenih s različitim frekvencijama ω_{e}, odziv na impulsni moment 58

24 Shema centraliziranog upravljanja 63
25 Odziv sustava s centraliziranim regulatorom 64
26 Shema decentraliziranog upravljanja 65
27 Odziv sustava s decentraliziranim upravljanjem 66
28 Shema distribuiranog upravljanja 66
29 Odziv sustava s distribuiranim upravljanjem, prva varijanta 68
30 Odziv sustava s distribuiranim upravljanjem, druga varijanta 68
31 Odziv sustava s distribuiranim upravljanjem, treća varijanta 70
32 Odziv sustava s distribuiranim upravljanjem, četvrta varijanta 71
33 Odziv sustava s decentraliziranim upravljanjem (sinteza na podsustavima) 72
34 Odziv sustava s decentraliziranim upravljanjem (robusna sinteza na podsustavima) 74
35 Eksperimentalni postav 77
36 Pomak kolica, simulacija i eksperiment 79
37 Zakret njihala, simulacija i eksperiment 79
38 Napon, simulacija i eksperiment 80
39 Pomak kolica, simulacija i eksperiment, s kompenzatorom trenja 81
40 Zakret njihala, simulacija i eksperiment, s kompenzatorom trenja 82
41 Napon, simulacija i eksperiment, s kompenzatorom trenja 82
42 Pomak kolica, praćenje reference, simulacija i eksperiment 83
43 Kut zakreta njihala, praćenje reference, simulacija i eksperiment 83
44 Napon, praćenje reference, simulacija i eksperiment 84

POPIS TABLICA

2 Parametri sustava 38
3 Utjecaj filtera W_{u} na performanse sustava 59
4 Utjecaj filtera W_{e} i W_{r} na performanse sustava 60
5 $H\infty$ norme sustava ovisno o strukturi regulatora 75
6 $H\infty$ norme sustava ovisno o strukturi regulatora i načinu sinteze regulatora 76

POPIS OZNAKA

Oznaka	**Opis**	**Jedinica**
$\mathbf{a}$	vektor akceleracije	$\mathrm{m/s^2}$
$\mathbf{A}$	matrica prostora stanja	
$A_\mathrm{e},\ A_\mathrm{m}$	pojačanja težinskih filtera	
$\mathbf{A}_\mathrm{k}$	matrica prostora stanja regulatora	
$\mathbf{B}$	matrica ulaza	
$\mathbf{B}_\mathrm{k}$	matrica ulaza regulatora	
$\mathbf{B}_1$	matrica utjecaja ulaznih signala na varijable stanja	
$\mathbf{B}_2$	matrica utjecaja upravljačkih signala na varijable stanja	
$\mathbf{C}$	matrica izlaza	
$\mathbf{C}_\mathrm{k}$	matrica izlaza regulatora	
$\mathbf{C}_1$	matrica utjecaja varijabli stanja na vektor izlaza	
$\mathbf{C}_2$	matrica utjecaja varijabli stanja na vektor mjerenih varijabli	
$\mathbf{D}$	matrica utjecaja ulaznog signala na izlazni signal	
$\mathbf{D}_\mathrm{k}$	matrica utjecaja ulaznog signala regulatora na vektor izlaznih signala regulatora	
$\mathbf{D}_{11}$	matrica utjecaja ulaznog signala na vektor izlaza	
$\mathbf{D}_{12}$	matrica utjecaja upravljačkih varijabli na vektor izlaza	
$\mathbf{D}_{21}$	matrica utjecaja ulaznog signala na vektor mjerenih varijabli	
$\mathbf{D}_{22}$	matrica utjecaja upravljačkih varijabli na vektor mjerenih varijabli	
e	integral greške kuta zakreta	rad·s
E_k	kinetička energija	J
E_p	potencijalna energija	J
E_pg	gravitacijska potencijalna energija	J

Oznaka	**Opis**	**Jedinica**
E_{po}	elastična potencijalna energija opruga	J
$\mathbf{F}$	vektor sila	N
F_{k}	vanjska sila na kolica	N
F_{tr}	sila trenja	N
F_{up}	upravljačka sila	N
$\mathbf{G}$	matrica prijenosnih funkcija	
$\mathbf{G}_{\mathrm{p}}$	perturbirana matrica prijenosnih funkcija	
$\mathbf{G}_{\mathrm{W}}$	matrica prijenosnih funkcija sustava modificiranog težinskim filterima	
$\mathbf{G}_0$	nominalna matrica prijenosnih funkcija	
$\|\|\mathbf{G}\|\|_\infty$	H_∞ norma sustava $\mathbf{G}$	
$\|\|\mathbf{G}\|\|_2$	H_2 norma sustava $\mathbf{G}$	
$h_{\mathrm{k}},\ h_{\mathrm{k},i}$	položaj težišta kolica	m
$h_{\mathrm{n}},\ h_{\mathrm{n},i}$	položaj težišta njihala	m
I	struja u armaturi motora	A
$J_{\mathrm{k}},\ J_{\mathrm{k},i}$	moment inercije kolica	kg·m^2
$J_{\mathrm{n}},\ J_{\mathrm{n},i}$	moment inercije njihala	kg·m^2
k	krutost opruge	N/m
$\mathbf{K}$	matrica prijenosnih funkcija regulatora	
K_{e}	konstanta elektromotorne sile	V·s/rad
K_{t}	momentna konstanta elektromotora	N·m/A
L	Lagrangeova funkcija	J
L	induktivitet armature motora	V·s/A
$m_{\mathrm{k}},\ m_{\mathrm{k},i}$	masa kolica	kg
$m_{\mathrm{n}},\ m_{\mathrm{n},i}$	masa njihala	kg
$\mathbf{M}$	vektor momenata	N·m
$\mathbf{M}$	matrica poopćenih masa	
$\mathbf{M},\ \mathbf{M}_{ij}$	matrice prijenosnih funkcija sustava s nesigurnostima	
M_{p}	moment koji djeluje na njihalo i kolica	N·m

Oznaka	**Opis**	**Jedinica**
n	red upravljanog sustava	
n	red regulatora	
p	prijenosni omjer	
$\mathbf{P}_{ij}$	matrice prijenosnih funkcija upravljanog sustava	
q	poopćena koordinata	
$\mathbf{q}$	vektor poopćenih koordinata	
Q	poopćena sila	
$\mathbf{Q}$	vektor poopćenih sila	
$\mathbf{r}$	vektor položaja	m
r	referentna vrijednost kuta zakreta	rad
r	kinematski radijus zupčanika	m
R	otpor armature motora	Ω
s	pomak kolica	m
t	vrijeme	t
s	kompleksna varijabla, funkcija dobave	
$\mathbf{u}$	vektor ulaza, vektor upravljačkih varijabli	
U	napon izvora,symbol=V	
$\mathbf{U}$	lijeva matrica singularne dekompozicije	
V	Ljapunovljeva funkcija	
$\mathbf{V}$	desna matrica singularne dekompozicije	
$\mathbf{y}$	vektor izlaza, vektor mjerenih varijabli	
y_0	dimenzija sustava užadi i opruga	m
$\mathbf{x}$	vektor varijabli stanja	
$\mathbf{x}_\mathrm{k}$	vektor varijabli stanja regulatora	
x_0	dimenzija sustava užadi i opruga	m
$\mathbf{X}$	Ljapunovljeva matrica	
$\mathbf{w}$	vektor ulaza, vektor poremećaja	
$\mathbf{w}_\mathrm{A}$	kompleksni vektor amplituda i faznih pomaka ulaznih signala	

Oznaka	**Opis**	**Jedinica**
W_e	težinski filter integrala greške kuta zakreta	
W_u	težinski filter upravljačkog signala	
W_r	težinski filter referentne vrijednosti	
$\mathbf{W}_\mathrm{z}$	matrica izlaznih težinskih filtera	
$\mathbf{W}_\mathrm{w}$	matrica ulaznih težinskih filtera	
$\mathbf{z}$	vektor izlaza, vektor greške	
$\mathbf{z}_\mathrm{A}$	kompleksni vektor amplituda i faznih pomaka izlaznih signala	
z_0	dimenzija sustava užadi i opruga	m
Δ	matrica nesigurnosti	
λ	svojstvena vrijednost	
μ	strukturirana singularna vrijednost	
σ	singularna vrijednost	
Σ	matrica singularnih vrijednosti	
φ	zakret njihala	rad
$\omega_\mathrm{e},\ \omega_\mathrm{w}$	frekvencija težinskog filtera	rad/s

SAŽETAK

Tema ovog diplomskog rada je H_∞ optimalno upravljanje nestabilnim elektromehaničkim sustavom. H_∞ optimizacija temelji se na sustavnom snižavanju H_∞ norme koja predstavlja najveću singularnu vrijednost matrice prijenosnih funkcija, tj. najveći omjer 2-norme izlaznog signala s 2-normom ulaznog signala po frekvenciji i po vektoru ulaznog signala. Ipak, sinteza regulatora koji je optimalan po H_∞ normi daje nominalno dobar frekvencijski odziv, ali ne uvjetuje nužno dobro ponašanje u realnim uvjetima. Uvođenjem težinskih filtera, tj. prijenosnih funkcija kojima se modificiraju ulazni i izlazni signali, modificira se prijenosna funkcija sustava za potrebe H_∞ optimizacije kako bi se penalizirali ciljani izlazni signali za ciljane ulazne signale. Ciljanim odabirom filtera može se postići povoljan frekvencijski i tranzijentni odziv.

U ovom radu izveden je model sustava kolica na njihalu i sustava triju kolica na njihalu povezanih sustavom oprugama. Izvedeni modeli su linearizirani, a nad lineariziranim modelima provedene su sinteze različitih regulatora. Na modelu sustava kolica na njihalu istražen je utjecaj odabranih težinskih filtera na performanse sustava. Prikazani su rezultati i procedura koji mogu poslužiti za odabir težinskih filtera za sintezu regulatora i za druge sustave, ali zbog kompleksnih veza između parametara filtera i mjera performansi nije moguće dati striktne smjernice. Nadalje, na sustavu triju kolica na njihalu povezanih oprugama razmotrena je mogućnost modifikacije strukture regulatora s ciljem postizanja decentraliziranog ili distribuiranog upravljanja. Ispitane su performanse sustava s regulatorima različite strukture. Očekivano, sustav s centraliziranim upravljanjem daje najpovoljnije rezultate, a performanse sustava s distribuiranim upravljanjem blago lošije. Razmotrena je mogućnost decentraliziranog upravljanja regulatorima čija je sinteza provedena na modelu podsustava zanemarujući pritom dinamiku ostatka sustava. Pokazano je da sustav s takvim upravljanjem pokazuje lošije performanse.

Upravljanje sustavom kolica na njihalu implementirano je u vidu računalnog programa i ispitano na eksperimentalnom postavu razvijenom u sklopu projekta 'Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima'.

Kjučne riječi: H_∞ optimalno upravljanje; H_∞ sinteza;težinski filteri; modeliranje dinamike; struktura regulatora;

SUMMARY

The topic of this thesis is H_∞ optimal control of unstable electromechanical system. H_∞ optimization is based on a systematic decrease of H_∞ norm, which represents the highest singular value of transfer function matrix, ie. the highest ratio of the 2-norm of the output signal and the 2-norm of the input signal in terms of signal frequency and in terms of the input signal. H_∞ optimization results with a system with nominally optimal frequency response, but does not necessary have good response in real-life conditions. By introducing the weighting filters, ie. transfer functions used for modification of input and output signals, the original transfer function matrix is being modified for H_∞ optimization purposes with the purpose of penalization of the chosen output signals caused by the chosen input signals. Precise determination of weighting filter results with both good frequency and transient response of the system.

In this paper the model of seesaw-cart system is derived. The model of three elastically interconnected seesaw-cart systems is also derived. Derived models are linearised, and linearised models are used for controller synthesis. Investigation of filter parameters influence on specific performance measures of one seesaw-cart model is performed. Obtained results are presented, and can be used as guidelines for future control synthesis. Due to the nonlinear influence of filter parameters on performance measures strict and precise conclusions are impossible, but presented results could be a starting point for future investigations of filter influence on different systems performances. The model of three interconnected seesaw-cart system is used for the investigation of influence of controller's structure on system performance. The centralised controller's structure is modified so it represents set of decentralised or distributed controllers. As expected, the system with centralised control obtains best performance, while performance of the system with distributed control is slightly worse. Possibility of decentralised control with controllers synthesised on one seesaw-cart subsystem while ignoring the rest of system dynamics is considered. System with such control obtained much worse performance.

The control of one seesaw-cart system is realised in terms of the computer program and tested on experimental setup developed as part of the project 'Control of spatially distributed dynamical systems'.

Key words: H_∞ optimal control; H_∞ synthesis; weighting filters; dynamics modelling; controller's structure;

Poglavlje 1

UVOD

Upravljanje linearnim dinamičkim sustavima učestala je pojava i javlja se u proizvodnim procesima, robotici, transportnim uređajima, energetici i drugim disciplinama [1]. Težnja optimalnosti u upravljanju dovela je do razvitka različitih kriterija optimalnosti s pripadajućim matematičkim aparatom, gdje se među relativno novijima ističe H_∞ kriterij optimalnosti. H_∞ problem postavio je Zames 1981. [2], te je prvo formuliran kao problem rješavanja algebarskih Riccatijevih jednadžbi od strane Doyla i drugih 1989. [3], a 1994. je preformuliran u problem linearnih matričnih nejednakosti od strane Gahineta i Apkariana [4]. Dodatni iskorak došao je 2006. kada su Apkarian i Noll [5] došli do optimizacijske tehnike prikladne za velike sustave sa strukturnim ograničenjima regulatora.

H_∞ norma podrazumijeva maksimalnu singularnu vrijednost matrice prijenosne funkcije po frekvenciji, tj. maksimalni omjer 2-norme izlaznog signala s 2-normom ulaznog signala po frekvenciji i po vektoru ulaznog signala, pa će H_∞ optimizacija sustavno poboljšavati najnepovoljniji frekvencijski odziv. Takav pristup garantirat će nominalno dobar frekvencijski odziv, ali ne i željeni tranzijentni odziv. Primjenom težinskih filtera (frekvencijski ovisnih težinskih funkcija), kojima se za potrebe optimizacije modificira matrica prijenosnih funkcija, moguće je oblikovati frekvencijski, a pritom i tranzijentni odziv sustava. Ipak, proces odabira težinskih filtera svodi se na princip pokušaja i pogrešaka jer, iako postoje neke smjernice za odabir, zbog nelinearnih veza između parametara filtera i odabranih mjera performansi, striktnih pravila nema. Teorijski aspekti sinteze H_∞ regulatora su relativno složeni, ali valja naglasiti da je sinteza dinamičkog regulatora reda jednakog redu sustava kojim se upravlja konveksan problem koji se efikasno rješava jer se može zapisati kao problem linearnih matričnih nejednakosti, dok se sinteza regulatora nižeg reda ili sa strukturnim ograničenjima ne može zapisati kao problem linearnih matričnih nejednakosti i predstavlja nekonveksan problem. Teorijska razmatranja od modela prostora stanja do prijenosne funkcije, pa do singularnih vrijednosti i H_∞ norme opisana su u poglavlju 2, gdje su obrađeni i neki drugi relevantni pojmovi. Obrađeni su pojmovi relevantni za analizu robusne stabilnosti i robusnih performansi i sinteze robusnog regulatora, ali zbog dobrog poznavanja dinamike i parametara sustava

rezultati sinteze robusnog regulatora nisu prikazani.

Sinteza regulatora zahtijeva poznavanje dinamičkog modela objekta regulacije. Za modeliranje mehaničkih sustava dostupan je pristup temeljen na Newtonovim jednadžbama i kinematskim ograničenjima te nešto sofisticiraniji energijski pristup gdje se koriste Lagrangeove jednadžbe. U ovom radu izveden je mehanički model eksperimentalnog postava - sustava kolica na njihalu upotrebom Lagrangeovih jednadžbi, gdje se koristio zapis kinetičke energije pomoću matrice poopćenih masa, što omogućuje sustavniji pristup izvodu jednadžbi. Pri izvodu jednadžbi za sustav s tri podsustava kolica na njihalu povezanih užadi i oprugama iskorištena je matematička struktura jednadžbi koja proizlazi iz fizikalne strukture sustava, pa je iskorišten prethodno izvedeni dinamički model podsustava kolica na njihalu te je bilo potrebno izvesti samo dio jednadžbi koji spreže dinamiku podsustava, a to je dio koji proizlazi iz potencijalne energije opruga kojima su podsustavi povezani. Dobivene jednadžbe su nelinearne, a linearizacijom dobivene jednadžbe su početna točka za sintezu regulatora. Dobivene jednadžbe prikazane su u poglavlju 3.

Cilj rada je uspješno provesti sintezu H_∞ optimalnog regulatora za modelirani sustav i pritom istražiti utjecaj težinskih filtera na performanse sustava. Zbog jednostavnosti te da bi se mogli jasnije istaknuti dobiveni rezultati, taj proces proveden je na modelu jednih kolica na njihalu. Na cjelokupnom modelu triju kolica na njihalima provedeno je ispitivanje strukture regulatora na performanse sustava, odnosno mogućosti decentralizacije upravljanja, tj. upravljanja s više regulatora gdje svaki upravlja svojim podsustavom. Za sintezu optimalnih regulatora korišten je programski paket Matlab. Dobiveni rezultati prikazani su u poglavlju 4.

Eksperimentalna provjera provedena je na sustavu kolica na njihalu razvijenim u sklopu projekta 'Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima'. U poglavlju 5 dan je detaljniji opis eksperimentalnog postava, zajedno s rezultatima eksperimenta i usporedbom sa simulacijom.

Poglavlje 2

LINEARNI SUSTAVI I UPRAVLJANJE

2.1 Opisivanje linearnih sustava

Dinamika sustava opisuje se matematičkim modelom, tj. sustavom diferencijalnih jednadžbi. Linearne vremenski invarijantne sustave moguće je opisati modelom prostora stanja [6]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{2.2}$$

gdje je $\mathbf{x}$ vektor varijabli stanja, dimenzije m, $\mathbf{u}$ je vektor ulaza dimenzije n, $\mathbf{y}$ je vektor izlaza dimenzije p, $\mathbf{A}$ je matrica dimenzija $m \times m$, $\mathbf{B}$ je matrica dimenzija $m \times n$, $\mathbf{C}$ je matrica dimenzija $p \times m$, i $\mathbf{D}$ je matrica dimenzija $p \times n$.
Za razliku od nelinearnih sustava ovisnost derivacije varijabli stanja i izlaza o varijablama stanja i ulazima je strogo linearna, tj. matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ su konstante, tj. ne ovise o varijablama stanja. Iako je većina realnih sustava nelinearna, zbog jednostavnijeg i razvijenijeg matematičkog aparata nelinearni sustavi se najčešće linearizira oko radne točke i sinteza regulatora se izvršava nad linearizirani modelom [6].

2.1.1 Rješenja linearnih sustava

Bez da se ulazi u detalje, u ovom potpoglavlju su izložena relevantna, dobro poznata rješenja teorije linearnih dinamičkih sustava, po literaturi [6–8]. Za daljnja razmatranja je potrebno definirati prijenosnu funkciju sustava:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \tag{2.3}$$

koja daje vezu između ulaznog i izlaznog signala u Laplaceovoj domeni:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s), \tag{2.4}$$

za sustav s nultim početnim uvjetima.

Opće rješenje sustava jednadžbi 2.1 i 2.2 je:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \tag{2.5}$$

Opće rješenje u slučaju harmonijskog ulaznog signala je:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x_0 - \mathbf{C}(\mathrm{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{C}(\mathrm{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 e^{\mathrm{j}\omega t} + \mathbf{D}\mathbf{u}_0 e^{\mathrm{j}\omega t}, \tag{2.6}$$

gdje prva dva člana jednadžbe s desne strane predstavljaju tranzijentni odziv, a druga dva člana stacionarni odziv. Ako se zanemari tranzijentni odziv dolazi se do jednadžbe:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{G}(\mathrm{j}\omega)\mathbf{u}_0, \tag{2.7}$$

gdje su članovi vektora $\mathbf{u}_0$ i $\mathbf{y}_0$ kompleksni brojevi čije su apsolutne vrijednosti amplitude harmonijskog signala, a kut koji zatvaraju s realnom osi je fazni pomak signala. Jednadžba 2.7 je polazište za daljnja razmatranja.

Neka svojstva koja valja spomenuti su stabilnost koja implicira da izlazni signal u slučaju odsustva ulaznog signala za neke početne uvjete poprima konačnu vrijednost, i asimptotska stabilnost koja implicira da izlazni signal u odsustvu ulaznog signala teži nuli. Neke od metoda provjere stabilnosti su provjera svojstvenih vrijednosti i traženje Ljapunovljeve funkcije. Stabilizacija nestabilnog sustava uvođenjem regulatora u sustav uvjetovana je upravljivošću, koja implicira da je varijable stanja moguće dovesti u proizvoljnu točku u konačnom vremenu, i motrivošću koja implicira da je iz poznatog ulaznog i izlaznog signala moguće razlučiti sve varijable stanja. Ipak, pošto ta razmatrana nisu usko vezana za ovaj rad, detaljniji opisi nisu izneseni, a mogu se pronaći u literaturi [6, 7]

2.1.2 Linearizacija nelinearnih sustava

Da bismo primijenili metode razvijene za linearne sustave na nelinearni sustav potrebno je linearizirati promatrani sustav oko radne točke. U općem slučaju nelinearni sustav je opisan s:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2.8}$$

U okolici radne točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$ sustav razvijen u Taylorov red ima oblik:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} =& \mathbf{f}_0 + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) + \\ & \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2 + \left.\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^2}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)^2 ...\end{aligned} \tag{2.9}$$

Uzimajući u obzir samo prva tri člana s desne strane jednadžbe i pretpostavljajući da je točka $\mathbf{x}_0 = 0, \mathbf{u}_0 = 0$ ravnotežna točka, tj. $\left.\dot{\mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} = 0$, dobiva se linearizirani model sustava:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} \mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{2.10}$$

Kako ne bi došlo do zabune, članovi prethodne jednadžbe zapisani u indeksnoj notaciji su $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = A_{ij}$ i $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j} = B_{ij}$.

2.2 H_∞ optimalno upravljanje

H_∞ norma popularna je mjera za performanse sustava. Pri sintezi H_∞ optimalnog regulatora sustav se promatra kroz frekvencijski odziv s ciljem minimizacije maksimalne singularne vrijednosti po frekvenciji, tj. s ciljem minimizacije H_∞ norme. Dok je prijenosna funkcija mjera za pojačanje jednovarijabilnih sustava, prijenosna funkcija za viševarijabilne sustave je matrica i kao takva nije pogodna za korištenje. Stoga se uvode singularne vrijednosti prijenosne funkcije koje su mjera pojačanja viševarijabilnih sustava. Prije nego se krene u razmatranje singularnih vrijednosti i H_∞ norme, ograničavamo se samo na frekvencijski odziv sustava, pa se ulazni i izlazni signal te prijenosna funkcija zapisuju kao:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\mathrm{A} e^{\mathrm{j}\omega t}, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_\mathrm{A} e^{\mathrm{j}\omega t}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{G}(s)|_{s=\mathrm{j}\omega} = \mathbf{G}(\mathrm{j}\omega), \tag{2.13}$$

gdje je $\mathbf{w}$ vektor harmonijskih ulaznih signala, $\mathbf{z}$ vektor harmonijskih izlaznih signala, a $\mathbf{w}_\mathrm{A}$ i $\mathbf{z}_\mathrm{A}$ su vektori čiji su članovi kompleksni brojevi koji sadržavaju amplitudu i fazni

pomak ulaznih i izlaznih signala. Pošto su ulazni i izlazni signali harmonijski, jednadžba:

$$\mathbf{z}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{w}(s), \tag{2.14}$$

svodi se na:

$$\mathbf{z}_{\mathrm{A}} = \mathbf{G}(\mathrm{j}\omega)\mathbf{w}_{\mathrm{A}}. \tag{2.15}$$

Dodatno za daljnja razmatranja korisno je unaprijed definirati Euklidsku normu vektora:

$$||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 ... |x_m|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}}. \tag{2.16}$$

U prethodnoj jednadžbi $||\mathbf{x}||_2$ je Euklidska norma vektora $\mathbf{x}$, a operator H je operator transponiranja i kompleksne konjugacije.

2.2.1 Singularne vrijednosti

Veličina koja govori o pojačanju viševarijabilnog sustava pri nekoj frekvenciji jest singularna vrijednost prijenosne funkcije. Singularne vrijednosti pojavljuju se u jednadžbi singularne dekompozicije matrice [9]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{H}}, \tag{2.17}$$

gdje su $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ unitarne matrice, a $\mathbf{\Sigma}$ dijagonalna matrica koja sadržava singularne vrijednosti σ_i. Unitarne matrice su one za koje vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{I}$, tj. $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{-1}$. Ako je $\mathbf{G}$ dimenzija $n \times m$ tada je dimenzija matrice U $n \times n$, dimenzija matrice V je $m \times m$ i dimenzija matrice Σ $n \times m$. Očito je da ako je $n < m$ da će biti n singularnih vrijednosti, tj. m ako je $n > m$ (u daljnjem tekstu je pretpostavljeno da je m singularnih vrijednosti). U jednadžbi 2.17 prijenosna funkcija se promatra kao konstantna matrica, što je slučaj u cijelom ovom razmatranju.

Ako jednadžbu 2.17 transponiramo i kompleksno konjugiramo te pomnožimo samu sa sobom dobiva se:

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{H}}\mathbf{U}^{\mathrm{H}}, \tag{2.18}$$

$$\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{H}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{H}}, \tag{2.19}$$

iz čega je vidljivo, s obzirom na to da su matrice $\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{H}}$ i $\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{H}}\mathbf{\Sigma}$ dijagonalne i slične s $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}$ i

$\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}$ (za transformaciju sličnosti pogledati literaturu [6, 7]), da su singularne vrijednosti matrice $\mathbf{G}$ zapravo korijeni svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}$ i matrice $\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}$, i da vrijedi izraz:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i\left(\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}\right)} = \sqrt{\lambda_i\left(\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\right)}, \tag{2.20}$$

a stupci matrica $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ redom njihovi svojstveni vektori. Svojstvo unitarnosti matrica $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ proizlazi iz činjenice da su matrice $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}$ i $\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}$ hermitske, tj. matrice se ne mijenjaju transponiranjem i kompleksnom konjugacijom, tj. imaju simetričan realni dio matrice i antisimetričan kompleksni dio matrice. Također svojstvene vrijednosti hermitske matrice su realne vrijednosti. Umjesto da se dokazuje da hermitska matrica daje takve svojstvene vrijednosti i matrice svojstvenih vektora, jednostavnije je pokazati da je za unitarnu matricu $\mathbf{T}$ i dijagonalnu matricu $\mathbf{D}$ s realnim vrijednostima matrica $\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{\mathrm{H}}$ tj. $\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}$ hermitska, što je trivijalno. Iz svojstva unitarnosti jasno je da ako matricu $\mathbf{G}$ pomnožimo sa stupcem matrice $\mathbf{V}$ dobivamo:

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \tag{2.21}$$

gdje je $\mathbf{v}_i$ i-ti stupac matrice $\mathbf{V}$, $\mathbf{u}_i$ i-ti stupac matrice $\mathbf{U}$. Nadalje, ako se ulazni signal prikaže kao linearna kombinacija svojstvenih vektora $\mathbf{v}_i$ matrice $\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}$ dobiva se:

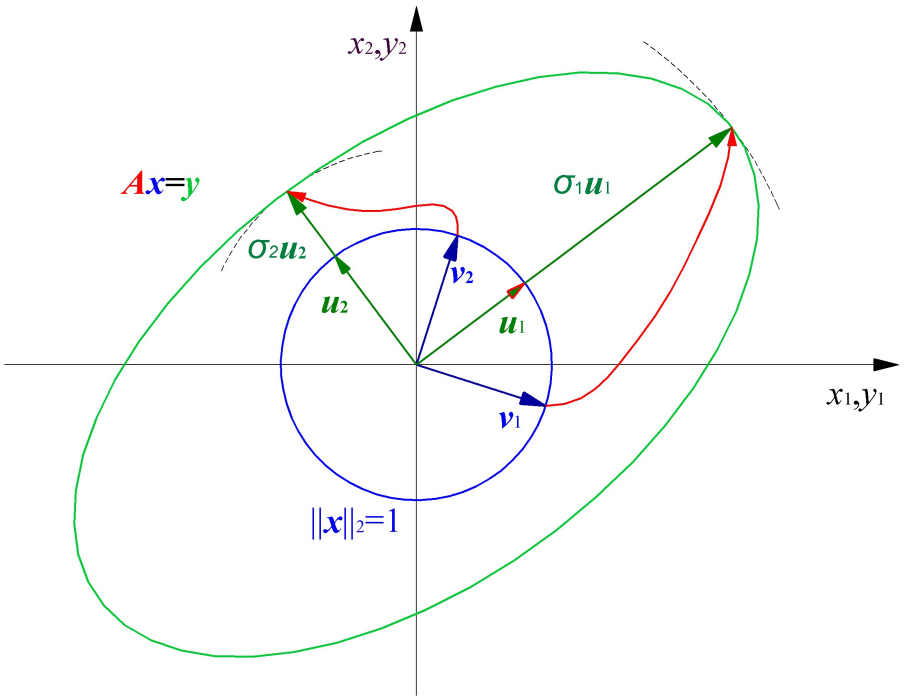
$$\mathbf{G}\sum_{i}^{m}\alpha_i\mathbf{v}_i = \sum_{i}^{m}\alpha_i\sigma_i\mathbf{u}_{\mathrm{i}}, \tag{2.22}$$

i jasno je da će uz ograničenje $||\mathbf{w}||_2 = 1$ (što je ekvivalentno uvjetu $\sum_i \alpha_{\mathrm{i}}^2 = 1$ zbog $\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathrm{H}} = \mathbf{I}$) maksimum od $||\mathbf{z}||_2$ biti $\max_i \sigma_{\mathrm{i}}$, a minimum od $||\mathbf{z}||_2$ će biti $\min_i \sigma_{\mathrm{i}}$, pa možemo pisati:

$$\overline{\sigma} = \max_{||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2 \neq 0} \frac{||\mathbf{z}_{\mathrm{A}}||_2}{||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2} = \max_{||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2 \neq 0} \frac{||\mathbf{G}\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2}{||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2}, \tag{2.23}$$

$$\underline{\sigma} = \min_{||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2 \neq 0} \frac{||\mathbf{z}_{\mathrm{A}}||_2}{||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2} = \min_{||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2 \neq 0} \frac{||\mathbf{G}\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2}{||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2}. \tag{2.24}$$

Kao što je jasno, za fiksni ulaz $||\mathbf{w}_{\mathrm{A}}||_2$ pojačanja ovise o orijentaciji vektora $\mathbf{w}_{\mathrm{A}}$. Konačno, treba naglasiti da je $\overline{\sigma}$ ovisna o frekvenciji, jer sam $\mathbf{G}(\mathrm{j}\omega)$ ovisi o frekvenciji, čime se može prijeći na razmatranje H_∞ norme.



Slika 1: Uz objašnjenje singularnih vrijednosti

2.2.2 H_∞ norma

Kada se govori o normama, navode se norme vektora, matrica, funkcija/signala (skalarnih ili vektorskih) i normama sustava [10, 11]. Primjer norme je 2-norma vektora definirana jednadžbom 2.16. U općem slučaju p-norma vektora dimenzije n je:

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_i^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.25}$$

Najčešće se javljaju 1-norma koja je suma apsolutnih vrijednosti članova vektora, 2-norma koja je korijen sume kvadrata članova vektora i ∞-norma koja je najveći član vektora. Primjer norme matrice je već definirana maksimalna singularna vrijednost matrice te Forbeniusova norma koja je korijen sume kvadrata svih singularnih vrijednosti. Maksimalna singularna vrijednost je 2-norma matrice i inducirana je norma matrice, a inducirane norme su definirane s $||\mathbf{G}||_p = \max \frac{||\mathbf{G}\mathbf{w}_\mathrm{A}||_p}{||\mathbf{w}_\mathrm{A}||_p}$. Primjer norme signala je:

$$||x(t)||_p = \left(\int_0^\infty |x|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.26}$$

U ovom radu od interesa je norma sustava H_∞ norma koja se uzima za mjeru performanse sustava i cilj ju je minimizirati. H_∞ norma definirana je kao:

$$||\mathbf{G}||_\infty = \max_{\omega \in \mathrm{R}} \overline{\sigma}(\mathbf{G}(\mathrm{j}\omega)). \tag{2.27}$$

Radi se o najvećem tj. najnepovoljnijem omjeru 2-normi vektor izlaza i vektor ulaza po frekvenciji i po orijentaciji vektora ulaza. U literaturi [11] su definirane i druge norme sustava npr. H_2 norma:

$$||\mathbf{G}||_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{trace}(\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}) \mathrm{d}\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.28}$$

i 'peak-to-peak' norma:

$$||\mathbf{G}||_{\infty,\infty} = \max_{\omega \in \mathrm{R}} \max_{||\mathbf{w}_\mathrm{A}||_\infty \neq 0} \frac{||\mathbf{z}_\mathrm{A}||_\infty}{||\mathbf{w}_\mathrm{A}||_\infty}, \tag{2.29}$$

te druge.

2.2.3 Matematički model sustava

Objekt regulacije $\mathbf{P}$ (poopćeni sustav, eng. 'generalized plant') opisan je jednadžbom [12]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

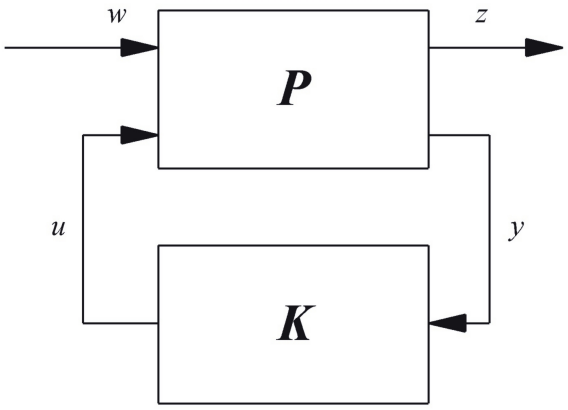
gdje $\mathbf{z}$ predstavlja vektor varijabli izlaza/greške, $\mathbf{y}$ vektor mjerenih varijabli, $\mathbf{u}$ vektor upravljačkih varijabli i $\mathbf{w}$ vektor varijabli ulaza/poremećaja. Ista jednadžba zapisana u Laplaceovoj domeni glasi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

gdje je:

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{C}_i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_j + \mathbf{D}_{ij}, \tag{2.32}$$

za $i = 1, 2$ i $j = 1, 2$.



