Određivanje neopterećene geometrije arterija

Panić, Tina

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:703143

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Tina Panić

Zagreb,2020. godina.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing.

Student:

Tina Panić

Zagreb, 2020. godina.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru Prof. dr. sc. Igoru Karšaju, kolegama asistentima Dr. sc. Lani Virag, Dr. sc. Mariji Smoljkić i Toniju Škugoru na pruženoj pomoći i savjetima prilikom izrade ovog rada te kolegici Iskri Knapp koja je omogućila podatke za izradu rada. Također se zahvaljujem prijateljima i kolegama s faksa koji su studiranje učinili lakšim, obitelji i dečku na potpori tijekom studiranja te kolegama s posla na prenošenju iskustva.

Tina Panić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa: 602 - 04 / 20 - 6 / 3	
Ur. broj: 15 - 1703 - 20 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Tina Panić** Mat. br.: 0035198520

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Određivanje neopterećene geometrije arterija**

Naslov rada na engleskom jeziku: **On determination of unloaded arterial geometry**

Opis zadatka:

Zbog tehnoloških mogućnosti aditivna proizvodnja postaje sve zastupljenija u biomedicinskom inženjerstvu. Jedna primjena aditivne proizvodnje je izrada arterijskih replika koje se koriste u pripremi i planiranju operativnih zahvata. Arterijska stijenka je tijekom srčanog ciklusa konstantno opterećena unutarnjim tlakom u rasponu između dijastoličkog i sistoličkog tlaka, no njen izgled u neopterećenom stanju nije poznat. Heterogena struktura arterijske stijenke i kompleksni biokemijski i biomehanički procesi odgovorni su za njena mehanička svojstva. Korištenjem podataka o krvnom tlaku i promjeni promjera arterijske stijenke tijekom srčanog ciklusa moguće je odrediti materijalne parametre za hiperelastične materijalne modele. Poznavajući deformiranu geometriju prilikom opterećenja i materijalne parametre moguće je odrediti neopterećeni oblik arterijske stijenke koji bi se koristio kao ishodište za izradu arterijske replike.

U ovom radu potrebno je, koristeći podatke iz numeričkih simulacija, razviti postupak određivanja neopterećene geometrije arterijske stijenke na pojednostavljenim cilindričnim modelima. Tijekom izrade rada potrebno je ispitati i prikazati razlike između korištenih hiperelastičnih modela te usporediti rezultate s numeričkim simulacijama koje uključuju modeliranje rasta i promjene strukture.

Literatura i podaci iz numeričkih simulacija koje uključuju modeliranje rasta i promjene strukture bit će dodijeljeni od strane mentora tijekom izrade diplomskog rada.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Datum predaje rada:	Predviđeni datum obrane:
24. rujna 2020.	26. studenoga 2020.	30.11. – 4.12.2020.

Zadatak zadao:

Prof.dr.sc. Igor Karšaj

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

POPIS SLIKA IV
POPIS TABLICA VII
POPIS OZNAKA VIII
SAŽETAK X
SUMMARY XI
1 Uvod 1
2 Građa i uloga kardiovaskularnog sustava 2
3 Struktura arterijske stijenke 4
3.1 Ovisnost istezanja o naprezanju u arterijama 4
3.2 Mehanička ispitivanja arterija 6
3.3 Materijalni modeli 6
3.3.1 Hiperelastičan materijalni model 7
3.3.2 Viskoelastičan materijalni model 8
4 Cilj rada 9
5 Osnove mehanike kontinuuma 10
5.1 Opis gibanja materijalnog tijela 10
5.2 Gradijent deformiranja 11
5.3 Cauchyjev tenzor naprezanja 11
5.4 Jednadžbe materijalnih modela 13
5.4.1 Neo-Hooke 13
5.4.2 Mooney-Rivlin 13
5.4.3 *Holzapfel – Gasser – Ogden* (HGO) 13
5.5 Gradijent deformiranja za arterije pojednostavljene cilindričnim modelom 14
5.6 Jednadžba tlaka na unutarnjoj stijenci arterije 15
5.6.1 Neo-Hooke materijalni model 15
5.6.2 Mooney-Rivlin materijalni model 16
5.6.3 Holzapfel–Gasser–Ogden (HGO) materijalni model 16
6 Postupak određivanja neopterećene geometrije 18

6.1 Poznati podaci 18
6.2 *Newton-Raphson* metoda 19
6.3 Jednadžba nestlačivosti 19
6.4 Određivanje materijalnih parametara 20
6.5 Određivanje ovisnosti neopterećene geometrije o materijalnim parametrima 20
7 Simulacija metodom konačnih elemenata 21
7.1 Postavke numeričke simulacije 21
7.2 Heksaedarski konačni elementi 25
7.3 Konvergencija mreže 26
8 Određivanje neopterećene geometrije uz provjeru simulacijama 30
8.1 Opterećenje tlakom na unutarnju stijenku krvne žile aproksimirane *Neo-Hooke* materijalnim modelom 30
8.1.1 Poznati podaci u opterećenom stanju krvne žile 30
8.1.2 Izračun dimenzija neopterećene arterije 31
8.1.3 Simulacija i usporedba rezultata 31
8.2 Opterećenje krvne žile aproksimirane *Neo-Hooke* materijalnim modelom na tlak i aksijalnu silu 36
8.2.1 Poznati podaci u opterećenom stanju krvne žile 36
8.2.2 Izračun dimenzija neopterećene arterije 36
8.2.3 Simulacija i usporedba rezultata 37
8.2.4 Ovisnost neopterećene geometrije o materijalnim parametrima 40
8.3 Opterećenje krvne žile aproksimirane *Mooney-Rivlin* materijalnim modelom na tlak i aksijalnu silu 42
8.3.1 Poznati podaci u opterećenom stanju arterije 42
8.3.2 Izračun dimenzija neopterećene arterije 42
8.3.3 Simulacija i usporedba rezultata 43
8.3.4 Ovisnost neopterećene geometrije o materijalnim parametrima 46

8.4 Opterećenje krvne žile aproksimirane *Holzapfel–Gasser–Ogden* materijalnim modelom na predistezanje i tlak 51

8.4.1 Poznati podaci u opterećenom stanju arterije 51

8.4.2 Izračun dimenzija neopterećene arterije 51

8.4.3 Simulacija i usporedba rezultata 52

8.4.4 Ovisnost neopterećene geometrije o materijalnim parametrima 56

9 Zaključak 58

POPIS SLIKA

Slika 2.1. a) Elastične arterije; b) Mišićne arterije [1] 3
Slika 2.2. Iznos tlaka u pojedinim dijelovima sistemske cirkulacije [1] 3
Slika 3.1. Osnovne komponente strukture arterija [1] 4
Slika 3.2. Dijagram naprezanje-istezanje arterije [1] 5
Slika 3.3. Utjecaj elastina i kolagena na ponašanje arterije [1] 5
Slika 3.4. a) Linearno elastičan materijal; b) Nelinearno elastičan materijal 7
Slika 3.5. a) Viskoelastičan materijal; b) Viskoelastično ponašanje za različite brzine deformiranja [2] 8
Slika 5.1. Vektori položaja i pomaka čestice [4] 10
Slika 6.1. Preslikavanje iz opterećene (lijevo) u neopterećenu (desno) geometriju 18
Slika 6.2. Grafički prikaz *Newton-Raphson* metode [7] 19
Slika 7.1. Osmina geometrije modela korištena u simulaciji 21
Slika 7.2. Rubni uvjet simetrije u smjeru x-osi 22
Slika 7.3. Rubni uvjet simetrije u smjeru y-osi 22
Slika 7.4. Rubni uvjet simetrije u smjeru z-osi 23
Slika 7.5. Rubni uvjet pomaka u aksijalnom smjeru 23
Slika 7.6. Opterećenje unutarnje stijenke modela na tlak 24
Slika 7.7. Mjesta za očitavanje aksijalog i radijalnih pomaka 25
Slika 7.8 Heksaedarski elementi prvog reda (lijevo) i drugog reda (desno) [5] 26
Slika 7.9. Diskretizacija geometrije s 10 000 konačnih elemenata 27
Slika 7.10. Diskretizacija geometrije s 25 000 konačnih elemenata 27
Slika 7.11. Diskretizacija geometrije s 125 000 konačnih elemenata 28
Slika 7.12. Konvergencija rezultata 29
Slika 8.1. Dimenzije opterećene arterije 30
Slika 8.2. Kreiranje modela za simulaciju *Neo-Hooke* materijalnim modelom 31
Slika 8.3. Postavke materijala 32
Slika 8.4. Usporedni prikaz opterećene (zeleno) i neopterećene (prozirno) geometrije 33
Slika 8.5. Raspodjela radijalnog pomaka po modelu arterije 33
Slika 8.6. Raspodjela aksijalnog pomaka po modelu arterije 34
Slika 8.7. Raspodjela radijalnog naprezanja po modelu arterije 34
Slika 8.8. Dimenzije opterećene arterije 36

Slika 8.9. Dimenzije neopterećene geometrije za simulaciju *Neo-Hooke* materijalnim modelom s predistezanjem 37
Slika 8.10. Odnos opterećenog (zeleno) i neopterećenog (prozirno) modela za *NeoHooke* materijalni model 38
Slika 8.11. Raspodjela radijalnog pomaka u_r za *NeoHooke* materijalni model 38
Slika 8.12. Raspodjela aksijalnog pomaka u_z za *NeoHooke* materijalni model 39
Slika 8.13. Raspodjela radijalnog naprezanja σ_r za *NeoHooke* materijalni model 39
Slika 8.14. Ovisnost unutarnjeg radijusa o materijalnoj konstanti C_1 41
Slika 8.15. Ovisnost vanjskog radijusa o materijalnoj konstanti C_1 41
Slika 8.16. Dimenzije opterećene arterije 42
Slika 8.17. Dimenzije neopterećene geometrije za simulaciju *Mooney-Rivlin* materijalnim modelom 43
Slika 8.18. Zadavanje koeficijenata *Mooney-Rivlin* materijalnog modela 43
Slika 8.19. Odnos opterećene (zeleno) i neopterećene (prozirno) arterije 44
Slika 8.20. Raspodjela radijalnog pomaka u_r za *Mooney-Rivlin* materijalni model 44
Slika 8.21. Raspodjela aksijalnog pomaka u_z za *Mooney-Rivlin* materijalni model 45
Slika 8.22. Raspodjela radijalnog naprezanja σ_r za *Mooney-Rivlin* materijalni model 45
Slika 8.23. Ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnim konstantama 47
Slika 8.24. Ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnim konstantama 47
Slika 8.25. Ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti $C2$ 48
Slika 8.26. Ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti $C2$ 49
Slika 8.27. Ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti $C1$ 50
Slika 8.28. Ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti $C1$ 50
Slika 8.29. Dimenzije opterećene arterije 51
Slika 8.30. Dimenzije neopterećenog modela za simulaciju HGO materijalnim modelom 52
Slika 8.31. Materijalna svojstva HGO modela 53
Slika 8.32. Predistezanje zadajemo prije tlaka 53
Slika 8.33. Odnos opterećene (zeleno) i neopterećene (prozirno) arterije 54
Slika 8.34. Raspodjela radijalnog pomaka u_r po modelu arterije za HGO materijalni model 55

Slika 8.35. Raspodjela aksijalnog pomaka u_z za HGO materijalni model 55
Slika 8.36. Raspodjela radijalnog σr naprezanja po modelu arterije za HGO materijalni model 56
Slika 8.37. Ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnim konstantama 57
Slika 8.38. Ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnim konstantama 57

POPIS TABLICA

Tablica 8.1. Dimenzije neopterećene arterije *Neo-Hooke* materijalnog modela 31
Tablica 8.2. Dimenzije opterećene arterije dobivene simulacijom *Neo-Hooke* materijalnog modela 35
Tablica 8.3. Dimenzije neopterećene arterije *Neo-Hooke* materijalnog modela s predistezanjem 37
Tablica 8.4. Dimenzije opterećene arterije dobivene simulacijom *Neo-Hooke* materijalnog modela s predistezanjem.....40
Tablica 8.5. Dimenzije neopterećene arterije *Mooney-Rivlin* materijalnog modela.....42
Tablica 8.6 Dimenzije opterećene arterije iz simulacije *Mooney-Rivlin* materijalnog modela 45
Tablica 8.7. Dimenzije neopterećene arterije HGO materijalnog modela.....51
Tablica 8.8. Dimenzije opterećene arterije dobivene iz simulacije HGO materijalnog modela 56