Slika 2: Poopćeni sustav i regulator

Dinamika regulatora $\mathbf{K}$ opisana je jednadžbom:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\mathrm{k} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{k} & \mathbf{B}_\mathrm{k} \\ \mathbf{C}_\mathrm{k} & \mathbf{D}_\mathrm{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathrm{k} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

gdje su $\mathbf{x}_\mathrm{k}$ varijable stanja regulatora, a ista jednadžba u Laplaceovoj domeni glasi:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{C}_\mathrm{k}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_\mathrm{k})^{-1}\mathbf{B}_\mathrm{k} + \mathbf{D}_\mathrm{k})\mathbf{y} = \mathbf{K}\mathbf{y}. \tag{2.34}$$

Konačno, uvrštavanjem 2.33 u 2.30, (uz pretpostavku $\mathbf{D}_{22} = 0$, radi jednostavnosti) dobiva se jednadžba cjelokupnog sustava [13]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_\mathrm{k} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_\mathrm{k}\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_\mathrm{k} & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_\mathrm{k}\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_\mathrm{k}\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_\mathrm{k} & \mathbf{B}_\mathrm{k}\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_\mathrm{k}\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_\mathrm{k} & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_\mathrm{k}\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_\mathrm{k} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

a uvrštavanjem 2.34 u 2.31 dobiva se jednadžba cjelokupnog sustava u Laplaceovoj domeni:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})\mathbf{P}_{21})\mathbf{w}, \tag{2.36}$$

tj. prijenosna funkcija sustava:

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})\mathbf{P}_{21}, \tag{2.37}$$

čiju je H_∞ normu potrebno minimizirati odabirom $\mathbf{K}$ tj. $\mathbf{A}_\mathrm{k}$, $\mathbf{B}_\mathrm{k}$, $\mathbf{C}_\mathrm{k}$, $\mathbf{D}_\mathrm{k}$. Dodatno, moguće je oblikovati ponašanje sustava dodavanjem težinskih filtera na ulazne i izlazne

varijable na način:

$$\mathbf{z}_{\mathrm{w}} = \mathbf{W}_{\mathrm{z}}\mathbf{z}_0, \tag{2.38}$$

$$\mathbf{w}_{\mathrm{w}} = \mathbf{W}_{\mathrm{w}}^{-1}\mathbf{w}_0. \tag{2.39}$$

Time se pojedinim ulazima i izlazima dodaju težinski faktori, čime se ciljano modificira prijenosna funkcija kako bi se snažnije ili slabije penalizirali odabrani ulazi i izlazi. Također, $\mathbf{W}$ bi trebala biti dijagonalna matrica jer se dodavanjem nedijagonalnih članova gubi fizikalno značenje pojedinih ulaza/izlaza. Članovi $\mathbf{W}$ mogu biti i prijenosne funkcije, čijim se dodavanjem daje više ili manje na značenju ulazima ili izlazima na pojedinim frekvencijama. Npr. ako se za ulaz w_1 postavi $W_{1\mathrm{w}} = \frac{a}{s+b}$, penalizirat će se ponašanje sustava uslijed niskih frekvencija ulaza w_1 više nego uslijed visokih frekvencija ulaza w_1. Dodavanjem filtera dobiva se nova prijenosna funkcija čija se H_∞ norma minimizira i ona glasi:

$$\mathbf{G}_{\mathrm{W}} = \mathbf{W}_{\mathrm{z}}\mathbf{G}\mathbf{W}_{\mathrm{w}}, \tag{2.40}$$

uz napomenu da je prijenosna funkcija sustava i dalje $\mathbf{G}$, a $\mathbf{G}_{\mathrm{W}}$ postoji samo da bi se dobilo željeno ponašanje sustava pri određenim frekvencijama. O težinskim filterima više će biti govora u poglavlju 4.

2.2.4 H_∞ optimizacija

H_∞ optimizacija provodi se rješavanjem specifičnih Riccatijevih jednadžbi ili specifičnih linearnih matričnih nejednadžbi. Bez ulaženja u detalje matematike koja stoji u temelju, izložen je matematički alat za rješavanje problema pomoću linearnih matričnih nejednadžbi, čiji se detalji mogu pronaći u [4, 11, 13]. Temeljni alat je KYP lema (Kalmanova-Jakubovičeva-Popovljeva lema) koja povezuje neka frekvencijska svojstva s nekim vremenskim svojstvima. Konkretno, ako vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix} < 0, \tag{2.41}$$

za sve ω, za sustav opisan s $\mathbf{G}(\mathrm{j}\omega) = \mathbf{C}(\mathrm{j}\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$, tada za neki pozitivno definitni $\mathbf{X}$ vrijedi nejednakost:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{S} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.42}$$

i obrnuto. Time se beskonačno mnogo nejednakosti 2.41 zamjenjuje jednom nejednakosti 2.42. Jednadžba 2.42 uvjet je disipativnosti sustava $\dot{V} - s(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \leq 0$, s obzirom na kvadratnu funkciju dobave, gdje je prvi član derivacija Ljapunovljeve funkcije, a drugi član funkcija dobave. Više o disipativnosti vidjeti u [11].

Uvjet da je H_∞ norma manja od neke vrijednosti γ je:

$$||\mathbf{G}||_\infty < \gamma, \tag{2.43}$$

a pozivanjem na činjenicu da je singularna vrijednost zapravo korijen svojstvene vrijednosti od $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}$ ili $\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}$ (jednadžba 2.20), uvjet se može zapisati kao matrična nejednakost:

$$\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{G} - \gamma^2\mathbf{I} < 0, \tag{2.44}$$

tj.:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}(\mathrm{j}\omega) \end{bmatrix} < 0. \tag{2.45}$$

Tranzicija iz jednadžbe 2.43 u 2.44 opravdana je jer se oduzimanjem dijagonalne matrice s jednakim vrijednostima na dijagonali od neke matrice spuštaju sve svojstvene vrijednosti te matrice za vrijednost dijagonalnih članova dijagonalne matrice. Stoga, ako je razlika tih matrica negativno definitna, to znači da su svojstvene vrijednosti razlike matrica negativne, tj. da su sve svojstvene vrijednosti originalne matrice manje od dijagonalnih članova dijagonalne matrice.

Očito je da se uvjet 2.43 može protumačiti kao uvjet disipativnosti za funkciju dobave $s = \gamma^2\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} - \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$, što se u literaturi [11] pronalazi pod nazivom 'bounded real lemma', pa se može zapisati kao linearna matrična nejednakost (iz 2.42):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} & \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} & -\gamma^2\mathbf{I} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} \end{bmatrix} < 0. \tag{2.46}$$

Primjenom Schurove leme [11, 14] dolazi se do nejednakosti:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} & \mathbf{X}\mathbf{B} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \tag{2.47}$$

Rješavanjem ovih nejednakosti uz $\mathbf{X} > 0$ dokazuje se da je H_∞ norma sustava $\mathbf{G}$ manja od γ. Ako se sustav sastoji od regulatora i objekta regulacije opisanog jednadžbom 2.35, prethodna nejednakost 2.47 se može raspisati kao:

$$\mathbf{H} + \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} < 0, \tag{2.48}$$

gdje je:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \mathbf{X}\overline{\mathbf{A}} & \mathbf{X}\overline{\mathbf{B}} & \overline{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} \\ \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \overline{\mathbf{C}} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} (\underline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}^{\mathrm{T}} \\ \underline{\mathbf{D}}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.49}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{k}} & \mathbf{B}_{\mathrm{k}} \\ \mathbf{C}_{\mathrm{k}} & \mathbf{D}_{\mathrm{k}} \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.50}$$

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \underline{\mathbf{D}}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \underline{\mathbf{D}}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}, \tag{2.51}$$

gdje su matrice $\mathbf{H}$ i $\mathbf{P}$ matrice koje ovise o nepromjenjivim matricama kojima je opisan objekt regulacije i matrici $\mathbf{X}$, matrica $\mathbf{Q}$ je matrica koja ovisi samo o nepromjenjivim matricama objekta regulacije, a matrica $\mathbf{J}$ matrica je koja ovisi samo o matricama koje opisuju regulator, detaljnije u [13]. U prethodno predstavljenom problemu rješava se problem dokazivanja da sustav ima H_∞ normu manju od γ gdje su promjenjive varijable članovi matrice $\mathbf{X}$. Problem koji se želi rješavati je pronalazak regulatora takvog da je H_∞ norma cjelokupnog sustava manja od zadanog γ. U tom slučaju promjenjive varijable u prethodnoj nejednakosti su $\mathbf{X}$ i matrice koje opisuju regulator, pa promatrane nejednakosti nisu više linearne već bilinerane, što otvara pitanje konveksnosti jer bilinearne matrične nejednakosti ne moraju biti konveksne za razliku od linearnih matričnih nejednakosti. U [13] je pokazano da postoji regulator reda n_{k} za sustav reda n takav da zadovoljava uvjet $||G||_\infty < \gamma$ ako postoje simetrične i pozitivno definitne matrice $\mathbf{X}_1$ i

$\mathbf{Y}_1$ za koje vrijede linearne matrične nejednakosti:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_\mathrm{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1\mathbf{A} & \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^\mathrm{T} \\ \mathbf{B}_1^\mathrm{T}\mathbf{X}_1 & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^\mathrm{T} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\mathrm{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.52}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_\mathrm{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1\mathbf{A}^\mathrm{T} & \mathbf{Y}_1\mathbf{C}_1^\mathrm{T} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y}_1 & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^\mathrm{T} & \mathbf{D}_{11}^\mathrm{T} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\mathrm{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.53}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix} > 0, \tag{2.54}$$

i dodatni uvjet:

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix} \leq n + n_\mathrm{k}, \tag{2.55}$$

gdje je je matrica $\mathbf{N}_\mathrm{X}$ matrica punog reda takva da joj je slika jezgra matrice $[\mathbf{C}_2\ \mathbf{D}_{21}]$, a matrica $\mathbf{N}_\mathrm{Y}$ je matrica punog reda takva da joj je slika jezgra matrice $[\mathbf{B}_2^\mathrm{T}\ \mathbf{D}_{12}^\mathrm{T}]$. Pri sintezi centraliziranog regulatora punog reda (reda n) uvjet 2.55 otpada jer je dimenzija matrice $\mathbf{X}_1$ jednaka n kao i matrice $\mathbf{Y}_1$, što znači da je maksimalni mogući rang matrice iz spomenutog uvjeta jednak $2n$ što znači da je uvjet 2.55 automatski zadovoljen. To znači da je prethodno predstavljeni problem konveksan jer su linearne matrične nejednakosti konveksne. Sinteza regulatora nižeg reda nije konveksan problem jer uvjet na rang matrice nije konveksno ograničenje, pa je stoga problem sinteze optimalnog regulatora nižeg reda kompleksniji problem. Problem se dodatno komplicira ako postoje strukturna ograničenja na regulator, npr. minimalne i maksimalne ili fiksne vrijednosti članova matrica $\mathbf{A}_\mathrm{k}$, $\mathbf{B}_\mathrm{k}$, $\mathbf{C}_\mathrm{k}$ i $\mathbf{D}_\mathrm{k}$ regulatora. Postupak sinteze takvih regulatora može se temeljiti na rješavanju bilinearnih matričnih nejednakosti 2.48, što je neefikasno za velike probleme, ili na korištenju posebnih optimizacijskih tehnika opisanih u [5] temeljenih na metodi za izračun H_∞ norme opisanoj u [15] gdje se koristi bisekcijski algoritam. Uspješnim rješavanjem prethodnih nejednakosti od 2.52 do 2.54 dokazuje se da postoji regulator takav da je H_∞ norma manja od γ, a da bi se dobio traženi regulator potrebno je pronaći matrice

$\mathbf{X}_2$ takve da vrijedi $\mathbf{X}_1 - \mathbf{Y}_1^{-1} = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_2^{\mathrm{T}}$, te tu matricu uvrstiti u:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Matrica $\mathbf{X}$ ulazi u jednadžbu 2.48 gdje se promatra kao nepromjenjiva varijabla, a promjenjive varijable su članovi matrica regulatora (matrica $\mathbf{J}$). Takva jednadžba sada više nije bilinearna matrična nejednadžba već konveksna linearna matrična nejednadžba. Time je u potpunosti opisan proces sinteze regulatora za kojeg cjelokupni sustav ima H_∞ normu manju od γ. Do H_∞ optimalnog regulatora dolazi se sustavnim smanjenjem veličine γ. Rješavanje prikazanih sustava s linearnim matričnim nejednakostima provodi se kao optimizacijski problemi (semidefinitno programiranje), pri čemu se za takve probleme primjenjuje 'interior-point' metoda, a o čemu se može više pronaći u [14].

2.3 Robusno upravljanje

Zbog učestalih razlika između stvarnog sustava i matematičkog modela korištenog za projektiranje stvarnog sustava, te zbog osjetljivosti na vanjske poremećaje i na mjerni šum, robusnost je od krucijalne važnosti u projektiranju upravljanja [16]. Moderno robusno upravljanje temelji se na H_∞ pristupu, gdje se procesom μ sinteze minimizira gornja vrijednost strukturirane singularne vrijednosti sustava s nesigurnosti koja korespondira singularnoj vrijednosti sustava s nesigurnosti.

2.3.1 Modeliranje nesigurnosti

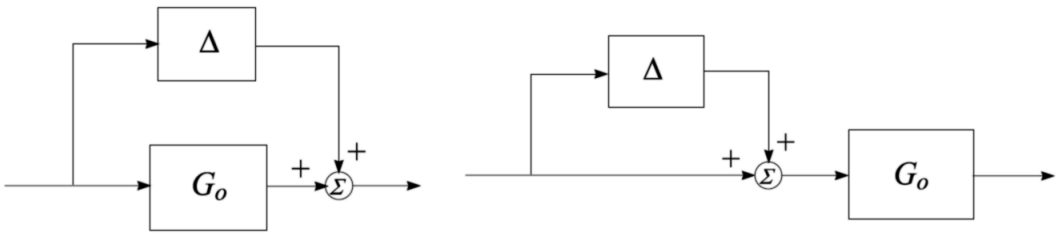
Izvori nesigurnosti/greške su parametarske nesigurnosti, nemodelirana dinamika, zanemarene nelinearnosti te redukcija reda modela i oni unose mogućnost narušavanja stabilnosti i performansi [10]. Da bi analiza robusnosti i sinteza robusnog regulatora koji uklanja takve mogućnosti bila moguća, potrebno je matematički formulirati nesigurnosti. U slučaju vremenski invarijantnih linearnih sustava koriste se nominalna prijenosna funkcija $\mathbf{G}_0$, stvarna/perturbirana prijenosna funkcija $\mathbf{G}_\mathrm{p}$ i prijenosna funkcija Δ koja je posljedica nesigurnosti. Za predstavljanje nemodelirane dinamike koriste se nestrukturirane nesigurnosti u koje spada niz jednostavnih konfiguracija nesigurnosti, a realni sustavi se najčešće predstavljaju kombinacijom više nestrukturiranih nesigurnosti. Najjednostavniji

primjeri nestrukturiranih nesigurnosti su aditivna:

$$\mathbf{G}_\mathrm{p} = \mathbf{G}_0 + \Delta, \tag{2.57}$$

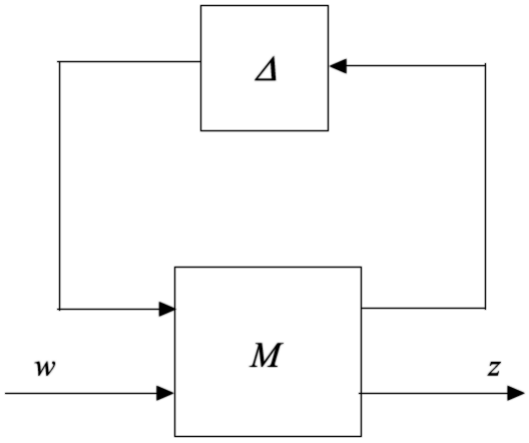
i ulazna multiplikativna:

$$\mathbf{G}_\mathrm{p} = \mathbf{G}_0(\mathbf{I} + \Delta). \tag{2.58}$$



Slika 3: Prikaz sustava s aditivnom nesigurnosti (lijevo) i ulaznom multiplikativnom nesigurnosti (desno)[10]

U slučaju parametarske nesigurnosti dobiva se strukturirana nesigurnost gdje je Δ dijagonalna matrica. Standardni prikaz strukturirane nesigurnosti prikazan je na slici 4, gdje je Δ blok-dijagonalna matrica koja se sastoji od dijagonalnih blokova i punih blokova.



Slika 4: Standardna $\mathbf{M} - \Delta$ konfiguracija [10]

Blok dijagramu sa slike 4 korespondiraju jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \tag{2.59}$$

i:

$$\mathbf{d} = \Delta\mathbf{p}, \tag{2.60}$$

gdje su $\mathbf{d}$ i $\mathbf{y}$ fiktivne varijable koje služe za opisivanje utjecaja nesigurnosti. Kombinirajući jednadžbe 2.59 i 2.60 dolazi se do:

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}_{\mathrm{p}}\mathbf{w} = (\mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{21}\Delta(\mathbf{I} - \mathbf{M}_{11}\Delta)^{-1}\mathbf{M}_{12})\mathbf{w}. \tag{2.61}$$

Uspoređujući izraz 2.61 s izrazima od 2.57 do 2.58 jasno je da se sustavi s nestrukturiranim nesigurnostima mogu zapisati u obliku standardne konfiguracije, pa $\mathbf{M}$ za aditivnu nesigurnost glasi:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{G}_0 \end{bmatrix}, \tag{2.62}$$

a za ulaznu multiplikativnu nesigurnost:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_0 \end{bmatrix}. \tag{2.63}$$

Slični izrazi mogu se dobiti za mnoge različite konfiguracije nesigurnosti, a kako bi analiza koja slijedi bila moguća, potrebno je promatrani sustav zapisati u obliku standardne konfiguracije.

2.3.2 Strukturirane singularne vrijednosti

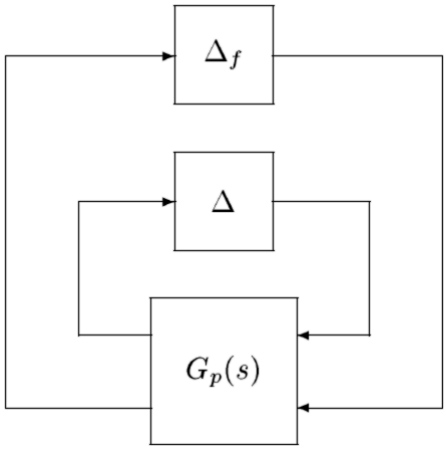
Razmatranje robusnosti počinje uvidom u robusnu stabilnost koristeći pritom jednadžbu 2.61. Ako se razmotri jednadžba 2.61 uz pretpostavku da su $\mathbf{M}_{12}$, $\mathbf{M}_{21}$ i $\mathbf{M}_{22}$ stabilne, jasno je da će prijenosna funkcija $\mathbf{G}_p$ biti stabilna ako je član $\mathbf{I} - \mathbf{M}_{11}\Delta$ stabilan, tj. nije singularan, tj. ne vrijedi:

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}_{11}\Delta) = 0, \tag{2.64}$$

za sve frekvencije i sve propisane nesigurnosti, što je uvjet robusne stabilnosti. Uobičajeno je da se nesigurnosti definiraju tako da upadaju u skup za koji vrijedi $\overline{\sigma}(\Delta) < 1$. Stoga, ako je jednadžba 2.64 zadovoljena tako da je $\min_{\Delta}\overline{\sigma}(\Delta) > 1$ za Δ koji zadovoljava 2.64, tada je sustav za propisani raspon sigurnosti stabilan. U slučaju da se dobije $\min_{\Delta}\overline{\sigma}(\Delta) = \gamma$ za Δ koji zadovoljava 2.64, to znači da će sustav biti stabilan za nesigurnosti za koje vrijedi

$\overline{\sigma}(\Delta) < \gamma$.

U literaturi [16] je pokazano da se problem analize robusne stabilnosti može pokazati kao problem analize stabilnosti zatvorenog kruga koji se sastoji od $\mathbf{M}_{11}$ i Δ (po uzoru na sliku 5 uz $\Delta_\mathrm{f} = 0$). Problem analize robusnih performansi dobiva se proširenjem problema analize robusne stabilnosti tako da se uvede fiktivna veza između izlaza $\mathbf{w}$ i ulaza $\mathbf{z}$ u vidu fiktivnog bloka nesigurnosti Δ_f koji se pridodaje na stvarne nesigurnosti prema slici 5.



Slika 5: Blok dijagram za analizu robusnih performansi [16]

Sada uvjet stabilnosti 2.64 za novonastali zatvoreni krug postaje:

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0. \tag{2.65}$$

Da bi se razjasnilo značenje člana Δ_f moguće je zanemariti stvarne nesigurnosti i uzeti u obzir samo fiktivnu nesigurnost Δ_f. Najmanja nesigurnost koja destabilizira krug prikazan na slici 5 je $\min_{\Delta}\overline{\sigma}(\Delta) = \gamma$ koja zadovoljava 2.65. Do destabilizacije tog kruga doći će ako je pojačanje od Δ veće od recipročne vrijednosti pojačanja od $\mathbf{M}_{22}$ ('small gain theorem', [16]), tj. ako vrijedi:

$$\overline{\sigma}(\mathbf{M}_{22}) = \frac{1}{\min\limits_{\Delta_\mathrm{f}}\{\overline{\sigma}(\Delta) : \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}_{22}\Delta_\mathrm{f}) = 0\}}, \tag{2.66}$$

čime je pokazano da se analiza nominalnih performansi može pokazati kao problem robusne stabilnosti. Problem se proširuje na robusne performanse definiranjem strukturi-

rane singularne vrijednost matrice $\mathbf{M}$ [10, 16]:

$$\mu(\mathbf{M}) = \frac{1}{\min\limits_{\Delta}\{\overline{\sigma}(\Delta) : \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0, \Delta \in \mathbf{\Delta}\}}, \tag{2.67}$$

a ako je $\mathbf{M}$ sustav tada je strukturirana singularna vrijednost definirana s:

$$\mu(\mathbf{M}) = \max_{\omega} \frac{1}{\min\limits_{\Delta}\{\overline{\sigma}(\Delta) : \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0, \Delta \in \mathbf{\Delta}\}}, \tag{2.68}$$

gdje je $\mathbf{\Delta}$ skup strukturiranih nesigurnosti, a strukturirana singularna vrijednost je mjera robusnih performansi. Po [17] $\mu < \gamma$ garantira da će H_∞ norma sustava sa svim nesigurnostima za koje vrijedi $\overline{\sigma}(\Delta) < \frac{1}{\gamma}$ biti manja od γ, što je u skladu s prethodnim razmatranjima.

2.3.3 μ sinteza

Egzaktno računanje strukturirane singularne vrijednosti je iznimno teško, osim za neke specifične slučajeve. Stoga je u literaturi, npr. [13] pokazano da za konstantni $\mathbf{M}$ uvijek vrijedi relacija koja daje gornju i donju granicu za strukturiranu singularnu vrijednost:

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \mu(\mathbf{M}) \leq \overline{\sigma}(\mathbf{M}), \tag{2.69}$$

gdje je $\rho(\mathbf{M})$ spektralni radius matrice $\mathbf{M}$, tj. njena najveća svojstvena vrijednost (po apsolutnoj vrijednosti). Po literaturi [10, 16] $\mu(\mathbf{M})$ je jednak $\overline{\sigma}(\mathbf{M})$ kada Δ nema strukturu, a $\mu(\mathbf{M})$ je jednak $\rho(\mathbf{M})$ kada je Δ strogo dijagonalna matrica. Ipak, relacija 2.69 u originalnom obliku nije korisna jer razlika između donje i gornje granice može biti jako velika. Ipak, u literaturi [10, 16] pokazano je da postoji matrica $\mathbf{D}$ sa strukturom identičnom strukturi od $\mathbf{\Delta}$ s proizvoljnim vrijednostima članova uz ograničenje da su blok-dijagonalni blokovi unitarne matrice, takva da vrijedi:

$$\mu(\mathbf{M}) = \mu(\mathbf{DMD}^{-1}), \tag{2.70}$$

i:

$$\overline{\sigma}(\mathbf{M}) \neq \overline{\sigma}(\mathbf{DMD}^{-1}). \tag{2.71}$$

Također, postoji proizvoljna unitarna matrica $\mathbf{U}$ takva da je $\mu(\mathbf{M}) = \mu(\mathbf{MU})$ i $\rho(\mathbf{M}) \neq \rho(\mathbf{MU})$ pa se jednadžba 2.69 može zapisati kao [10, 16]:

$$\rho(\mathbf{MU}) \leq \mu(\mathbf{M}) \leq \overline{\sigma}(\mathbf{DMD}^{-1}). \tag{2.72}$$

Problem traženja strukturirane singularne vrijednosti može se promatrati kao problem minimizacije $\overline{\sigma}(\mathbf{DMD}^{-1})$ po $\mathbf{D}$. Ako je $\mathbf{M}$ matrica prijenosnih funkcija, a ne konstantna matrica, problem traženja strukturirane singularne zasniva se na:

$$\mu(\mathbf{M}) \leq ||\mathbf{DMD}^{-1}||_{\infty}. \tag{2.73}$$

Na relaciji 2.73 temelji se postupak $D-K$ iteracije, koji za cilj ima sintezu robusnog regulatora, tj. takvog regulatora da minimizira strukturiranu singularnu vrijednost. Postupak se provodi u četiri koraka.

1: Pretpostavljanje inicijalnog $\mathbf{D}$, najčešće se uzima konstantna jedinična matrica.

2: Provedba H_{∞} optimizacije $||\mathbf{DMD}^{-1}||_{\infty}$ po parametrima regulatora $\mathbf{K}$, za fiksni $\mathbf{D}$, s ciljem minimizacije strukturirane singularne vrijednosti.

3: Provedba minimizacije $\overline{\sigma}(\mathbf{DMD}^{-1})$ po $\mathbf{D}$, za fiksni $\mathbf{K}$, s ciljem bolje procjene $\mu(\mathbf{M})$. Optimizacija se izvršava na svakoj odabranoj frekvenciji zasebno i spada u konveksne optimizacijske probleme.

4: Aproksimacija dobivenih $\mathbf{D}$ u koraku 3 po frekvenciji, čime se dobiva sustav $\mathbf{D}(s)$ koji je ulaz u korak 2. Ako je postignuta konvergencija rješenja ili zadovoljene tražene performanse, postupak se završava. Ako nije postupak se vraća na korak 2.

Po [13] proces je nekonveksan, što ne garantira konvergenciju u globalni minimum, pa je poželjno da se proces provodi više puta iz različitih početnih točaka kako bi se prostor rješenja bolje pretražio. Također po [13] proces ne mora konvergirati ni u lokalni minimum jer se proces može dovesti u točku koja je minimum po $\mathbf{D}$ i po $\mathbf{K}$ zasebno, ali nije lokalni minimum.

Poglavlje 3

MODELIRANJE DINAMIKE SUSTAVA

Uz klasični Newtonov pristup modeliranju dinamike koji se temelji na ravnoteži sila, kao mogućnost javlja se upotreba Lagrangeovih jednadžbi koje omogućuju jednostavnije i sistematičnije modeliranje dinamike. Dobiveni modeli omogućuju simulaciju i projektiranje regulatora. Primjena simulacije omogućuje testiranje dinamike sustava prije same fizičke izvede sustava, a daje i korisne informacije potrebne za konstrukciju sustava kao što su sile i moment u konstrukcijskim elementima [19].

3.1 Lagrangeove jednadžbe

Lagrangeove jednadžbe izvode se iz D'Alembertova principa, koji pak proizlazi iz Newtonova drugog zakona gibanja:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{3.1}$$

gdje je $\mathbf{F}$ rezultantna sila na česticu, a $\mathbf{a}$ akceleracija čestice. Sustav n čestica je u ravnoteži ako je ukupni virtualni rad jednak nuli:

$$\sum_{i}^{n}(\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i)^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{r}_i = 0, \tag{3.2}$$

što predstavlja D'Alembertov princip [20]. Prethodne jednadžbe uvođenjem relacije $r = r(q_1, q_2, ..., q_{\mathrm{N}})$, tj. opisom kinematskih veličina pomoću poopćenih koordinata mogu se preformulirati tako da glase:

$$\sum_{i}^{N}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i\right)\delta q_i = 0, \tag{3.3}$$

tj.:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \text{ za } i = 1, 2, ...N. \tag{3.4}$$

Prethodni set jednadžbi naziva se Lagrangeove jednadžbe [20], a u nekim izvorima može se pronaći pod nazivom Euler-Lagrangeove jednadžbe (zbog veze s općenitijim Eulerovim jednadžbama iz varijacijskog računa). Vrijednosti q su poopćene koordinate koje su minimalni set koordinata dovoljan za potpuno opisivanje kinematike sustava, a vrijed-

nosti Q su poopćene sile definirane s $Q_i = \sum_j^{N_F} \mathbf{F}_j^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_i} + \sum_k^{N_M} \mathbf{M}_k^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k}{\partial q_i}$, gdje je $\mathbf{r}_j$ koordinata hvatišta vanjske sile $\mathbf{F}_j$, a $\partial\varphi_k$ je prirast kuta zakreta hvatišta vanjskog momenta $\mathbf{M}_k$. U izrazu za Q_i sile F i momenti M su samo aktivne (vanjske) sile, za razliku od sila u izrazima 3.1 i 3.2 koje obuhvaćaju i sile uslijed kinematskih veza koje u izvodu iščezavaju. Vrijednost L naziva se Lagrangeova funkcija i definirana je kao $L = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{p}}$, gdje je E_{k} kinetička energija, a E_{p} potencijalna energija. U slučaju kada je sustav opisan brojem koordinata koji je veći od minimalnog broja koordinata, Lagrangeove jednadžbe dodatno se kompliciraju jer je potrebno zadovoljiti i kinematska ograničenja koja se javljaju među koordinatama. Najjednostavniji pristup rješavanju ovog problema je primjena metode Lagrangeovih multiplikatora nad jednadžbom 3.2 koja govori o minimumu potencijala svih sila, te dodavanje jednadžbi kinematskih ograničenja. Takav pristup rezultira sustavom diferencijalno-algebarskih jednadžbi koje je teže rješavati od običnih diferencijalnih jednadžbi koje se dobiju iz 3.4. Budući da takva formulacija u ovom radu nije potrebna, neće se dalje razmatrati.

Lagrangeove jednadžbe moguće je preformulirati na praktičniju formu, pogodniju za složenije probleme, što zahtijeva preformulaciju kinetičke energije iz:

$$E_{\mathrm{k}} = \sum_i^N \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_i m_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i \right), \tag{3.5}$$

u:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \tag{3.6}$$

gdje je $\mathbf{M}$ definiran s:

$$M_{ij} = \sum_k^N \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k^{\mathrm{T}}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} m_k + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}}{\partial q_i} \mathbf{J}_k \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k}{\partial q_j} \right), \tag{3.7}$$

gdje je M_{ij} element matrice poopćenih masa $\mathbf{M}$ u i-tom retku i j-tom stupcu, a N je broj tijela u sustavu. $\mathbf{v}_i$ je vektor brzine težišta mase m_i, $\mathbf{r}_i$ vektor položaja težišta mase m_{i}, $\boldsymbol{\omega}_i$ vektor kutnih brzina tijela i momenta tromosti J_i, a $\partial\boldsymbol{\varphi}_i$ vektor prirasta kuta zakreta tijela i. Dok je pronalazak članova $\frac{\partial \mathbf{r}_k^{\mathrm{T}}}{\partial q_i}$ poprilično jasan i direktan, problem se komplicira kod računanja $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_k}{\partial q_i}$. Vektor $\partial\boldsymbol{\varphi}_i$ za ravninsko gibanje najčešće je duljine 1 i okomit je na ravninu gibanja, dok je izraz za opći slučaj kompleksniji i ovisi

o odabiru načina opisivanja orijentacije tijela u prostoru, npr. za kompleksnije rotacije stupnjevi slobode mogu biti Eulerovi kutovi, pa će za XYZ Eulerove kutove vrijediti $\partial\boldsymbol{\varphi}_i = \partial\boldsymbol{\varphi}_{x,i} + \mathbf{R}_{xi}\partial\boldsymbol{\varphi}_{y,i} + \mathbf{R}_{xi}\mathbf{R}_{yi}\partial\boldsymbol{\varphi}_{z,i}$, gdje su matrice $\mathbf{R}_i$ matrice rotacije tijela i, a vektori $\partial\boldsymbol{\varphi}_{k,i}$ prirasti kutova (Eulerovih kutova) zakreta oko osi koordinatnog sustava tijela i u pripadajućim zakrenutim/transformiranim koordinatnim sustavima, uz opis vektora $\mathbf{p}^i = \mathbf{R}_x\mathbf{R}_y\mathbf{R}_z\mathbf{p}^k$, gdje je $\mathbf{p}^i$ vektor u referentnom/inercijskom koordinatnom sustavu, a $\mathbf{p}^k$ vektor u zakrenutom koordinatnom sustavu. Uvođenjem zapisa 3.6 u jednadžbe prikazane u 3.3, one poprimaju oblik:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\mathrm{T}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}, \tag{3.8}$$

koji, radi boljeg razumijevanja, u indeksnoj notaciji glasi:

$$M_{ij}\ddot{q}_j = Q_i - \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}M_{ij}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\dot{q}_j\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_k. \tag{3.9}$$

U 3.8 vektor $\mathbf{Q}$ uzimat će u obzir aktivne sile i momente, vektor $\dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \mathbf{q}}$ potencijalne sile, a $-\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}$ i $\dot{\mathbf{q}}^\mathrm{T}\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$ inercijske sile (Coriolisove sile i centrifugalne sile). Izraz $-\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}$ tj. indeksno $\dfrac{\mathrm{d}M_{ij}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_j$ može se zapisati kao $\dot{q}_j\dfrac{\partial M_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_k$.

3.2 Dinamika sustava kolica na njihalu

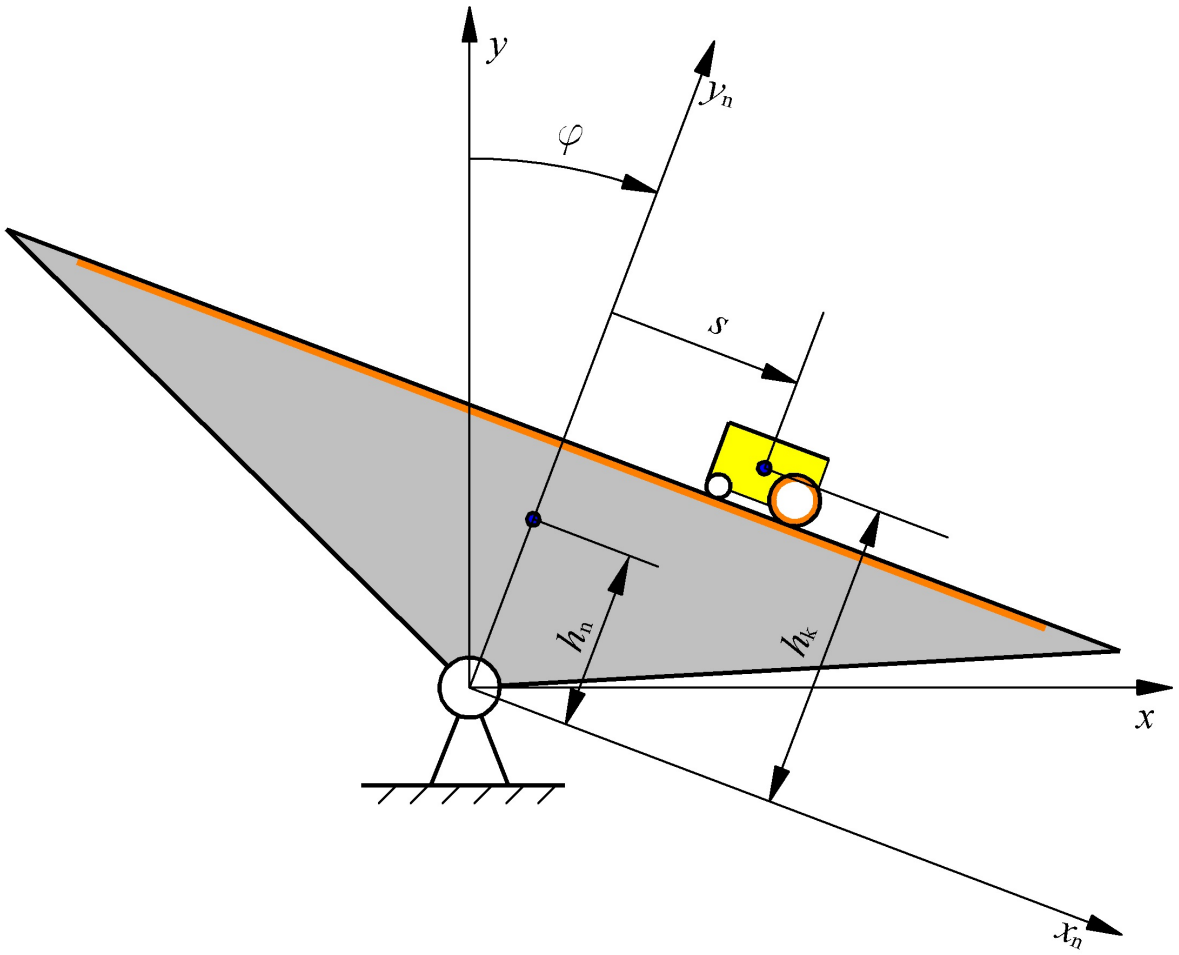
Sustav kolica na njihalu prikazan je na slici 6. Pojam njihalo odnosi se na komponentu obojenu u sivo, dok su kolica komponenta žute boje. Radi se o ravninskom sustavu s dva stupnja slobode. Njihalo se može rotirati oko ishodišta koordinatnog sustava, dok se kolica gibaju po njihalu (narančasta linija) oslanjajući se linearnim ležajevima na vodilice. Kolica su opremljena istosmjernim motorom na čijem se izlaznom vratilu nalazi zupčanik koji je u kontaktu sa zupčastom letvom na njihalu. Djelovanje elektromotora stvara silu između kolica i njihala, te ta sila predstavlja upravljačku varijablu.