POPIS OZNAKA

Oznaka	Opis
A	trenutna površina
A_0	početna površina
$\mathbf{b}$	lijevi *Cauchy-Green* tenzor deformiranja
$\mathbf{C}$	desni *Cauchy-Green* tenzor deformiranja
C	materijalna konstanta *Neo-Hooke* materijalnog modela
C_1, C_2	materijalne konstante u *Mooney-Rivlin* i HGO materijalnom modelu
F	sila
$\mathbf{F}$	tenzor gradijenta deformiranja
$\mathbf{I}$	jedinična matrica
I_1	prva invarijanta *lijevog Cauchy-Green* tenzora deformiranja
I_2	druga invarijanta *lijevog Cauchy-Green* tenzora deformiranja
J	Jakobijan
k_1,k_2	materijalne konstante u HGO materijalnom modelu
L	aksijalna duljina geometrije u neopterećenom stanju
l	aksijalna duljina geometrije u opterećenom stanju
$\mathbf{P}$	prvi *Piola-Kirhhoff* tenzor naprezanja
P	tlak
R	radijus geometrije u neopterećenom stanju
r	radijus geometrije u opterećenom stanju
R_u	unutarnji radijus geometrije u neopterećenom stanju
R_v	vanjski radijus geometrije u neopterećenom stanju
$\mathrm{r_u}$	unutarnji radijus geometrije u opterećenom stanju
$\mathrm{r_v}$	vanjski radijus geometrije u opterećenom stanju
$\mathbf{S}$	drugi *Piola-Kirchhoff* tenzor naprezanja
u_i	pomak
v	volumen geometrije u opterećenom stanju
V	volumen geometrije u neopterećenom stanju
W	energija deformiranja

x_i	prostorne koordinate
X_i	materijalne koordinate
α	kut kolagenskih vlakana
Δ	razlika
ε	deformacija
$\dot{\varepsilon}$	brzina deformiranja
λ_i	istezanje
$\boldsymbol{\sigma}$	*Cauchy* tenzor naprezanja
σ_i	naprezanje

SAŽETAK

Razvojem aditivne tehnologije te sve većim zastupljenjem iste u medicinskoj industriji javila se potreba za postupcima koji će omogućiti izračunavanje nedeformirane geometrije pojedinih struktura u tijelu uz poznavanje geometrije u opterećenom stanju, opterećenja te materijalnog modela kojim se može opisati ta struktura. U radu su prikazane osnove mehanike kontinuuma te postupak izvoda potrebnih jednadžbi uz pripadajuće opise i izračunavanje neopterećene geometrije za kardiovaskularni sustav, odnosno arterije. Postupak izračunavanja neopterećene geometrije je prikazan za primjere korištenjem odabranih materijalnih modela uz provjeru simulacijama metodom konačnih elemenata. Postavljanje simulacije je detaljno opisano uz određivanje vrste i optimalnog broja konačnih elemenata. Također su prikazane ovisnosti neopterećene geometrije za određen raspon materijalnih parametara uz označene točne vrijednosti i objašnjenje utjecaja pojedinih materijalnih parametara na dimenzije neopterećene geometrije.

Ključne riječi: aditivna proizvodnja, medicinska industrija, arterije, neopterećena geometrija, materijalni modeli, simulacija, metoda konačnih elemenata

SUMMARY

With the development of additive technology and its growing representation in the medical industry, there is a need for procedures that will enable the calculation of undeformed geometry of individual structures in the body with knowledge of load geometry, load and material model that can describe this structure. The paper presents the basics of continuum mechanics and the procedure of deriving the necessary equations with the accompanying descriptions and calculation of the unloaded geometry for the cardiovascular system, ie arteries. The procedure for calculating the unloaded geometry is shown for examples using selected material models with verification by finite element simulations. The setup of the simulation is described in detail with the determination of the type and optimal number of finite elements. The dependences of the unloaded geometry for a certain range of material parameters are also presented, with the exact values marked and an explanation of the influence of individual material parameters on the dimensions of the unloaded geometry.

Key words: additive manufacturing, medical industry, arteries, unloaded geometry, material models, simulations, finite element method

1 Uvod

Aditivna proizvodnja je skup tehnologija kod kojih se 3D fizički proizvodi izrađuju tako što se dodaje materijal sloj po sloj samo na mjesta gdje je to zahtijevano. Njena prednost je što omogućava vrlo malo pripreme za proizvodnju jer nema potrebe za izradom kalupa ili programa za strojnu obradu te se vrlo jednostavno mogu izraditi male serije, izravno iz CAD modela, a osim toga omogućava vrlo kompleksne geometrije i širok raspon materijala. Svoju primjenu nalazi sve više u izradi proizvoda široke potrošnje, ali i u znanost te razvoju automobilske i medicinske industrije. U biomedicinskom inženjerstvu se koristi za izradu proizvoda prilagođenih pacijentu.

Jedan od najčešćih uzroka smrti u svijetu su kardiovaskularne bolesti. Aditivna tehnologija postala je neizostavan dodatak pri pomoći kardiolozima i kirurzima u intervencijama i planiranju operacijskih zahvata. Trenutno se aditivne tehnologije koriste za izradu medicinskih uređaja, napravama za učenje i vježbu kirurga te planiranju procedure i izradi personaliziranih modela. 3D modeli arterija napravljeni aditivnim tehnologijama omogućuju kirurzima uvid i planiranje te vježbu prije operativnih zahvata. Osim toga mogu služiti i pri provođenju eksperimenata tijekom razvijanja novih kliničkih postupaka.

S obzirom da se arterije u tijelu nalaze pod konstantnim opterećenjem krvnim tlakom nije moguće izmjeriti njihovu neopterećenu geometriju pa samim time niti izraditi CAD model prema kojem bi se proizvela arterijska replika u neopterećenom stanju. U sklopu ovog rada je prikazano određivanje neopterećene geometrije arterije, pomoću podataka o geometriji arterije opterećene u fiziološkom rasponu tlakova te uz poznata materijalna svojstva arterijske stijenke.

2 Građa i uloga kardiovaskularnog sustava

Kardiovaskularni ili krvožilni sustav je skup organa koji prenose hranjive tvari, krv bogatu kisikom i hormone do stanica, a iz njih odvode štetne tvari i produkte rada stanica. Kako sam naziv govori, sastoji se od srca čija je glavna uloga stvaranje uvjeta za protok krvi i krvnih žila koje provode krv kroz tijelo. Osim opskrbljivanja stanica, kardiovaskularni sustav ima još nekoliko uloga u organizmu: transport molekula između različitih dijelova sustava, obrana i zacjeljivanje kao dva glavna sigurnosna sustava u tijelu te održavanje konstantne tjelesne temperature.[1]

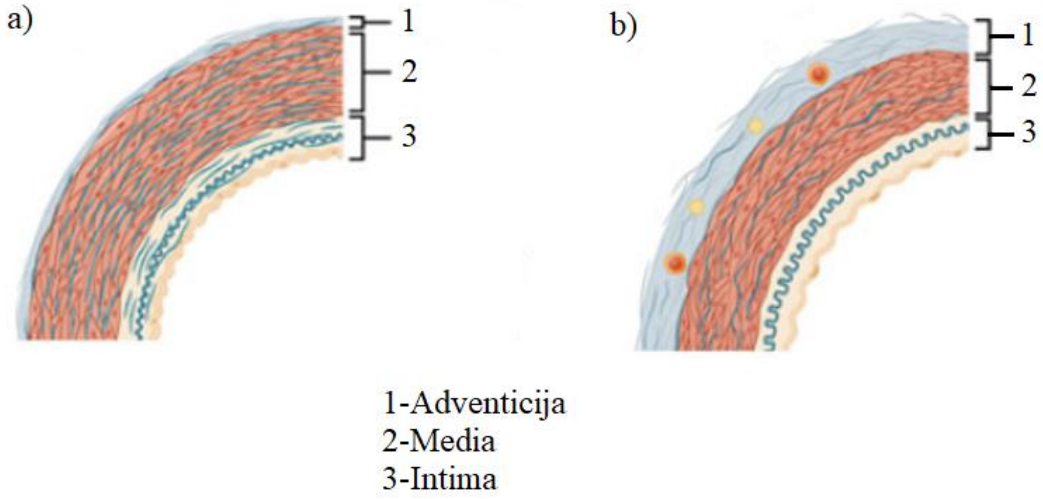
S obzirom da je fokus rada na krvnim žila, detaljna građa srca se neće razmatrati, već samo mehanizam rada. Uloga mu je pumpanje krvi te stoga ima dvije glavne faze: sistolu kod koje dolazi do kontrakcije srčanog mišića koja uzrokuje izbacivanje krvi iz srca u aortu i dijastole što je relaksacija mišića u kojoj dolazi do punjenja komora srca krvlju. Normalan krvni tlak sistole kreće se između 90 i 120 mmHg dok se tlak dijastole nalazi između 60 i 80 mmHg.[1]

Krvne žile se sastoje od tri sloja: adventicije što je vanjski sloj i primarno se sastoji od kolagena, srednjeg sloja - medije koji sadrži glatke mišiće, elastin i kolagen i unutarnjeg sloja-intima sastavljenog od jednog sloja endotelnih stanica.[1]

Vidljivo je da su dva glavna konstituenta elastin i kolagen. Elastin je vrlo elastičan s niskim Youngovim modulom, dok kolagen ima nelinearno elastično ponašanje s visokim Youngovim modulom i visokom vlačnom čvrstoćom. Elastičnost ponašanja cijele krvne žile se opisuje udjelom elastina u odnosu na kolagen. Ukoliko je taj omjer velik, krvna žila je elastična i pod tlakom se deformira, no ukoliko je omjer elastina prema kolagenu mali, krvna žila se ponaša kruto. Mikroskopska struktura krvne žile je usko povezana s njenom ulogom u kardiovaskularnom sustavu.[1]

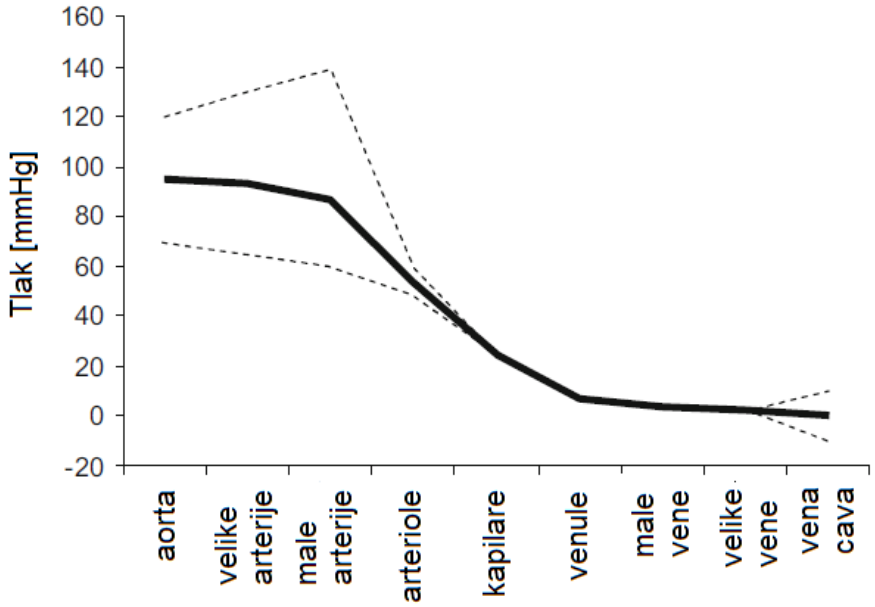
Arterije pripadaju krvnim žilama koje odvode krv iz srca te imaju promjer između 1 i 30 mm. Sistemske arterije moraju podnijeti visok tlak kojim srce izbacuje krv te je iz tog razloga njihova stijenka debela i sastavljena od prethodno nabrojanih slojeva. Arterije su podijeljene prema svojstvima stijenke na elastične (Slika 2.1. a)) i mišićne (Slika 2.1. b)) arterije. Elastične arterije imaju visok omjer elastina u odnosu na kolagen i one imaju visoku elastičnost što im omogućuje primanje cijelog volumena krvi istisnutog iz srca, a glavni primjer je aorta. Distalne arterije,

koje opskrbljuju organe i nalaze se u udovima, imaju manje elastina i više mišića u medijalnom sloju pa se takve arterije nazivaju mišićne ili distributivne.[1]



Slika 2.1. a) Elastične arterije; b) Mišićne arterije [1]

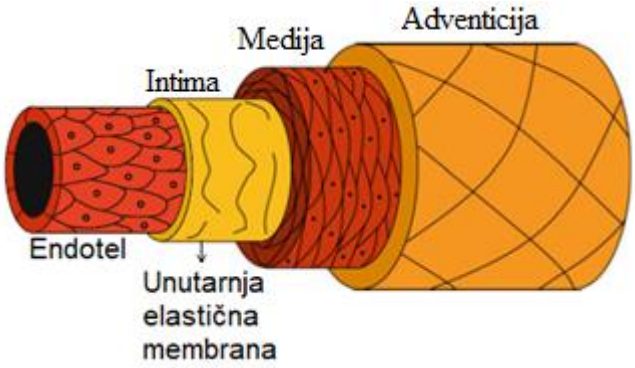
Najveći tlak u sistemskoj cirkulaciji javlja se na izlazu iz srca i ulazu u aortu koja se pod njegovim utjecajem širi. Porastom udaljenosti od srca, tlak pulsa, koji označava razliku sistoličkog i dijastoličkog tlaka, raste zbog porasta krutosti arterija, no srednji tlak s povećanjem udaljenosti pada te najmanju vrijednost ostvaruje na ulazu u srce što je i prikazano grafom (Slika 2.2).[1]



Slika 2.2. Iznos tlaka u pojedinim dijelovima sistemske cirkulacije [1]

3 Struktura arterijske stijenke

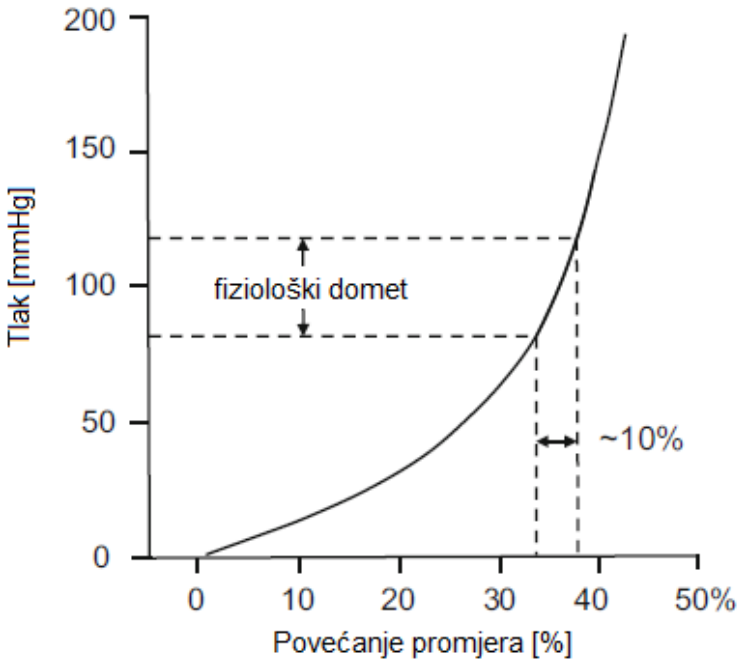
Kako je već rečeno, arterije se sastoje od tri sloja: adventicije, medije i unutarnjeg sloja nazvanog intima (Slika 3.1). Unutarnja elastična membrana je međusloj između intime i medije te ima ulogu omogućavanja gibanja endotela neovisno o mediji. Medija se sastoji od elastina koji osigurava elastičnost arterija, kolagenskih vlaka koja osiguravaju čvrstoću i glatkih mišićnih stanica. Adventiciju grade uglavnom kolagenska vlakna oblikovana u labavu, valovitu mrežu koja se razapne širenjem arterije te tako sprječava prekomjerno istezanje glatkih mišića.[1]



Slika 3.1. Osnovne komponente strukture arterija [1]

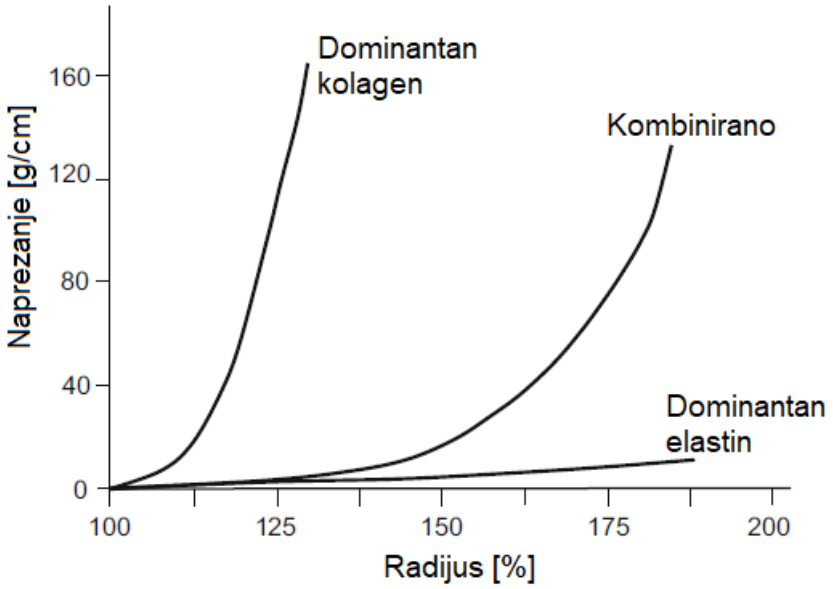
3.1 Ovisnost istezanja o naprezanju u arterijama

S obzirom na opisanu strukturu i građu arterija, ovisnost istezanja o naprezanju se može prikazati kao ovisnost promjera o tlaku. Kako je prikazano na dijagramu (Slika 3.2), ponašanje je nelinearno, no na području između 80 i 120 mmHg, ponašanje je otprilike linearno. Ovo područje je važno jer to predstavlja fiziološki raspon tlakova u srčanom ciklusu pri kojem dolazi do povećanja promjera od 10%.[1]



Slika 3.2. Dijagram naprezanje-istezanje arterije [1]

Utjecaj elastina i kolagena na ovisnost postotne promjene radijusa o vlačnom naprezanju arterije prikazano je na sljedećem dijagramu (Slika 3.3).



Slika 3.3. Utjecaj elastina i kolagena na ponašanje arterije [1]

Lijeva krivulja prikazuje ponašanje do kojeg dolazi u odsustvu elastina, tj. dominantnim utjecajem kolagena na mehanička svojstva arterijske stijenke. S obzirom na to da kolagen ima modul elastičnosti oko 100 MPa, za razliku od elastina čiji je modul elastičnosti oko 0,5 MPa,

ponašanje u odsustvu elastina je prilično kruto što znači da su pomaci , odnosno promjena promjera, mali i uz veliko naprezanje. S druge strane, na desnoj krivulji prikazano je odsustvo kolagena te se može primijetiti da su pomaci tj. promjena promjera veliki već uz mala naprezanja. Srednja krivulja prikazuje ponašanje arterije kakvo se događa u stvarnosti uz kombinaciju elastina i kolagena. Obzirom da su kolagena vlakna labava, prilikom malih naprezanja ponašanje je određeno elastinom. Kad dođe do većih deformacija, gdje su se kolagena vlakna izravnala, kolagen ima glavni utjecaj na ponašanje jer počinje prenositi glavni dio opterećenja što za posljedicu ima kruće ponašanje arterije nego pri malim deformacijama.[1]

Arterijska stijenka je struktura sačinjena od više slojeva gdje svaki sloj ima drugačija mehanička svojstva. Unatoč tome, kako bi opisali općenitu ovisnost naprezanja o istezanju ili u ovom slučaju ovisnost promjera o tlaku, nisu nam potrebna mehanička svojstva svakog sloja. Ovakav pristup koristi pretpostavku da su arterije homogene, tj. da je debljina stjenke i elastični sastav jednak po cijelom opsegu arterije.[1]

3.2 Mehanička ispitivanja arterija

Postoji velik broj mehaničkih ispitivanja koji se mogu provesti na materijalima kako bi se odredila mehanička svojstva pojedine vrste materijala. Kako bi mogli odrediti koliko i kojih ispitivanja je potrebno obaviti da bi dobili odgovarajuća svojstva, potrebno je poznavati vrstu materijala. Osnovna podjela je na izotropne koji imaju jednaka mehanička svojstva u svim smjerovima i anizotropne gdje svojstva nisu jednaka u svim pravcima. Kako bi se odredila materijalna svojstva arterija provode se najčešće dvoosni vlačni test i eksperiment istezanje-tlak.

3.3 Materijalni modeli

Odziv materijala na neko opterećenje može se prikazati matematičkim modelom u svrhu predviđanja odziva istog tog materijala na neko drugo opterećenje. Osnovna podjela materijalnih modela je na:

- elastični materijalni model
- viskoelastičan materijalni model
- plastičan materijalni model
- viskoplastičan materijalni model,

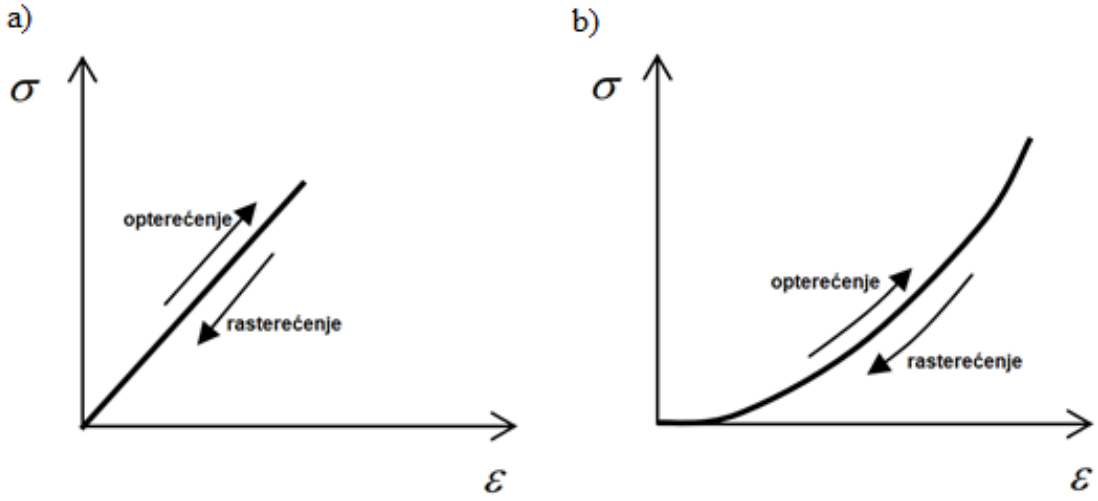
no u radu će biti opisana samo prva dva.

Matematička jednadžba modela definirana je funkcijom deformacije $W = W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} \cdots \varepsilon_{33})$ u obliku:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \tag{1}$$

3.3.1 Hiperelastičan materijalni model

Idealno elastičan materijal ima sljedeće karakteristike: krivulja rasterećenja u dijagramu naprezanje-istezanje je jednaka krivulji pri opterećivanju, deformacija ne ovisi o brzini opterećivanja i nema pojave trajnih deformacija tj. nakon rasterećenja model se vraća u prvobitan položaj. [2] Razlikujemo linearno elastične materijale i nelinearno elastične materijale (Slika 3.4).



Slika 3.4. a) Linearno elastičan materijal; b) Nelinearno elastičan materijal

Može se primijetiti da je kod linearno elastičnog materijala deformacija proporcionalna opterećenju što za nelinearno elastičan materijal nije slučaj. Linearno elastično ponašanje imaju inženjerski materijali (materijali koji se koriste u konstrukcijama te strukturama i komponentama koje je napravio čovjek) do granice razvlačenja te izrazito krhki materijali. Ovaj model se može koristit kao pojednostavljenje gotovo svakog materijala u području malih deformacija. Nelinearno ponašanje imaju meki materijali kao što su guma i biološka meka tkiva.[2]

U stvarnosti ne postoje čisto elastični materijali. Svi materijali će pokazati barem malo plastičnog svojstva, čak i pri malim opterećenjima. Također, nijedan materijalni odziv nije neovisan o brzini deformiranja. Elastični materijalni model koristimo kao pojednostavljenje ponašanja materijala kod kojih su ove pojave zanemarivo male.[2]

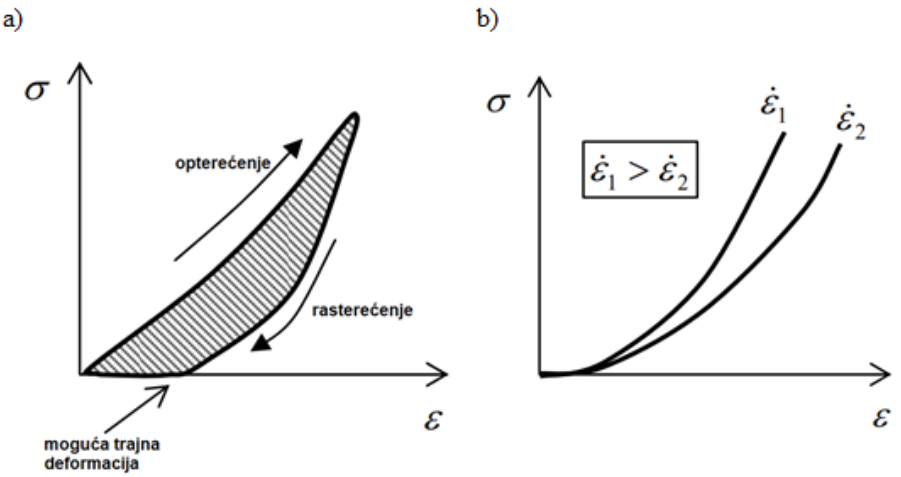
Hiperelastični materijalni modeli opisuju materijale koji i pri velikim deformacijama imaju elastično ponašanje kao što su biološka tkiva. Kako bi opisali ovisnost između naprezanja i deformacija koriste se funkcije energije deformiranja $W = W(\mathbf{C})$, gdje je $\mathbf{C}$ desni *Cauchy-Greenov* tenzor deformiranja. U radu će biti prikazano izračunavanje neopterećene geometrije za tri hiperelastična materijalna modela, *Neo-Hooke*, *Mooney-Rivlin* i *Holzapfel-Gasser-Ogden*.