Za opisivanje dinamike potrebne su pripadne kinematske veličine, što su u ovom slučaju položaji težišta kolica i njihala, te kut zakreta njihala. Težište njihala opisano je s:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h_{\mathrm{n}} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

a težište kolica :

$$\mathbf{r}_{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ h_{\mathrm{k}} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$



Slika 6: Sustav kolica na njihalu

Stupnjevi slobode, tj. poopćene koordinate su:

$$q_1 = s, \tag{3.12}$$

$$q_2 = \varphi, \tag{3.13}$$

gdje je s pomak kolica, φ zakret njihala, prema slici 6. Ulaskom s jednadžbama od 3.10 do 3.13 u jednadžbu 3.7 dobiva se:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_\mathrm{k} & m_\mathrm{k} h_\mathrm{k} \\ m_\mathrm{k} h_\mathrm{k} & m_\mathrm{k} h_\mathrm{k}^2 + m_\mathrm{k} s^2 + m_\mathrm{n} h_\mathrm{n}^2 + J_\mathrm{k} + J_\mathrm{n} \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

gdje je m_k masa kolica, m_n masa njihala, J_k polarni moment tromosti kolica (oko težišta), a J_n polarni moment tromosti njihala (oko težišta). h_k je udaljenost težišta kolica od osi rotacije kolica, a hn udaljenost težišta njihala od osi rotacije kolica.

Ako utjecaj svih vanjskih sila i momenata na njihalo i vanjskih momenata na kolica reduciramo na moment M, a utjecaj vanjskih sila na kolica reduciramo na silu F, jasno je da će virtualni rad biti $\delta W = M\delta\varphi + F\delta s$ te da će vektor poopćenih sila definiran s $Q_\mathrm{i} = \frac{\delta W}{\delta q_\mathrm{i}}$ biti:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Detaljnije zapisano vektor poopćenih sila je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} F_\mathrm{up} + F_\mathrm{k} \\ M_\mathrm{n} + F_\mathrm{k} h_\mathrm{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_\mathrm{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_\mathrm{k} \\ M_\mathrm{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_\mathrm{up} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

gdje je F_up upravljačka sila (sila između kolica i njihala koja služi za pokretanje kolica po njihalu), F_k vanjska sila koja djeluje samo na kolica u težište kolica, a M_n ukupni moment koji djeluje oko ishodišta koordinatnog sustava sa slike 6, tj. oko osi rotacije njihala, koji djeluje na njihalo (moment je orijentiran tako da u slučaju pozitivnog $\delta\varphi$ čini pozitivan rad). Vektor $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}$ dobiva se deriviranjem 3.14 po vremenu i množenjem s derivacijama poopćenih koordinata po vremenu, te iznosi:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2m_\mathrm{k} s\dot{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2m_\mathrm{k} s\dot{s}\dot{\varphi}_\mathrm{k} \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Slijedi vektor $\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$, član po član:

$$\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2m_{\mathrm{k}}s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = 2m_{\mathrm{k}}s\dot{\varphi}^2. \tag{3.18}$$

Iznos $\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_2}\dot{\mathbf{q}}$ je nula jer matrica masa ne ovisi o q_2, pa se dobiva:

$$\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2m_{\mathrm{k}}s\dot{\varphi}^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Potencijalna energija sustava javlja se samo u vidu gravitacijske potencijalne energije, i iznosi:

$$E_{\mathrm{p}} = C + gm_{\mathrm{k}}y_{\mathrm{k}} + gm_{\mathrm{n}}y_{\mathrm{n}} = C + g\left(\left(\cos\left(\varphi\right)h_{\mathrm{k}} - \sin\left(\varphi\right)s\right)m_{\mathrm{k}} + \cos\left(\varphi\right)h_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}\right). \tag{3.20}$$

gdje je g gravitacijsko ubrzanje, a C proizvoljna konstanta. Deriviranjem potencijalne energije po poopćenim koordinatama dobiva se:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -g\sin(\varphi)m_{\mathrm{k}} \\ -g((\sin(\varphi)h_{\mathrm{k}} + \cos(\varphi)s)m_{\mathrm{k}} + \sin(\varphi)h_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}) \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Konačno dobivene jednadžbe su:

$$\begin{bmatrix} m_{\mathrm{k}} & m_{\mathrm{k}}h_{\mathrm{k}} \\ m_{\mathrm{k}}h_{\mathrm{k}} & m_{\mathrm{k}}h_{\mathrm{k}}^2 + m_{\mathrm{k}}s^2 + m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2 + J_{\mathrm{k}} + J_{\mathrm{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\mathrm{up}} + F_{\mathrm{k}} \\ M_{\mathrm{n}} + F_{\mathrm{k}}h_{\mathrm{k}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -g\sin(\varphi)m_{\mathrm{k}} \\ -g((\sin(\varphi)h_{\mathrm{k}} + \cos(\varphi)s)m_{\mathrm{k}} + \sin(\varphi)h_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2m_{\mathrm{k}}s\dot{s}\dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{\mathrm{k}}s\dot{\varphi}^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Inverz matrice $\mathbf{M}$ je:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{m_{\mathrm{k}}s^2 + m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2 + J_{\mathrm{k}} + J_{\mathrm{n}}} \begin{bmatrix} \frac{m_{\mathrm{k}}h_{\mathrm{k}}^2 + m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2 + m_{\mathrm{k}}s^2 + J_{\mathrm{k}} + J_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{k}}} & -h_{\mathrm{k}} \\ -h_{\mathrm{k}} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

čijim se množenjem s 3.22 dobiva:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} - \mathbf{M}^{-1}\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}, \tag{3.24}$$

a zbog kompliciranosti 3.24 nije raspisivan.

3.2.1 Linearizacija i zapisivanje u prostor stanja

Sustav se linearizira oko zadane radne točke koja je $s = 0, \dot{s} = 0, \varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$. Linearizi-raju se nelinearni članovi pa tako slijedi:

$$\cos(\varphi) \approx 1, \tag{3.25}$$

$$\sin(\varphi) \approx \varphi, \tag{3.26}$$

a svi kvadratni i bilinearni članovi otpadaju, tj. imaju vrijednost 0. U izrazima koji se lineariziraju javljaju se i neki drugi nelinearni članovi, ali to će kroz tekst biti naglašeno. Linearizacija inverza matrice $\mathbf{M}$ (linearizacijom izraza 3.23) je:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{m_\mathrm{n} h_\mathrm{n}^2 + J_\mathrm{k} + J_\mathrm{n}} \begin{bmatrix} \frac{m_\mathrm{k} h_\mathrm{k}^2 + m_\mathrm{n} h_\mathrm{n}^2 + J_\mathrm{k} + J_\mathrm{n}}{m_\mathrm{k}} & -h_\mathrm{k} \\ -h_\mathrm{k} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Budući da je linearizirani izraz matrice masa konstanta, opravdano je linearizirati jednadžbu 3.8, a zatim je pomnožiti s lineariziranim inverzom matrice masa. Kada bi linearizirani izraz 3.23 bio linearan, a ne konstanta, bilo bi potrebno linearizirati jednadžbu 3.24, ili naknadno odbacivati dobivene kvadratne članove. U izrazu 3.23 javljaju se članovi oblika $\frac{1}{1+x^2}$ i x^2 čiji su linearni članovi Taylorova razvoja jednaki nuli, pa je linearizacija od 3.23 konstanta.

Linearizacija vektora derivacija potencijalne energije 3.21 je:

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -g\varphi m_\mathrm{k} \\ -g((\varphi h_\mathrm{k} + s)m_\mathrm{k} + \varphi h_\mathrm{n} m_\mathrm{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g m_\mathrm{k} \\ -g m_\mathrm{k} & -g h_\mathrm{k} m_\mathrm{k} - g h_\mathrm{n} m_\mathrm{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \varphi \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

gdje linearizacija izraza $\cos(\varphi)s$ koji se javlja u 3.21 je $\cos(\varphi)s \approx s$. Vektori $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}$ i $\dot{\mathbf{q}}^\mathrm{T}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$ iznositi će 0 jer sadrže samo kvadratne članove koji linearizacijom iščezavaju. Množenjem lineariziranog inverza matrice masa 3.27 s lineariziranim vektorom derivacija potencijalne energije 3.28 dobiva se:

$$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\mathbf{q}} = \frac{-g}{m_\mathrm{n} h_\mathrm{n}^2 + J_\mathrm{k} + J_\mathrm{n}} \begin{bmatrix} -h_\mathrm{k} m_\mathrm{k} & h_\mathrm{n}^2 m_\mathrm{n} - h_\mathrm{n} h_\mathrm{k} m_\mathrm{n} + J_\mathrm{n} + J_\mathrm{k} \\ m_\mathrm{k} & h_\mathrm{n} m_\mathrm{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \varphi \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Jasno je da će prethodni članovi formirati matricu **A** prostora stanja. Varijable stanja su:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ s \\ \dot{\varphi} \\ \varphi \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

a matrica **A** prostora stanja je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{gh_{\mathrm{k}}m_{\mathrm{k}}}{m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2+J_{\mathrm{k}}+J_{\mathrm{n}}} & 0 & \frac{g(h_{\mathrm{n}}^2m_{\mathrm{n}}-h_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{k}}m_{\mathrm{n}}+J_{\mathrm{n}}+J_{\mathrm{k}})}{m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2+J_{\mathrm{k}}+J_{\mathrm{n}}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{gm_{\mathrm{k}}}{m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2+J_{\mathrm{k}}+J_{\mathrm{n}}} & 0 & \frac{gh_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2+J_{\mathrm{k}}+J_{\mathrm{n}}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Množenjem vektora poopćenih sila 3.16 s lineariziranim inverzom matrice masa 3.27 i zapisivanjem dobivenog u prostor stanja može se dobiti:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2 + J_{\mathrm{k}} + J_{\mathrm{n}}} \begin{bmatrix} \frac{h_{\mathrm{n}}^2m_{\mathrm{n}}+J_{\mathrm{k}}+J_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{k}}} & -h_{\mathrm{k}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{m_{\mathrm{n}}h_{\mathrm{n}}^2 + J_{\mathrm{k}} + J_{\mathrm{n}}} \begin{bmatrix} \frac{h_{\mathrm{k}}^2m_{\mathrm{k}}+h_{\mathrm{n}}^2m_{\mathrm{n}}+J_{\mathrm{k}}+J_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{k}}} \\ 0 \\ -h_{\mathrm{k}} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

gdje je vektor ulaza jednak:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} F_{\mathrm{k}} \\ M_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}, \tag{3.34}$$

a upravljačka varijabla je upravljačka sila:

$$\mathbf{u} = F_{\mathrm{up}}. \tag{3.35}$$

Matrica $\mathbf{B}_1$ odnosi se na poremećajnu silu i moment (prvi stupac odnosi se na silu, drugi

na moment), dok se $\mathbf{B}_2$ odnosi na upravljačku silu.

3.3 Dinamika sustava triju oprugama povezanih sustava kolica na njihalu

Sustav prikazan na slici 7 sastoji se od triju sustava kolica na njihalu opisana u prethodnom potpoglavlju koja su povezana sustavom opruga i užadi prema slici 7. Dva susjedna njihala povezana su s užadi (siva boja) koje je nategnuto elastičnom oprugom (crvena boja) preko komponente (narančasta boja) koja omogućuje slobodno klizanje užadi, a ta komponenta uležištena je na klizač koji joj omogućuje pomicanje samo vertikalno prema gore. Njihala (plava boja) povezana su sustavom opruga i užadi s 'desne' i s 'lijeve' strane. Ta veza je jedina fizikalna veza među dva povezana njihala, što se može iskoristiti pri izvođenju matematičkog modela. U slučaju da su u prikazanom sustavu izostavljene opruge, izvod diferencijalnih jednadžbi za taj sustav ishodio bi trima nespregnutim sustavima diferencijalnih jednadžbi nalik na prethodno izvedene jednadžbe za jedan set kolica s njihalom, gdje bi se moglo zasebno rješavati jednadžbe za svaki set kolica s njihalom. To se može argumentirati izrazom za Lagrangeovu funkciju:

$$L = E_{\mathrm{k},1} + E_{\mathrm{k},2} + E_{\mathrm{k},3} - E_{\mathrm{p},1} - E_{\mathrm{p},2} - E_{\mathrm{p},3}, \tag{3.36}$$

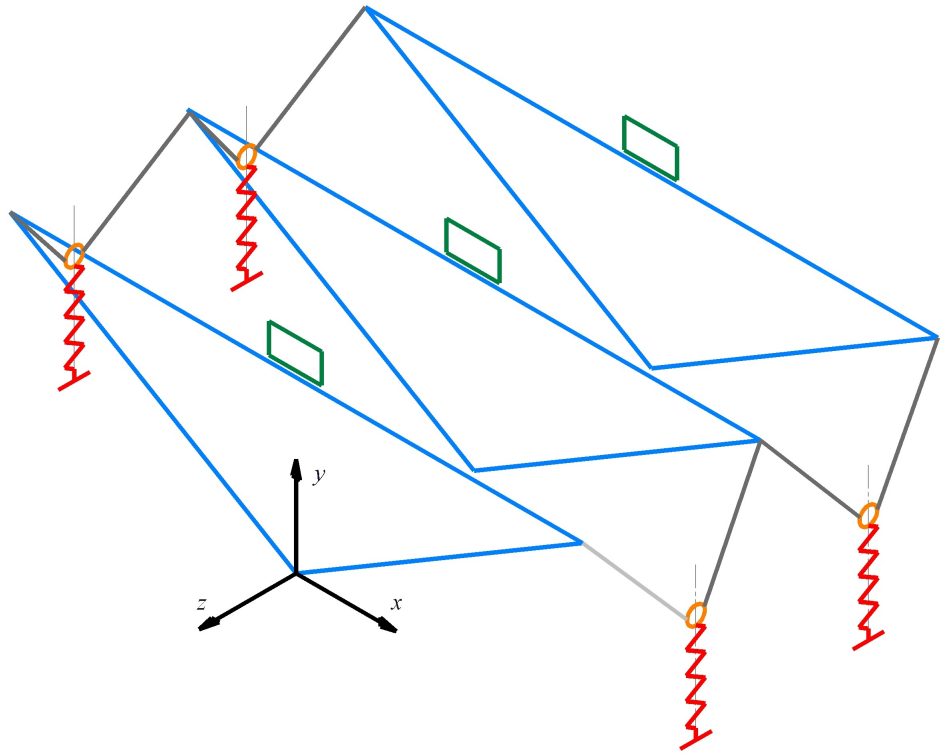
gdje izrazi s indeksom i ovise samo o s_i i φ_i i njihovim derivacijama po vremenu. U slučaju da se doda potencijalna energija opruga koje povezuju njihala, dobiva se:

$$L = E_{\mathrm{k},1} + E_{\mathrm{k},2} + E_{\mathrm{k},3} - E_{\mathrm{p},1} - E_{\mathrm{p},2} - E_{\mathrm{p},3} - E_{\mathrm{po},1} - E_{\mathrm{po},2}, \tag{3.37}$$

gdje je $E_{\mathrm{po},i}$ potencijalna energija opruga koje povezuju i-to i $i+1$-to njihalo, i ovisi o kutovima zakreta φ_i i φ_{i+1}. Upravo te potencijalne energije koje fizikalno spreže dinamiku njihala, sprežu je i matematički.

Izvod traženih jednadžbi započinje definiranjem poopćenih koordinata:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} s_1 & \varphi_1 & s_2 & \varphi_2 & s_3 & \varphi_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{3.38}$$



Slika 7: Pojednostavljeni prikaz sustava triju kolica i njihala povezanih oprugama

Provodeći potrebnu proceduru jasno je da će jednadžbe imati već poznatu formu:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}. \tag{3.39}$$

Matrica $\mathbf{M}$ poprima oblik:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

gdje je iz 3.37 jasno da na kinetičku energiju zasebnog seta kolica i njihala utječu samo pripadajuće poopćene koordinate i derivacije poopćenih koordinata po vremenu, što objašnjava strukturu matrice $\mathbf{M}$. Uzevši u obzir prethodno, moguće je elegantno zapisati vektore $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}$ i $\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_1}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}_{12} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_2}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}_{34} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_3}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}_{56} \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

$$\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{12}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \mathbf{q}_{12}}\dot{\mathbf{q}}_{12} \\ \dot{\mathbf{q}}_{34}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial \mathbf{q}_{34}}\dot{\mathbf{q}}_{34} \\ \dot{\mathbf{q}}_{56}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathbf{M}_3}{\partial \mathbf{q}_{56}}\dot{\mathbf{q}}_{56} \end{bmatrix}, \tag{3.42}$$

gdje su $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ matrice masa redom prvog, drugog i trećeg njihala, $\mathbf{q}_{12}$ je vektor s poopćenim koordinatama prvog njihala, $\mathbf{q}_{34}$ je vektor s poopćenim koordinatama drugog njihala, a $\mathbf{q}_{56}$ je vektor s poopćenim koordinatama trećeg njihala. Matrice $\mathbf{0}$ su 2×2 nul matrice.

Budući da vanjske sile djeluju zasebno na svaki set kolica i njihala, moguće je i poopćene sile rastaviti na:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

dok vektor uslijed potencijalnih energija glasi:

$$\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial E_{\mathrm{pg}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial E_{\mathrm{po}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial E_{\mathrm{p1g}}}{\partial \mathbf{q}_{12}} \\ \dfrac{\partial E_{\mathrm{p2g}}}{\partial \mathbf{q}_{34}} \\ \dfrac{\partial E_{\mathrm{p3g}}}{\partial \mathbf{q}_{56}} \end{bmatrix} + \frac{\partial E_{\mathrm{po}}}{\partial \mathbf{q}}, \tag{3.44}$$

gdje su $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ i $\mathbf{Q}_3$ vektori poopćenih sila na prvo, drugo i treće njihalo, a $E_{\mathrm{p1g}}, E_{\mathrm{p2g}}$ i E_{p3g} gravitacijske potencijalne energije prvog, drugog i trećeg podsustava kolica na njihalu. Vektor $\dfrac{\partial E_{\mathrm{po}}}{\partial \mathbf{q}}$ proizlazi iz potencijalnih energija opruga.

Matrice masa po uzoru na 3.14 su:

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_{\mathrm{k},i} & m_{\mathrm{k},i}h_{\mathrm{k},i} \\ m_{\mathrm{k},i}h_{\mathrm{k},i} & m_{\mathrm{k},i}h_{\mathrm{k},i}^2 + m_{\mathrm{k},i}s_i^2 + m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2 + J_{\mathrm{k},i} + J_{\mathrm{n},i} \end{bmatrix}. \tag{3.45}$$

Vektori poopćenih sila po uzoru na 3.16 su:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} F_{\mathrm{up},i} + F_{\mathrm{k},i} \\ M_{\mathrm{n},i} + F_{\mathrm{k},i}h_{\mathrm{k},i} \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Vektor $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_i}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}_{2i-1,2i}$ po uzoru na 3.17 je:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}_i}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}_{2i-1,2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2m_{\mathrm{k},i}s_i\dot{s}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_i \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2m_{\mathrm{k},i}s_i\dot{s}_i\dot{\varphi}_i \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Vektor $\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}_{2i-1,2i}\frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial \mathbf{q}_{2i-1,2i}}\dot{\mathbf{q}}_{2i-1,2i}$ po uzoru na 3.19 je:

$$\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}_{2i-1,2i}\frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial \mathbf{q}_{2i-1,2i}}\dot{\mathbf{q}}_{2i-1,2i} = \begin{bmatrix} 2m_{\mathrm{k},i}s_i\dot{\varphi}_i^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

Vektor $\frac{\partial E_{\mathrm{pig}}}{\partial \mathbf{q}_{2i-1,2i}}$ po uzoru na 3.21 je:

$$\frac{\partial E_{\mathrm{pig}}}{\partial \mathbf{q}_{2i-1,2i}} = \begin{bmatrix} -g\sin(\varphi_i)m_{\mathrm{k},i} \\ -g((\sin(\varphi_i)h_{\mathrm{k},i} + \cos(\varphi_i)s_i)m_{\mathrm{k},i} + \sin(\varphi_i)h_{n,i}m_{\mathrm{n},i}) \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Dodatno je potrebno izvesti član $\frac{\partial E_{\mathrm{po}}}{\partial \mathbf{q}}$ koji spreže dinamiku triju podsustava. Član sadržava potencijalne energije opruga prikazanih na slici 7. Na slici 8 prikazana je veza između samo jednog para njihala s jedne strane njihala, dok je veza prisutna s obje strane između prvog i drugog njihala te drugog i trećeg njihala. Dinamika masa koje se nalaze na oprugama je zanemarena. U sljedećim izrazima Δx_{ij} i Δy_{ij} predstavljaju pomake hvatišta užeta (na i-tom njihalu) koje povezuje i-to njihalo s oprugom. Na mjesto indeksa j može se pojaviti d ili l, što označava stranu (lijevu ili desnu) na kojoj se opruga i uže nalaze. Dodatno je potrebno naglasiti da su veličine $\Delta x_{i,j}$ i $\Delta y_{i,j}$ u jednadžbama 3.50 do 3.53 definirane tako da pozitivna vrijednost $\Delta x_{i,j}$ i $\Delta y_{i,j}$ prouzrokuje produljenje opruge, tj. vlačne sile u užadi, što za svrhu ima konzistentnost s jednadžbom 3.54. Također, zbog jednostavnosti je pretpostavljeno da su dimenzije svih njihala jednake i da su sve opruge smještene na sredini između njihala sa svim jednakim razmacima, tj. identičnom geometrijskom konfiguracijom, te da sve opruge imaju jednaku krutost. Navedene pretpostavke odgovaraju eksperimentalnom postavu koji se modelira. Pomaci

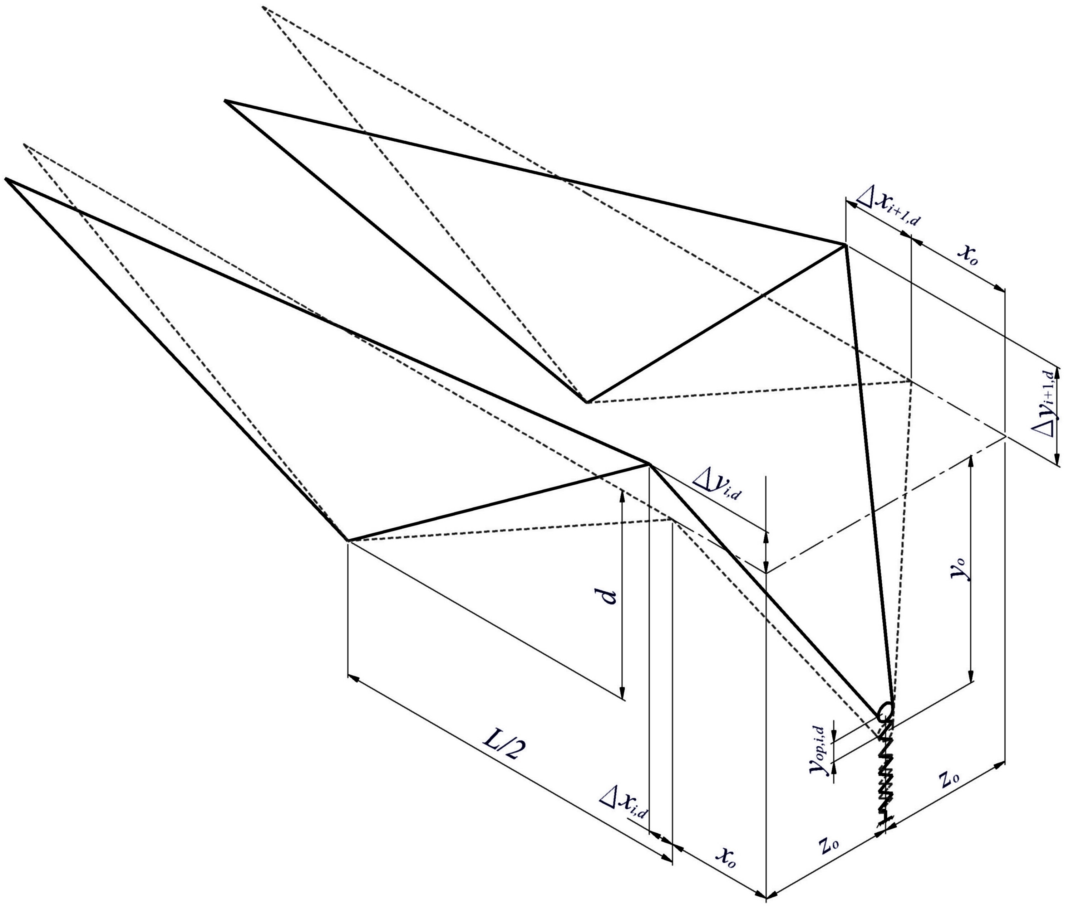
$\Delta x_{i,j}$ i $\Delta y_{i,j}$ definirani su s:

$$\Delta x_{i,d} = \frac{L}{2}(1 - \cos(\varphi_i)) - d\sin(\varphi_i), \tag{3.50}$$

$$\Delta x_{i,l} = \frac{L}{2}(1 - \cos(\varphi_i)) + d\sin(\varphi_i), \tag{3.51}$$

$$\Delta y_{i,d} = -d(1 - \cos(\varphi_i)) - \frac{L}{2}\sin(\varphi_i), \tag{3.52}$$

$$\Delta y_{i,l} = -d(1 - \cos(\varphi_i)) + \frac{L}{2}\sin(\varphi_i). \tag{3.53}$$



Slika 8: Veza i-tog njihala s j-tim njihalom s jednom oprugom s desne strane

Jednadžba za duljinu užeta koje povezuje i-to i $i+1$-to njihalo s i-tom oprugom je:

$$(x_0 + \Delta x_{i,j})^2 + (y_0 + \Delta y_{i,j} - y_{\mathrm{op},i,j})^2 + (x_0 + \Delta x_{i+1,j})^2 + (y_0 + \Delta y_{i+1,j} - y_{\mathrm{op},i,j})^2 + 2z_0^2 = 2x_0^2 + 2y_0^2 + 2z_0^2 = L_{\mathrm{u}}, \tag{3.54}$$

gdje je L_{u} duljina užeta (konstanta), x_0, y_0 i z_0 su udaljenosti hvatišta užeta na njihalu i

na opruzi u ravnotežnom položaju (svi φ su 0) prema slici 8, a $y_{\mathrm{op},i,j}$ je pomak hvatišta užeta na opruzi i u ravnotežnom položaju ima vrijednost 0. Iz jednadžbe 3.54 može se dobiti $y_{\mathrm{op},i,j}$ i glasi:

$$y_{\mathrm{op},i,j} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \tag{3.55}$$

gdje su:

$$A = 2, \tag{3.56}$$

$$B = -2(2y_0 + \Delta y_{i,j} + \Delta y_{i+1,j}), \tag{3.57}$$

$$C = (x_0 + \Delta x_{i,j})^2 + (y_0 + \Delta y_{i,j})^2 + (x_0 + \Delta x_{i+1,j})^2 + (y_0 + \Delta y_{i+1,j})^2 - 2x_0^2 - 2y_0^2. \tag{3.58}$$

Potencijalna energija lijeve i desne i-te opruge je:

$$E_{\mathrm{po},i} = k(y_{\mathrm{op},i,l} + \Delta l_0)^2 + k(y_{\mathrm{op},i,d} + \Delta l_0)^2, \tag{3.59}$$

a obaju setova opruga:

$$E_{\mathrm{po}} = E_{\mathrm{po},1} + E_{\mathrm{po},2}, \tag{3.60}$$

gdje je Δl_0 početno produljenje opruge (iz slike 8 i jednadžbe 3.59 jasno je da pozitivno početno produljenje podrazumijeva vlačne sile u opruzi). Uvrštavanjem jednadžbi od 3.50 do 3.59 za $i = 1$, te deriviranjem po varijablama stanja dobivaju se izrazi koji su zbog kompliciranosti izostavljeni, a mogu se pronaći u Prilogu 1. Linearizirani izraz za $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{po},i}}{\mathrm{d}\mathbf{q}}$ oko $\varphi_i = 0$ za sve i glasi:

$$\frac{\partial E_{\mathrm{po},i}}{\partial \varphi_i} = \left[\frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial \varphi_i \, \partial \varphi_i} \quad \frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial \varphi_i \, \partial \varphi_{i+1}} \right] \Bigg|_{\substack{\varphi_i = 0 \\ \varphi_{i+1} = 0}} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

i:

$$\frac{\partial E_{\mathrm{po},i}}{\partial \varphi_{i+1}} = \left[\frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial \varphi_{i+1} \, \partial \varphi_i} \quad \frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial \varphi_{i+1} \, \partial \varphi_{i+1}} \right] \Bigg|_{\substack{\varphi_i = 0 \\ \varphi_{i+1} = 0}} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{bmatrix}, \tag{3.62}$$

gdje su:

$$\left.\frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial\varphi_i\,\partial\varphi_i}\right|_{\substack{\varphi_i=0\\ \varphi_{i+1}=0}} = k\frac{1}{8}\left(L+\frac{2x_0 d}{y_0}\right)^2 - k\frac{\Delta l_0}{8y_0}\left(L^2+4x_0L+8d^2\right) + k\Delta l_0\left(\frac{d}{2}-\frac{d^2x_0^2}{4y^3}\right) = p_1, \tag{3.63}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial\varphi_{i+1}\,\partial\varphi_{i+1}}\right|_{\substack{\varphi_i=0\\ \varphi_{i+1}=0}} = \left.\frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial\varphi_i\,\partial\varphi_i}\right|_{\substack{\varphi_i=0\\ \varphi_{i+1}=0}} = p_1, \tag{3.64}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial\varphi_i\,\partial\varphi_{i+1}}\right|_{\substack{\varphi_i=0\\ \varphi_{i+1}=0}} = \left.\frac{\partial^2 E_{\mathrm{po},i}}{\partial\varphi_{i+1}\,\partial\varphi_i}\right|_{\substack{\varphi_i=0\\ \varphi_{i+1}=0}} = k\frac{1}{8}\left(L+\frac{2x_0 d}{y_0}\right)^2 + k\frac{\Delta l_0}{8y_0}\left(L^2-4\frac{d^2x_0^2}{y_0^2}\right) = p_2. \tag{3.65}$$

Na osnovu jednadžbi 3.60 i od 3.61 do 3.65 može se zapisati:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{po}}}{\mathrm{d}\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 2p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \varphi_1 \\ s_2 \\ \varphi_2 \\ s_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}. \tag{3.66}$$

3.3.1 Linearizacija i zapisivanje u prostor stanja

Linearizacija potrebnih članova obavljena je u poglavlju 3.2.1 i u 3.3.

Vektor varijabli stanja je:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 & s_1 & \dot{\varphi}_1 & \varphi_1 & \dot{s}_2 & s_2 & \dot{\varphi}_2 & \varphi_2 & \dot{s}_3 & s_3 & \dot{\varphi}_3 & \varphi_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{3.67}$$

Matrica $\mathbf{A}$ proizlazi iz blok-dijagonalne komponente $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{pg}}}{\mathrm{d}\mathbf{q}}$ koja će se manifestirati kao blok-dijagonalna komponenta koji se sastoji od blokova $\mathbf{A}$ iz jednadžbe 3.31 i iz komponente $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{po}}}{\mathrm{d}\mathbf{q}}$, tj. matrice iz jednadžbe 3.66 pomnožene s inverzom matrice masa. Matrica $\mathbf{A}$ glasi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1+\mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{22} & \mathbf{A}_2+2\mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{A}_3+\mathbf{R}_{31} \end{bmatrix}, \tag{3.68}$$

gdje su:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{gh_{\mathrm{k},i}m_{\mathrm{k},i}}{m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2+J_{\mathrm{k},i}+J_{\mathrm{n},i}} & 0 & \frac{g(h_{\mathrm{n},i}^2 m_{\mathrm{n},i}-h_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{k},i}m_{\mathrm{n},i}+J_{\mathrm{n},i}+J_{\mathrm{k},i})}{m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2+J_{\mathrm{k},i}+J_{\mathrm{n},i}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{gm_{\mathrm{k},i}}{m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2+J_{\mathrm{k},i}+J_{\mathrm{n},i}} & 0 & \frac{gh_{\mathrm{n},i}m_{\mathrm{n},i}}{m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2+J_{\mathrm{k},i}+J_{\mathrm{n},i}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.69}$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{h_{\mathrm{k},i}p_j}{m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2+J_{\mathrm{k},i}+J_{\mathrm{n},i}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p_j}{m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2+J_{\mathrm{k},i}+J_{\mathrm{n},i}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Vektor ulaza je:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} F_{\mathrm{p}1} & M_{\mathrm{p}1} & F_{\mathrm{p}2} & M_{\mathrm{p}2} & F_{\mathrm{p}3} & M_{\mathrm{p}3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{3.71}$$

pa je matrica $\mathbf{B}_1$:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{1,3} \end{bmatrix}, \tag{3.72}$$

gdje je:

$$\mathbf{B}_{1,i} = \frac{1}{m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2 + J_{\mathrm{k},i} + J_{\mathrm{n},i}} \begin{bmatrix} \frac{h_{\mathrm{n},i}^2 m_{\mathrm{n},i}+J_{\mathrm{k},i}+J_{\mathrm{n},i}}{m_{\mathrm{k}}} & -h_{\mathrm{k},i} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.73}$$

Matrica $\mathbf{B}_2$ je:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{2,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{2,3} \end{bmatrix}, \tag{3.74}$$

gdje je:

$$\mathbf{B}_{2,i} = \frac{1}{m_{\mathrm{n},i}h_{\mathrm{n},i}^2 + J_{\mathrm{k},i} + J_{\mathrm{n},i}} \begin{bmatrix} \frac{h_{\mathrm{k},i}^2 m_{\mathrm{k},i}+h_{\mathrm{n},i}^2 m_{\mathrm{n},i}+J_{\mathrm{k},i}+J_{\mathrm{n},i}}{m_{\mathrm{k},i}} \\ 0 \\ -h_{\mathrm{k},i} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.75}$$

3.4 Model elektromotora

Promatrani sustav sadrži tri istosmjerna motora na čijim se izlaznim vratilima nalaze zupčanici, po jedan na svakom njihalu te pomoću kojih se sustav kolica pomiče po njihalu pomoću veze zupčanika sa zupčastom letvom koja je fiksirana za njihalo. Da bi se tim motorima upravljalo, tj. da bi za traženu silu mogli odrediti potreban napon izvora potrebno je poznavati model motora. Po drugom Kirchhoffovu zakonu vrijedi izraz:

$$U = RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + e, \tag{3.76}$$

gdje je U napon izvora, R otpor armature motora, I struja u armaturi motora, L induktivitet armature motora i e elektromotorna sila. Izraz za elektromotornu silu je:

$$e = K_\mathrm{e}\omega_\mathrm{e}, \tag{3.77}$$

gdje je ω_e brzina vrtnje elektromotora, a K_e konstanta elektromotorne sile. Ako se uvedu kinematske relacije koje povezuju brzinu rotacije motora s brzinom rotacije zupčanika i brzinom translacije kolica dobiva se jednadžba:

$$e = \frac{K_\mathrm{e}\dot{s}}{rp}, \tag{3.78}$$

gdje je p prijenosni omjer s motora na zupčanik i r kinematski radijus zupčanika. Moment motora dan je izrazom:

$$M_\mathrm{e} = K_\mathrm{t}I, \tag{3.79}$$

gdje je K_t momentna konstanta elektromotora. Iskorištavajući iste kinematske relacije dolazi se do izraza za silu na zupčaniku kojom se pokreću kolica po njihalu:

$$F = \frac{K_\mathrm{t}I}{pr}. \tag{3.80}$$

Zanemarujući član koji ovisi o derivaciji struje po vremenu u izrazu 3.76 uslijed jako malog induktiviteta armature, tj. jako brze dinamike, te uvrštavajući izraze od 3.77 do 3.80 dolazi se do izraza:

$$U_i = \frac{rpR}{K_\mathrm{t}}F_i + \frac{K_\mathrm{e}}{rp}\dot{s}_i, \tag{3.81}$$

gdje je indeks i dodan kako bi se sva tri motora raščlanila. Pri izvodu regulatora moguće je kao upravljački signal uzeti ili silu ili napon. U ovom radu za upravljački signal je korištena sila, a u računalnom programu u eksperimentalnom dijelu napon je preračunavan iz tražene sile i mjerenih brzina pomoću izraza 3.81. Također, pri sintezi regulatora penalizira se napon, tj. suma dana izrazom 3.81.