3.3.2 Viskoelastičan materijalni model

Viskoelastični materijali prilikom deformiranja pokazuju svojstva elastične deformacije i defomacije tečenja. Procesi deformiranja viskoelastičnih tijela ovise o vremenu i nasljednim svojstvima, tj. povijesti deformiranja.

Svojstva viskoelastičnog materijala su: histereza krivulja, tj. krivulja opterećenje i rasterećenja se ne poklapaju, postoji ovisnost o brzini deformiranja $\frac{d\varepsilon}{dt}$ te trajna deformacija može ili ne mora postojati nakon potpunog rasterećenja.

Slika 3.5. a) prikazuje odnos naprezanje-istezanje za viskoelastične materijale prilikom opterećenja i rasterećenja. Slika 3.5. b) prikazuje krivulje materijala u dijagramu naprezanje-istezanje za različite brzine deformiranja.[2]



Slika 3.5. a) Viskoelastičan materijal; b) Viskoelastično ponašanje za različite brzine deformiranja [2]

4 Cilj rada

Razvitkom moderne tehnologije, ponajprije aditivnom proizvodnjom, omogućena je izrada 3D modela kompleksnih geometrija korištenjem različitih polimernih materijala koja sve veću primjenu nalazi u medicini. U svrhu izrade arterijskih replika 3D printanjem na kojima bi se mogla vršiti ispitivanja, potrebno je poznavati geometriju modela. S obzirom na to da možemo izmjeriti jedino dimenzije arterije u fiziološkom rasponu tlakova u ljudskom tijelu, potrebno je izračunati dimenzije neopterećene arterije. U radu će biti prikazan postupak određivanja vrijednosti neopterećene geometrije ukoliko su poznati točni podaci materijalnih parametara uz usporedbu podataka dobivenih simulacijom metodom konačnih elemenata. Također, biti će prikazana utjecaj materijalnih parametara na izračunate dimenzije neopterećene geometrije.

5 Osnove mehanike kontinuuma

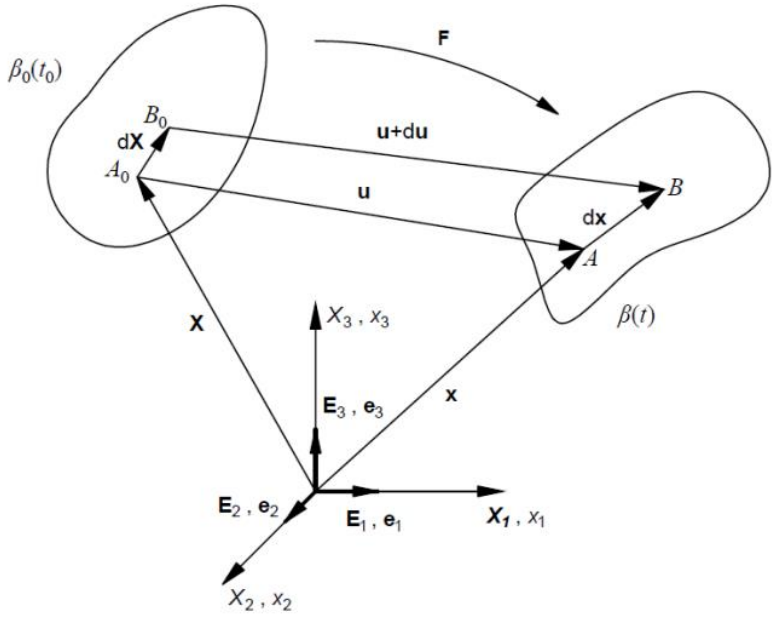
Mehanika kontinuuma je dio mehanike koji se bavi proučavanjem makroskopskog gibanja čvrstih, tekućih i plinovitih tijela. U njoj se ne razmatra diskretna, atomska struktura tvari, već se uvodi pojam neprekidne sredine ili materijalnog kontinuuma te se uvodi pretpostavka da tvar neprekidno i potpuno ispunjava prostor koji zauzima tijelo. Dio prostora, volumena V, omeđen zatvorenom plohom S, koja je njegova površina, naziva se materijalno tijelo. Takvo tijelo neprekidno je ispunjeno materijom i ima neku masu m.[3]

5.1 Opis gibanja materijalnog tijela

Kako bi bilo moguće jednoznačno odrediti deformiranje, tj. gibanje kontinuuma, potrebno je za svaku česticu kontinuuma odrediti vektor položaja u funkciji vremena. U indeksnom zapisu to izgleda:

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t), \qquad i = 1,2,3 \tag{2}$$

gdje su koordinate čestice u početnom trenutku $(t = 0)$ označene sa X_1, X_2 i X_3 i one se nazivaju materijalne koordinate, dok x_i označava točke prostora i nazivaju se prostorne koordinate. Izraz (2) zapravo predstavlja preslikavanje čestica X_i materijalnog tijela na točke x_k prostora.[3]



Slika 5.1. Vektori položaja i pomaka čestice [4]

Ukoliko je slovom **u** označen vektor koji spaja položaj čestice u referentnoj (početnoj) konfiguraciji $\beta_0(t_0)$ i trenutnoj konfiguraciji $\beta(t)$ (Slika 5.1) dobiven je vektor pomaka koji ima izraz:

$$u_i = u_i(X_1, X_2, X_3, t). \tag{3}$$

Ovaj izraz predstavlja polje pomaka. Kako prikazuje Slika 5.1, vrijedi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \tag{4}$$

5.2 Gradijent deformiranja

Za opis deformiranja tijela potrebno je uvesti veličinu koja povezuje diferencijalne veličine $d\mathbf{x}$ i $d\mathbf{X}$ koje spajaju dvije materijalne čestice u trenutnoj i referentnoj konfiguraciji. U tu svrhu uveden je pojam gradijenta deformiranja F_{ij} koji je definiran kao:

$$F_{ij} = \frac{dx_i}{dX_j} \tag{5}$$

Ukoliko se izraz (5) raspiše po koordinatama Kartezijevog koordinatnog sustava slijedi:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Gradijent deformiranja prikazan u cilindričnim koordinatama ima oblik:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{R\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{r\partial \varphi}{\partial R} & \frac{r\partial \varphi}{R\partial \theta} & \frac{r\partial \varphi}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{R\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

5.3 Cauchyjev tenzor naprezanja

Prvi *Piola-Kirchhoff* tenzor naprezanja pri jednoosnom naprezanju ekvivalentan je omjeru sile i referentne površine na koju ta sila djeluje. Poznat je i pod nazivom inženjersko naprezanje, a najčešće se koristi u klasičnom strojarstvu:

$$P = \frac{F}{A_0} \tag{8}$$

S obzirom da kod arterija dolazi do velikih deformacija, razlika između referentne tj. početne i stvarne površine je značajna pa je tom slučaju bitno koristiti trenutnu površinu što omogućuje *Cauchyjev* tenzor naprezanja. U jednoosnom stanju naprezanja ima jednak izraz, no umjesto na referentnu odnosi se na trenutnu površinu:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{9}$$

Drugi *Piola-Kirhhoff* tenzor naprezanja odgovaralo bi naprezanje σ^2 pa je prema tome ekvivalentan izrazu:

$$S^2 = \frac{F^2}{A_0} \tag{10}$$

Veza između *Cauchy* i prvog *Piola-Kirchhoff* tenzora naprezanja je:

$$\mathbf{P} = J\mathbf{F^{-1}}\boldsymbol{\sigma}, \tag{11}$$

Veza prvog i drugog *Piola-Kirchhof* tenzora naprezanja je:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{F^{-T}} \tag{12}$$

Uvrštavanjem (11) u (12) dobivena je veza drugog *Piola-Kirchoff* i *Cauchy* tenzora naprezanja:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F^{-1}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F^{-T}}. \tag{13}$$

Znajući još da je:

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial W}{\partial C}, \tag{14}$$

gdje je $\frac{\partial W}{\partial C}$ energija deformiranja materijalnog modela derivirana po desnom *Cauchy-Green* tenzoru naprezanja, dobiven je *Cauchy* tenzor naprezanja izražen preko energije deformiranja za izračunavanje naprezanja kod hiperelastičnih materijala:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F^T}. \tag{15}$$

Ako se radi o nestlačivim materijalima kao što su biološka tkiva, jednadžba (15) ima oblik:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \mathbf{b} - 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \mathbf{b^{-1}}, \tag{16}$$

gdje su I_1 i I_2 prva i druga invarijanta lijevog *Cauchy-Green* tenzora deformiranja, a p je *Lagrangeov multiplikator*.

5.4 Jednadžbe materijalnih modela

5.4.1 Neo-Hooke

Neo-Hooke je najjednostavniji izotropni materijalni model sa samo jednom materijalnom konstantom C_1 prema izrazu:

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3), \tag{17}$$

gdje je I_1 prva invarijanta lijevog *Cauchy-Green* tenzora deformiranja koja će biti opisana kasnije.

5.4.2 Mooney-Rivlin

Mooney-Rivlin je također izotropni materijalni model koji ima dvije materijalne konstante C_1 i C_2 prema jednadžbi:

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3). \tag{18}$$

Ovdje se još pojavljuje I_2 što je druga invarijanta lijevog *Cauchy-Green* tenzora deformiranja.

5.4.3 *Holzapfel – Gasser – Ogden* (HGO)

HGO je anizotropni materijalni model koji opisuje strukture ojačane vlaknima te ima oblik:

$$W = C_1(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} (\exp\{k_2[(\kappa I_1 + (1 - 3\kappa)I_i) - 1]^2\} - 1). \tag{19}$$

Sastoji se od tri materijalne konstante: C_1, k_1 i k_2 te parametra $0 < \kappa < \frac{1}{3}$ koji opisuje razinu disperzije vlakana, u ovom slučaju kolagenih. I_4 i I_6 su invarijante *desnog Cauchy-Green* tenzora deformiranja te imaju oblik:

$$I_4 = I_6 = \mathbf{M}(\mathbf{CM}), \tag{20}$$

gdje je **M** vektor transformacije, a α je kut vlakana:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Materijalni model dobro opisuje ponašanje bioloških tkiva te se najčešće koristi za opisivanje ponašanja srca i krvnih žila koji su ojačani vlaknima kolagena.

5.5 Gradijent deformiranja za arterije pojednostavljene cilindričnim modelom

Slučaj deformiranja krutog tijela u kojem se ono razvlači ili skuplja u smjeru sve tri osi koordinatnog sustava opisano je jednadžbama:

$$x_1 = \lambda_1 \cdot X_1,$$
$$x_2 = \lambda_2 \cdot X_2, \tag{22}$$
$$x_3 = \lambda_3 \cdot X_3,$$

gdje λ_i predstavlja istezanje u pojedinom smjeru koordinatnog sustava.
Ukoliko to prikažemo u cilindričnom koordinatnom sustavu, koji će biti potreban radi korištenja cilindrične geometrije, dobiva se:

$$r = \lambda_r \cdot R,$$
$$\varphi = \lambda_\theta \cdot \theta, \tag{23}$$
$$l = \lambda_z \cdot L.$$

Ako je u jednadžbu (6) uvrštena jednadžba (22), odnosno jednadžba (23) dobiveno je:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}. \tag{24}$$

S obzirom na to da nema kutne deformacije, $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 1$, iz jednadžbi (24) i (7) je dobiveno:

$$\lambda_\theta = \frac{r}{R}, \tag{25}$$

a iz jednadžbe (23):

$$\lambda_z = \frac{l}{L}. \tag{26}$$

S obzirom na to da je odnos volumena u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji jednak:

$$V = J \cdot v, \tag{27}$$

a gradijent deformiranja je mjera deformacije obujma pa iz uvjeta nestlačivosti krutih tijela proizlazi da je Jakobijeva matrica $J = 1 = \det(\mathbf{F})$ te slijedi:

$$\lambda_r \cdot \lambda_\theta \cdot \lambda_z = 1, \tag{28}$$

iz čega se dobiva:

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_z \cdot \lambda_\theta}. \tag{29}$$

S obzirom da se gradijent deformiranja **F** odnosi na referentnu i trenutnu konfiguraciju, kao takav nije praktičan za korištenje. Stoga uvodimo desni *Cauchy-Green* tenzor deformiranosti **C** koji se odnosi na referentni koordinatni sustav i lijevi *Cauchy-Green* tenzor deformiranosti **b** koji se odnosi na trenutni koordinatni sustav. S obzirom da je **F** simetričan, njihov oblik je jednak:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F^T F} = \mathbf{b} = \mathbf{F F^T} = \begin{bmatrix} {\lambda_r}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_z}^2 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Prva invarijanta lijevog *Cauchy-Green*, a samim time i desnog *Cauchy-Green* tenzora deformiranja ima oblik:

$$I_1 = {\lambda_r}^2 + {\lambda_\theta}^2 + {\lambda_z}^2. \tag{31}$$

5.6 Jednadžba tlaka na unutarnjoj stijenci arterije

Jednadžba za tlak na unutarnjoj stijenci cilindra izvedena iz jednadžbi ravnoteže za opterećeno stanje prema [6] iznosi:

$$P = \int_{r_\mathrm{u}}^{r_\mathrm{v}} (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{dr}{r}, \tag{32}$$

gdje se r_u i r_v odnose na unutarnji, odnosno vanjski radijus opterećene geometrije.
Kako da bi izračunali vrijednost integrala potrebne su vrijednosti σ_θ i σ_r koje ovise o korištenim materijalnim modelima, stoga će biti izvedene jednadžbe stanja naprezanja za sva tri korištena materijalna modela.

5.6.1 Neo-Hooke materijalni model

Radi dobivanja stanja naprezanja prema jednadžbi (16) najprije je potrebno materijalni model prema jednadžbi (17) derivirati po invarijantama I_1 i I_2:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 \;\; i \;\; \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0. \tag{33}$$

Iz čega slijedi:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot C_1 \cdot \mathbf{b}. \tag{34}$$

Ako se u jednadžbu (34) uvrsti jednadžba (30) dobiva se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot C_1 \cdot \begin{bmatrix} {\lambda_r}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_z}^2 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Sad σ_θ i σ_r može biti uvršteno u (35) i raspisano pa se dobije:

$$P = \int_{r_\mathrm{u}}^{r_\mathrm{v}} 2 \cdot C_1 \cdot \left({\lambda_\theta}^2 - \frac{1}{{\lambda_\theta}^2 \cdot {\lambda_z}^2} \right) \frac{dr}{r}. \tag{36}$$

Uvrštavanjem još (25) te numeričkom integriracijom po r, korištenjem *Newton-Raphsonovog* postupka traži se vrijednost R za koju će desna strana jednadžbe biti jednaka P.

5.6.2 Mooney-Rivlin materijalni model

Ukoliko je jednadžba modela prikazanu jednadžbom (18) derivirana po invarijantama kako bi bila uvrštena u jednadžbu (16) dobiva se:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 \;\; i \;\; \frac{\partial W}{\partial I_2} = C_2. \tag{37}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} = -p \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot C_1 \cdot \begin{bmatrix} {\lambda_r}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_z}^2 \end{bmatrix} + 2 \cdot C_2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{{\lambda_r}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{{\lambda_\theta}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{{\lambda_z}^2} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Uvrštavanjem sada σ_θ i σ_r u jednadžbu (32) slijedi:

$$P = \int_{r_u}^{r_v} \left[2 \cdot C_1 \cdot \left({\lambda_\theta}^2 - \frac{1}{{\lambda_\theta}^2 \cdot {\lambda_z}^2} \right) + 2 \cdot C_2 \cdot \left({\lambda_\theta}^2 \cdot {\lambda_z}^2 - \frac{1}{{\lambda_\theta}^2} \right) \right] \frac{dr}{r}. \tag{39}$$

Ukoliko se jednadžba (39) izjednači sa zadanim tlakom, mogu se izračunati dimenzije neopterećene geometrije prema istom postupku kao u prethodnom primjeru.

5.6.3 Holzapfel–Gasser–Ogden (HGO) materijalni model

HGO materijalni model izražava energiju deformiranja kako je pokazano u (19).

Kako je već navedeno, HGO je anizotropnan materijalni model, za razliku od prethodna dva, među poznatim parametrima moramo imati zadan i kut kolagenskih vlakana koji je u ovom slučaju 45°. Raspisivanjem jednadžbe (20) prema (21) i (30) dobivaju se invarijanate:

$$I_{4,6} = \lambda_z^2 \sin^2 \alpha + \lambda_\theta^2 \cos^2 \alpha \tag{40}$$

S obzirom na to da se ovdje nalaze invarijante I_4 i I_6 umjesto jednadžbe (32) za računanje tlaka sada će biti korištena jednadžba:

$$P = \int_{r_u}^{r_v} \lambda_\theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\theta} \frac{dr}{r}, \tag{41}$$

preuzeta iz [8].

Uvrštavanjem (31), $\kappa = 0$ i $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u (19) dobiva se:

$$\begin{aligned} W = {} & C_1\left({\lambda_r}^2 + {\lambda_\theta}^2 + {\lambda_z}^2 - 3\right) \\ & + \frac{k_1}{k_2} \exp\left(k_2\left(\lambda_z^2 \sin^2 \alpha + \lambda_\theta^2 \cos^2 \alpha - 1\right)^2\right) - 1 \end{aligned} \tag{42}$$

Uvrštavanjem (29) u (42) te deriviranjem po λ_θ i uvrštavanjem u (41) slijedi:

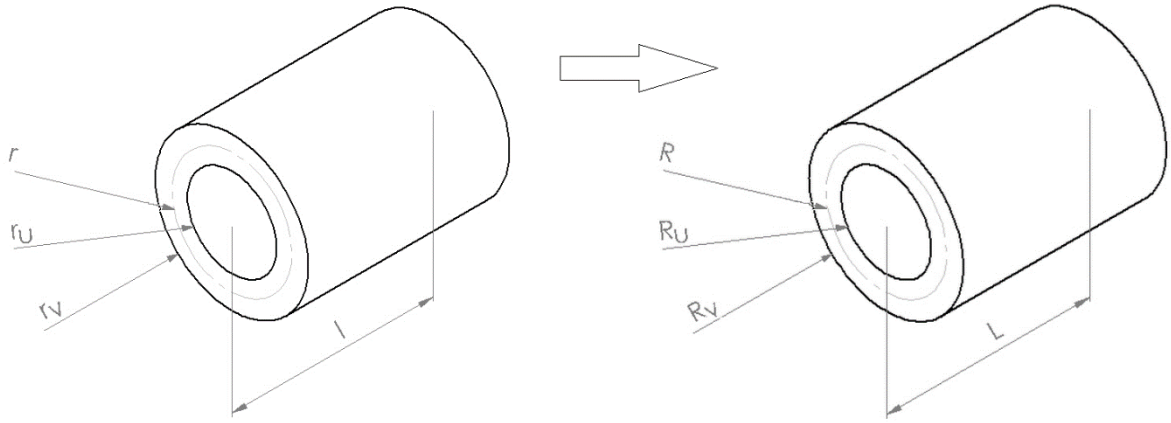
$$\begin{aligned} P = \int_{r_u}^{r_v} \Big[& 2C_1\left({\lambda_\theta}^2 - \frac{1}{{\lambda_\theta}^2 {\lambda_z}^2}\right) + \Big(2k_1 {\lambda_\theta}^2 \Big(\frac{1}{2}\left({\lambda_\theta}^2 + {\lambda_z}^2\right) - \\ & 1\Big) \cdot \exp\left(k_2\left(\frac{1}{4}{\lambda_\theta}^4 + \frac{1}{4}{\lambda_z}^4 + \frac{1}{2}{\lambda_\theta}^2 {\lambda_z}^2 - {\lambda_\theta}^2 - {\lambda_z}^2 + 1\right)\right)\Big)\Big] \frac{dr}{r} \end{aligned} \tag{43}$$

Kao i u prethodno navedenim primjerima, tlak se izjednačava sa zadanim tlakom te se računaju dimenzije neopterećene geometrije.

6 Postupak određivanja neopterećene geometrije

6.1 Poznati podaci

Poznati podaci za računanje su: dimenzije opterećene geometrije, iznos i vrsta opterećenja te materijalni model i njegove materijalne konstante. Postupak određivanja neopterećene geometrije temelji se na pretpostavci radijusa neopterećene geometrije i računanju tlaka na tom radijusu te izračunavanju greške tj. razlike između dobivenog i poznatog tlaka. Zatim se računanjem tlaka za radijus blizak pretpostavljenom radijusu također odredi greška te se pomoću gradijenta mijenja radijus i ide u sljedeću iteraciju dok greška ne padne do zadane vrijednosti. S obzirom da znamo da je arterija opterećena tlakom na unutarnju stijenku, pretpostavljeno je da će doći do povećanja promjera u odnosu na neopterećene vrijednosti geometrije, no s obzirom da dolazi i do predistezanja koje isteže arteriju u aksijalnom smjeru te dolazi do smanjivanja promjera arterije, to ne može biti upotrijebljeno. Stoga najbolje krenuti od pretpostavke da neopterećena geometrija ima vrlo mali unutarnji radijus te ga postupno povećavati dok greška ne padne ispod zadane vrijednosti.



Slika 6.1. Preslikavanje iz opterećene (lijevo) u neopterećenu (desno) geometriju

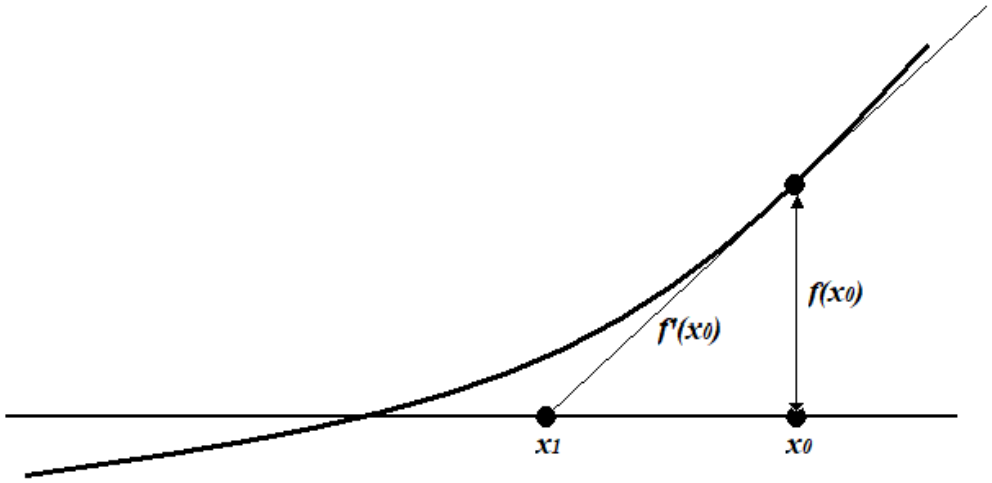
Kako je poznata vrijednost tlaka koji djeluje na unutrašnju stijenku arterije, korištenjem jednadžbe (32) izračunava se vrijednost integrala numeričkom integracijom, produljenom trapeznom formulom, za pretpostavljenu vrijednost unutarnjeg promjera neopterećene geometrije te dobivena vrijednost se uspoređuje s točnom vrijednosti tlaka kako bi bila dobivena greška. Kako bi što prije dobili točan rezultat korištena je *Newton-Raphson* metoda koja je opisana u nastavku.

6.2 *Newton-Raphson* metoda

Metoda funkcionira na principu da ukoliko treba naći nultočku neke funkcije najprije treba krenuti od proizvoljne točke x_0 te izračunati vrijednost funkcije i derivacije funkcije, koja je nagib pravca, u toj točki. Zatim se sljedeća točka x_1 koja je bliže nultočki računa prema:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f' x_0}. \tag{44}$$

Postupak se ponavlja do željene preciznosti tj. dok se greška ne smanji do željene vrijednosti.