3.5 Parametri sustava

Parametri sustava preuzeti su iz ustupljenog izvješća projekta 'Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima' i članka [18]. Parametri su dani u tablici 2. Zbog modifikacija na eksperimentalnom postavu pojedini parametri se ne slažu. Također, pojedini parametri dobiveni su preračunavanjem parametara iz izvora.

Tablica 2: Parametri sustava

Parametar	Vrijednost	Mjerna jedinica
$h_\mathrm{k} = h_{\mathrm{k},1} = h_{\mathrm{k},2} = h_{\mathrm{k},3}$	m	0,180047
$h_\mathrm{n} = h_{\mathrm{n},1} = h_{\mathrm{n},2} = h_{\mathrm{n},3}$	m	0,116553
$m_\mathrm{k} = m_{\mathrm{k},1} = m_{\mathrm{k},2} = m_{\mathrm{k},3}$	kg	0,6
$J_\mathrm{k} = J_{\mathrm{k},1} = J_{\mathrm{k},2} = J_{\mathrm{k},3}$	kg·m^2	0
$m_\mathrm{n} = m_{\mathrm{n},1} = m_{\mathrm{n},2} = m_{\mathrm{n},3}$	kg	4,839
$J_\mathrm{n} = J_{\mathrm{n},1} = J_{\mathrm{n},2} = J_{\mathrm{n},3}$	kg·m^2	0,68
g	m/s^2	9,81
K_e	V·s/rad	0,0077
K_t	N·m/A	0,0077
R	Ω	2,6
p	1	1/3,71
r	m	0,0077
L	m	1
d	m	0,095
Δl_0	m	0
x_0	m	0
y_0	m	0,4
z_0	m	0,35
k	N/m	100

Poglavlje 4

SINTEZA REGULATORA

4.1 Sinteza regulatora za sustav kolica na njihalu

U ovom poglavlju izvršena je sinteza regulatora za sustav jednih kolica na njihalu. Radi se o nestabilnom sustavu s jednim nestabilnim modom gibanja i podupravljanom sustavu gdje je samo jedan od dva stupnja slobode upravljan, a sve varijabla stanja su mjerene. Kinematika i dinamika sustava opisana je u prethodnom poglavlju, a detalji vezani uz izvedbu postava opisani su u poglavlju 'Eksperimentalna provjera'.

Podatci potrebni za sintezu regulatora su vektor varijabli stanja $\mathbf{x}$, vektor ulaznih varijabli $\mathbf{w}$, vektor upravljačkih varijabli $\mathbf{u}$, vektor mjerenih varijabli $\mathbf{y}$ i vektor izlaza (greški) $\mathbf{z}$, matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{D}_{11}$, $\mathbf{D}_{12}$, $\mathbf{D}_{21}$, $\mathbf{D}_{22}$ i težinski filteri kojima se oblikuje ponašanje sustava. Vektori varijabli stanja, ulaza i upravljačkih varijabli definirani su u 3.2.1, a matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ izračunate su u poglavlju 3.2.1, te će služiti u svrhu sinteze početnog regulatora koji za cilj ima dobro odbacivanje poremećaja, dok će za sintezu regulator koji je sposoban dobro pratiti referentnu vrijednost matrice biti proširene s integralom greške kuta zakreta njihala, te će u vektor ulaza biti dodana referentna vrijednost zakreta. Iz razloga što je sustav podupravljan nije moguće koristiti integralno djelovanje i po grešci pomaka kolica i po grešci zakreta njihala jer potencijalno zadana referentna točka ne mora biti i ravnotežna (stabilna). Matrice $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{D}_{21}$, $\mathbf{D}_{22}$ veza su varijabli stanja, vektora ulaza i vektora upravljačkih varijabli s vektorom mjerenih varijabli (varijabli dostupnih regulatoru), što je detaljnije prikazano u poglavlju 2.2.3. Mjerene su sve varijable stanja, pa će vrijednost matrice $\mathbf{C}_2$ biti:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Matrice $\mathbf{D}_{21}$, $\mathbf{D}_{22}$ su nul matrice jer poremećajne sile i momenti te upravljačke sile nisu mjereni. Očito mjerene varijable imaju značenje varijabli stanja, osim treće mjerene

varijable koja je definirana kao razlika reference (nule) i kuta zakreta. U daljnjim će potpoglavljima biti pokazano da u onom slučaju gdje je referenca uzeta u obzir, matrica $\mathbf{D}_{21}$ nije nul matrica. U slučaju kada je poznata matrica $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{A}$, moguće je pokazati da je sustav osmotriv, što je trivijalno Matlabovom funkcijom *obsv*. Također analizom matrica $\mathbf{B}_2$ i $\mathbf{A}$ može se pokazati da je sustav upravljiv, pomoću Matlabove funkcije *ctrb*, čime su zadovoljeni preduvjeti za sintezu stabilizirajućeg regulatora. Matrice $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{D}_{11}$, $\mathbf{D}_{12}$ veza su varijabli stanja, vektora ulaza i vektora upravljačkih varijabli s vektorom varijabli izlaza, tj. varijabli greške koje se minimiziraju H_∞ sintezom. Odabrane varijable greške su redom pomak kolica s, odstupanje kut zakreta njihala od reference (nule) $-\varphi$, i napon izvora $U = 0,7008F_{\text{up}} + 3,7099\dot{s}$ (dobiveno uvrštavanjem numeričkih vrijednosti parametara iz tablice 2 u 3.81). Zapisano u vektor, izlazne varijable su:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} s \\ -\varphi \\ U \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Tražene matrice su:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3,7099 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

i:

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,7008 \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

a $\mathbf{D}_{11}$ je nul matrica. Valja primijetiti da su prve dvije varijable greške kontradiktorne trećoj varijabli greške jer je treća varijabla greške zapravo upravljačka varijabla, a nije moguće postići dobro odbacivanje poremećaja s malim upravljačkim signalom. U slučaju kada upravljački signal ne bi bio penaliziran, rezultat sinteze bio bi regulator koji bi imao izrazito velika pojačanja koja aktuator ne bi mogao realizirati. Određivanje težina pojedinih ulaznih i izlaznih varijabli provodi se odabirom težinskih filtera koji mogu biti ovisni o frekvenciji. Cilj postavljanja filtera na izlazne varijable je davanje izlazima na težini, tj. određivanje koji će se izlazi više penalizirati i na kojoj frekvenciji. Tehnički težinska funkcija na izlazu je prijenosna funkcija koja normira stvarnu grešku. Cilj

postavljanja filtera na ulaze je određivanje međusobne važnosti ulaza po frekvencijama, gdje je težinska funkcija na ulazu prijenosna funkcija koja jedinični ulazni signal pretvara u traženi ulazni signal. Budući da su filteri prijenosne funkcije koje se nadovezuju na sustav, diže se red sustava, a time i red optimalnog centraliziranog regulatora. U radu nisu prikazivane matrice sustava s filterima, a pri sintezi stvarni sustav je povezivan s filterima Matlabovom funkcijom *connect*. Odabir filtera je kompliciran posao za koji ne postoje striktna pravila, ali postoje neke smjernice, npr. one dane u radu [21]. Neke od poželjnih svojstava regulatora su dobro praćenje reference i odbacivanje poremećaja, a s obzirom na to da se referenca i poremećaj javljaju na niskim frekvencijama, potrebno je imati niskopropusne filtere na ulazima koji će obuhvatiti raspon frekvencija u kojima se javljaju referenca i poremećaj. Također, mjerni šum se javlja na visokim frekvencijama pa je potrebno na izlaz koji je upravljački signal postaviti visokopropusni filter koji će obuhvatiti visoke frekvencije na kojima se javlja mjerni šum. U ovom radu cilj je istražiti utjecaj težinskih filtera na sljedeće karakteristike:

- Frekvencijske karakteristike
  - $\varphi_{\max}$ - maksimalni kut zakreta njihala u Bodeovim dijagramima
  - $s_{\max}$ - maksimalni pomak kolica u Bodeovim dijagramima
  - $U_{\max}$ - maksimalni napon u Bodeovim dijagramima
- Odbacivanje poremećaja - odziv na impulsni moment iznosa 1 Nm u trajanju od 0,1 s
  - $\Delta\varphi_{\mathrm{p,max}}$ - maksimalna razlika kutova zakreta njihala
  - $\Delta s_{\mathrm{p,max}}$ - maksimalna razlika pomaka kolica
  - $U_{\mathrm{p,max}}$ - maksimalni napon
  - τ_{p} - vrijeme nakon kojega svi kutovi zakreta imaju vrijednosti (apsolutne) manje od $x\%$ od vrijednosti maksimalnog kuta zakreta
- Vođenje sustava - odziv na step referencu iznosa 0,05 rad
  - $\Delta\varphi_{\mathrm{v,max}}$ - maksimalna razlika kutova zakreta njihala
  - $\Delta s_{\mathrm{v,max}}$ - maksimalna razlika pomaka kolica
  - $U_{\mathrm{v,max}}$ - maksimalni napon
  - τ_{v} - vrijeme nakon kojega svi kutovi zakreta imaju odstupanje od reference manje od $x\%$ od vrijednosti reference

- Utjecaj mjernog šuma
- Ponašanje u prezasićenju
- Robusnost sustava (robusna stabilnost, na parametarske nesigurnosti).

Da bi bilo moguće pratiti vremenski odziv potrebno je definirati nominalne slučajeve za poremećaj i referencu. Budući da je promatrani sustav eksperimentalni i nema predefiniranih eksploatacijskih kriterija, kriteriji su odabrani proizvoljno. Za poremećaj je odabran moment iznosa 1 Nm u trajanju od 0,1 (kratko trajanje oponaša impuls) i refernetna vrijednost kuta zakreta njihala od $0,05$ rad. U slučaju promatranja frekvencijskog odziva zbog jednostavnosti promatran je samo odziv na poremećajni moment jer se pokazao kao nepovoljniji slučaj.

Filteri su definirani kao racionalne (funkcije koje su razlomak u čijem se brojniku i nazivniku nalaze polinomi), fazno minimalne (nema polova u desnom dijelu kompleksne ravnine, tj. funkcija ne poprima vrijednost nula za vrijednosti ω veće od 0) i stabilne (funkcija nema vrijednost 0 u nazivniku funkcije za ω veće od 0) prijenosne funkcije. U početnom koraku koristit će se filteri od kojih će frekvencijski ovisan biti samo filter na treću izlaznu varijablu, tj. napon izvora gdje će se koristiti visokopropusni filter. Performanse pri vođenju sustava neće biti promatrane jer je očekivano da će biti loše s obzirom na to da nema penalizacije kuta zakreta na niskim frekvencijama i penalizacije integrala greške kuta zakreta pri niskim frekvencijama. Nakon što se daju smjernice za visokopropusni filter na napon, prijeći će se na sintezu regulatora koji uzima u obzir integral greške kuta zakreta.

Korišteni početni filteri su:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{w}} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{W}_{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & W_{\mathrm{u}} \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Filteri na ulaz $\mathbf{W}_{\mathrm{w}}$ određeni su proizvoljno, uz pretpostavku da se javljaju veći momenti i da moment unosi veći poremećaj u sustav. Kada bi bili poznati uvjeti u eksploataciji bilo bi moguće definirati filtere tako da odgovaraju maksimalnim iznosima sila i momenata

koji se javljaju u eksploataciji. Filteri na izlaz $\mathbf{W}_{\mathrm{w}}$ odabrani su tako da se više penalizira kut zakreta naspram pomaka kolica. Također, promatrajući eksperimentalni postav nije moguće definirati maksimalne dopuštene pomake i kutove zakreta, a u suprotnom slučaju bilo bi moguće odabrati filtere tako da imaju vrijednost recipročnu od dopuštene. U takvom slučaju (poznavanje nominalnih slučajeva poremećaja i dopuštene greške) H_∞ norma sustava s filterima manja od jedan značila bi da za sve nominalne slučajeve poremećaja zasebno greška ne izlazi iz dopuštenog područja, ali ipak u slučaju kombinacije poremećaja greška može izići iz dopuštenog područja. Ako je n različitih poremećaja (ulaza), H_∞ norma mora imati vrijednost manju od $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kako bi mogli garantirati da ni u kojem slučaju sustav neće ući u nedozvoljeno područje.

Za filter W_{u} odabran je visokopropusni filter drugog reda i uspoređen je s filterom koji ne ovisi o frekvenciji kako bi se istaknule prednosti korištenja visokopropusnog filtera. Razlika između filtera nižeg i višeg reda je u tome što filteri višeg reda imaju strmiji prelazak iz propusnog u nepropusni dio, ali kao negativnu posljedicu imaju to što dižu red optimalnog centraliziranog regulatora. Također, osim niskopropusnih i visokopropusnih filtera koji mogu biti od prvog reda pa nadalje, uobičajeni su pojasnopropusni filter (eng. 'bandpass filter') i pojasnonepropusni filter (eng. 'banstop filter') koji su minimalno drugog reda. Kompleksniji filteri dobivaju se multiplikacijom jednostavnijih filtera čime dolazi do multipliciranja amplituda i promjene faznog pomaka filtera, pa su tako i pojasnopropusni filter i pojasnonepropusni filter dobiveni multiplikacijom niskopropusnog i visokopropusnog filtera, a važno je da se zbrajanjem filtera mogu dobiti neželjeni rezultati jer se amplitude neće zbrojiti zbog potencijalno različitih faznih pomaka, tj. filteri će se zbrojiti, ali kao kompleksni brojevi. Filter W_{u} određen je jednadžbom:

$$W_{\mathrm{u}} = \frac{s^2 + \sqrt{2}\sqrt{A}\omega_{\mathrm{p}} + \omega_{\mathrm{p}}^2 A}{Bs^2 + \sqrt{2}\sqrt{B}\omega_{\mathrm{p}} + \omega_{\mathrm{p}}^2}, \tag{4.7}$$

gdje je A pojačanje na niskim frekvencijama, B je recipročna vrijednost pojačanja na visokim frekvencijama, a ω_{p} konstanta koja određuje 'prijelaznu' frekvenciju, tj. na logaritamskom dijagramu pojačanja filtera translatira dijagram lijevo-desno. Konstanta $\sqrt{2}$ u 4.7 odabrana je zato što za tu konstantu filter ima najstrmiji prijelaz iz niskopropusnog dijela u visokopropusni dio bez da se u dijagramu pojačanja pojavljuju novi lokalni minimumi i maksimumi koji su nepoželjni. Za konstante manje od $\sqrt{2}$ prijelaz je manje strm,

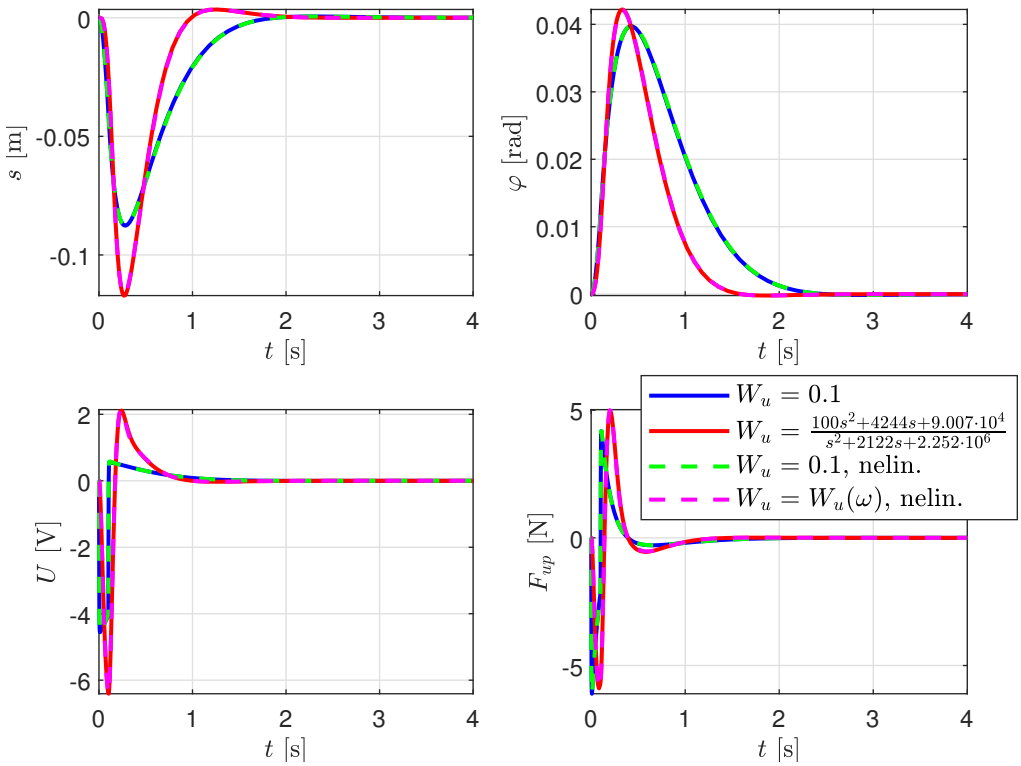
a za konstante veće od $\sqrt{2}$ prijelaz je strmiji, ali se javljaju novi lokalni minimumi i maksimumi. Filter oblika 4.7 koristi se za sve filtere u radu, gdje se konstante A i B određuju unaprijed, a ω_{p} se računa nakon što se odabere neko pojačanje i pripadajuća frekvencija, gdje to pojačanje mora biti manje od maksimuma od A i B i veće od minimuma od A i B.

4.1.1 Rezultati simulacije

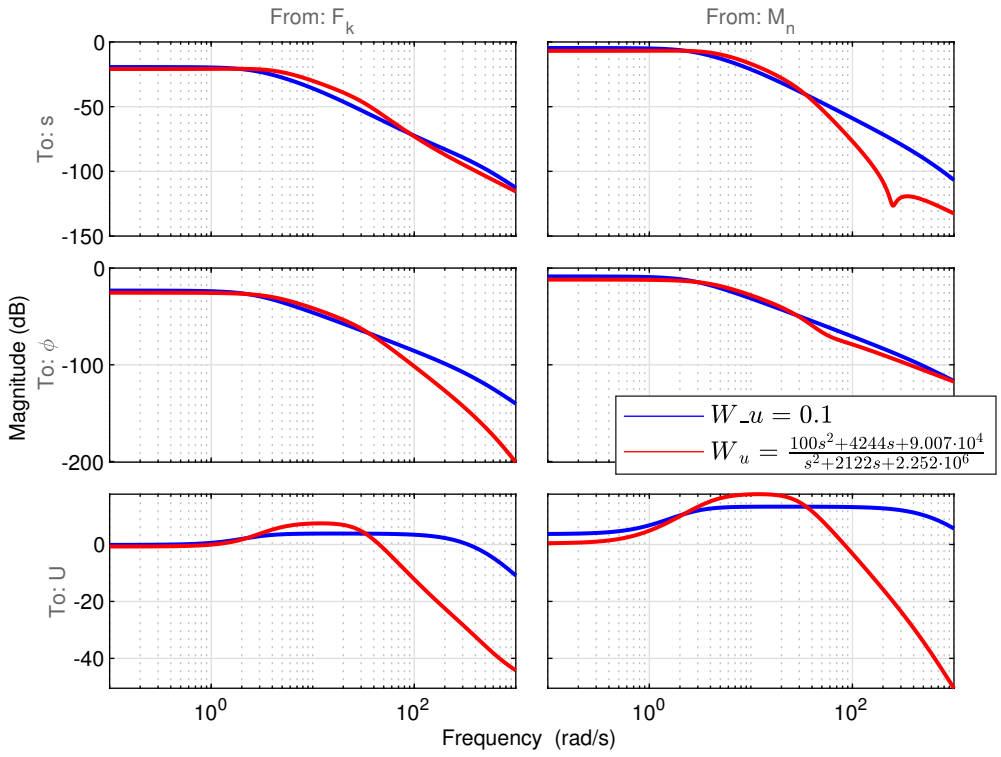
Na slici 9 prikazani su rezultati simulacije sustava s regulatorom dobivenim H_∞ sintezom s težinskim funkcijama $\mathbf{W}_{\mathrm{w}}$ i $\mathbf{W}_{\mathrm{z}}$ s frekvencijski neovisnom težinskom funkcijom W_{u} iznosa 0,1 (u prvom slučaju) i frekvencijski ovisnog filtera danog s funkcijom (u drugom slučaju):

$$W_{\mathrm{u}} = \frac{100s^2 + 4244s + 9,007 \cdot 10^4}{s^2 + 2122s + 2,252 \cdot 10^6}, \tag{4.8}$$

gdje je filter odabran tako da na niskim frekvencijama ima vrijednost 0,04, na visokim frekvencijama ima vrijednost 100, a na frekvenciji od 150 rad·s^{-1} ima vrijednost 1, a filter je dobiven Matlabovom funkcijom *makeweight*. Sinteza regulatora izvršena je Matlabovom funkcijom $hinfsyn$ koja se temelji na proceduri opisanoj u poglavlju 2.2.4. Proces sinteze daje regulator u obliku modela prostora stanja. Simulacija sustava provedena je korištenjem Matlabove funkcije *ode23s* koja služi za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi. Za računanje derivacija u simulaciji moguće je koristiti jednadžbu 2.35, ali je korištena odvojeno 2.33 i 2.30, gdje se iz 2.33 dobiva izlaz iz regulatora (upravljačka sila) koji ulazi u jednadžbu 2.30. Na primjeru je dana usporedba simulacije s linearnim modelom i nelinearnim modelom, a razlike su iznimno male, što ukazuje da su linearizacija i primjena regulatora dobivenog sintezom nad linearnim modelom opravdane. Promatrajući rezultate sa slike 9 očigledno je da sustav za koji je regulator dobiven sintezom s frekvencijski neovisnom težinskom funkcijom W_{u} daje bolje rezultate, temeljeći tu tvrdnju na činjenici da se postižu manje vršne vrijednosti pomaka kolica s i kuta zakreta njihala φ te pritom dajući manji maksimalni napon na izvoru, uz nedostatak sporije dinamike (sporijeg vraćanja u ravnotežni položaj). Uzrok dobrih performansi sustava s frekvencijski neovisnom težinskom funkcijom leži u izlaznom signalu napona, koji po početku djelovanja poremećaja gotovo momentalno dostiže željenu vrijednost, koja se



Slika 9: Rezultati simulacije za impulsni poremećaj (moment iznosa 1 Nm u trajanju 0,1 s)



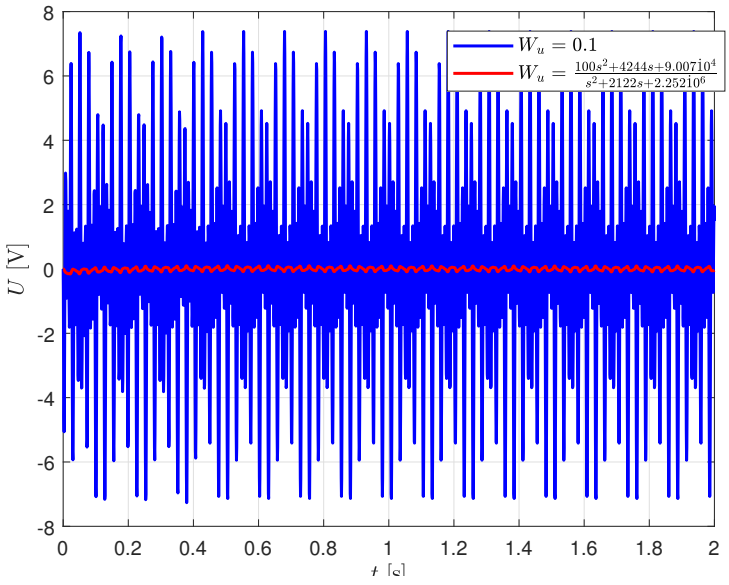
Slika 10: Bodeovi dijagrami

također jako brzo mijenja po završetku djelovanja poremećaja. Penalizacijom napona na visokim frekvencijama pri sintezi regulatora korištenjem visokopropusnog W_{u} regulator gubi mogućnost brze reakcije, što se očituje u kašnjenju s upravljačkim signalom. Ipak, taj regulator ima bolje ponašanje pri niskim frekvencijama zbog slabije penalizacije napona na niskim frekvencijama (0,04 naspram 1) što se očituje u bržoj konvergenciji k ravnotežnom položaju sustava s tim regulatorom.

Nakon što u vremenskom odzivu na impulsni poremećaj nije jasno vidljiva motivacija za korištenje visokopropusnog filtera, pogledom na sliku 10 vidljiva je bitna razlika nastala korištenjem različitih filtera, a to je raspon frekvencija u kojem djeluju regulatori. Regulator čija je sinteza izvršena s frekvencijski neovisnom težinskom funkcijom W_{u} ima širi raspon frekvencija na kojima djeluje, a koje sežu do frekvencija na kojima se može javljati mjerni šum. Utjecaj mjernog šuma na napon izvora kojim se upravlja elektromotorom demonstriran je na slici 11 gdje je vektor mjerenih varijabli modificiran tako da poprima vrijednosti:

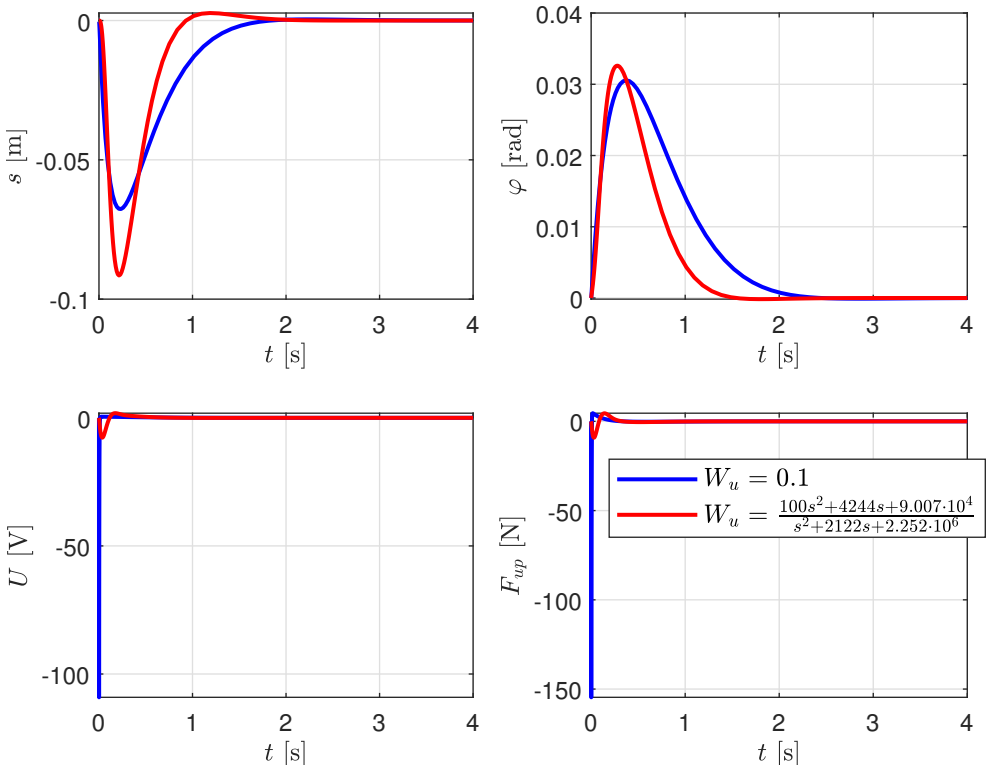
$$\mathbf{y} = \mathbf{C_2}\left(\mathbf{x} + 0,002\mathbf{I}\left(\sin\left(200t\right) + \sin\left(450t\right) + \sin\left(700t\right)\right)\right), \tag{4.9}$$

gdje je $\mathbf{I}$ vektor sa svim članovima vrijednosti 1.



Slika 11: Utjecaj mjernog šuma na naponski signal

Na slici 11 vidljivo je da za definirani slučaj mjernog šuma regulator čija je sinteza provedena s konstantnom težinskom funkcijom daje izrazito velik signal, što je nepoželjno



Slika 12: Rezultati simulacije za slučaj s početnom kutnom brzinom $\dot{\varphi} = 0,1$

jer umjetno uvodi vibraciju u sustav, a povećava i utrošak energije. Dodatno je načinjena simulacija čiji su rezultati prikazani na slici 12, koja je provedena bez djelovanja momenta, ali s početnom kutnom brzinom iznosa 0,1, što korespondira idealnom impulsu momenta. Rezultati su zanimljivi jer slika 11 ukazuje na naglu narav regulatora, koji u ovom slučaju daje ekstremno velik napon i silu, što u realnim konstrukcijama može dovesti do neželjenih udarnih opterećenja, a prelaskom preko maksimalnog dozvoljenog napona na izvoru može doći do nestabilnog ponašanja sustava.

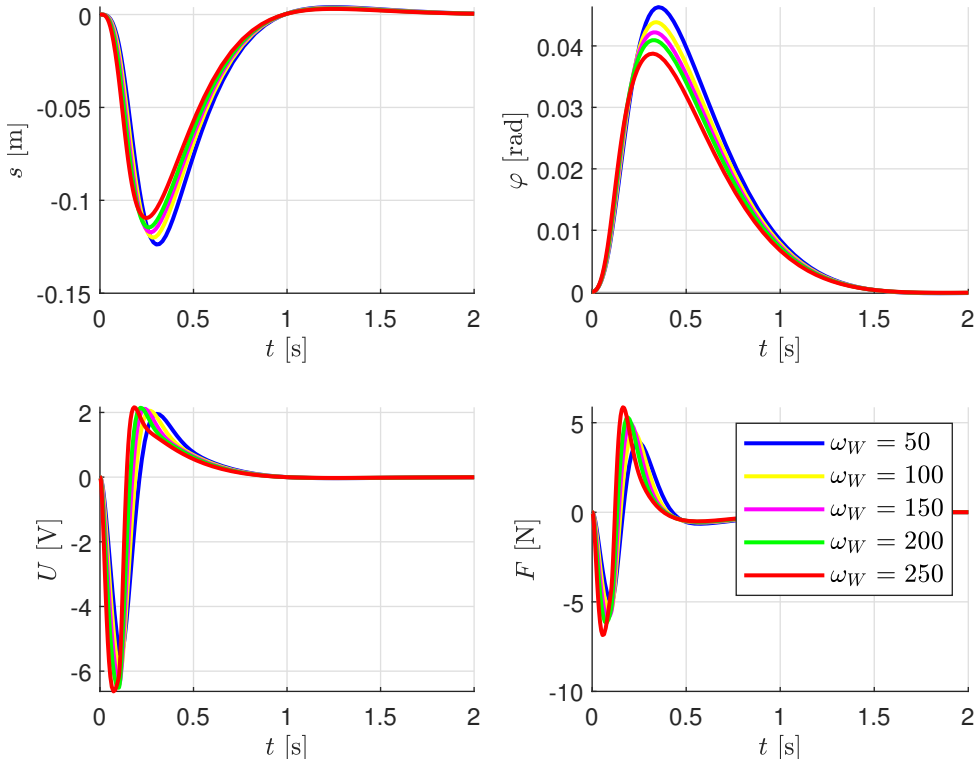
4.1.2 Utjecaj težinskih filtera na odbacivanje poremećaja

U ovom potpoglavlju analiziran je utjecaj filtera W_u na performanse sustava. Korišten je visokopropusni filter drugog reda, odabran tako da ima pojačanje iznosa 100 na visokim frekvencijama, dok su pojačanja na niskim frekvencijama (u daljnjem tekstu označeno s A_m) i frekvencija za koju filter ima pojačanje vrijednosti 1 (u daljnjem tekstu označeno s ω_W) varirani. Zasebno je razmatran utjecaj frekvencije ω_W i pojačanja A_m gdje je početni W_u onaj iz prethodnog potpoglavlja koji ima $\omega_\mathrm{W} = 150$ rad/s i $A_\mathrm{m} = 0,04$. Vremenski

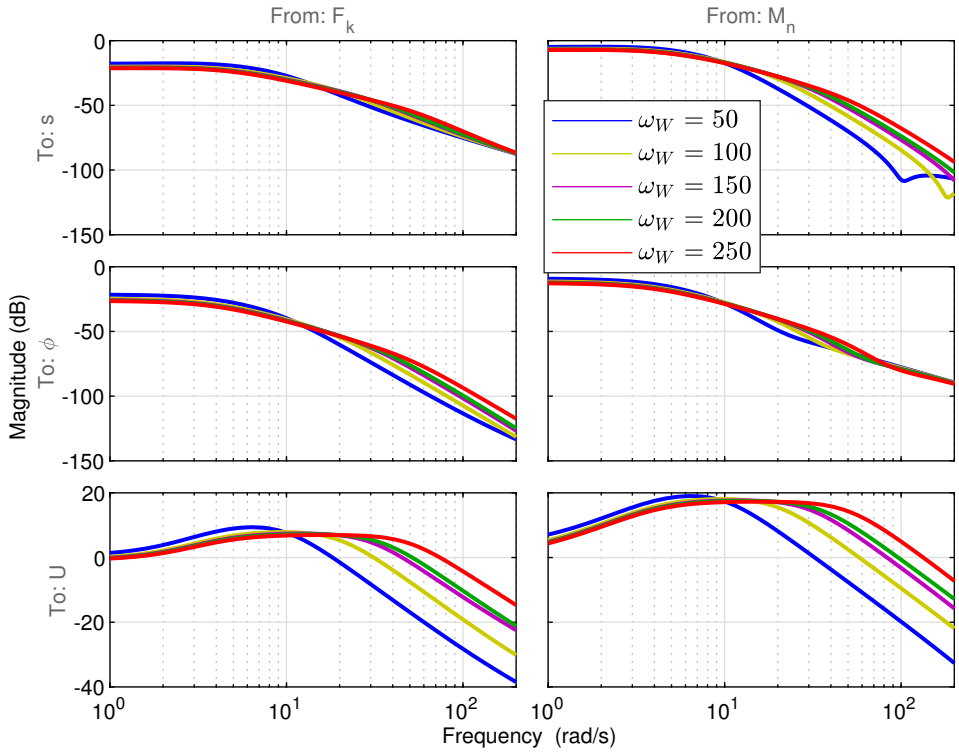
odziv za različite ω_W dan je na slici 13, a Bodeovi dijagrami na slici 14. S obzirom na to da manji ω_W znači i jaču penalizaciju napona, za očekivati je veću H_∞ normu sustava, te zajedno s tim i veće vršne vrijednosti napona i/ili kuta zakreta njihala i pomaka kolica u Bodeovom dijagramu. U prilog prethodnoj tvrdnji išli bi i $\overline{\sigma}$ dijagrami koji za male ω_W imaju najveće vršne vrijednosti, ali te vrijednosti najbrže počinju opadati. Uočene su blage razlike, gdje povećanje ω_W uzrokuje poželjan pad vršne vrijednosti svih varijabli greške, ali i nepoželjno uvećanje pojačanja napona na visokim frekvencijama.