Slika 6.2. Grafički prikaz *Newton-Raphson* metode [7]

6.3 Jednadžba nestlačivosti

S obzirom na to da se integrira po varijabli *r* koja predstavlja radijus opterećene geometrije i koja se nalazi u izrazu za cirkularno izduženje (jednadžba(25)), potrebno je preko nje izraziti i radijus u neopterećenoj geometriji *R*. Temeljem pretpostavke o nestlačivosti bioloških tkiva vrijedi da su volumeni u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji jednaki, odnosno $v = V$. Koristeći izraz za volumen šupljeg cilindra slijedi:

$$(r^2 - {r_u}^2)\pi l = \left(R^2 - {R_u}^2\right)\pi L \tag{45}$$

iz koje se može izraziti *R*:

$$R = R_u + \sqrt{(r^2 - {r_u}^2)\frac{l}{L}}. \tag{46}$$

6.4 Određivanje materijalnih parametara

Određivanje materijalnih parametara nema primjenu u ovom radu jer je za to potrebna deformirana i nedeformirana geometrija te u ovom radu uvrštavaju već poznati materijalni parametri, no biti će opisano i njihovo računanje.

S obzirom da su ulazni podaci dimenzije opterećene i neopterećene geometrije, s lakoćom se mogu izračunati izrazi navedeni prema (25), (26) i (29) koji se koriste u jednadžbama za računanje tlaka za svaki materijalni model posebno. Kako su u toj jednadžbi nepoznanice samo materijalni parametri, mogu se izračunati metodom najmanjih kvadrata.

6.5 Određivanje ovisnosti neopterećene geometrije o materijalnim parametrima

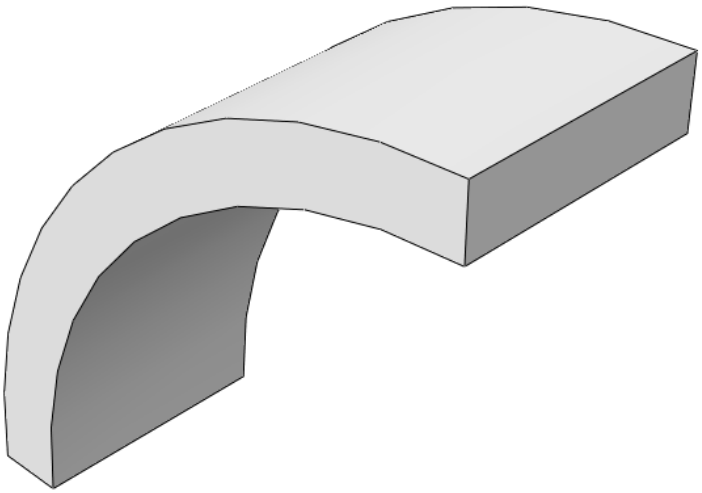
Kako bi bilo ispitano ponašanje geometrije uz krivo pretpostavljene materijalne parametre, biti će napisan kôd koji računa dimenzije neopterećene geometrije za različite materijalne parametre. Materijalni parametri će biti dobiveni postupkom opisanim u poglavlju 6.4 tako što će biti određen raspon istezanja u aksijalnom smjeru λ_z i istezanja u cirkularnom smjeru λ_θ te će se uvrštavanjem njihovih kombinacija dobiti matrice s komponentama materijalnih parametara. Potom će za svaki materijalni parametar ili njihov par, ukoliko u materijalnom modelu ima više parametara, biti izračunata neopterećena geometrija.

7 Simulacija metodom konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja na temelju disketiziranja kontinuuma na konačan broj elemenata računa parcijalne diferencijalne jednadžbe u svakom pojedinačnom elementu, tj. njihovim čvorovima. U radu je za simulacije metodom konačnih elemenata korišten programski paket *Abaqus*.

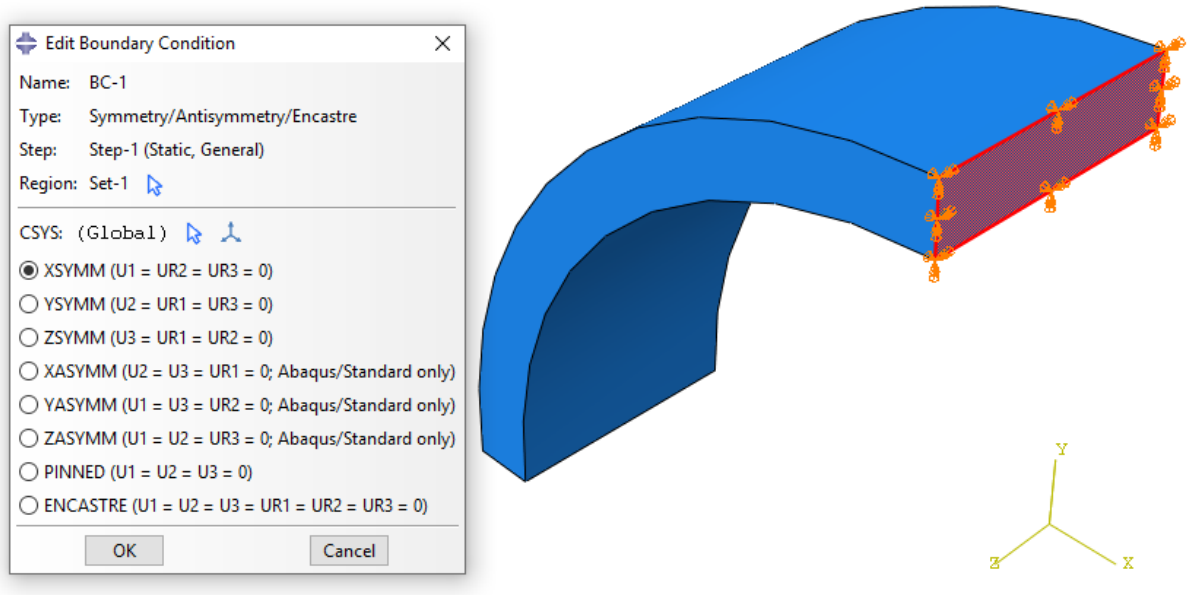
7.1 Postavke numeričke simulacije

U svrhu smanjenja broja elemenata radi skraćivanja vremena računanja korištena je samo osmina modela. To je moguće napraviti radi ostvarivanja tri uvjeta simetričnosti: simetričnost geometrije, rubnih uvjeta i opterećenja. Drugi cilj je veća točnost simulacije što se dobiva gušćim rasporedom elemenata. U konačnici osminom modela će biti dobiveno manje elemenata i visoka točnost. Slika 7.1 prikazuje model korišten u simulacijama.

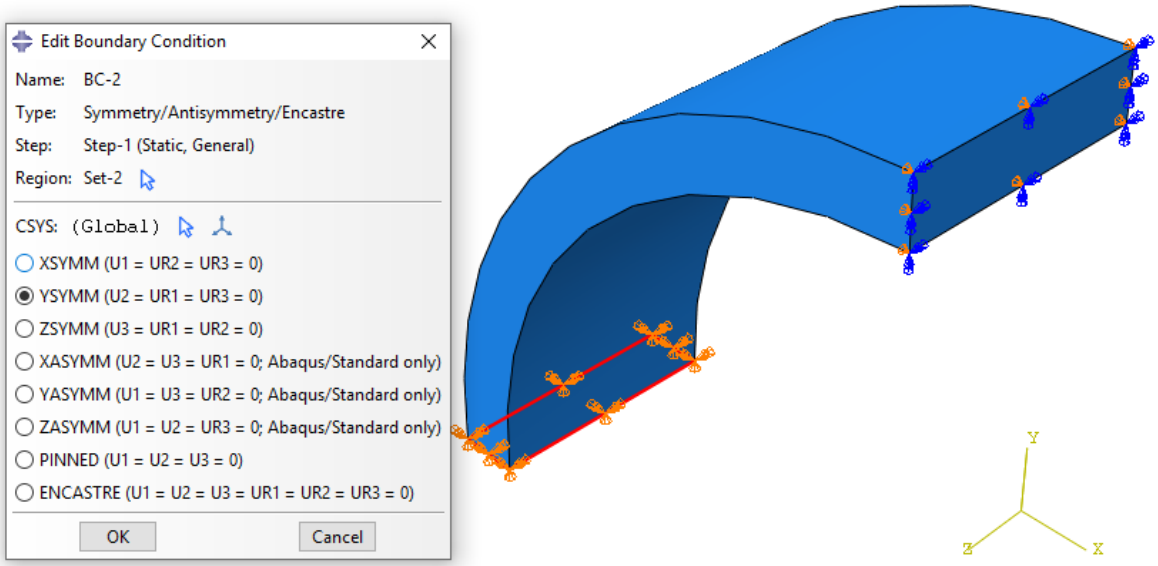


Slika 7.1. Osmina geometrije modela korištena u simulaciji

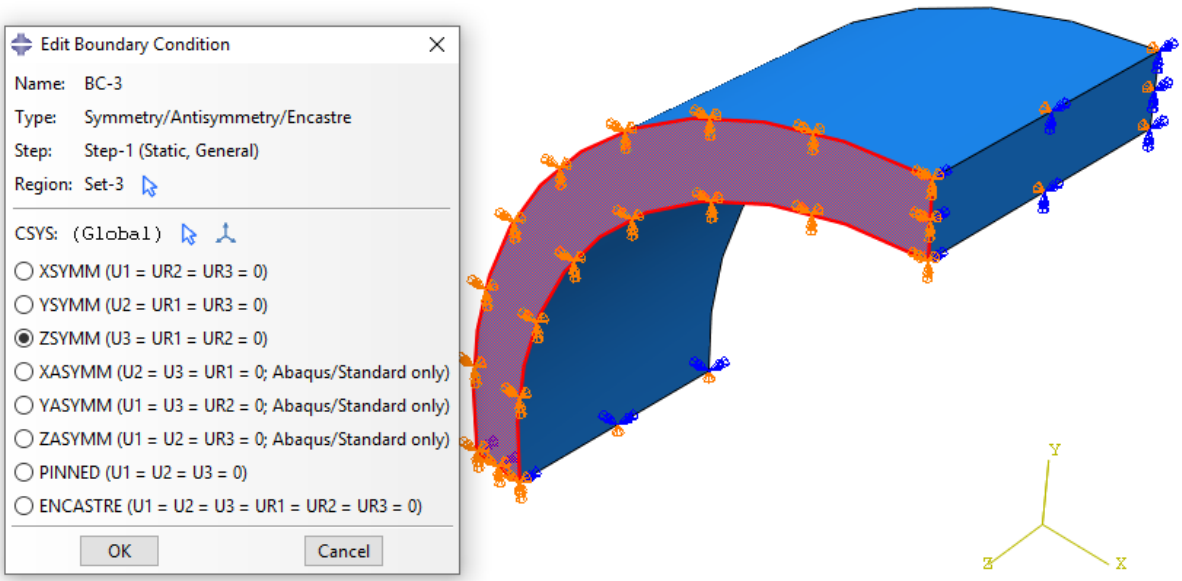
Iz tog razloga kao rubne uvjete se postavlja simetrija, na crveno označenim površinama, u prikladnom smjeru koordinatnog sustava. Rubnim uvjetima simetrije onemogućava se pomak u smjeru zadane osi te kut zakreta u smjeru preostale dvije osi.