Na vremenskom odzivu vidljivom na slici 13, kontradiktorno očekivanjima dobivenim uvidom u frekvencijski odziv, vidljiva je negativna korelacija između maksimalnog napona i ω_W, ali i očekivani sporiji rast napona. To uzrokuje sporiju dinamiku sustava s rastom ω_W i očekivane veće vršne vrijednosti kuta zakreta i pomaka kolica.

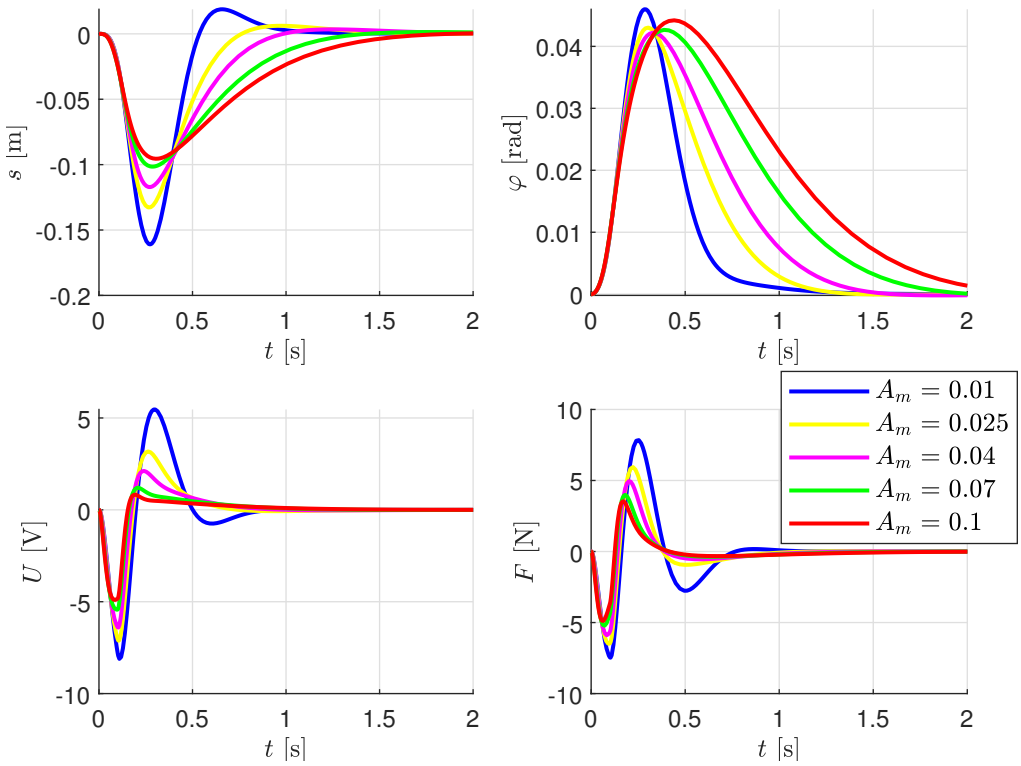
Također, provjeren je utjecaj ω_W na robusnost sustava, tj. robusnu stabilnost sustava. Za modeliranje nesigurnosti korišteni su Matlab i Matlabova naredba *ureal* kojom se zadaju parametri s nesigurnostima, dok modeliranje Δ i $\mathbf{M}$ blokova nije potrebno obaviti je to Matlab obavlja automatski pri računanju robusne stabilnosti. Δ i $\mathbf{M}$ blokove moguće je dobiti Matlab naredbom *lftdata* ($\mathbf{M}$ u obliku modela prostora stanja). Matlabovom naredbom *robstab* računaju se gornja i donja granica strukturirane singularne vrijednosti bloka $\mathbf{M}_{11}$, gdje Matlab vraća recipročnu vrijednost strukturirane singularne vrijednosti, tj. minimalnu vrijednost singularne vrijednosti bloka Δ koja dovodi do destabilizacije sustava. Zadane su parametarske nesigurnosti na sve mase i momente inercija u rasponu od 10% od nominalne vrijednosti. Pokazano je da postoji blaga pozitivna korelacija između ω_W i robusne stabilnosti sustava. Razlog tome može se tražiti u vršnim vrijednostima singularnih vrijednosti prijenosne funkcije $\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)(\mathbf{I}+\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$ koje su indikator robusnosti, a trebale bi opadati s rastom ω_W jer s rastom ω_W opada i vršna vrijednost frekvencijskog odziva napona, tj. pojačanja od $\mathbf{K}(s)$ opadaju, što implicira pad prethodno spomenute prijenosne funkcije. Doduše, zbog kompleksnosti problema teško je izvući jasan zaključak. Od interesa je i ponašanje u slučaju prezasićenja aktuatora, tj. od interesa je pitanje koliko veliko preopterećenje sustava će dovesti do nestabilnog ponašanja sustava. To je ispitano provedbom niza simulacija u kojima je napon ograničavan na određenu vrijednost, te je promatrano na kojoj će vrijednosti doći do nestabilnog ponašanja. Ograničenje na napon uvedeno je u simulaciju tako da se nakon računanja



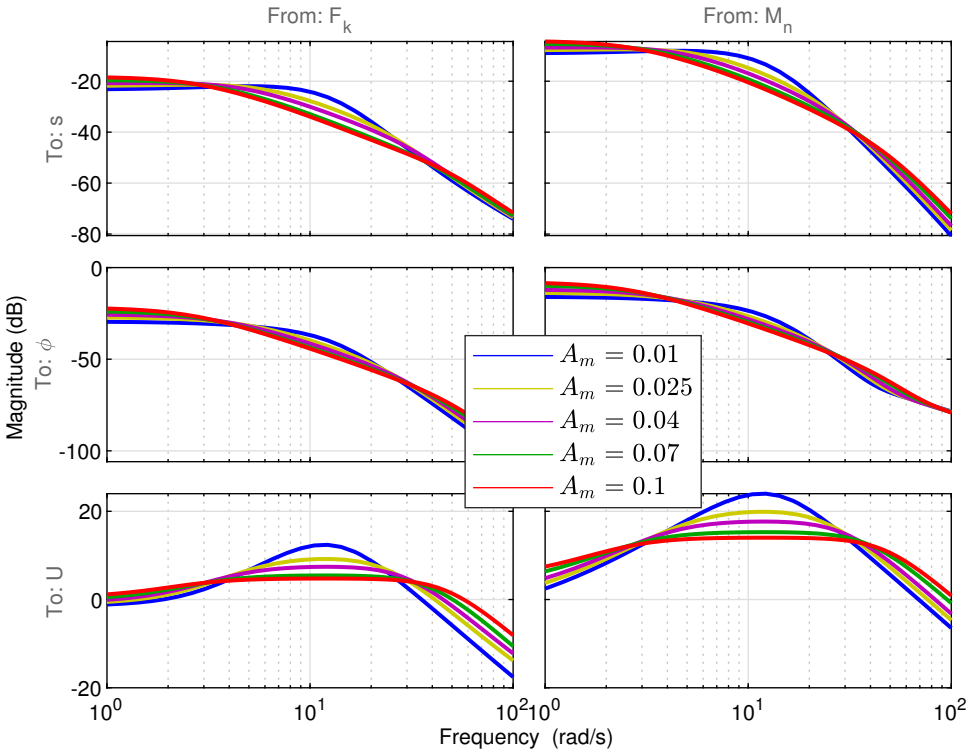
Slika 13: Odziv sustava dobivenih s različitim frekvencijama ω_{W}, odziv na impulsni moment



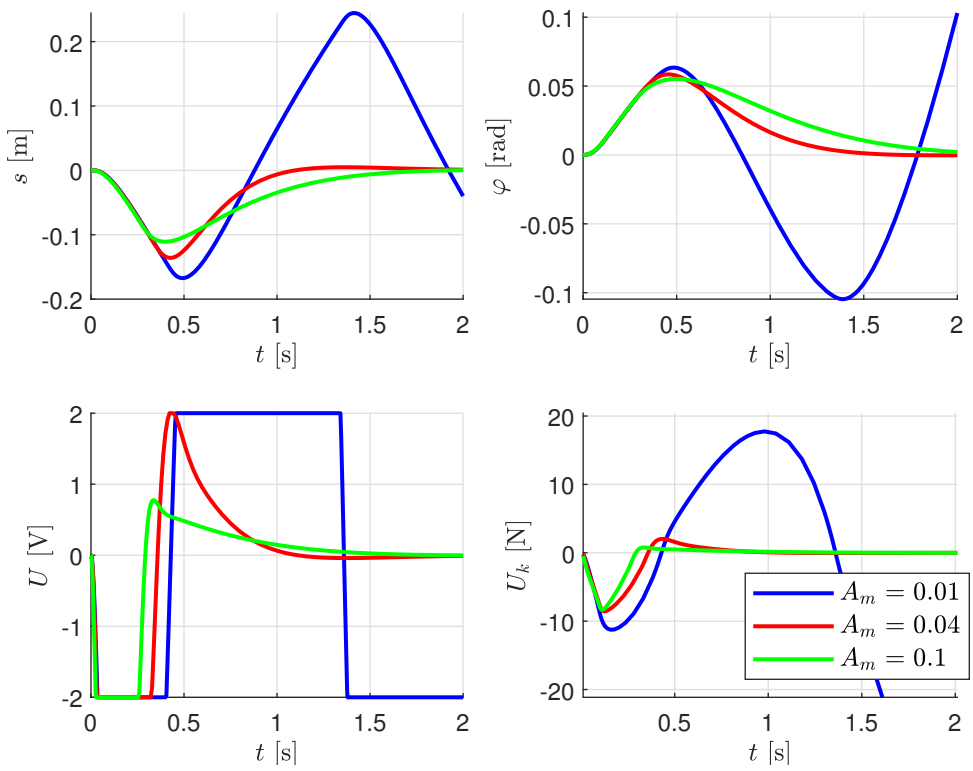
Slika 14: Bodeovi dijagrami za sustave dobivene s različitim frekvencijama ω_{W}



Slika 15: Odziv sustava dobivenih s različitim pojačanjimaA_m, odziv na impulsni moment



Slika 16: Bodeovi dijagrami za sustave dobivene s različitim pojačanjima A_m



Slika 17: Rezultati simulacija za slučajeve s ograničenim naponom izvora

jednadžbe 2.33 izračunata upravljačka sila i mjerena brzina $\dot{s}$ preračunavaju u napon pomoću jednadžbe 3.81, a izračunata vrijednost se umanjuje na maksimalnu ili minimalnu dopuštenu ako prelazi granici. Ograničeni napon se pomoću 3.81 preračunava ponovno u silu koja je ulaz u jednadžbu 2.31. Provedbom niza simulacija pokazano je da ograničenje napona koje dovodi do nestabilnog ponašanja ne ovisi o frekvenciji ω_{W}.

Na slici 15 prikazan je utjecaj pojačanja filtera W_{u} na niskim frekvencijama A_{m} na vremenski odziv sustava, a na slici 16 utjecaj na frekvencijski odziv sustava. Očito je da se smanjenjem pojačanja A_{m} slabije penalizira napon, stoga je jasno da će se u Bodeovom dijagramu smanjenjem pojačanja A_{m} povećavati maksimalni napon, a za očekivati je da će se kao rezultat jačeg djelovanja regulatora javljati manji kutovi zakreta njihala i pomaci kolica. To je vidljivo na slici 16. Promatrajući sliku 16 uočava se očekivani rast napona smanjenjem penalizacije napona. Također, smanjenjem penalizacije napona dobiva se brža dinamika sustava, tj. sustav brže konvergira k ravnotežnoj točki. Maksimalni pomak njihala raste s padom pojačanja A_{m} što je posljedica jačeg djelovanja regulatora tj. većih napona. Maksimalni kut zakreta ostaje približno isti za sva pojačanja A_{m}.

Razmatranjem ponašanja sustava u prezasićenju zaključeno je da sustav s manjim

pojačanjima A_m brže ulazi u prezasićenje. Razlog tome je što sustavi s manjim pojačanjima A_m djeluju većim naponom, postižući pritom veće pomake kolica, tj. veći odmak od ravnotežnog položaja. Veći odmak od ravnotežnog položaja znači veći potreban napon koji vraća sustav u ravnotežu, a samim time i veći rizik od nestabilnosti u slučaju prezasićenja.

Razmatranjem robusne stabilnosti dobivena je jaka ovisnost robusnosti dobivenog sustava o vrijednosti pojačanja A_m, gdje sustavi s regulatorom dobivenim sintezom s većim pojačanjima A_m imaju veću robusnost.

4.1.3 Sinteza regulatora za vođenje po referenci

Može se pokazati da prethodno dobiveni regulator nisu pogodni za vođenje sustava jer imaju loš odziv na referentnu vrijednost, gdje odziv kuta zakreta ni ne teži k referentnoj vrijednosti, a u slučaju djelovanja konstantnog poremećaja sustav se ne vraća u nulti položaj. Kao što je već rečeno, zbog podupravljanosti sustava nije moguće voditi sve varijable stanja, već u ovom slučaju samo jednu, za koju je odabran kut zakreta njihala. Kako bi sinteza regulatora pogodnog praćenju referentne vrijednosti bila moguća, potrebno je penalizirati integral greške kuta zakreta ($e = \int_0^\mathrm{T}(r-\varphi)\mathrm{d}t$) i odziv na referencu. Stoga je potrebno proširiti varijable stanja s integralom greške kuta zakreta. To omogućuje penalizaciju integrala greške kuta zakreta. Integral greške kuta zakreta može se, ali i ne treba dodati u mjerene varijable jer je dinamički regulator sposoban samostalno integrirati bilo koju veličinu. Varijable stanja su sada:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \dot{s} & s & \dot{\varphi} & r-\varphi & e \end{bmatrix}^\mathrm{T}. \tag{4.10}$$

Matrica $\mathbf{A}$ je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

gdje je $\overline{\mathbf{A}}$ prethodno korištena matrica $\mathbf{A}$ (iz 3.31), a $\mathbf{E}$ ima vrijednost:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Vektor ulaza je proširen s refernentnim kutom zakreta r i sada glasi:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} F_{\mathrm{k}} & M_{\mathrm{n}} & r \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{4.13}$$

Matrica $\mathbf{B}_1$ je:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

gdje je $\overline{\mathbf{B}_1}$ prethodno korištena matrica $\mathbf{B}_1$ (iz jednadžbe 3.33). U vektor mjerenih varijabli dodaje se integral greške kuta, pa je matrica $\mathbf{C}_2$ proširena tako da ima vrijednost:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

gdje je $\overline{\mathbf{C}_2}$ prethodno korištena matrica $\mathbf{C}_2$ (iz jednadžbe 4.1). Matrica $\mathbf{D}_{21}$ više nije nul matrica već:

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

čime četvrta mjerena varijabla poprima smisao razlike referentne vrijednosti kuta zakreta i mjerene vrijednosti kuta zakreta. Vektor varijabli izlaza proširuje se s integralom greške kuta zakreta, a kut zakreta se zamjenjuje razlikom referentne vrijednosti kuta zakreta i vrijednosti kuta zakreta, pa sada glasi:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} s & r - \varphi & U & e \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{4.17}$$

Matrica $\mathbf{C}_1$ tada ima vrijednost:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

gdje je $\overline{\mathbf{C}_1}$ prethodno korištena matrica $\mathbf{C}_1$ (iz jednadžbe 4.3). Također, matrica $\mathbf{D}_{11}$ više nije nul matrica, već ima vrijednost:

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Matrice D_{12} i D_{22} ostaju nepromijenjene. Filteri koji su korišteni su:

$$\mathbf{W}_w = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & W_\mathrm{r} \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

$$\mathbf{W}_\mathrm{z} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_\mathrm{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_\mathrm{e} \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Cilj odabira filtera W_r i W_e je uz prethodno dobivene karakteristike pri odbacivanju poremećaja dobiti i dobre karakteristike pri vođenju kuta zakreta njihala. Budući da se referentna vrijednost javlja samo pri niskim frekvencijama, za W_r odabran je niskopropusni filter drugog reda. Također, budući da je fizikalno zbog ograničenja aktuatora i tromosti sustava referencu moguće pratiti samo na niskim frekvencijama, za W_e odabran je niskopropusni filter drugog reda. S ciljem pojednostavljenja odabira filtera odabrano je da su W_r i W_e jednaki. Da bi se smanjio broj parametara koji utječu na odabir filtera, pojačanje na visokim frekvencijama je odabrano da bude 0,1, a pojačanje na niskim frekvencijama označeno je s A_e te je frekvencija na kojoj pojačanje ima vrijednost 0,2 označena s ω_e. Kao početna točka za pretraživanje rješenja uzeto je $\omega_\mathrm{e} = 5$ rad/s i $A_\mathrm{e} = 1$. Za W_u je odabran prethodno korišteni filter drugog reda s $\omega_\mathrm{W} = 150$ rad/s i $A_\mathrm{m} = 0,1$. U slučaju da se za W_r i W_e odabere broj 0, dobiveni regulator odgovarao bi prethodno dobivenom regulatoru koji ima za cilj odbacivanje poremećaja.

Sintezom regulatora s W_r i W_e različitim od nule dobiva se regulator koji koristi integralno djelovanje, što sa sobom nosi mogućnost uklanjanja greške između reference i

mjerenja. Ipak, u slučaju djelovanja poremećaja u vidu vanjskih sila i momenata narušava se odziv jer se početno akumulirani integral greške kuta zakreta mora anulirati prebačajem iz pozitivnog kuta zakreta u negativni i obrnuto. Kod ispitivanja filtera dodanih za praćenje reference ispitat će se i utjecaj na odziv na impulsni moment.

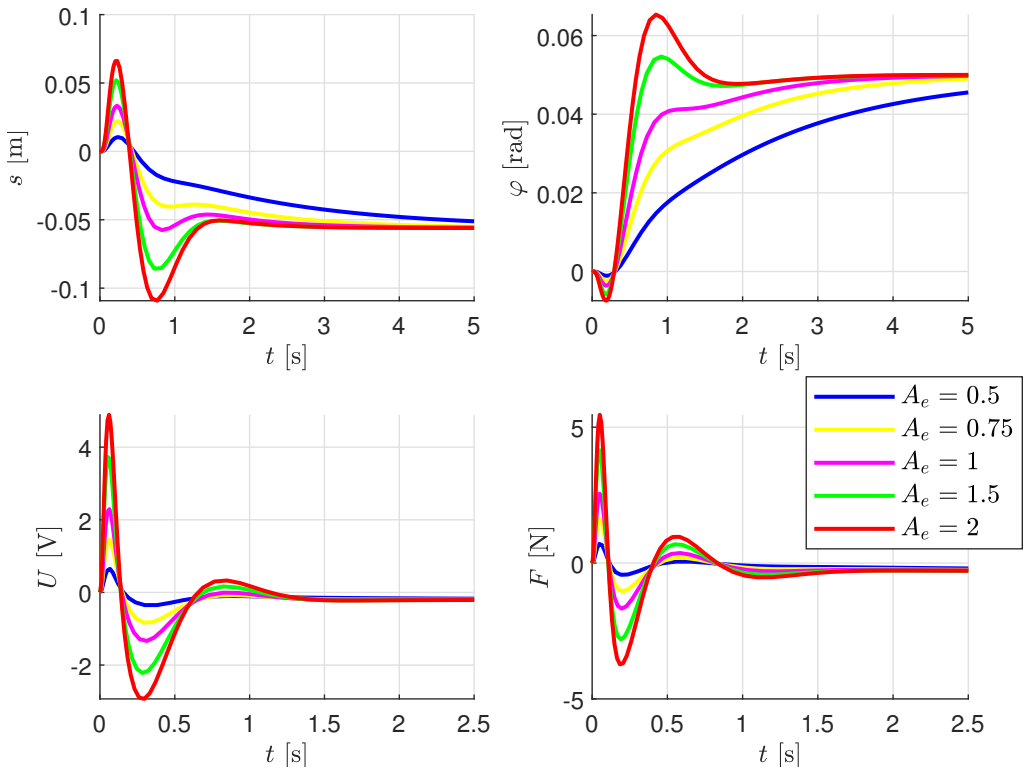
4.1.4 Utjecaj težinskih filtera na vođenje sustava

Promatrajući frekvencijski odziv sa slike 19 za različite filtere s različitim parametrom A_e može se zaključiti da proširenje sustava integralom greške kuta zakreta i dodavanje odabranih filtera rješava problem vođenja kuta zakreta po referenci. Navedena tvrdnja može se temeljiti na Bodeovom dijagramu za razliku reference i kuta zakreta koji na malim frekvencijama teži u 0 ($-\infty$ dB), što je indikator da u slučaju konstantnog poremećaja (bilo vanjskih sila/momenata bilo reference) kut zakreta teži k referenci. Također, u prilog poboljšanju vođenja kuta zakreta povećanjem pojačanja A_e ide Bodeov dijagram iz r u e, gdje na niskim frekvencijama porastom pojačanja A_e dolazi do smanjenja integrala greške kuta zakreta e.

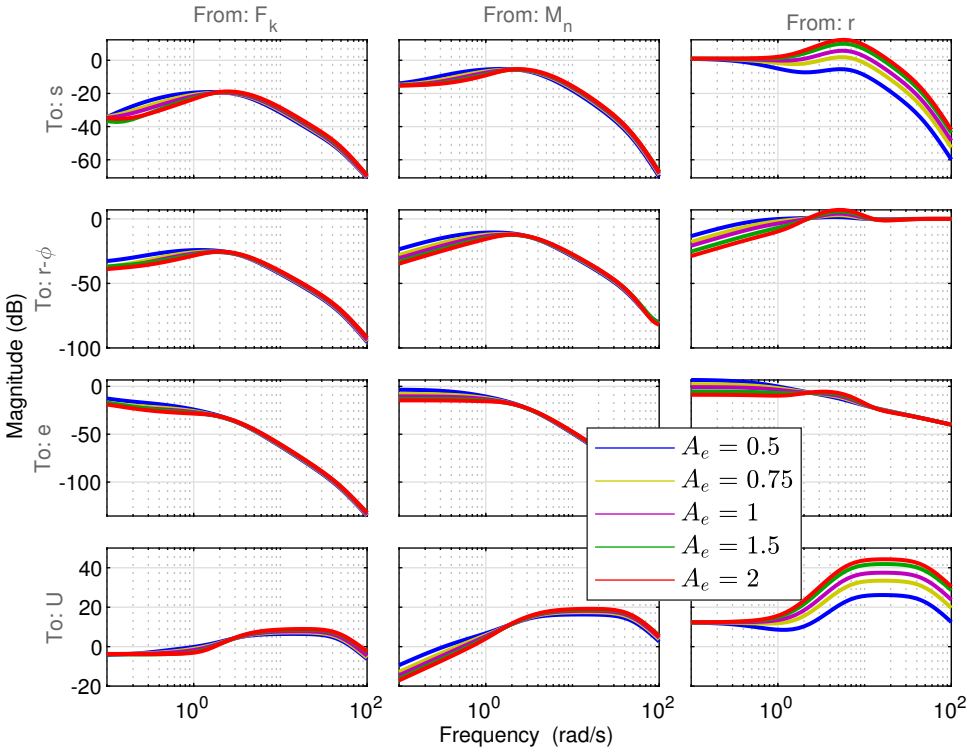
Odziv na referencu step oblika iznosa 0,05 rad vidljiv je na slici 18, gdje su dobivene modifikacije u skladu s onima predviđenim razmatranjem frekvencijskog odziva. Porastom pojačanja A_m postiže se brža dinamika u praćenju reference. S bržom dinamikom javljaju se i negativne strane, a to je porast napona i sila, ali i maksimalnog pomaka kolica. Iznad neke određene vrijednosti pojačanja A_e javlja se i neželjeni prebačaj koji raste s rastom pojačanja A_e.

Variranjem frekvencije ω_e odziv sustava može se dodatno modificirati. Iako je u slučaju povećanja frekvencijskog raspona u kojem se penalizira odziv na referencu za očekivati smanjenje frekvencijskog odziva razlike reference i kuta zakreta te integrala greške kuta zakreta uzrokovanog referencom na niskim frekvencijama, to ipak nije slučaj, što je vidljivo na slici 20. Ipak, dolazi do snižavanja odziva napona i pomaka kolica u tom rasponu, što rezultira 'finijim' vremenskim odzivom na referencu, što je vidljivo na slici 20.

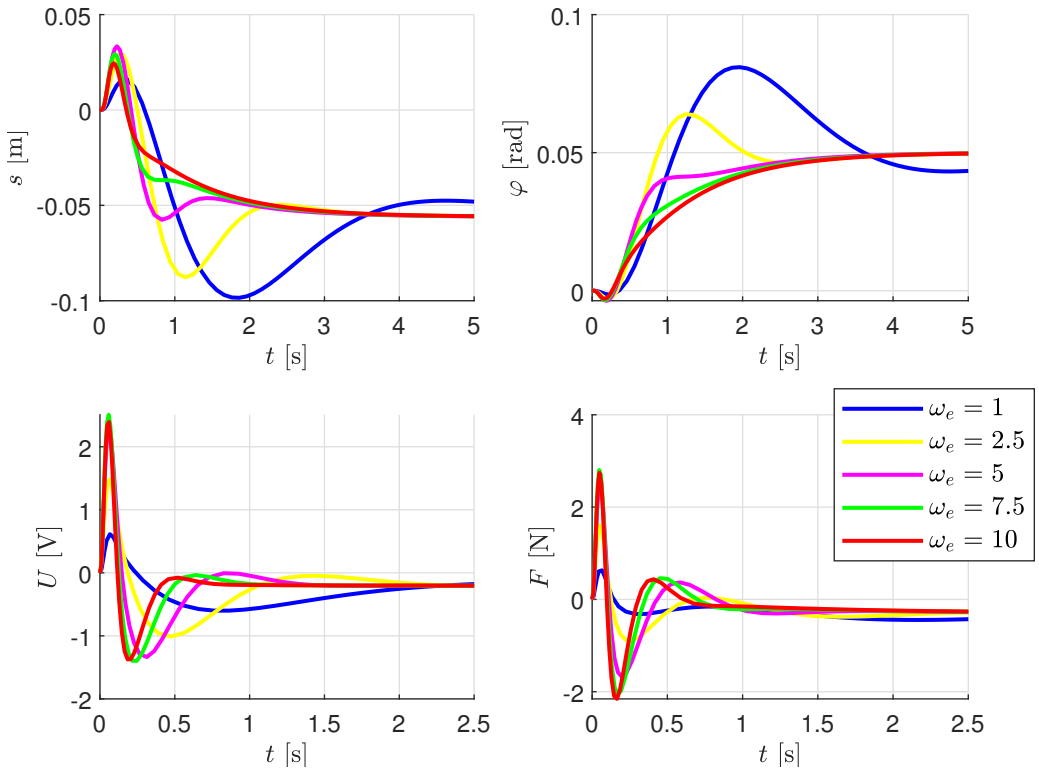
Odziv na impulsni moment dan je na slikama 22 i 23. Očito je da s porastom pojačanja A_e i frekvencije ω_e rastu maksimalni napon i maksimalna sila, a s njima i maksimalni pomak kolica. Maksimalni zakret kolica je približno isti, dok rastom pojačanja A_e raste



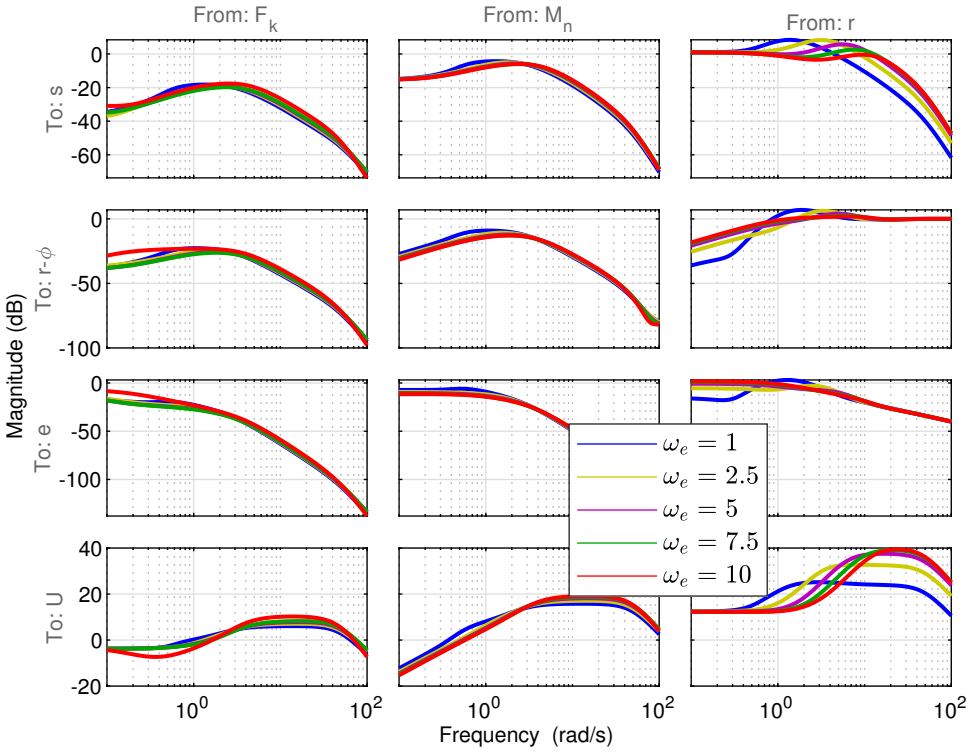
Slika 18: Odziv sustava dobivenih s različitim pojačanjima A_e, odziv na step referencu



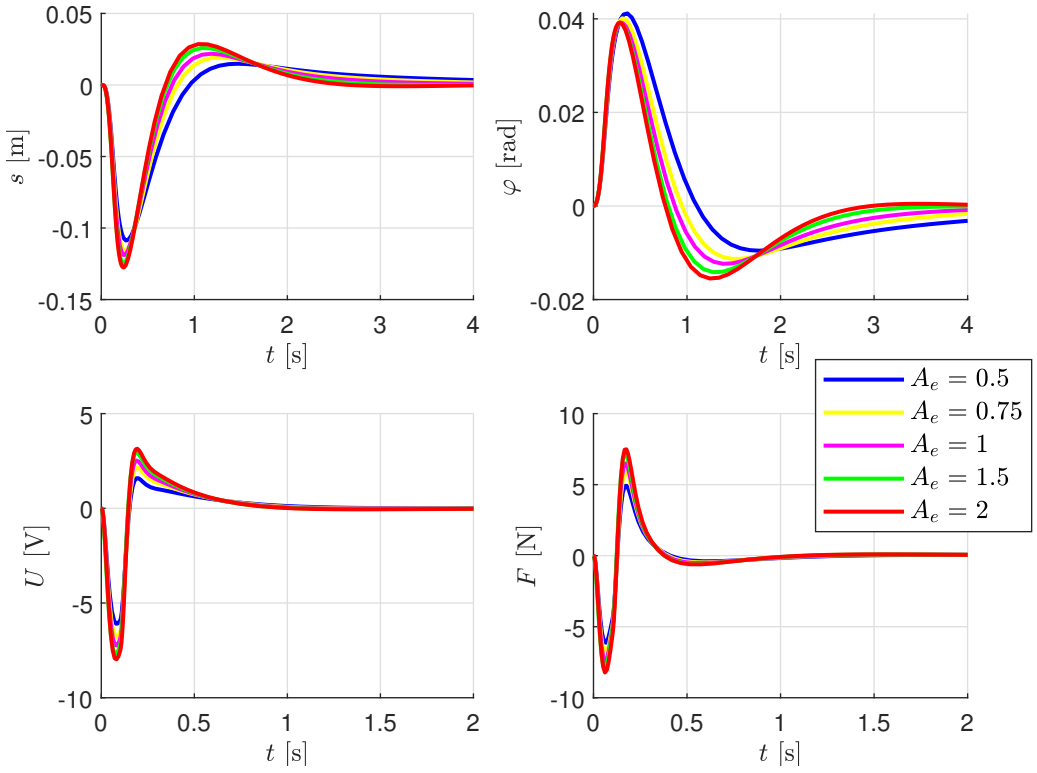
Slika 19: Bodeovi dijagrami za sustave dobivene s različitim pojačanjima A_e



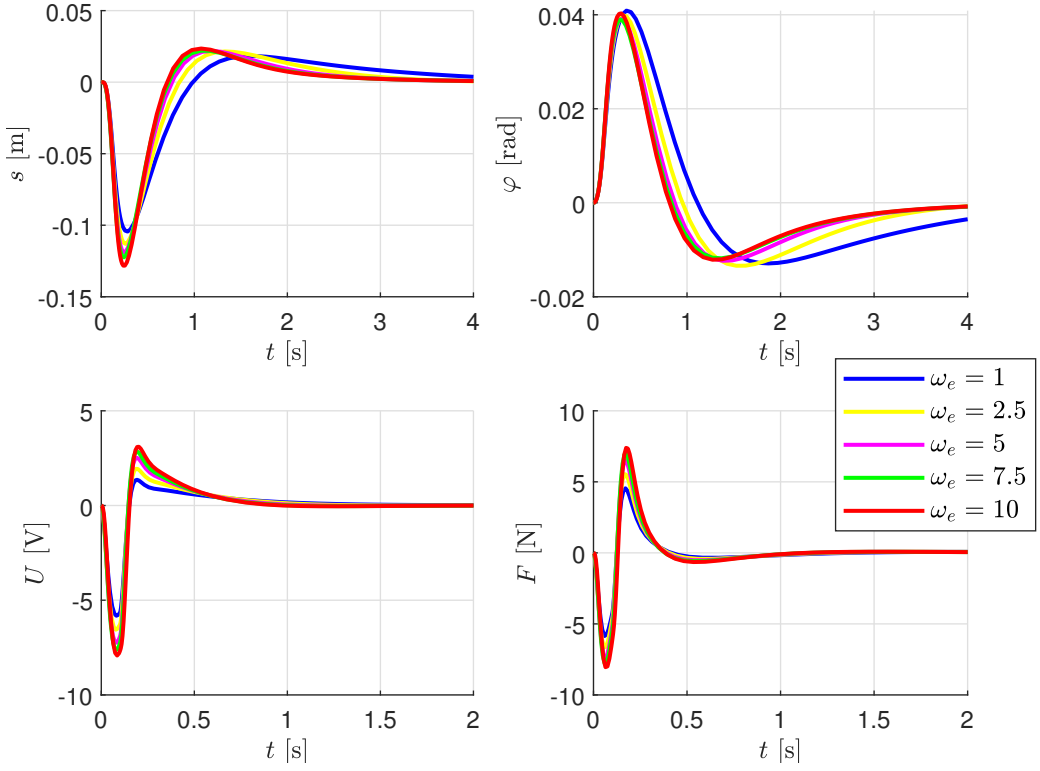
Slika 20: Odziv sustava dobivenih s različitim frekvencijama ω_e, odziv na step referencu



Slika 21: Bodeovi dijagrami za sustave dobivene s različitim frekvencijama ω_e



Slika 22: Odziv sustava dobivenih s različitim pojačanjima A_e, odziv na impulsni moment



Slika 23: Odziv sustava dobivenih s različitim frekvencijama ω_e, odziv na impulsni moment

prebačaj, tj. maksimalni negativni kut zakreta njihala, a nakon neke vrijednosti javlja se i oscilatorno gibanje. Porast frekvencije ω_e ne povećava se prebačaj, ali ubrzava se dinamiku, tj. sustav ulazi u prebačaj brže i brže konvergira u ravnotežnu točku.

Nadalje, nizom simulacija utvrđeno je da porastom frekvencije ω_e i pojačanja A_e sustav brže ulazi u prezasićenje. Analizom robusne stablinosti za već spomenuti slučaj dobiveni su rezultati koji ukazuju na pad robusnosti rastom frekvencije ω_e i pojačanja A_e.

4.1.5 Zaključak

U ovom potpoglavlju prikazana je procedura sinteze H_∞ regulatora i odabira težinskih filtera W_u i $W_e = W_r$ čijim se odabirom teži oblikovati frekvencijski, te stoga i tranzijentni odziv sustava. Pokazano je da je nužno penalizirati izlaz iz regulatora na visokim frekvencijama kako bi se izbjegla osjetljivost na mjerni šum i moguća udarna opterećenja uzrokovana naglim djelovanjem regulatora. Stoga se za W_u bira visokopropusni filter s jako velikim pojačanjem na visokim frekvencijama. Odabirom takvog filtera za penalizaciju izlaza iz regulatora forsira se da se H_∞ optimizacijom dobije regulator čije je djelovanje ograničeno na niske frekvencije, te stoga ima dinamiku ograničene brzine. Performanse sustava su određene pojačanjem filtera W_u na niskim frekvencijama i u manjoj mjeri prijelaznom frekvencijom od W_u. Za relevantan tranzijentni odziv odabran je odziv na moment iznosa 1 Nm u trajanju od 0,1 s. Zapažanja dobivena uvidom u ponašanja sustava s regulatorom dobivenim s različitim W_u prikazana su u tablici 3.

Tablica 3: Utjecaj filtera W_u na performanse sustava

Karakteristika	Korelacija	
	A_m	ω_W
φ_{max}	↑	↓
s_{max}	↑	↓
U_{max}	↓	↓
$\varphi_{p,max}$	-	↓
$s_{p,max}$	↓	↓
$U_{p,max}$	↓	↑
τ_p	↑	-
Robusnost	↑	↑
Osjetljivost na mjerni šum	↑	↑
Osjetljivost na prezasićenje	↓	-

Eksperimentom se može pokazati da sustavi koji su dobiveni bez penalizacije odziva na referentnu vrijednost i penalizacije integrala greške kuta zakreta nisu sposobni pratiti referentnu vrijednost kuta zakreta. Uvođenjem te penalizacije forsira se sinteza regulatora koji iskorištava integralno djelovanje kako bi se uspješno pratila referenca. S obzirom na to da se referentna vrijednost javlja na niskim frekvencijama te da da je referencu zbog inercije moguće pratiti samo na niskim frekvencijama, za filter kojim se penalizira integral greške (W_e) i filter kojim se penalizira odziv na referencu (W_r) odabran je niskopropusni filter s proizvoljno malim pojačanjem na visokim frekvencijama. Zbog jednostavnosti odabrano je $W_\mathrm{r} = W_\mathrm{e}$. Performanse sustava u vođenju po referenci za sustave s regulatorom dobivenim za različite W_e testirane su na odzivu na step referencu iznosa 0,05 rad. Zapažanja dobivena uvidom u sustave dobivene s različitim W_e dana su u tablici 4.

Tablica 4: Utjecaj filtera W_e i W_r na performanse sustava

Karakteristika	Korelacija	
	A_e	ω_e
φ_max	↓	↓
s_max	-	↓
U_max	↑	↑
$\varphi_\mathrm{p,max}$	↑	-
$s_\mathrm{p,max}$	↑	↑
$U_\mathrm{p,max}$	↑	↑
τ_p	↓	↓
$\varphi_\mathrm{v,max}$	↑	↓
$s_\mathrm{v,max}$	↑	↓
$U_\mathrm{v,max}$	↑	↑
τ_v	↓	-
Robusnost	↓	↓
Osjetljivost na mjerni šum	-	-
Osjetljivost na prezasićenje	↑	↑

Uvođenje integralnog djelovanja utječe i na odziv sustava na vanjske sile i momente. Dok uvođenje integralnog djelovanja uklanja trajno odstupanje od reference uzrokovane step vanjskom silom ili momentom, isto to integralno djelovanje narušava odziv na impulsni poremećaj uvođenjem preskoka i u krajnjem slučaju neželjenog oscilatornog ponašanja. Preskok se javlja uslijed integralnog djelovanja uslijed nakupljenog integrala greške, koji se u preskoku smanjuje i teži k nuli. Međutim, ako je integralno djelovanje prenaglašeno, dolazi do ponovnog nakupljanja integrala greške obrnutog predznaka koje dovodi

do novog preskoka i oscilatornog gibanja. Zapažanja dobivena uvidom u odziv sustava s regulatorom dobivenim za različite W_e na vanjski moment iznosa 1 Nm u trajanju 0,1 s prikazana su u tablici 4.

S obzirom na prethodna razmatranja jasno je da je moguće dobiti dobar regulator tako da se u prvom koraku odabire W_u takav da se dobije dobro odbacivanje poremećaja sustava. Pritom treba imati u vidu narušavanje performansi u odbacivanju poremećaja uvođenjem W_e i W_r te ostavljanje rezerve kojom bi se pokrile moguće nastale promjene. U drugom koraku moguće je odabrati W_e i W_r kako bi se dobilo dobro praćenje referentne vrijednosti. Moguće je više puta ponavljati prvi i drugi korak kako bi se dobio željeni regulator. U slučaju da se želi dobiti dodatno poboljšanje performansi na specifičnoj frekvenciji, moguće je na cjelokupnu matricu s filterima na ulazu (matrica $\mathbf{W}_u$) pomnožiti s određenim pojasnopropusnim filterom. Time bi se dobile bolje performanse na odabranim frekvencijama, ali lošije performanse na okolnim frekvencijama. Međutim, takvi rezultati nisu izloženi u ovom radu.

Ipak, treba biti svjestan ograničenja danih razmatranja i rezultata. Odnos između performansi i parametara filtera je kompleksan i nelinearan, stoga iznošenje generalnih zaključaka nije moguće. Sukladno tome, dobiveni rezultati vrijede za područje u kojem su dobivena, te nema garancije da će za neke druge točke dobivene korelacije vrijediti. Također, utjecaj filtera na performanse sustava ovisi od sustava do sustava, što dodatno ograničava mogućnost donošenja generalnih zaključaka. Ipak, neke opće smjernice korištene u ovom potpoglavlju za ispitivanje performansi sustava su univerzalne te se mogu koristiti pri ispitivanja utjecaja filtera na neki drugi sustav.

4.2 Sinteza regulatora za sustav triju oprugama povezanih podsustava kolica na njihalu

U ovom potpoglavlju prikazana je sinteza regulatora za složeniji mehanički sustav koji se sastoji od triju oprugama povezanih sustava kolica na njihalu. Dok se u prethodnom potpoglavlju razmatrao utjecaj filtera na performanse sustava, u ovom potpoglavlju razmatra se utjecaj strukture regulatora na performanse sustava. Dinamika regulatora opisana je jednadžbom 2.33. Ako se mjerene varijable triju sustava zapišu kao:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

gdje vektor $\mathbf{y}_\mathrm{i}$ sadržava mjerene varijable s i-tog sustava kolica na njihalu:

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} \dot{s}_i & s_i & \dot{\varphi}_i & r_i - \varphi_i & e_i \end{bmatrix}^\mathrm{T}, \tag{4.23}$$

te ako se na sličan način zapišu varijable stanja regulatora, tada se matrica $\mathbf{A}_\mathrm{k}$ koja opisuje dinamiku regulatora može zapisati kao:

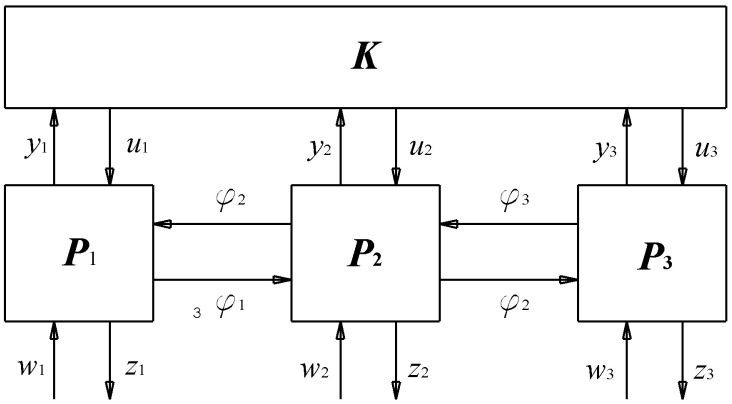
$$\mathbf{A}_\mathrm{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{k},11} & \mathbf{A}_{\mathrm{k},12} & \mathbf{A}_{\mathrm{k},13} \\ \mathbf{A}_{\mathrm{k},21} & \mathbf{A}_{\mathrm{k},22} & \mathbf{A}_{\mathrm{k},23} \\ \mathbf{A}_{\mathrm{k},33} & \mathbf{A}_{\mathrm{k},33} & \mathbf{A}_{\mathrm{k},33} \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

a na analogan način mogu se rastaviti i matrice $\mathbf{B}_\mathrm{k}$, $\mathbf{C}_\mathrm{k}$, $\mathbf{D}_\mathrm{k}$. Ako ni na jednu matricu nema nikakvih ograničenja, jasno je da jednadžba 2.33 predstavlja jedinstveni centralizirani regulator koji može na osnovu bilo koje varijable stanja regulatora i bilo kojeg mjerenja utjecati na bilo koji upravljački signal. Ipak, ako se se za sve matrice koje imaju indeks k, ij za koje vrijedi $i \neq j$ uvede ograničenje da su nužno nul matrice, jednadžba 2.33 može predstavljati dinamiku triju nezavisnih decentraliziranih regulatora koji primaju mjerenja sa samo jednog podsustava te mogu upravljati samo tim podsustavom. Nadalje, ako su samo neki ciljano odabrani članovi matrica za koje vrijedi $i \neq j$ različiti od 0, može se govoriti o distribuiranom upravljanju. U distribuiranom upravljanju regulatori međusobno mogu izmjenjivati ulaze (pripadajuće mjerene varijable) i varijable

stanja regulatora x_{k} što je određeno vandijagonalnim članovima navedenih matrica.

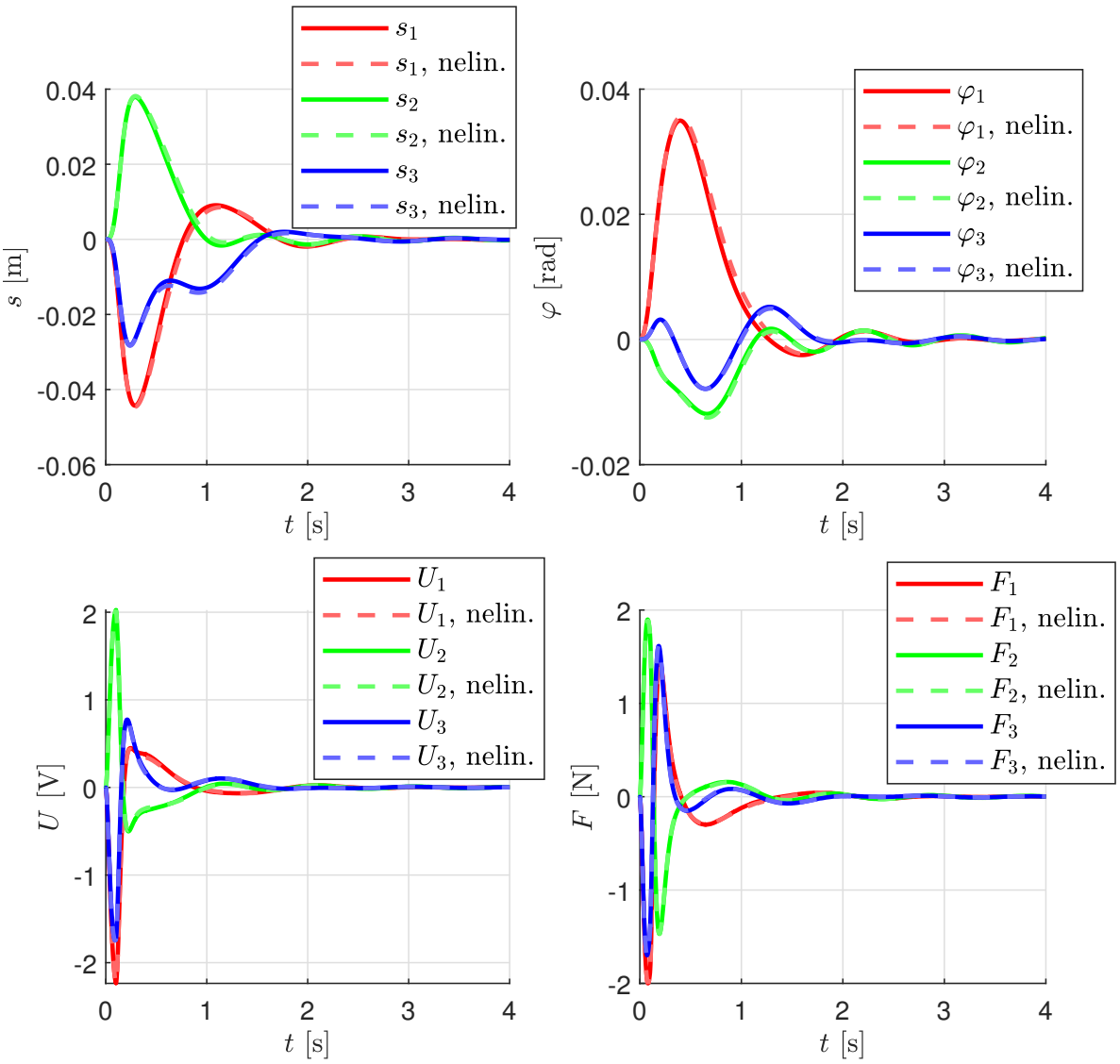
Varijable stanja sustava triju oprugama povezanih sustava kolica na njihalu prikazane su u 3.67, a vektor ulaza u 3.71. Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_2}$ potrebne za opisivanje dinamike prikazane su u 3.68, 3.72 i 3.74. Sustav je dodatno proširen integralnim djelovanjem i referencom na kut zakreta po uzoru na poglavlje 4.1.3, ali zbog jednostavnosti postupak i matrice nisu prikazani, s obzirom na to da je postupak analogan onome iz poglavlja 4.1.3. Budući da je jedina sprega između triju podsustava kolica s njihalima u matrici $\mathbf{A}$ i budući da su vektor varijabli stanja, vektor ulaza, vektor izlaza i vektor mjerenih varijabli strukturirani tako da su varijable poredane po pripadnosti podsustavu, matrice $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{D_{11}}$, $\mathbf{D_{12}}$, $\mathbf{D_{21}}$, $\mathbf{D_{22}}$ će biti blok-dijagonalne matrice u kojima će se na dijagonali nalaziti matrice prikazane u poglavlju 4.1.3 u jednadžbama od 4.15 do 4.19. Također, i matrice filtera $\mathbf{W}_{\mathrm{u}}$ i $\mathbf{W}_{\mathrm{z}}$ su blok-dijagonalne matrice koje se sastoje od matrica iz jednadžbi 4.20 i 4.21. Zbog jednostavnosti u predstavljenim rezultatima uzeto je $W_{\mathrm{r}} = W_{\mathrm{e}} = 0$, tj. zanemarena je mogućnost vođenja sustava po referenci, a svi prikazani rezultati predstavljaju slučaj u kojem djeluje moment iznosa 1 Nm desetinku sekunde, na prvom od triju njihala. Za filter W_{u} korišten je filter drugog reda s pojačanjem iznosa 0,05 na malim frekvencijama, s pojačanjem 100 na visokim frekvencijama i s pojačanjem iznosa 1 na frekvenciji 150 rad/s. Pošto su u svim slučajevima korišteni isti filteri, to ostavlja mogućnost direktne usporedbe H_∞ normi sustava s filterima.

4.2.1 Centralizirano upravljanje



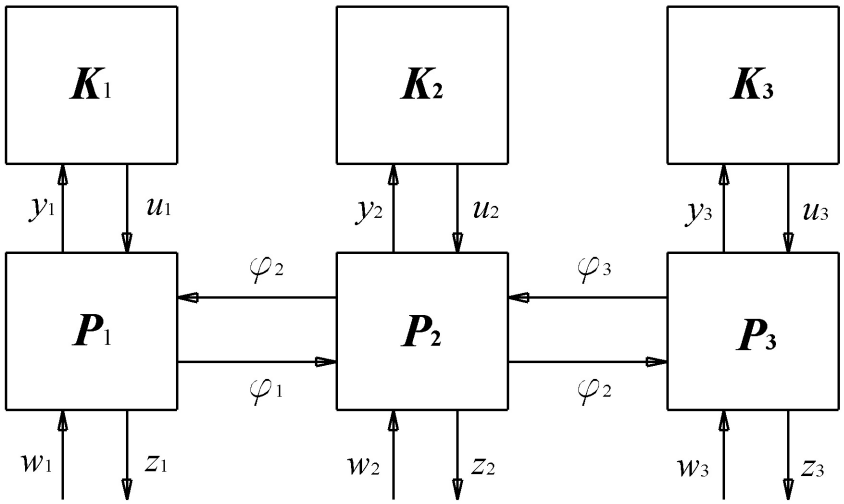
Slika 24: Shema centraliziranog upravljanja

Kao što je navedeno, pri sintezi centraliziranog regulatora svi članovi matrica $\mathbf{A}_\mathrm{k}$, $\mathbf{B}_\mathrm{k}$, $\mathbf{C}_\mathrm{k}$ i $\mathbf{D}_\mathrm{k}$ mogu imati bilo koje vrijednosti. U tom slučaju moguće je koristiti Matlabovu funkciju *hinfsyn* koja se temelji na proceduri opisanoj u poglavlju 2.2.4. Zbog kompliciranosti (velikog broja ulaza i izlaza) dijagrami pojačanja nisu prikazani, te je prikazan samo odziv na moment iznosa 1 Nm trajanja desetinke sekunde na prvom od triju njihala. Dobiveni odziv prikazan je na slici 25, na kojoj je vidljiv blago oscilatorni odziv koji bi se mogao otkloniti slabijom penalizacijom upravljačkog signala na niskim frekvencijama, ali s obzirom na to da utjecaj filtera nije u fokusu ovog potpoglavlja, to nije učinjeno. H_∞ norma dobivenog sustava (s filterima) je 0,3454.



Slika 25: Odziv sustava s centraliziranim regulatorom

4.2.2 Decentralizirano upravljanje

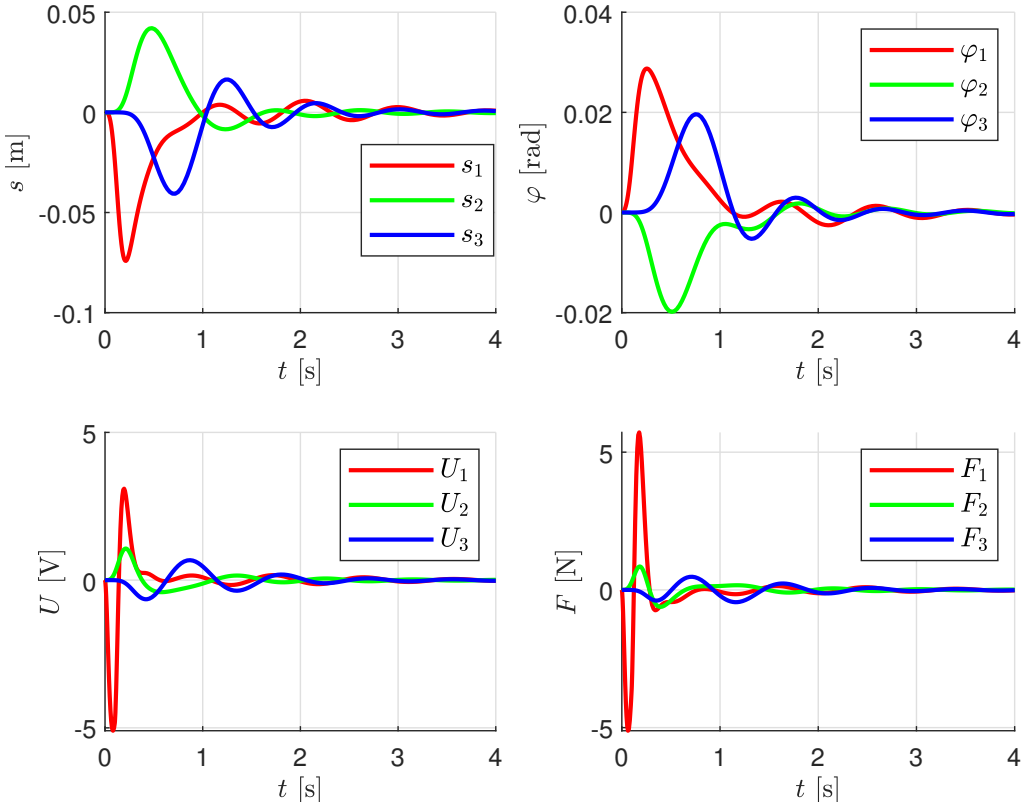


Slika 26: Shema decentraliziranog upravljanja

Za razliku od centraliziranog regulatora, kod sinteze decentraliziranih regulatora matrice $\mathbf{A}_\mathrm{k}$, $\mathbf{B}_\mathrm{k}$, $\mathbf{C}_\mathrm{k}$ i $\mathbf{D}_\mathrm{k}$ imaju ograničenja. Konkretno, ako se koristi dekompozicija 4.24 sve podmatrice s indeksima i i j za koje vrijedi $i \neq j$ su nul matrice. Dimenzije matrica $\mathbf{A}_{\mathrm{k},ij}$ su $n \times n$, gdje je n odabrani red jednog regulatora, a odabran je regulator petog reda. Dimenzija matrica $\mathbf{B}_{\mathrm{k},ij}$ su $n \times m$, gdje je m broj mjerenih varijabli po podsustavu kolica s njihalom, a to je 5 ($\dot{s}_i$, s_i, $\dot{\varphi}_i$, $r_i - \varphi_i$, e_i). Dimenzija matrice $\mathbf{C}_{\mathrm{k},ij}$ je $l \times n$, gdje je l broj izlaza po regulatoru/podsustavu, a to je 1 (jedna upravljačka sila). Dimenzija $\mathbf{D}_{\mathrm{k},ij}$ je $l \times m$. Budući da u navedenim matricama postoje ograničenja, za sintezu se koristi Matlabova funkcija *hinfstruct* koja se temelji na [5]. Za razliku od slučaja kada se koristi funkcija *hinfsyn* koja za zadani sustav vraća optimalni regulator u obliku modela prostora stanja reda sustava kojim se upravlja, kada se koristi *hinfstruct* potrebno se unaprijed definirati regulator te ga pridodati modelu upravljanog sustava, a optimizacija se provodi na novodobivenom modelu po parametrima koji su podložni optimizaciji (po vrijednostima matrica kojima je definiran regulator). Model regulatora kreiran je Matlabovom funkcijom *tunableSS*, koja kreira strukturu podataka koja sadrži model prostora stanja i dopušta unos ograničenja na članove matrica prostora stanja. Kreirani model se pridodaje originalnom Matlabovom funkcijom *connect*.

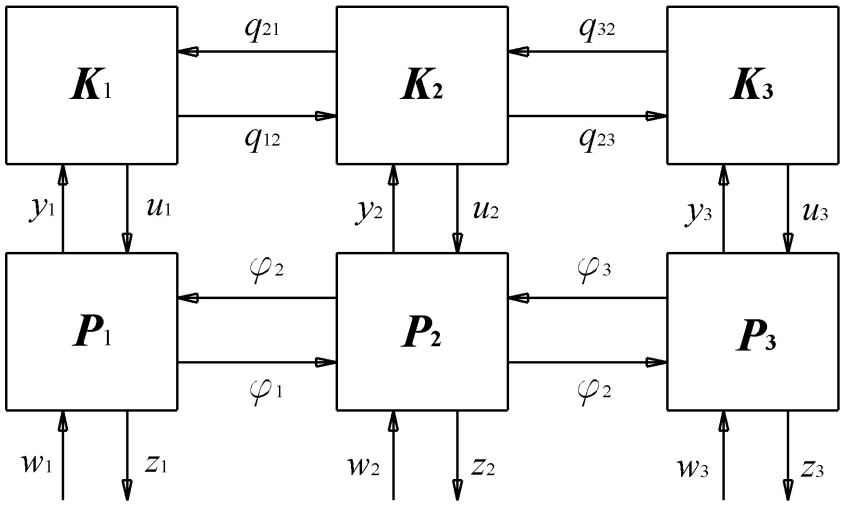
S obzirom na to da je H_∞ optimizacija za takve probleme s ograničenjima nekonveksan

problem, sinteza se provodi više puta te odabire se najbolji rezultat. Najniža dobivena H_∞ norma je 0,4148, a vremenski odziv za taj sustav prikazan je na slici 27.



Slika 27: Odziv sustava s decentraliziranim upravljanjem

4.2.3 Distribuirano upravljanje



Slika 28: Shema distribuiranog upravljanja

Kao što je navedeno, kod distribuiranog upravljanja matrice s različitim indeksima i i j nisu nul matrice. U prvom prikazanom primjeru matrice $\mathbf{B}_{\mathrm{k},12}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{k},21}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{k},23}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{k},32}$ i $\mathbf{D}_{\mathrm{k},12}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{k},21}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{k},23}$ i $\mathbf{D}_{\mathrm{k},32}$ nisu nul matrice. Matrice su odabrane tako da reprezentiraju odvojene regulatore gdje regulator 1 ima pristup mjerenju kuta zakreta njihala 2 φ_2, regulator 2 ima pristup φ_1 i φ_3, a regulator 3 ima pristup φ_2, tj. svaki regulator ima pristup mjerenjima kuta zakreta (tj. razlike reference i kuta zakreta) svakog povezanog podsustava. U tom slučaju matrice $\mathbf{B}_{\mathrm{k},12}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{k},21}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{k},23}$ i $\mathbf{B}_{\mathrm{k},32}$ imaju oblik:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

gdje je $\mathbf{N}_1$ nul matrica dimenzije $n \times 3$, $\mathbf{P}_1$ nul matrica dimenzije $n \times 1$, a $\mathbf{L}_1$ je matrica dimenzije $n \times 1$ koja može imati bilo koje vrijednosti (podložne optimizaciji/sintezi). Kao i kod decentraliziranog upravljanja red jednog regulatora n je 5. Matrice $\mathbf{D}_{\mathrm{k},12}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{k},21}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{k},23}$ i $\mathbf{D}_{\mathrm{k},32}$ imaju oblik:

$$\mathbf{D}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2 & L_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

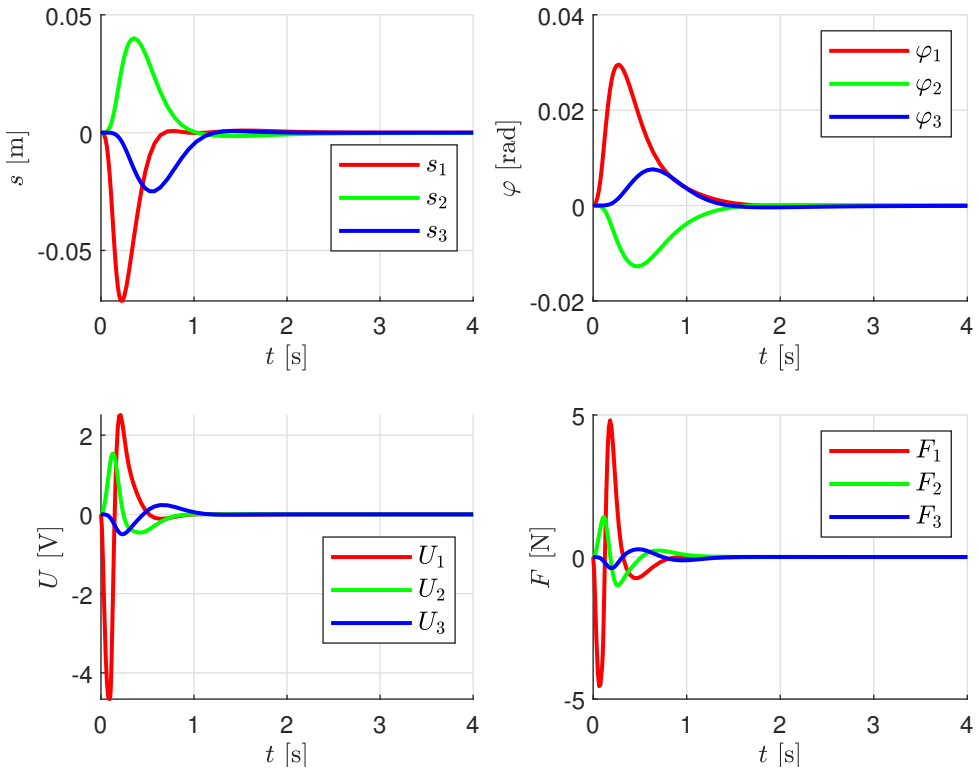
gdje je $\mathbf{N}_2$ nul matrica dimenzije 1×3, a L_2 je skalarni parametar podložan optimizaciji. Kao i u slučaju decentraliziranog upravljanja za sintezu se koristi Matlab funkcija *hinfstruct*. Najbolja dobivena norma ima iznos 0,3469, što je puno bliže rezultatu centraliziranog upravljanja nego rezultatu decentraliziranog upravljanja. Vremenski odziv prikazan je na slici 29. Dobiveni odziv nije direktno usporediv s odzivom kod centraliziranog upravljanja jer sustav s distribuiranim upravljanjem ima nešto bržu dinamiku, ali se javljaju puno veći naponi i sile.

Sljedeća varijanta slična je prethodnoj, uz dodatak da regulatori imaju pristup i kutnim brzinama susjednih njihala. Matrice $\mathbf{B}_{\mathrm{k},12}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{k},21}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{k},23}$ i $\mathbf{B}_{\mathrm{k},32}$ imaju oblik:

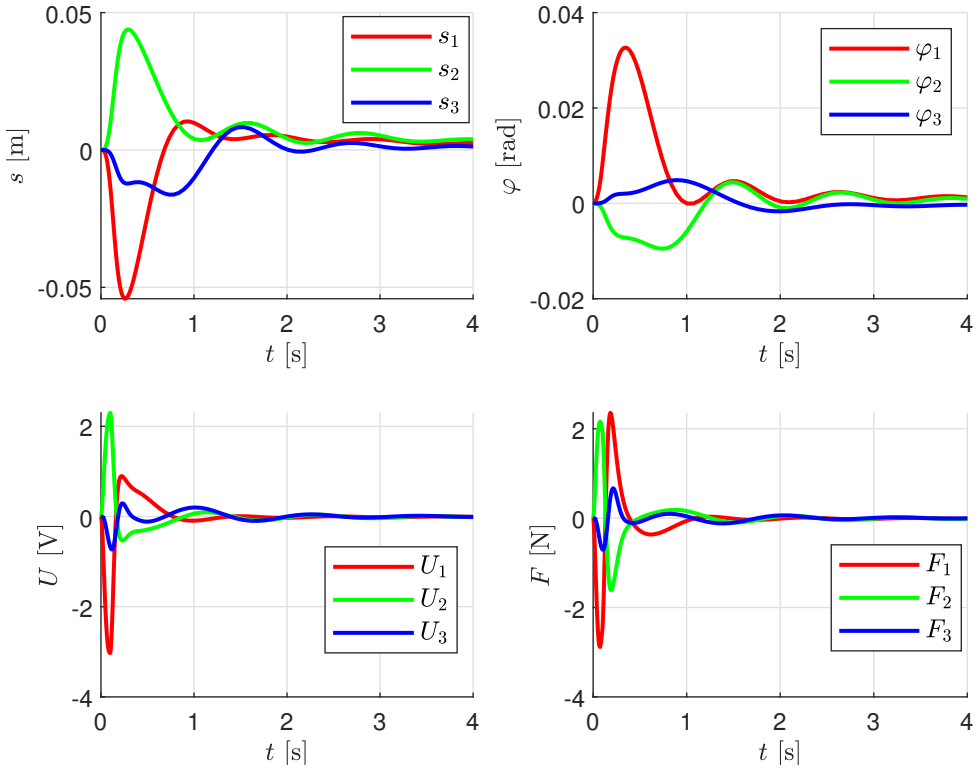
$$\mathbf{B}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

gdje je $\mathbf{N}_1$ nul matrica dimenzije $n \times 2$, $\mathbf{P}_1$ nul matrica dimenzije $n \times 1$, a $\mathbf{L}_1$ je matrica dimenzije $n \times 2$ koja može imati bilo koje vrijednosti (podložne optimizaciji/sintezi). Red jednog regulatora n je 5. Matrice $\mathbf{D}_{\mathrm{k},12}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{k},21}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{k},23}$ i $\mathbf{D}_{\mathrm{k},32}$ imaju oblik:

$$\mathbf{D}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2 & \mathbf{L}_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$



Slika 29: Odziv sustava s distribuiranim upravljanjem, prva varijanta



Slika 30: Odziv sustava s distribuiranim upravljanjem, druga varijanta

gdje je $\mathbf{N}_2$ nul matrica dimenzije 1×2, a $\mathbf{L}_2$ je matrica dimenzije 1×2 čije su vrijednosti podložne optimizaciji. Sintezom pomoću *hinfstruct* dobiva se sustav čija norma ima vrijednost 0,3464, što je mali pomak naspram primjera gdje su regulatorima dostupni samo kutovi zakreta. Vremenski odziv sustava prikazan je na slici 30.

U sljedećoj varijanti distribuiranog upravljanja regulatori nemaju pristup mjerenjima susjednih podsustava, ali imaju pristup jednoj varijabli stanja susjednog regulatora. U tom slučaju vandijagonalne matrice $\mathbf{B}_{\mathrm{k},ij}$ i $\mathbf{D}_{\mathrm{k},ij}$ će biti nul matrice, ali $\mathbf{A}_{\mathrm{k},12}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{k},21}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{k},23}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{k},32}$, $\mathbf{C}_{\mathrm{k},12}$, $\mathbf{C}_{\mathrm{k},21}$, $\mathbf{C}_{\mathrm{k},23}$ i $\mathbf{C}_{\mathrm{k},32}$ će imati neke nenulte članove. Varijable stanja regulatora možemo podijeliti na vlastite i dijeljene, gdje će biti n vlastitih (odabrano 5) i f dijeljenih varijabli. Dijeljena varijabla stanja pripada nekom regulatoru a može utjecati na varijable stanja nekog drugog regulatora. Matrica $\mathbf{A}$ definirana je tako da dijeljena varijabla utječe na sve varijable stanja vlastitog regulatora i samo na vlastite varijable nekog drugog regulatora. U tom slučaju matrica $\mathbf{A}_{12}$ ima oblik:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{ij} & \mathbf{b}_{ij} & \mathbf{a}_{0,ij} \\ \mathbf{c}_{ij} & \mathbf{d}_{ij} & \mathbf{c}_{ij} \end{bmatrix}, \tag{4.29}$$

gdje je $\mathbf{a}_{ij}$ matrica dimenzije $n \times f$ čiji su članovi podložni optimizaciji, $\mathbf{a}_{0,ij}$ nul matrica dimenzije $n \times f$, $\mathbf{b}_{\mathrm{ij}}$ nul matrica dimenzije $n \times n$, $\mathbf{c}_{ij}$ nul matrica dimenzije $f \times f$ i $\mathbf{d}_{ij}$ je nul matrica dimenzije $f \times n$. $\mathbf{A}_{k,21}$ je oblika:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ij} & \mathbf{c}_{ij} \\ \mathbf{b}_{ij} & \mathbf{a}_{ij} \\ \mathbf{d}_{ij} & \mathbf{c}_{ij} \end{bmatrix}, \tag{4.30}$$

matrica $\mathbf{A}_{\mathrm{k},23}$ je oblika:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{ij} & \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{a}_{ij} & \mathbf{b}_{ij} \\ \mathbf{c}_{ij} & \mathbf{d}_{ij} \end{bmatrix}, \tag{4.31}$$

i matrica $\mathbf{A}_{\mathrm{k},32}$ je oblika:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{ij} & \mathbf{d}_{ij} & \mathbf{c}_{ij} \\ \mathbf{a}_{0,ij} & \mathbf{b}_{ij} & \mathbf{a}_{ij} \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Matrica $\mathbf{C}_{\mathrm{k},21}$ ima oblik:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{ij} & \mathbf{g}_{ij} \end{bmatrix}, \tag{4.33}$$

gdje je $\mathbf{e}_{ij}$ matrica dimenzije $1 \times f$ čiji su parametri podložni optimizaciji, $\mathbf{g}_{ij}$ nul matrica $1 \times n$. Matrica $\mathbf{C}_{k,23}$ ima oblik:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{ij} & \mathbf{e}_{ij} \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

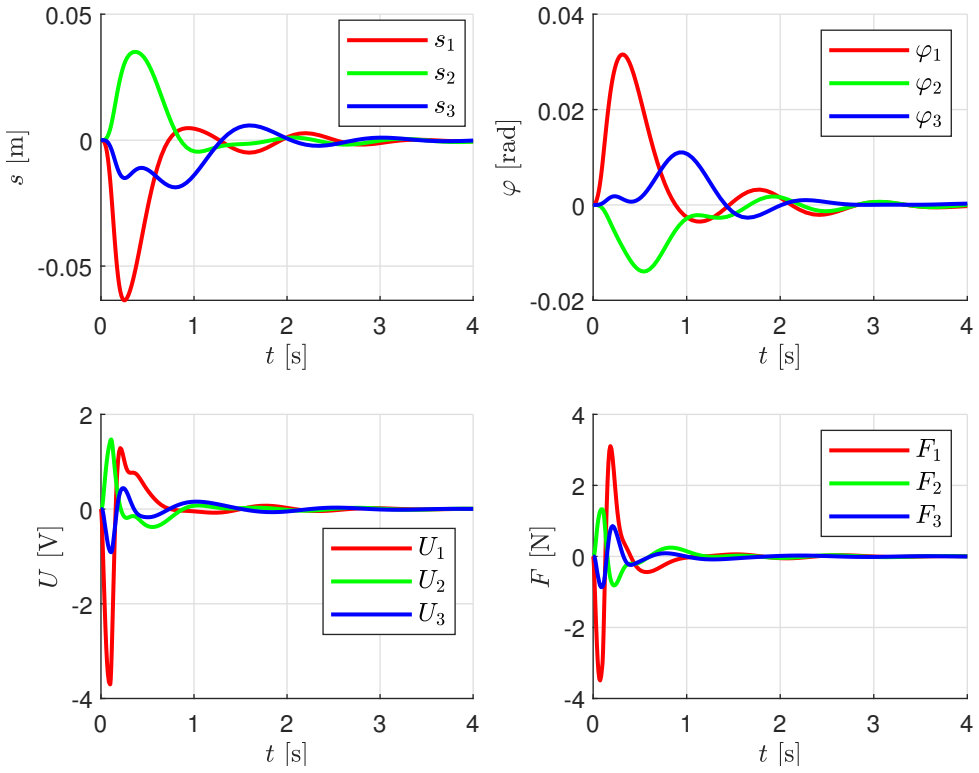
Matrica $\mathbf{C}_{\mathrm{k},12}$ ima oblik:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{ij} & \mathbf{h}_{ij} \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

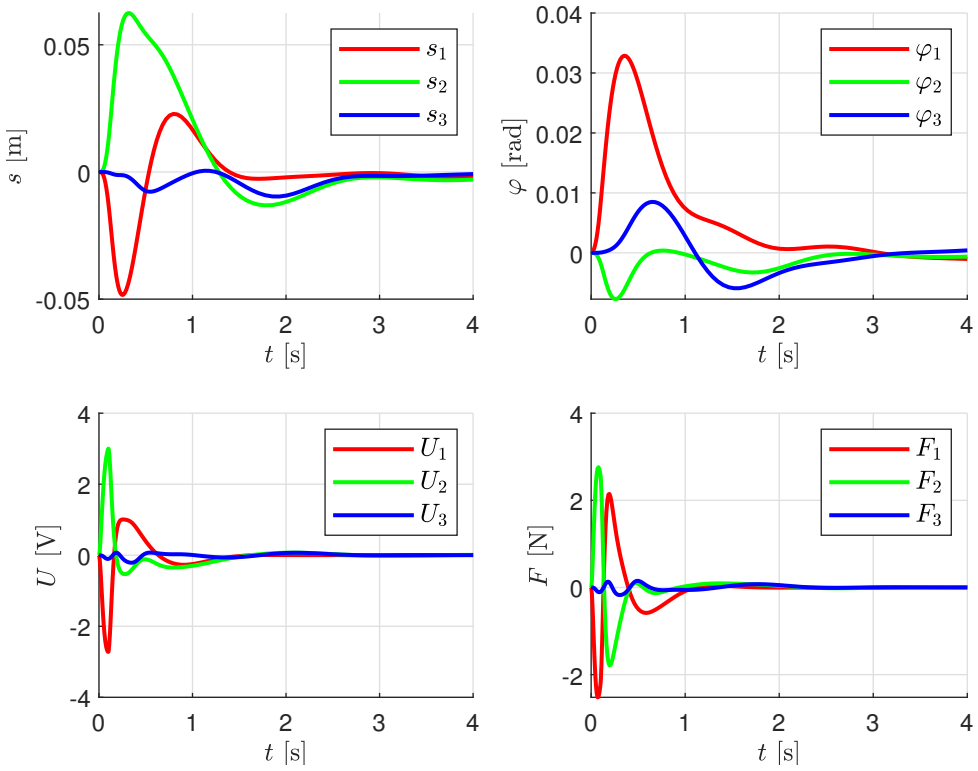
gdje je $\mathbf{h}_{ij}$ nul matrica $1 \times (n + f)$. Matrica $\mathbf{C}_{\mathrm{k},32}$ ima oblik:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{k},ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ij} & \mathbf{e}_{ij} \end{bmatrix}. \tag{4.36}$$

Za $n = 5$ i $f = 1$ dobivena norma je 0,3475, a vremenski odziv prikazan je na slici 31. Za $n = 4$ i $f = 2$ dobivena norma je 0,3471, a vremenski odziv prikazan je na slici 32.



Slika 31: Odziv sustava s distribuiranim upravljanjem, treća varijanta

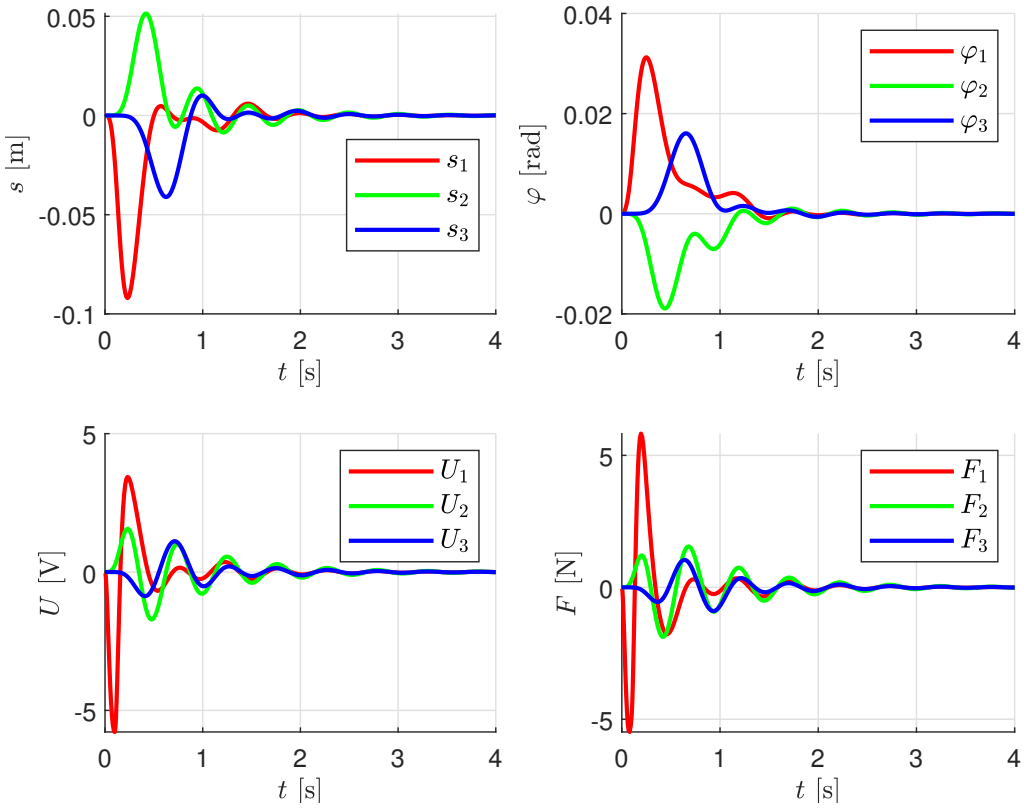


Slika 32: Odziv sustava s distribuiranim upravljanjem, četvrta varijanta

4.2.4 Posebni slučajevi

Za razliku od prethodnog razmatranja, ponekad nije u potpunosti poznata dinamika sustava za koji se traži prikladan regulator. Poseban slučaj je onaj kada je poznata samo dinamika podsustava kojim se upravlja, dok dinamika povezanih podsustava nije poznata. Takav primjer bio bi onaj u kojem se izvodi decentralizirani regulator za jedan podsustav kolica na njihalu bez da se u obzir uzima veza oprugama s drugim podsustavima i postojanje drugih podsustava. Potencijalno povoljniji primjer je onaj u kojem su dodatno uzete u obzir opruge kojima su podsustavi povezani, uz pretpostavku da je susjedno njihalo fiksirano. Primjeri koji slijede su ilustrativnog karaktera, a cilj je pokazati da, u slučajevima kada nije poznata dinamika povezanih podsustava, nema garancija na performanse, kao ni na stabilnost sustava.

U prvom promatranom slučaju provedena je sinteza jednog regulatora na modelu kolica na njihalu bez opruga korištenjem Matlabove funkcije *hinfsyn*. Definiran je novi regulator (u obliku modela prostora stanja) s dimenzijama matrica tri puta većih od dimenzija dobivenog regulatora, a matrice su definirane kao blok-dijagonalne, gdje di-



Slika 33: Odziv sustava s decentraliziranim upravljanjem (sinteza na podsustavima)

jagonalne matrice imaju vrijednosti matrica dobivenog regulatora. Definirani regulator pridodan je modelu sustava triju kolica na njihalima povezanih oprugama. Na taj se način sustavom upravlja decentralizirano, s tri identična regulatora. Sustav s takvim upravljanjem s filterima koji su korišteni u prethodnim primjerima (kako bi rezultati bili usporedivi) iznosi 1,5961, što je značajno lošije od primjera s decentraliziranim upravljanjem pri čijoj je sintezi bila poznata potpuna dinamika. Vremenski odziv sustava prikazan je na slici 33.

S ciljem mogućeg poboljšanja performansi naspram prethodnog primjera u obzir je uzeta i veza oprugama s povezanim njihalima, pri čemu je pretpostavljeno da su susjedna njihala fiksirana. Model sustava kolica na njihalu proširen je oprugama tako da je ulazni moment predefiniran, tj. pridodan mu je moment koji proizlazi iz opruga. Moment koji proizlazi iz opruga definiran je s (vidi poglavlje 3.3):

$$M_{\mathrm{o}} = -p_1 \varphi, \tag{4.37}$$

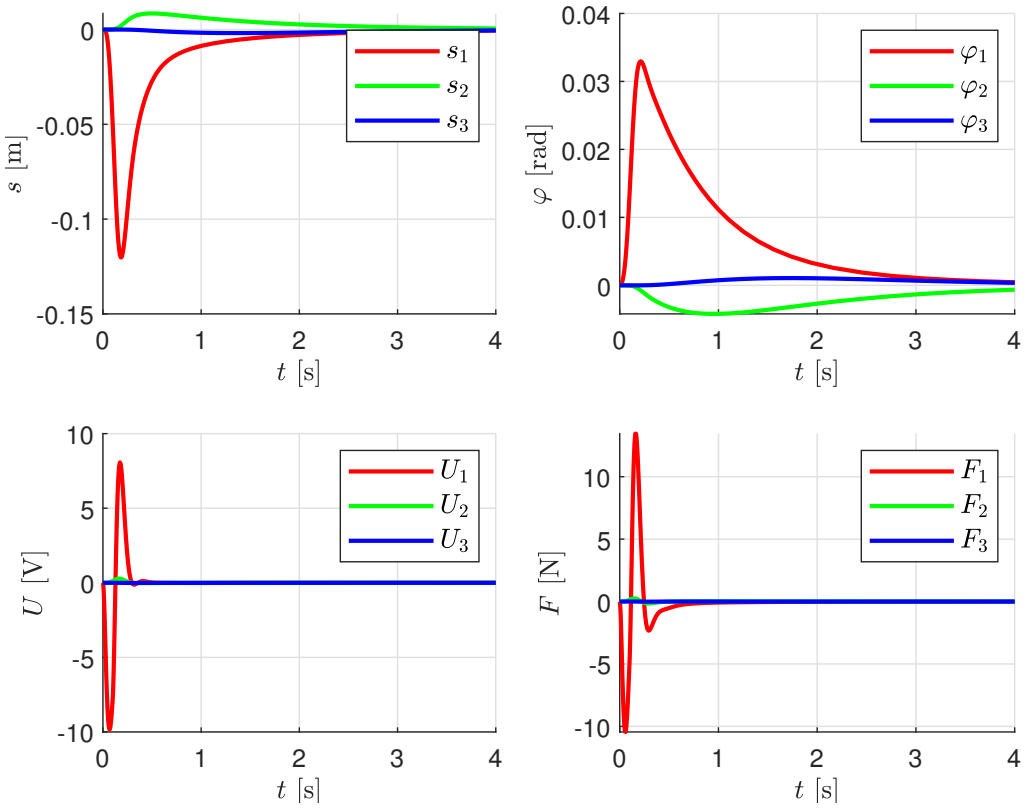
za slučaj podsustava koji je povezan s jednim podsustavom, a za slučaj gdje je podsustav

povezan s dva podsustava prikazana jednadžba se množi s dva. U Matlabu je proširenje postignuto tako da je u početni model dodan još jedan moment (moment opruga), te je dodatno definiran model prostora stanja nultog reda Matlabovom funkcijom *ss*. Definirani sustav za ulaz ima kut zakreta njihala, za izlaz moment opruga, a pridodan je originalnom modelu Matlabovom funkcijom *connect*. Sintezom regulatora pomoću *hinfsyn* za dva različita sustava (za podusustave s jednom vezom i za podsustav s dvjema vezama) dobiveni su regulatori koji su umetnuti u model jednog regulatora koji predstavlja decentralizirane regulatore, a koji je pomoću Matlabove funkcije *connect* povezan na model triju oprugama povezanih sustava kolica na njihalu. Dobiveni sustav ponaša se nestabilno, pa stoga ima H_∞ normu iznosa ∞, a vremenski odziv nije prikazan.

Nastali problem nestabilnosti pokušalo se riješiti sintezom robusnog regulatora. Pretpostavljeno je da uslijed poremećaja na proizvoljnom njihalu kut zakreta susjednog njihala ne može biti veći od kuta zakreta njihala na kojem se javlja poremećaj. Ta pretpostavka temelj je za zadavanje nesigurnosti u sustav. Kao i u prethodnom primjeru, originalni model sustava kolica na njihalu proširen je modelom opruga, uz razliku da izraz za moment opruga sada glasi:

$$M_\mathrm{o} = -p_1\varphi(1+\Delta), \tag{4.38}$$

za slučaj podsustava koji je povezan s jednim podsustavom, a za slučaj gdje je podsustav povezan s dva podsustava prikazana jednadžba se množi s dva. Δ je skalarna nesigurnost koja poprima vrijednosti za koje vrijedi $\overline{\sigma}(\Delta) < 1$, a $-p_1\varphi\Delta$ predstavlja sve moguće momente opruga uslijed zakreta susjednog njihala uz pretpostavku da susjedno njihalo ne može imati zakrete veće od zakreta njihala promatranog sustava. Nesigurnost je u programskom paketu Matlab definirana funkcijom *ultidyn*, i u originalni sustav se pridodaje pomoću funkcije *connect* po uzoru na prethodni primjer. Za sintezu se koristi Matlabova funkcija *musyn* koja se temelji na $D-K$ iterativnom postupku. Za početni regulator za $D-K$ postupak uzima se regulator dobiven sintezom pomoću *hinfsyn*, te je taj regulator jedina polazna točka od koje se vrši $D-K$ postupak. Budući u prvoj iteraciji nije dobiven regulator s kojim sustav ima strukturiranu singularnu vrijednost manju od jedan (čime nije postignuta garancija na performanse za sve propisane nesigurnosti), težinski filteri na izlazu su množeni sa skalarom manjim od jedan sve dok nije dobiven sustav sa strukturi-



Slika 34: Odziv sustava s decentraliziranim upravljanjem (robusna sinteza na podsustavima)

ranom singularnom vrijednosti manjom od jedan. Nakon što su dobiveni zadovoljavajući regulatori za oba tipa podsustava (s jednom vezom i s dvije veze), dobiveni regulatori su ubačeni u model jednog regulatora koji predstavlja dobivene decentralizirane regulatore, te je taj model pomoću *connect* povezan s modelom triju oprugama povezanih sustava kolica na njihalu. Tako dobiveni sustav ponaša se stabilno, ali ima H_∞ normu iznosa 3,8087. Vremenski odziv prikazan je na slici 34.

4.2.5 Zaključak

Sinteza centraliziranog regulatora punog reda bez strukturnih ograničenja matematički je najjednostavniji proces koji ujedno daje najbolje rješenje. Uvođenjem strukturnih ograničenja proces H_∞ optimizacije postaje nekonveksan problem, čija je minimalna teorijska H_∞ norma nešto veća od one kod centraliziranog regulatora. Ciljanim uvođenjem strukturnih ograničenja na članove matrica kojima je opisan regulator (jednadžba 2.33) može se dobiti forma koja predstavlja više decentraliziranih ili distribuiranih regulatora. Opi-

san je zapis decentraliziranih regulatora, te različitih formi distribuiranih regulatora koji zasebno upravljaju upravljačkom silom jednih kolica, imajući pritom dostupna mjerenja s istih kolica i pripadajućeg njihala. U slučaju distribuiranog upravljanja regulator ima dostupne i neke podatke s povezanog podsustava kolica na njihalu ili podatke koji pripadaju regulatoru koji regulira povezani podsustav. Sintezom regulatora za različite varijante, pri čemu su korišteni isti filteri kako bi dobiveni rezultati bili usporedivi, dobivene su H_∞ norme sustava (s filterima) prikazane u tablici 5. Može se zaključiti da se s najosnovnijim varijantama distribuiranog upravljanja jako brzo s performansi decentraliziranih regulatora približava performansama centraliziranog regulatora. Centralizirano upravljanje očekivano daje najbolje performanse, pa je stoga najpoželjniji oblik upravljanja sve dok je realizacija centraliziranog upravljanja moguća.

Tablica 5: $H\infty$ norme sustava ovisno o strukturi regulatora

Struktura		$\|\|\mathbf{G}_\mathrm{w}\|\|_\infty$
Centralizirana		0,3454
Distribuirana	Varijanta 1	0,3469
	Varijanta 2	0,3464
	Varijanta 3	0,3475
	Varijanta 4	0,3471
Decentralizirana		0,4155

U prilog prethodnim tvrdnjama ide i vremenski odziv promatranih sustava. Razmatrajući vremenske odzive sustava s centraliziranim upravljanjem moguće je uočiti visoku razinu koordiniranosti podsustava. Uvođenjem poremećaja na prvo njihalo sva tri podsustava reagiraju istovremeno s ciljem odbacivanja poremećaja. Takva visoka razina koordinacije preduvjet je izvrsnih performansi, pa su performanse sustava s decentraliziranim upravljanjem nešto lošije. Iz vremenskog odziva sustava s decentraliziranim upravljanjem vidljivo je da susjedni podsustav reagira sa zakašnjenjem, tj. tek kada kut zakreta njihala na kojem je unesen poremećaj poprimi visoku vrijednost. Nastala razlika u razini koordinacije, a time i performansama, uspješno se premošćuje uvođenjem distribuiranog upravljanja, a iz vremenskih odziva sustava s distribuiranim upravljanjem vidljiva je brza reakcija susjednog podsustava nakon što je na promatrani podsustav unesen poremećaj.

Kao što je prikazano, preduvjet dobrih performansi je mogućnost komunikacije među podustavima, ali i način na koji je provedena sinteza regulatora za promatrani podsustav.

Ako pri sintezi regulatora za podsustav nije poznata potpuna dinamika sustava i ne vrši se sinteza svih regulatora za sve istovremeno, tj. sinteza se izvršava samo za podsustav zanemarujući dinamiku ostatka sustava, tada nema garancije na performanse sustava niti garancije da će se cjelokupni sustav ponašati stabilno. Moguće je pokazati da je problem izraženiji što je sprega među podsustavima snažnija. U ovom radu iznijeto je nekoliko primjera (dobivene norme prikazane su u tablici 6) koji ukazuju na navedeni problem, ali s obzirom na to da navedeni problem izlazi iz okvira teme rada, intenzivnija razmatranja nisu provedena.

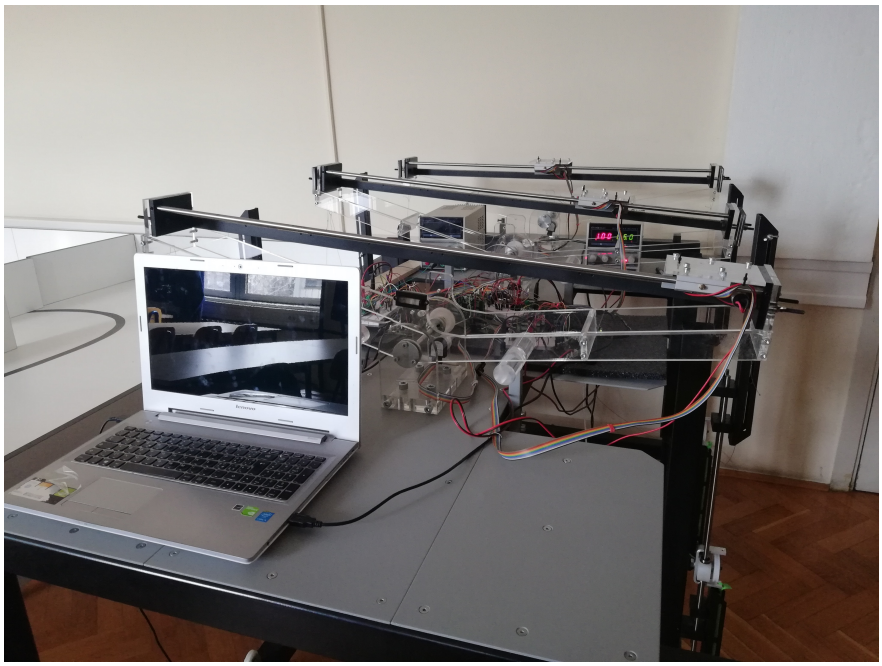
Tablica 6: $H\infty$ norme sustava ovisno o strukturi regulatora i načinu sinteze regulatora

Struktura	$\|\|\mathbf{G}_{\mathrm{w}}\|\|_{\infty}$
Centralizirana	0,3454
Decentralizirana	0,4155
Potpuno decentralizirana	1,5961
Potpuno decentralizirana, s oprugama	∞
Potpuno decentralizirana, s oprugama, robusni	3,8087

Poglavlje 5

EKSPERIMENTALNA PROVJERA

U ovom poglavlju opisan je eksperimentalni postav te su prikazani rezultati eksperimenta na sustavu jednih kolica na njihalu. Zbog problema s implementacijom računalnog koda za izmjenu podataka između mikrokontrolera, provjera na sustavu triju kolica na njihalima nije provedena.



Slika 35: Eksperimentalni postav

5.1 Opis eksperimentalnog postava

Eksperimentalni postav koji se sastoji od triju podsustava kolica na njihalu razvijen je u sklopu projekta 'Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima' koji je za cilj imao istražiti mogućnosti decentraliziranog i distribuiranog upravljanja. Postav se nalazi u Laboratoriju za automatiku i robotiku Fakulteta strojarstva i brodogradnje.

Mehaničke karakteristike postava opisane su u poglavlju 3, dok se u daljnjem tekstu opisuje izvedba mjernog, upravljačkog i energetskog sustava.

Mjerni sustav realiziran je pomoću inkrementalnih enkodera modela 'US Digital S1' rezolucije 4096 točaka po okretaju. Enkoderi se koriste i za mjerenje pomaka kolica te

kod mjerenja zakreta njihala. Enkoder koji mjeri pomak kolica nalazi se na kolicima, a pomoću zupčanika koji se nalazi na osovini enkodera spojen je s zupčastom letvom njihla. Mjerenje zakreta realizirano je spajanjem osovine enkodera i osovine njihala parom zupčanika s multiplikacijom brzine kako bi se povećala točnost mjerenja zakreta. Problem korištenja inkrementalnih enkodera je u tome što daju relativni položaj, pa je inicijalizaciju sustava potrebno provesti ručno dovodeći sustav u nultu točku.

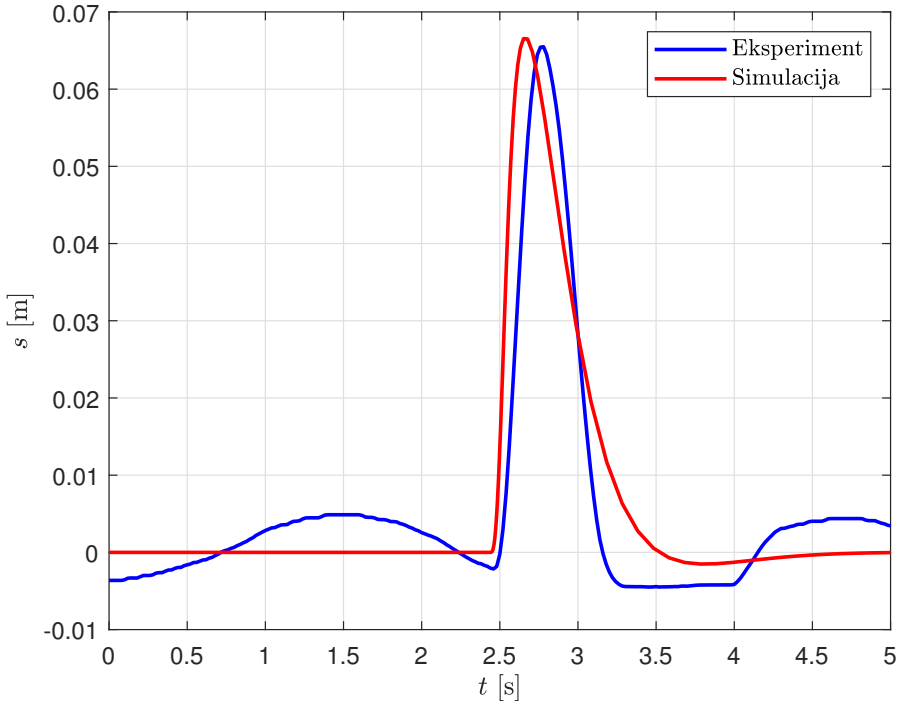
Sustav je upravljan trima povezanim mikrokontrolerima modela 'Delfino TMS320F28-377D'. Mikrokontroler radi na taktu 200 MHz, dok upravljački signal zadaje frekvencijom od 1 kHz. Upravljački algoritmi se programiraju u programskom okruženju 'Code Composer Studio 6.1' u programskom jeziku C/C++, a kompajlirani program se prenosi na mikrokontroler USB vezom.

Za pomicanje kolica po njihalu zaduženi su niskoinduktivitetni istosmjerni motori modela Faulhaber Coreless DC Motor 2338S006. Maksimalni napon kojim radi motor je 6 V, a maksimalna struja 1A. Neke karakteristike poput momentne konstante elektromotora i konstanta elektromotorne sile dane su u tablici 2. Kao što je već spomenuto, motori se nalaze na kolicima, oslanjaju se pomoću linearnih ležajeva na vodilice, a povezani su s zupčastim letvama na njihalima pomoću zupčanika koji se nalazi na izlaznim vratilima motora. Sila koja djeluje između njihala i kolica pomiče kolica i zakreće njihalo, i ta sila je upravljački signal. Za napajanje elektromotora koriste se laboratorijski izvorima s ograničenim naponima na 6 V i ogrančenim strujama na 1 A.

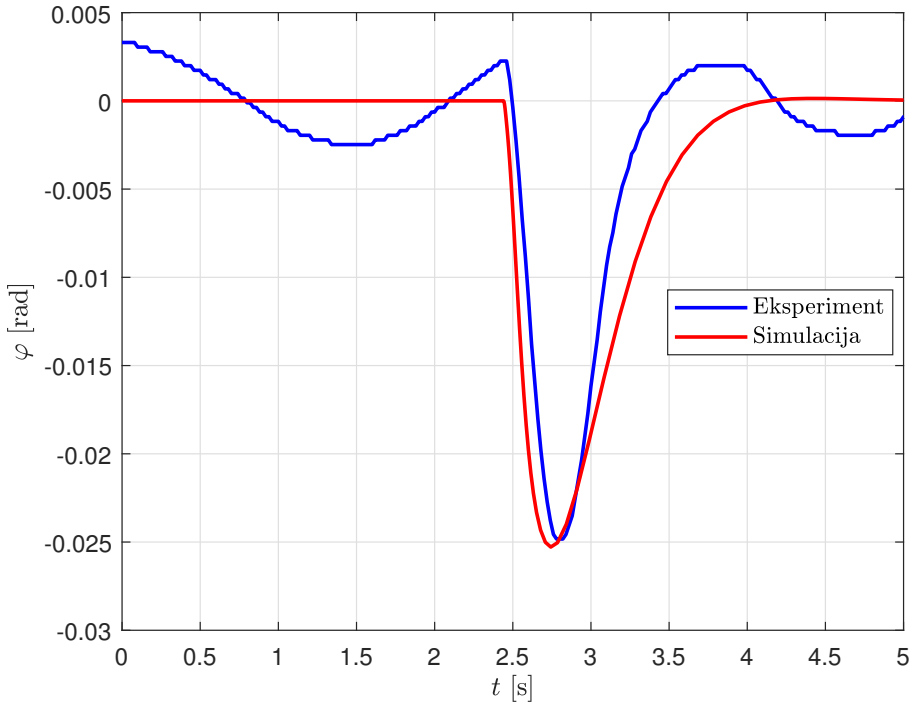
5.2 Rezultati

Na slikama 36, 37 i 38 prikazana je usporedba rezultata simulacije lineariziranog sustava i eksperimentalnih mjerenja za sustav s regulatorom dobivenim sintezom s filterom W_{u} drugog reda s pojačanjem iznosa 0,05 na niskim frekvencijama, pojačanjem iznosa 100 na visokim frekvencijama i pojačanjem iznosa 1 na frekvenciji 150 rad/s, a filteri W_{e} i W_{r} imaju vrijednost 0. Dobiveni regulator diskretiziran je tustinovom diskretizacijom koja kroz proces diskretizacije teži očuvati frekvencijske karakteristike regulatora (sustava koji se diskretizira), koristeći Matlabovu funkciju *c2d*. Prikazani slučaj predstavlja odziv na djelovanje impulsa vanjskog momenta nepoznatog iznosa koji je nanesen udarcem po njihalu. Budući da nije moguće direktno pronaći iznos momenta kojim je djelovano, mije-

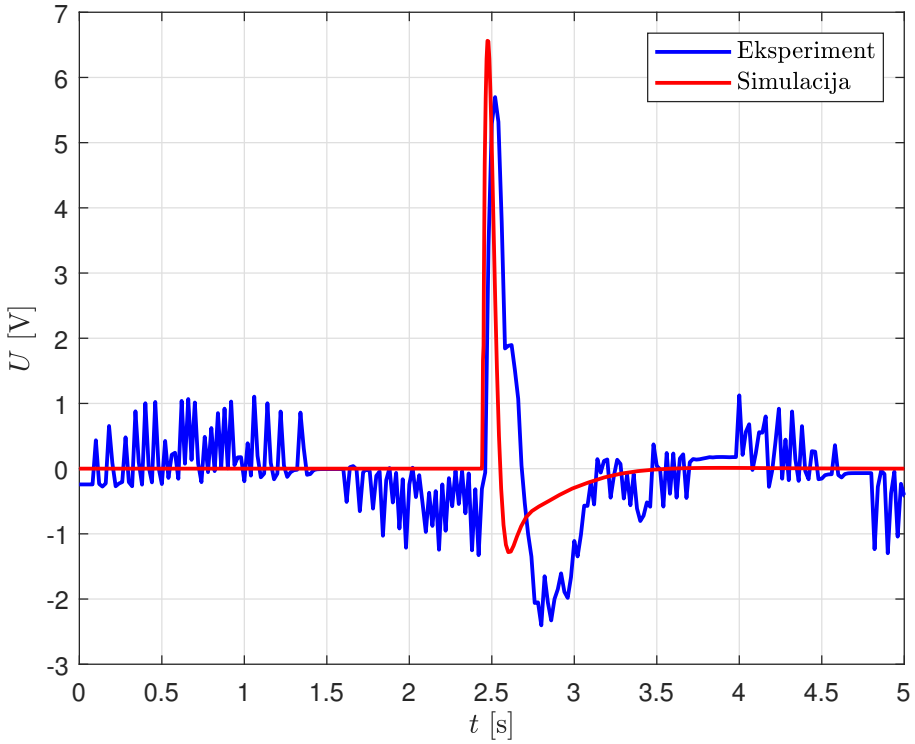
njanjem iznosa momenta u simulaciji traženi su rezultati koji su usporedivi s rezultatima simulacije.



Slika 36: Pomak kolica, simulacija i eksperiment



Slika 37: Zakret njihala, simulacija i eksperiment



Slika 38: Napon, simulacija i eksperiment

Potrebno je naglasiti da je uslijed greške inicijalizacije u eksperimentalnim rezultatima postojalo blago odstupanje ravnotežnog položaja. S ciljem jasnije usporedbe, nastalo odstupanje je 'ručno' uklonjeno.

Na slikama 36 i 37 vidljiva je oscilacija zakreta njihala i pomaka kolica uzrokovana suhim trenjem. Da bi se otklonio utjecaj trenja izveden je jednostavni model kompenzacije trenja koji se temelji na procjeni vanjske sile (na kolica) iz modela sustava. Iz jednadžbe 3.22 dolazi se do jednadžbe:

$$F_{\mathrm{k}} = m_{\mathrm{k}}\ddot{s} + m_{\mathrm{k}}h_{\mathrm{k}}\ddot{\varphi} + m_{\mathrm{k}}g\sin(\varphi) + m_{\mathrm{k}}s\dot{\varphi}^2 - F_{\mathrm{up}}, \tag{5.1}$$

koja je temelj za procjenu sile trenja. Ako se pretpostavi da na kolica ne djeluje vanjska sila, tada je sila trenja jednaka F_{k}. Ako se dodatno upravljačka sila uveća za dodatni iznos kojim se kompenzira trenje, dobiva se:

$$F_{\mathrm{tr}} = m_{\mathrm{k}}\ddot{s} + m_{\mathrm{k}}h_{\mathrm{k}}\ddot{\varphi} + m_{\mathrm{k}}g\sin(\varphi) + m_{\mathrm{k}}s\dot{\varphi}^2 - (F_{\mathrm{up}} - F_{\mathrm{tr,up}}), \tag{5.2}$$

gdje je F_{tr} procjena sile trenja, a $\ddot{s}$ i $\ddot{\varphi}$ su druge derivacije po vremenu mjerenih pomaka kolica i zakreta njihala dobivene konačnim diferencijama, a $F_{\mathrm{tr,up}}$ je dodatna upravljačka

sila kojom se kompenzira trenje i računa se pomoću:

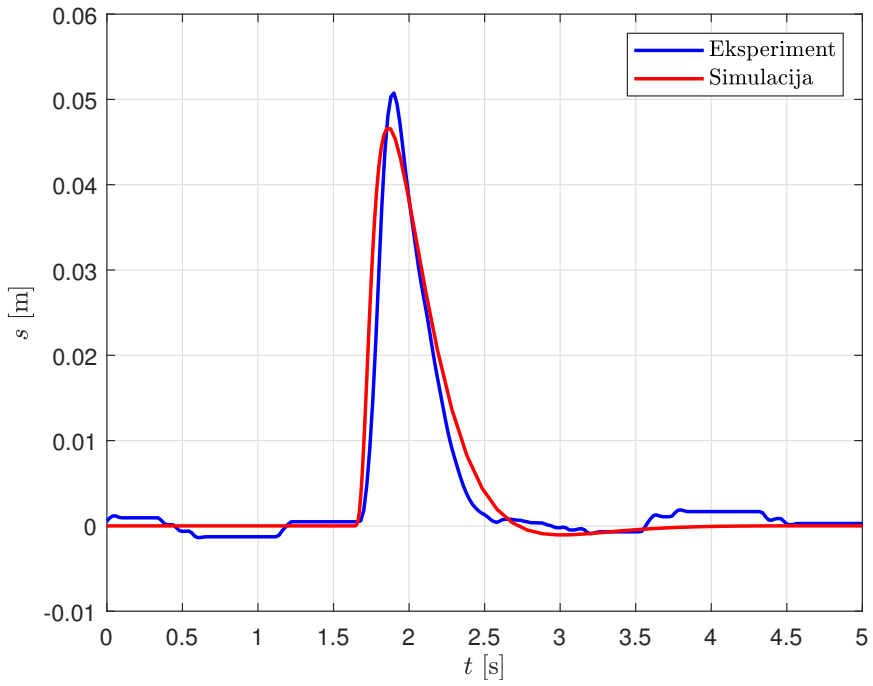
$$\dot{F}_{\mathrm{tr,up}} = \frac{F_{\mathrm{tr}} - F_{\mathrm{tr,up}}}{\tau}, \tag{5.3}$$

gdje je τ faktor koji određuje vrijeme kašnjenja kompenzacijske sile za procjenom sile trenja. Da bi se djelovanje kompenzacije sile dodatno ublažilo te izbjegli potencijalno negativni efekti kompenzacije trenja, izraz 5.4 je modificiran tako da glasi:

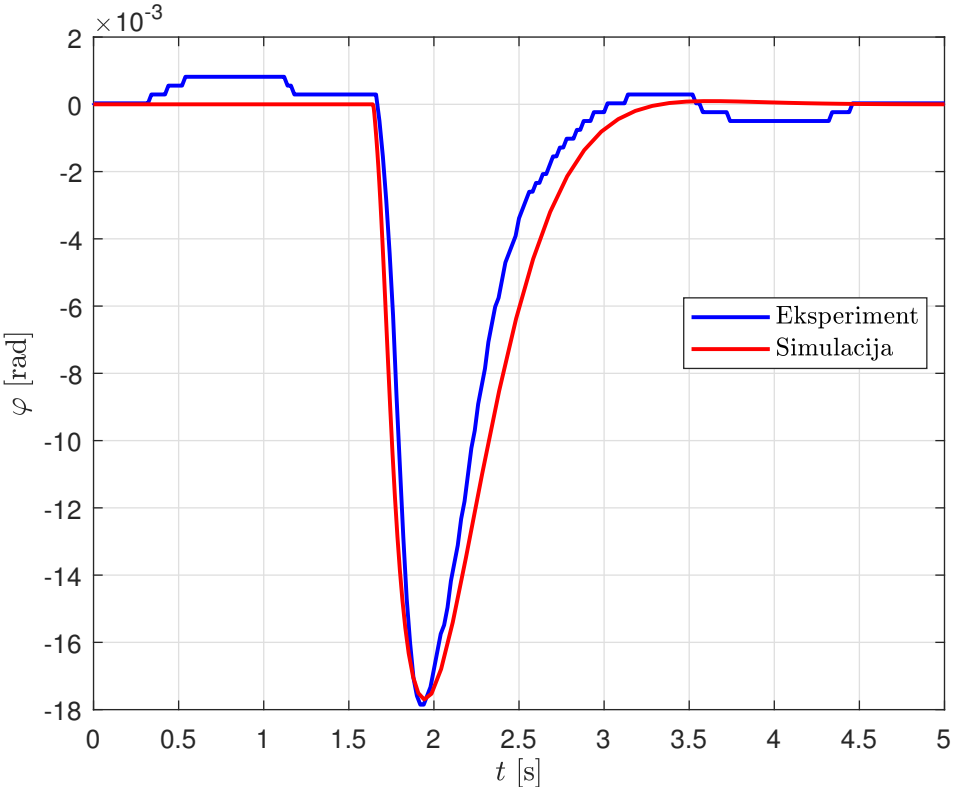
$$F_{\mathrm{tr}} = m_{\mathrm{k}}\ddot{s} + m_{\mathrm{k}}h_{\mathrm{k}}\ddot{\varphi} + m_{\mathrm{k}}g\sin(\varphi) + m_{\mathrm{k}}s\dot{\varphi}^2 - (F_{\mathrm{up}} - \alpha F_{\mathrm{tr,up}}), \tag{5.4}$$

gdje je α parametar manji od jedan. U danim rezultatima korišteni je $\alpha = 0,25$. Budući da tema rada nije kompenzacija trenja, sofisticiranija kompenzacija trenja nije razvijena. Dobiveni rezultati su prikazani na slikama 39, 40 i 41.

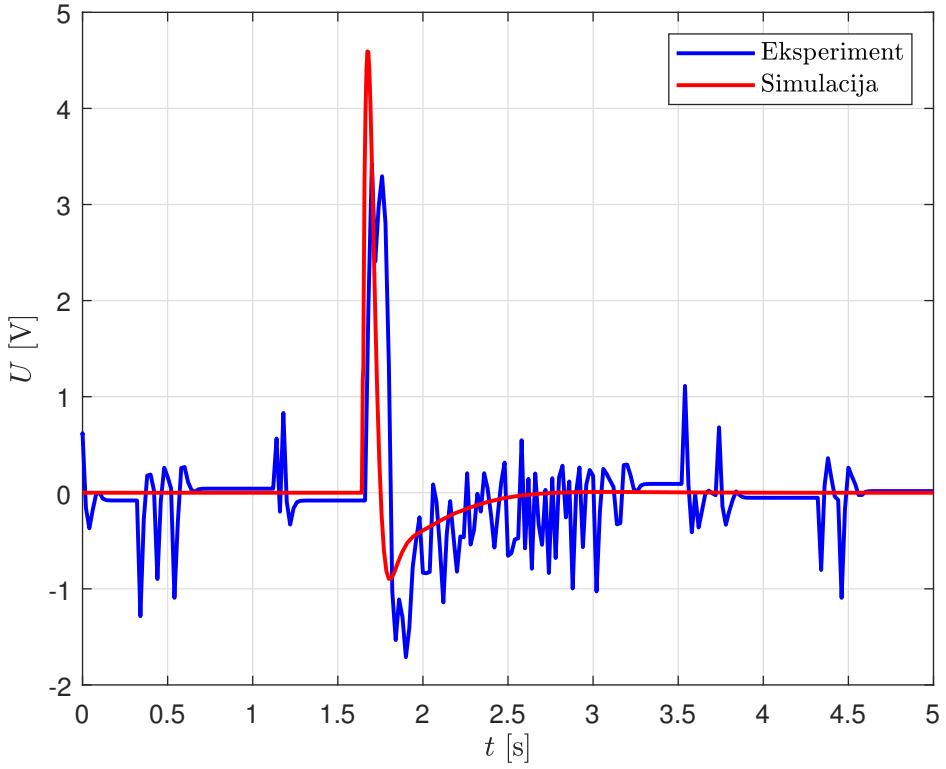
Prikazan je i dobiveni odziv na referentni kut zakreta iznosa 0,05. Regulator je dobiven sintezom s filterom drugog reda W_{u} koji ima pojačanje iznosa 0,1 na niskim frekvencijama, pojačanje iznosa 100 na visokim frekvencijama i pojačanje iznosa 1 na frekvenciji 150 rad/s, i s filterima $W_{\mathrm{e}} = W_{\mathrm{r}}$ koji imaju pojačanje iznosa 1 na niskim frekvencijama, pojačanje iznosa 0,1 na visokim frekvencijama i pojačanje iznosa 0,2 na frekvenciji 8 rad/s. Dobiveni rezultati s kompenzatorom trenja su prikazani na slikama 42, 43 i 44.



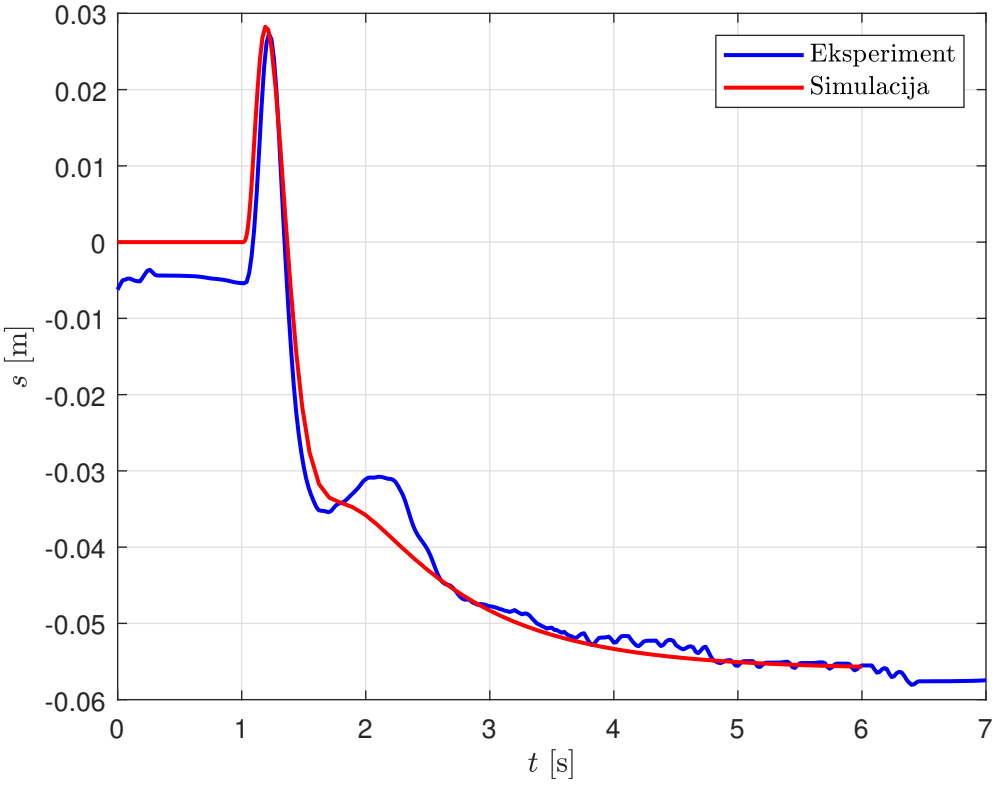
Slika 39: Pomak kolica, simulacija i eksperiment, s kompenzatorom trenja



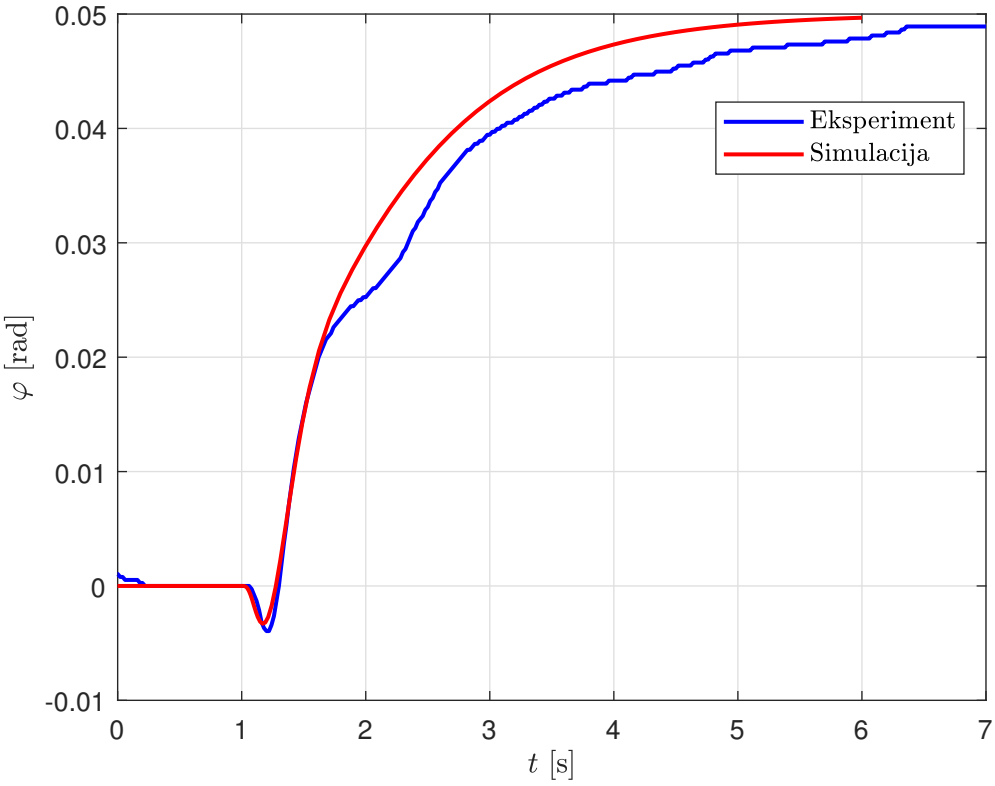
Slika 40: Zakret njihala, simulacija i eksperiment, s kompenzatorom trenja



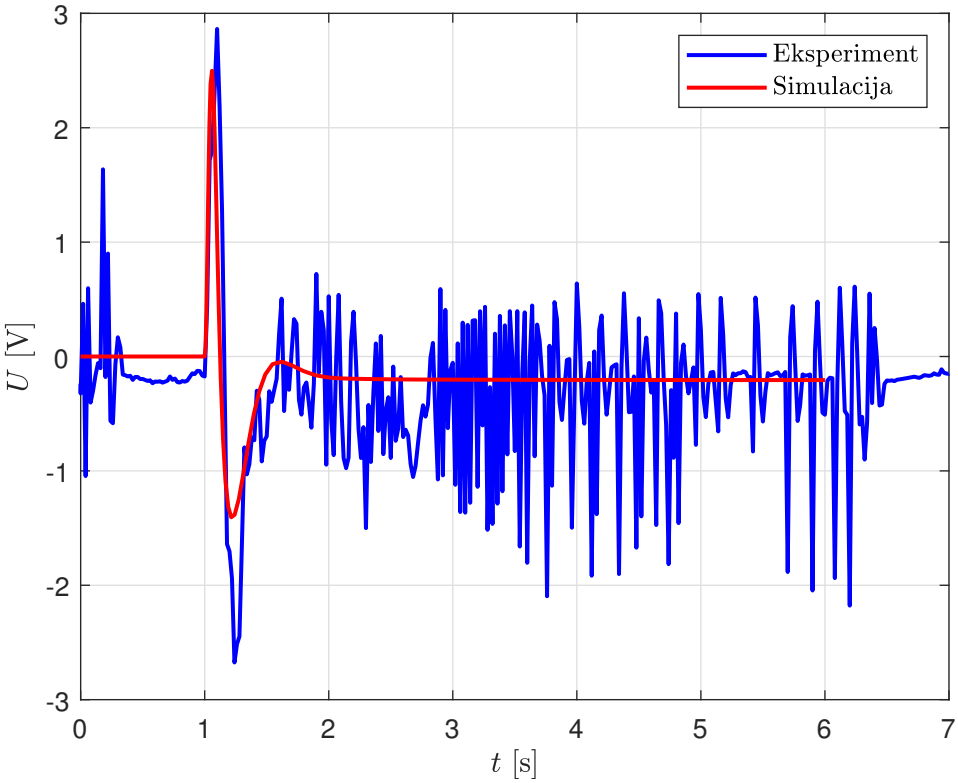
Slika 41: Napon, simulacija i eksperiment, s kompenzatorom trenja



Slika 42: Pomak kolica, praćenje reference, simulacija i eksperiment



Slika 43: Kut zakreta njihala, praćenje reference, simulacija i eksperiment



Slika 44: Napon, praćenje reference, simulacija i eksperiment

Poglavlje 6

ZAKLJUČAK

U teorijskom dijelu ovoga rada obrađeni su pojmovi i osnovni matematički formalizmi relevantni za razumijevanje sinteze H_∞ optimalnog regulatora. U daljnjim teorijskim razmatranjima obrađeni su pojmovi relevantni za analizu robusnosti i sintezu robusnog regulatora.

Izveden je matematički model sustava kolica na njihalu korištenjem Lagrangeovih jednadžbi. Izveden je matematički model sustava triju kolica na njihalima povezanih oprugama. Pri izvodu jednadžbi vodilo se računa o strukturi jednadžbi i matrica unutar jednadžbi što ostavlja mogućnost jednostavnog proširenja modela na proizvoljan broj oprugama povezanih podsustava kolica na njihalu. Izvedeni modeli su linearizirani i zapisani u prostor stanja, što predstavlja polaznu točku za sintezu regulatora. Dodatno je prostor stanja proširen s integralom greške, a takav model koristio se za sintezu regulatora s ciljem dobrog praćenja reference. Korištenjem programskog paketa Matlab obavljena je sinteza H_∞ optimalnog regulatora nad sustavom kolica na njihalu. Ciljanim odabirom težinskih filtera kojima se modificira sustav za potrebe H_∞ optimiranja s ciljem dobivanja željenog frekvencijskog i vremenskog odziva, te sustavnim mijenjanjem parametara filtera prikazan je utjecaj odabranih filtera na performanse sustava. Pokazano je da se odabirom prikladnog visokopropusnog filtera kojim se penalizira upravljački signal može dobiti željenu tranzijentni odziv na poremećaj zajedno s niskim pojačanjima upravljačkog signala na visokim frekvencijama čime se izbjegavaju neželjeno agresivno ponašanje regulatora, udarno djelovanje izvršnog člana i osjetljivost na mjerni šum. Daljnjim odabirom prikladnog niskopropusnog filtera kojim se određuje penalizacija izlaznih signala pri djelovanju reference i odabirom prikladnog niskopropusnog filtera kojim se penalizira integral greške kuta zakreta može se postići dobro praćenje reference, što je pokazano na primjeru odziva sustava na step referencu. Ipak, uvođenje takvih filtera, tj. integralnog djelovanja, blago pogoršava vremenski odziv na poremećaj. Dobiveni rezultati nameću kao zaključak mogućnost odvojenog odabira visokopropusnog filtera kojim se penalizira upravljački signal, a zatim odabira niskopropusnih filtera kojim se penaliziraju integral greške kuta zakreta i odziv na referencu te eventualno ponavljanje postupka dok se ne

dođe do zadovoljavajućih rezultata. Za odabrani regulator izvršena je provjera na eksperimentalnom postavu razvijenom u sklopu projekta 'Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima'.

Izvršena je sinteza H_∞ optimalnog regulatora nad sustavom triju oprugama povezanih kolica na njihalu. Strukturiranjem vektora mjerenih varijabli i vektora upravljačkih varijabli, zatim strukturiranjem matrica prostora stanja kojima je opisana dinamika regulatora, razmotrene su mogućnosti opisivanja seta decentraliziranih i distribuiranih regulatora. Decentralizirani regulatori primaju mjerenja samo s pripadajućeg podsustava i mogu direktno utjecati samo na taj podsustav, a distribuirani regulatori dodatno mogu izmjenjivati podatke s povezanim regulatorima. Odabirom matrica takvih da su samo članovi blok-dijagonalnih matrica slobodni, tj. podložni optimizaciji, opisan je set decentraliziranih regulatora. Dodatnim ciljanim uvođenjem pojedinih slobodnih članova u matrice van dijagonale opisuje se set distribuiranih regulatora koji imaju mogućnost međusobne izmjene mjerenih varijabli ili varijabli stanja regulatora s povezanim regulatorom. Dobiveni rezultati ukazuju da se distribuiranim upravljanjem postiže brz napredak iz performansi sustava s decentraliziranim upravljanjem prema performansama sustava s centraliziranim upravljanjem koji očekivano ima najbolje performanse. Nadalje, razmatrani su i sustavi s decentraliziranim upravljanjem regulatorima koji su dobiveni sintezom na osnovu dinamike podsustava sa zanemarenom dinamikom ostatka sustava. Na nekoliko primjera pokazano je da sustavi s tako dobivenim regulatorima imaju značajno lošije performanse od sustava koji su upravljani regulatorima čija je sinteza provedena istovremeno s poznavanjem cjelokupne dinamike sustava. Osim toga, takvi sustavi mogu se ponašati i nestabilno.

Konačno je za zaključiti da je H_∞ sinteza fleksibilan i sofisticiran alat koji inženjerima omogućuje efikasno rješavanje problema upravljanja složenim sustavima, a primjenjiva je i za optimiranje pasivnih elemenata dinamičkih sustava.

LITERATURA

[1] Astrom, K. J.: Feedback Systems : An Introduction for Scientists and Engineers, Princeton University Press, 2009

[2] Zames, G. (1981). "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, pp. 301-320.

[3] Doyle, J.C., K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis (1989). "State-space solutions to standards H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-34, no. 8, pp. 831-847.

[4] Gahinet, P., P. Apkarian (1994). "A linear matrix inequality approach to H_∞ control". International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4:421-448.

[5] Apkarian, P., D. Noll (2006). "Nonsmooth H_∞-synthesis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 229-244.

[6] Lin, F.: Robust Control Design: An Optimal Control Approach, John Wiley & Sons Ltd, 2007.

[7] Robert L. Williams II, Douglas A. Lawrence: Linear state-space control system, John Wiley & Sons, Inc, 2007.

[8] Sigurd Skogestad, Ian Postlethwait: Multivariable Feedback Control: Analysis and design, John Wiley & Sons, Inc, 2001.

[9] https://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-323-principles-ofoptimal- control-spring-2008/lecture-notes/lec14.pdf (21.5.2020)

[10] D.W. Gu, P. Hr. Petkov and M. M. Konstantinov: Robust Control Design with MATLAB, Springer, 2005.

[11] C. Scherer, S. Weiland: Linear Matrix Inequalities in Control, DISC Course, 2002.

[12] Glover, K., and J.C. Doyle. "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity." *Systems & Control Letters*, Vol. 11, Number 8, 1988, pp. 167–172.

[13] G. E. Dullerud, F. Paganini: A Course in Robust Control Theory, Springer Verlag, 2000.

[14] S.Boyd: Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, 1994.

[15] S. Boyd, V. Balakrishnan, and P. Kabamba, "A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer matrix and related problems", *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2 (1989), pp. 207–219.

[16] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, J. C. Doyle: Robust and optimal control, Prentice Hall, 1995.

[17] https://www.mathworks.com/help/robust/ug/measures-of-robustperformance.html (29.5.2020)

[18] M. Lobrović et al., "A case study in distributed control: Elastically interconnected seesaw-cart systems," *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, Valletta, 2017, pp. 1159-1164, doi: 10.1109/MED.2017.7984274.

[19] L.Sciavicco, B.Siciliano, Modelling and Control of Robot Manipulators, Springer, 2000.

[20] A.A.Shabana: Dynamics of Multibody Systems, Cambridge University Press, 2005.

[21] Bibel J.E., Malyevac D.S. "Guidlines for the selection of weighting functions for H_∞ control", *Naval Surface Warfare Center*, 1992.

PRILOG

I: Derivacije potencijalnih energija opruga po varijablama stanja

II: CD-R disc

Prilog 1

Derivacije potencijalnih energija opruga po varijablama stanja:

$$\frac{\partial E_{\mathrm{op},i}}{\partial \varphi_i} = \mathrm{kop}\left(E_1 + \frac{L\,\cos(\varphi_1)}{4} - \frac{d\,\sin(\varphi_1)}{2}\right)$$
$$\left(y_0 - d - \Delta l_0 + \frac{L\,\sin(\varphi_1)}{4} + \frac{L\,\sin(\varphi_2)}{4} + \frac{d\,\cos(\varphi_1)}{2} + \frac{d\,\cos(\varphi_2)}{2} - \frac{\sqrt{E_2}}{4}\right)$$
$$+\mathrm{kop}\left(\frac{E_3}{4\,\sqrt{E_4}} + \frac{L\,\cos(\varphi_1)}{4} + \frac{d\,\sin(\varphi_1)}{2}\right)$$
$$\left(d - y_0 + \Delta l_0 + \frac{L\,\sin(\varphi_1)}{4} + \frac{L\,\sin(\varphi_2)}{4} - \frac{d\,\cos(\varphi_1)}{2} - \frac{d\,\cos(\varphi_2)}{2} + \frac{\sqrt{E_4}}{4}\right),$$

$$E_1 = \frac{E_{1b}}{4\sqrt{E_{1n}}},$$

$$E_{1b} = 2\,L\,d - \frac{L^2\,\sin(2\,\varphi_1)}{2} + 2\,d^2\,\sin(2\,\varphi_1) + 2\,L^2\,\sin(\varphi_1) - 4\,L\,d\cos(\varphi_1)^2$$
$$-L^2\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 4\,d^2\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_1) + 4\,L\,x_0\,\sin(\varphi_1)$$
$$+8\,d\,x_0\,\cos(\varphi_1) - 2\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2) + 2\,L\,d\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2),$$

$$E_{1n} = 4\,d^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_2)^2 - 16\,L\,x_0 + 4\,d^2\cos(\varphi_2)^2$$
$$-6\,L^2 - 16\,d^2 + 16\,{y_0}^2 + 4\,L^2\,\cos(\varphi_1) + 4\,L^2\,\cos(\varphi_2) - 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_1) - 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_2)$$
$$+2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_1) + 2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_2) + 8\,d^2\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2) + 2\,L^2\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2)$$
$$+8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_1) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_2) - 8\,L\,d\,\sin(\varphi_1) - 8\,L\,d\,\sin(\varphi_2)$$
$$+4\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1),$$

$$E_2 = 4\,d^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_2)^2 - 16\,L\,x_0 + 4\,d^2\cos(\varphi_2)^2$$
$$-6\,L^2 - 16\,d^2 + 16\,{y_0}^2 + 4\,L^2\,\cos(\varphi_1) + 4\,L^2\,\cos(\varphi_2) - 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_1) - 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_2)$$
$$+2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_1) + 2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_2) + 8\,d^2\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2)$$
$$+2\,L^2\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_1) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_2)$$
$$-8\,L\,d\,\sin(\varphi_1) - 8\,L\,d\,\sin(\varphi_2)$$
$$+4\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1)\,,$$

$$E_3 = 2\,L\,d + \frac{L^2\,\sin(2\,\varphi_1)}{2} - 2\,d^2\,\sin(2\,\varphi_1) - 2\,L^2\,\sin(\varphi_1) - 4\,L\,d\cos(\varphi_1)^2$$
$$+L^2\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) - 4\,d^2\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_1)$$
$$-4\,L\,x_0\,\sin(\varphi_1) + 8\,d\,x_0\,\cos(\varphi_1) - 2\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2) + 2\,L\,d\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2)\,,$$

$$E_4 = 4\,d^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_2)^2 - 16\,L\,x_0 + 4\,d^2\cos(\varphi_2)^2$$
$$-6\,L^2 - 16\,d^2 + 16\,{y_0}^2 + 4\,L^2\,\cos(\varphi_1) + 4\,L^2\,\cos(\varphi_2) + 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_1) + 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_2)$$
$$-2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_1) - 2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_2) + 8\,d^2\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2)$$
$$+2\,L^2\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_1) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_2)$$
$$+8\,L\,d\,\sin(\varphi_1) + 8\,L\,d\,\sin(\varphi_2) - 4\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) - 4\,L\,d\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1)\,,$$

$$E_5 = 4\,d^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_2)^2 - 16\,L\,x_0 + 4\,d^2\cos(\varphi_2)^2$$
$$-6\,L^2 - 16\,d^2 + 16\,{y_0}^2 + 4\,L^2\,\cos(\varphi_1) + 4\,L^2\,\cos(\varphi_2) + 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_1) + 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_2)$$
$$-2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_1) - 2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_2) + 8\,d^2\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2)$$
$$+2\,L^2\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_1) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_2) + 8\,L\,d\,\sin(\varphi_1)$$
$$+8\,L\,d\,\sin(\varphi_2) - 4\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) - 4\,L\,d\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1)\,,$$

$$\frac{\partial E_{\mathrm{op},i}}{\partial \varphi_{i+1}} = k_{\mathrm{op}} \left(\frac{E_6}{4\sqrt{E_7}} + \frac{L\,\cos(\varphi_2)}{4} - \frac{d\,\sin(\varphi_2)}{2} \right)$$
$$\left(y_0 - d - \Delta l_0 + \frac{L\,\sin(\varphi_1)}{4} + \frac{L\,\sin(\varphi_2)}{4} + \frac{d\,\cos(\varphi_1)}{2} + \frac{d\,\cos(\varphi_2)}{2} - \frac{\sqrt{E_8}}{4} \right)$$
$$+k_{\mathrm{op}} \left(\frac{E_9}{4\sqrt{E_{10}}} + \frac{L\,\cos(\varphi_2)}{4} + \frac{d\,\sin(\varphi_2)}{2} \right)$$
$$\left(d - y_0 + \Delta l_0 + \frac{L\,\sin(\varphi_1)}{4} + \frac{L\,\sin(\varphi_2)}{4} - \frac{d\,\cos(\varphi_1)}{2} - \frac{d\,\cos(\varphi_2)}{2} + \frac{\sqrt{E_{11}}}{4} \right),$$

$$E_6 = 2\,L\,d - \frac{L^2\,\sin(2\,\varphi_2)}{2} + 2\,d^2\,\sin(2\,\varphi_2) + 2\,L^2\,\sin(\varphi_2) - 4\,L\,d\cos(\varphi_2)^2$$
$$-L^2\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1) + 4\,d^2\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_2)$$
$$+4\,L\,x_0\,\sin(\varphi_2) + 8\,d\,x_0\,\cos(\varphi_2) - 2\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2) + 2\,L\,d\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2),$$

$$E_7 = 4\,d^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_2)^2 - 16\,L\,x_0 + 4\,d^2\cos(\varphi_2)^2$$
$$-6\,L^2 - 16\,d^2 + 16\,{y_0}^2 + 4\,L^2\,\cos(\varphi_1) + 4\,L^2\,\cos(\varphi_2) - 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_1) - 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_2)$$
$$+2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_1) + 2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_2) + 8\,d^2\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2)$$
$$+2\,L^2\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_1) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_2) - 8\,L\,d\,\sin(\varphi_1)$$
$$-8\,L\,d\,\sin(\varphi_2) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1),$$

$$E_8 = 4\,d^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_1)^2 - L^2\cos(\varphi_2)^2 - 16\,L\,x_0 + 4\,d^2\cos(\varphi_2)^2$$
$$-6\,L^2 - 16\,d^2 + 16\,{y_0}^2 + 4\,L^2\,\cos(\varphi_1) + 4\,L^2\,\cos(\varphi_2) - 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_1) - 16\,d\,x_0\,\sin(\varphi_2)$$
$$+2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_1) + 2\,L\,d\,\sin(2\,\varphi_2) + 8\,d^2\,\cos(\varphi_1)\,\cos(\varphi_2)$$
$$+2\,L^2\,\sin(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_1) + 8\,L\,x_0\,\cos(\varphi_2) - 8\,L\,d\,\sin(\varphi_1)$$
$$-8\,L\,d\,\sin(\varphi_2) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_1)\,\sin(\varphi_2) + 4\,L\,d\,\cos(\varphi_2)\,\sin(\varphi_1),$$

$$E_9 = 2\,L\,d + \frac{L^2\,\sin\left(2\,\varphi_2\right)}{2} - 2\,d^2\,\sin\left(2\,\varphi_2\right) - 2\,L^2\,\sin\left(\varphi_2\right) - 4\,L\,d\cos\left(\varphi_2\right)^2$$
$$+L^2\,\cos\left(\varphi_2\right)\,\sin\left(\varphi_1\right) - 4\,d^2\,\cos\left(\varphi_1\right)\,\sin\left(\varphi_2\right) + 4\,L\,d\,\cos\left(\varphi_2\right)$$
$$-4\,L\,x_0\,\sin\left(\varphi_2\right) + 8\,d\,x_0\,\cos\left(\varphi_2\right) - 2\,L\,d\,\cos\left(\varphi_1\right)\,\cos\left(\varphi_2\right)$$
$$+2\,L\,d\,\sin\left(\varphi_1\right)\,\sin\left(\varphi_2\right),$$

$$E_{10} = 4\,d^2\cos\left(\varphi_1\right)^2 - L^2\cos\left(\varphi_1\right)^2 - L^2\cos\left(\varphi_2\right)^2 - 16\,L\,x_0 + 4\,d^2\cos\left(\varphi_2\right)^2$$
$$-6\,L^2 - 16\,d^2 + 16\,{y_0}^2 + 4\,L^2\,\cos\left(\varphi_1\right) + 4\,L^2\,\cos\left(\varphi_2\right) + 16\,d\,x_0\,\sin\left(\varphi_1\right) + 16\,d\,x_0\,\sin\left(\varphi_2\right)$$
$$-2\,L\,d\,\sin\left(2\,\varphi_1\right) - 2\,L\,d\,\sin\left(2\,\varphi_2\right) + 8\,d^2\,\cos\left(\varphi_1\right)\,\cos\left(\varphi_2\right)$$
$$+2\,L^2\,\sin\left(\varphi_1\right)\,\sin\left(\varphi_2\right) + 8\,L\,x_0\,\cos\left(\varphi_1\right) + 8\,L\,x_0\,\cos\left(\varphi_2\right) + 8\,L\,d\,\sin\left(\varphi_1\right)$$
$$+8\,L\,d\,\sin\left(\varphi_2\right) - 4\,L\,d\,\cos\left(\varphi_1\right)\,\sin\left(\varphi_2\right) - 4\,L\,d\,\cos\left(\varphi_2\right)\,\sin\left(\varphi_1\right),$$

$$E_{11} = 4\,d^2\cos\left(\varphi_1\right)^2 - L^2\cos\left(\varphi_1\right)^2 - L^2\cos\left(\varphi_2\right)^2 - 16\,L\,x_0 + 4\,d^2\cos\left(\varphi_2\right)^2$$
$$-6\,L^2 - 16\,d^2 + 16\,{y_0}^2 + 4\,L^2\,\cos\left(\varphi_1\right) + 4\,L^2\,\cos\left(\varphi_2\right) + 16\,d\,x_0\,\sin\left(\varphi_1\right) + 16\,d\,x_0\,\sin\left(\varphi_2\right)$$
$$-2\,L\,d\,\sin\left(2\,\varphi_1\right) - 2\,L\,d\,\sin\left(2\,\varphi_2\right) + 8\,d^2\,\cos\left(\varphi_1\right)\,\cos\left(\varphi_2\right)$$
$$+2\,L^2\,\sin\left(\varphi_1\right)\,\sin\left(\varphi_2\right) + 8\,L\,x_0\,\cos\left(\varphi_1\right) + 8\,L\,x_0\,\cos\left(\varphi_2\right) + 8\,L\,d\,\sin\left(\varphi_1\right)$$
$$+8\,L\,d\,\sin\left(\varphi_2\right) - 4\,L\,d\,\cos\left(\varphi_1\right)\,\sin\left(\varphi_2\right) - 4\,L\,d\,\cos\left(\varphi_2\right)\,\sin\left(\varphi_1\right).$$