Slika 7.2. Rubni uvjet simetrije u smjeru x-osi

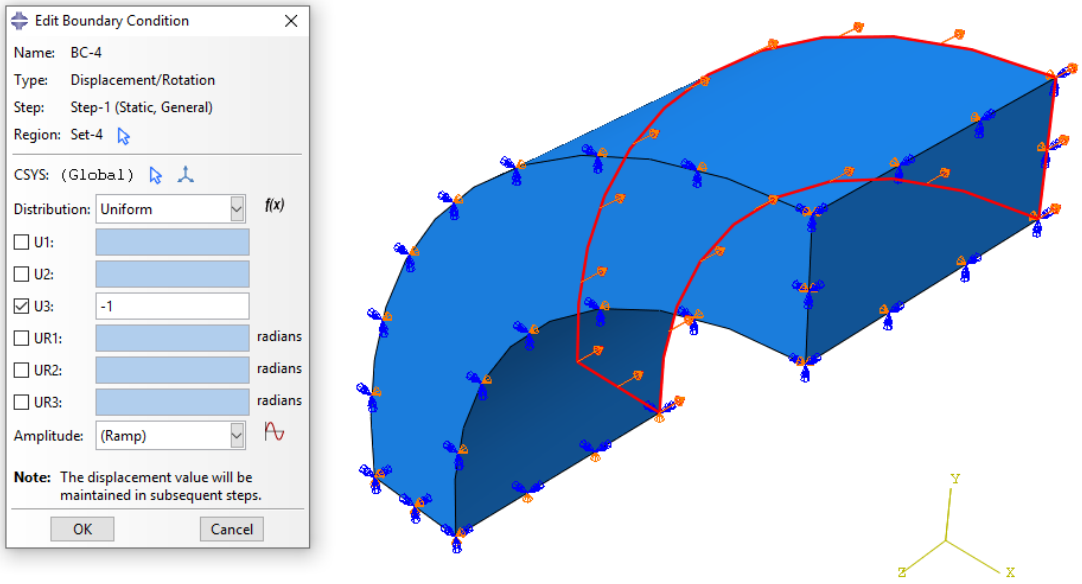


Slika 7.3. Rubni uvjet simetrije u smjeru y-osi



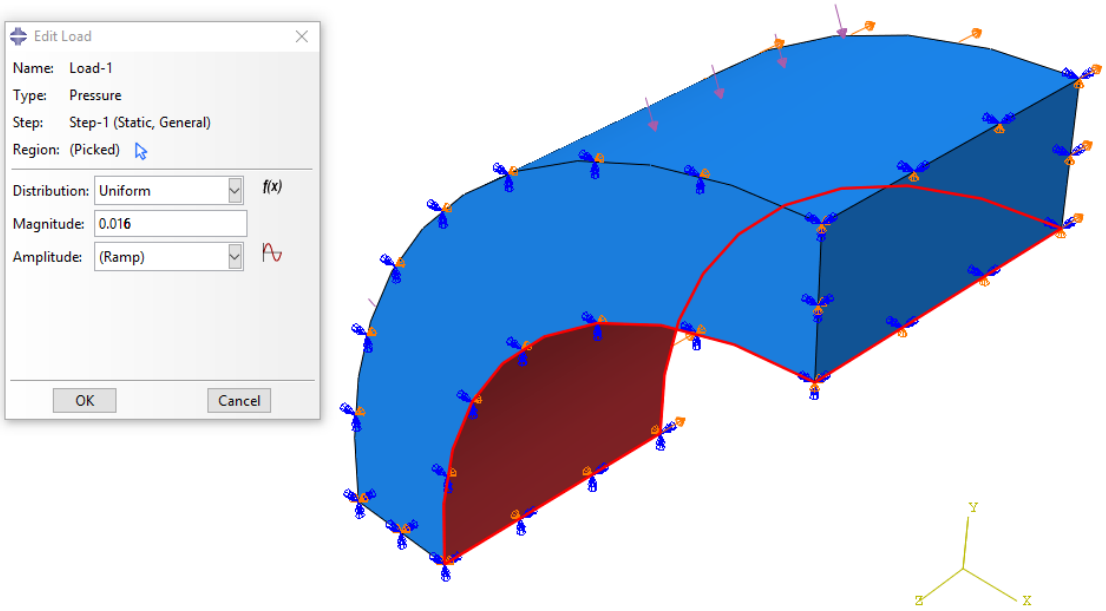
Slika 7.4. Rubni uvjet simetrije u smjeru z-osi

U primjerima gdje je u obzir uzeto predistezanje, dodaje se još rubni uvjet pomaka u smjeru osi z za iznos izračunat prema jednadžbi (26)(Slika 7.5).



Slika 7.5. Rubni uvjet pomaka u aksijalnom smjeru

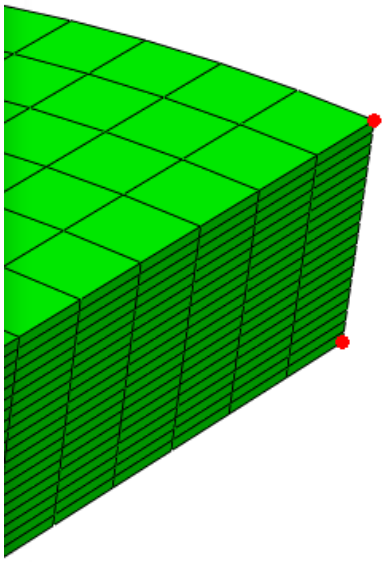
Opterećenje koje je zadano na model uključuje konstantan tlak približan tlaku sistole (16 kPa) na unutarnjoj stijenci modela. Konvencijom je određeno da tlak koji se zadaje ima smjer okomit na zadanu površinu pa je stoga dovoljno označiti unutarnju stijenku i upisati zadani iznos (Slika 7.6).



Slika 7.6. Opterećenje unutarnje stijenke modela na tlak

Nakon postavljanja rubnih uvjeta i opterećenja, potrebno je izraditi mrežu konačnih elemenata te pokrenuti simulaciju. Dobivene pomake u aksijalnom i radijalnom smjeru je potrebno očitati na crvenim točkama kako prikazuje Slika 7.7 jer su na toj strani najveći pomaci u aksijalnom smjeru, a radijalni pomaci su jednaki na istom radijusu pa je svejedno na kojoj će aksijalnoj vrijednosti biti očitani.

Dobivene vrijednosti pomaka zbrajaju se s početnom neopterećenom geometrijom koja je izračunata te se dobivaju vrijednosti opterećene geometrije koja se onda može uspoređivati s ulaznim podacima.

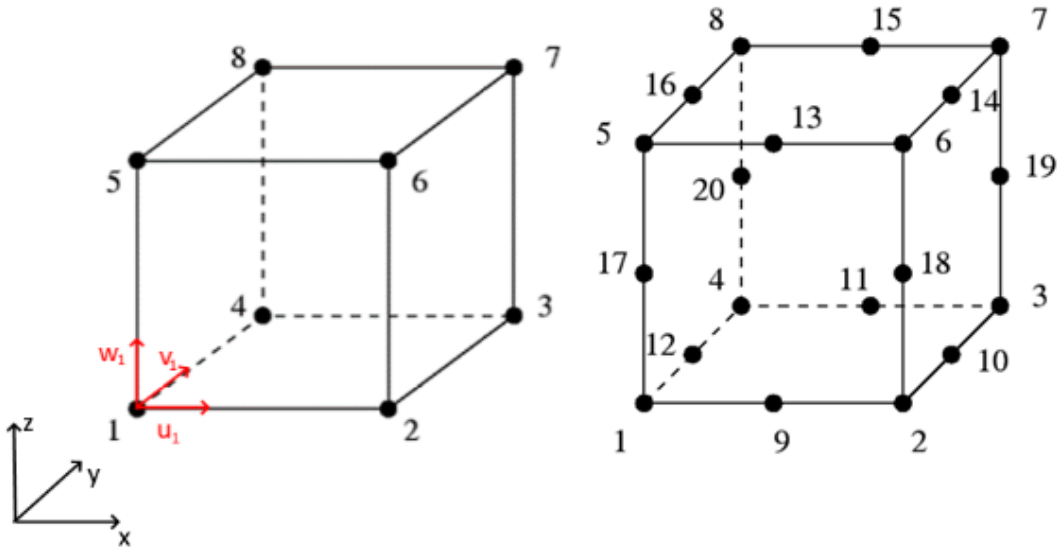


Slika 7.7. Mjesta za očitavanje aksijalog i radijalnih pomaka

7.2 Heksaedarski konačni elementi

Abaqus nudi mogućnost odabira između elemenata linearnog i kvadratnog geometrijskog reda u sve tri dimenzije (1D, 2D i 3D). Linearni elementi ili elementi prvog reda imaju po jedan čvor na vrhovima (Slika 7.8. lijevo) te su namijenjeni analizama nekompresibilnih materijala gdje dolazi do velike distorzije elemenata jer nema „zaključavanja" tj. pojave smičnih deformacija između elemenata što za posljedicu ima preveliku krutost elemenata. Imaju tri stupnja slobode gibanja u svakom čvoru kako prikazuje Slika 7.8. pa je ukupan broj stupnjeva slobode gibanja za heksaedarske elemente prvog reda 24. Elementi drugog reda imaju čvorove, osim na vrhovima elemenata, i na sredini svakog brida (Slika 7.8. desno) te su prikladniji za analize koje ne uključuju velike distorzije mreže, upravo iz razloga „zaključavanja" mreže. Oni su prikladniji za probleme gdje je dominantno savijanje te mogu bolje prikazati mjesta koncentracije naprezanja. Heksaedarski elementi drugog reda imaju 54 stupnja slobode. Također nudi se mogućnost izbora između tetraedarskih i heksaedarskih 3D elemenata, no za isti broj čvorova, tetraedarskih elemenata će biti duplo više nego heksaedarskih čime se produljuje vrijeme računanja. Tetraedarski elementi su prikladni kod kompleksnih geometrija. S obzirom na navedeno, u simulacijama će biti korišteni 3D heksaedarski elementi prvog reda – C3D8H, gdje C označava elemente kontinuuma za naprezanje/istezanje, 3D dimenziju elemenata, 8 je broj čvorova i H označava elemente s hibridnom formulacijom koja osigurava nestlačivost. Hibridni elementi se koriste za gotovo i potpuno nekompresibilne materijale s obzirom da konačan rezultat naprezanja ne ovisi samo o povijesti pomaka već i o distorziji

elemenata. Osim navedenog, koristit će se *full-integration* elementi s obzirom na to da reducirana integracija koristi integracije nižeg reda kako bi stvorio krutost elemenata što skraćuje vrijeme računanja, no uz elemente prvog reda potpuna integracija daje točnije rezultate.



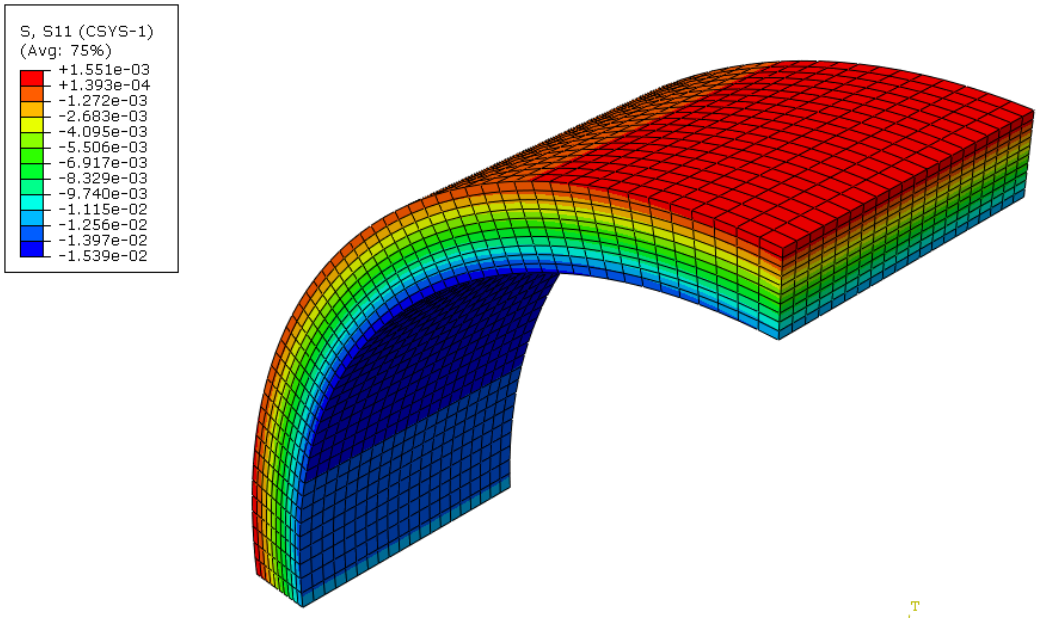
Slika 7.8 Heksaedarski elementi prvog reda (lijevo) i drugog reda (desno) [5]

7.3 Konvergencija mreže

Osim što Abaqus sam provjerava konvergira li mreža konačnih elemenata za zadani problem, kako je već navedeno, progušćivanjem mreže se moguće približiti točnim rezultatima. Konvergencija mreže, tj. optimalna mreža za još uvijek razumno vrijeme računanja problema dobiva se krenuvši od ukupno 10 000 elemenata te postepenim progušćivanjem dok se ne dođe do zadovoljavajućeg naprezanja na unutarnjoj stijenci u radijalnom smjeru koji bi trebao odgovarati postavljenom opterećenju tj. tlaku:

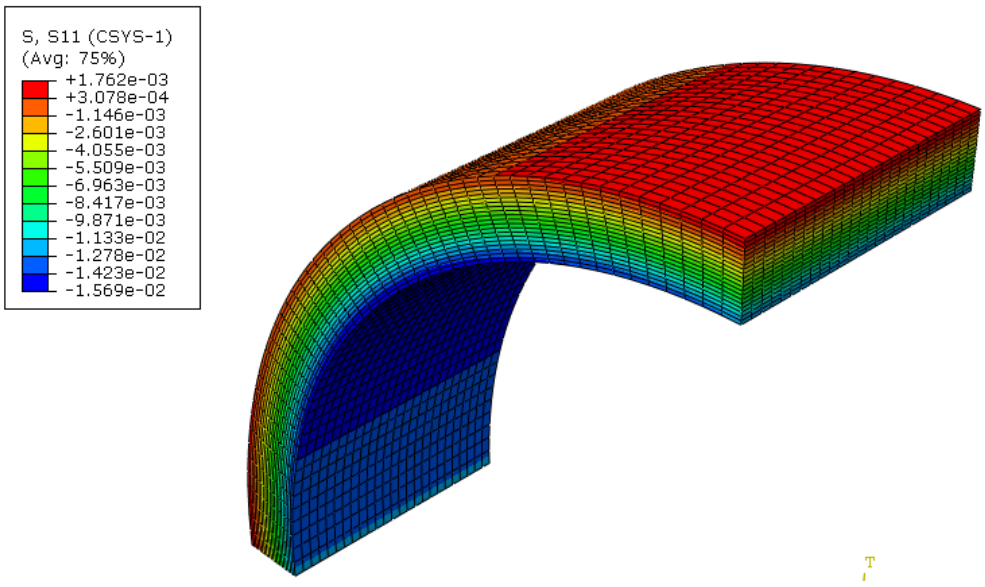
$$\sigma_r = P \tag{47}$$

Slika 7.9 prikazuje raspodjelu naprezanja u radijalnom smjeru za model sa 10 000 elemenata. Vidljivo je da je na unutarnjoj stijenci iznos radijalnog naprezanja od $0{,}01539\ \mathrm{MPa}$ što predstavlja odstupanje od analitičkog rješenja



Slika 7.9. Diskretizacija geometrije s 10 000 konačnih elemenata

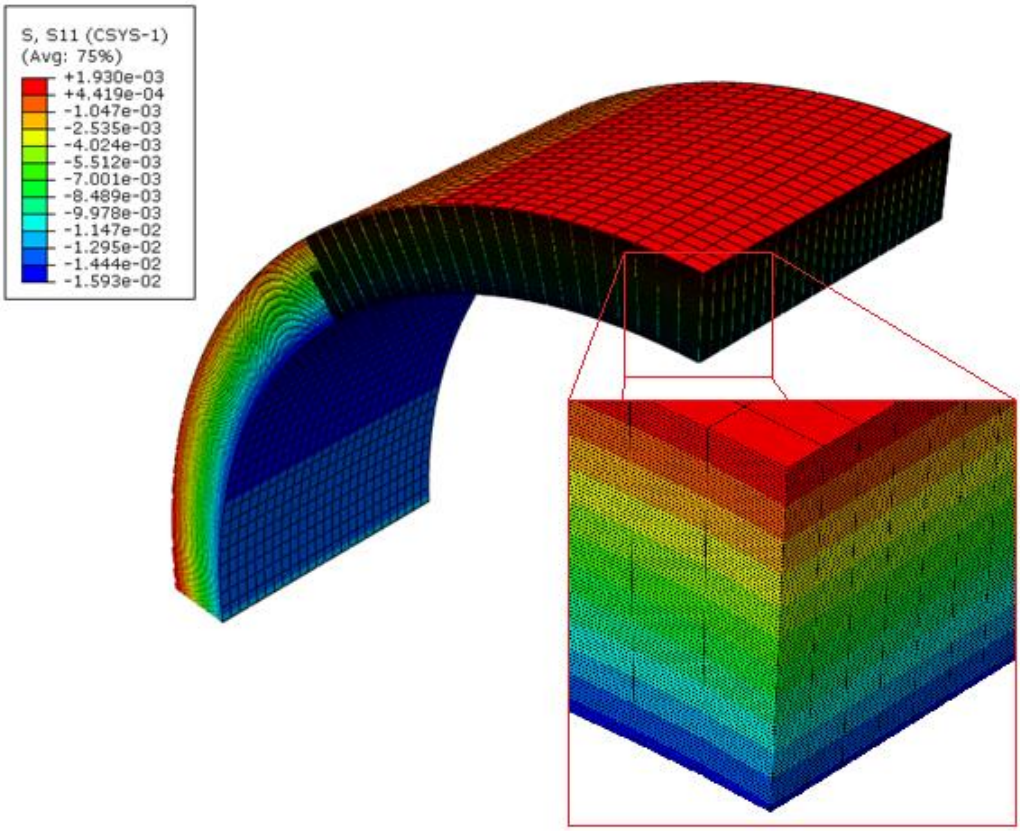
S obzirom da na radijalnu komponentu naprezanja utjecaj ima samo broj elemenata po obodu i debljini, povećan je njihov broj, dok je broj elemenata po duljini ostao isti te se dobiva diskretizacija sa 25 000 konačnih elemenata kako prikazuje Slika 7.10. Može se primijetiti da se vrijednost tlaka ovdje približila zadanoj vrijednosti od $0{,}016$ MPa te sada iznosi $0{,}01569$ MPa.



Slika 7.10. Diskretizacija geometrije s 25 000 konačnih elemenata

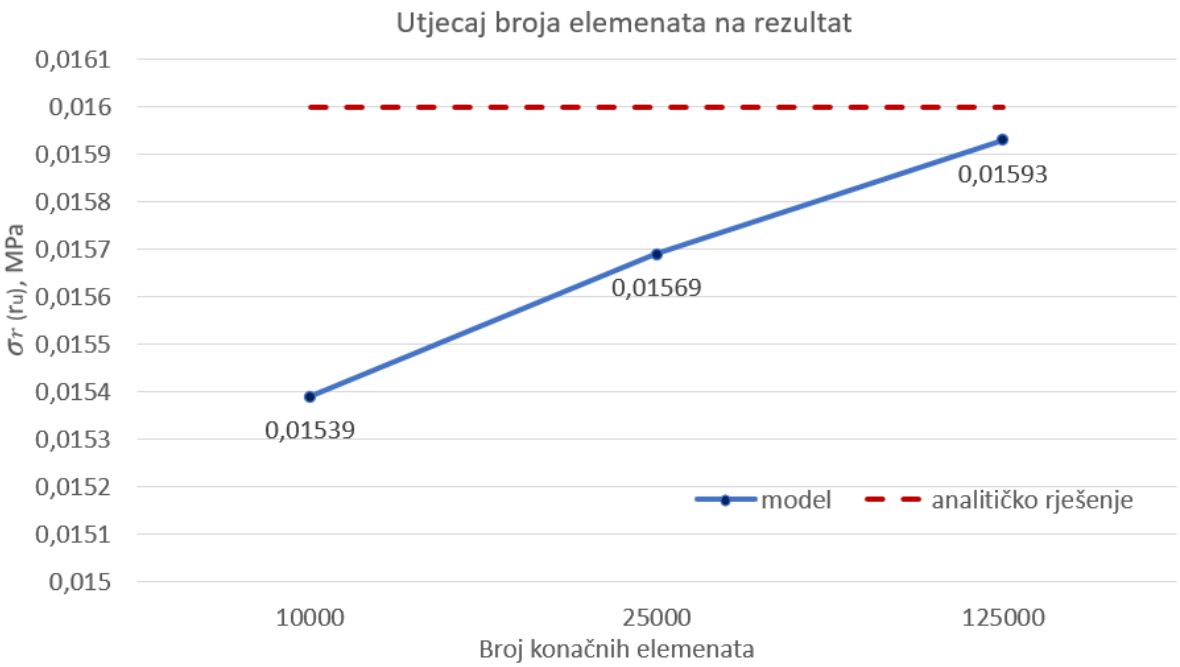
Slika 7.11 prikazuje ponovnu raspodjelu radijalnog naprezanja sa 125 000 elemenata. Radijalno naprezanje na unutarnjoj stijenci u ovom slučaju iznosi $0{,}01593$ MPa. Vidljivo je da se velikim povećanjem broja elemenata dobiva mala promjena u rezultatu i puno dulje vrijeme računanja.

Korištenjem 125 000 konačnih elemenata dobivena je dovoljna točnost te će se u ostatatku rada koristiti simulacije s navedenom mrežom konačnih elemenata.



Slika 7.11. Diskretizacija geometrije s 125 000 konačnih elemenata

Kada se konvergencija rezultata prikaže grafom dobije se krivulja koju prikazuje Slika 7.12. Plavom bojom prikazana je krivulja rezultata u ovisnosti u broju elemenata, dok je crvenom bojom prikazano analitičko rješenje kojem se teži. Vidljivo je da se krivulja asimptotski približava točnom rezultatu tj. postignuta je monotona konvergencija što ukazuje na pravilan izbor konačnih elemenata.



Slika 7.12. Konvergencija rezultata

8 Određivanje neopterećene geometrije uz provjeru simulacijama

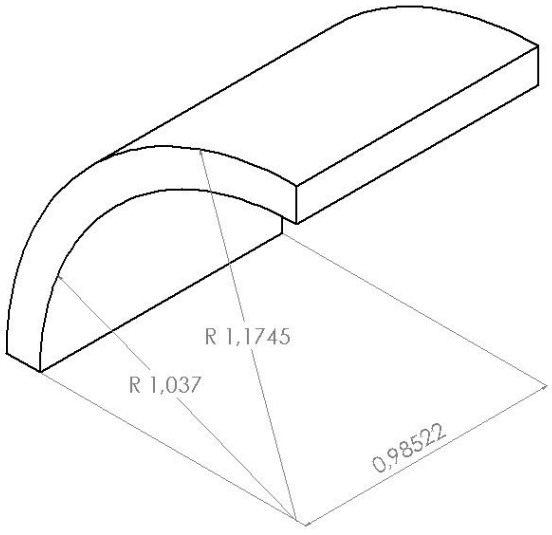
U svrhu izrade modela arterija aditivnom proizvodnjom potrebno je razviti postupak određivanja neopterećene geometrije stijenke arterije na pojednostavljenim cilindričnim modelima. Poznavajući deformiranu geometriju tj. dimenzije opterećene arterije i materijalne parametre moguće je odrediti neopterećeni oblik arterijske stijenke koji bi se koristio za izradu arterijske replike. Obraditi će se tri različita materijalna modela, počevši od najjednostavnijeg izotropnog *Neo-Hooke* materijalnog modela zatim *Mooney-Rivlin* materijalnog modela te u konačnici pomoću anizotropnog HGO materijalnog modela. Također, opterećenje će se dodavati postepeno od najjednostavnijeg opterećenja samo unutarnjim tlakom, preko kombinacije aksijalne sile i tlaka koji djeluju istovremeno do zadavanja opterećenja u više koraka gdje predistezanje nastupa prije tlaka.

Kako bi dimenzije bile izračunate koristi se jednadžba (16) u koju se uvrštavaju derivacije korištenog materijalnog modela prema jednadžbama (36), (39) i (43).

8.1 Opterećenje tlakom na unutarnju stijenku krvne žile aproksimirane *Neo-Hooke* materijalnim modelom

8.1.1 Poznati podaci u opterećenom stanju krvne žile

U opterećenom stanju u krvnim žilama zdrave osobe prevladava tlak između 10,5 i 16 kPa što su tlakovi dijastole i sistole. Iz nalaza magnetske rezonance mogu se izmjeriti gabariti krvne žile koji se potom koriste u proračunima. Model je aproksimiran cilindričnim oblikom čije su dimenzije preuzete iz [9] ,te ih prikazuje Slika 8.1.



Slika 8.1. Dimenzije opterećene arterije

Također, poznata je materijalna konstanta $C_1 = 0{,}50426$ MPa iz *Neo-Hooke* materijalnog modela.

8.1.2 Izračun dimenzija neopterećene arterije

S obzirom da ovdje nemamo zadano predistezanje, u jednadžbu (26) se uvrštava vrijednost $\lambda_z = 1$.

U programskom paketu *Octave* napisan je programski kôd kojim se izračunava neopterećena geometrija. Nakon izračunavanja iznosa preostalih istezanja dolazi se do iznosa neopterećene geometrije krvne žile gdje R_u predstavlja unutarnji radijus i R_v vanjski radijus, a L predstavlja duljinu u aksijalnom smjeru.

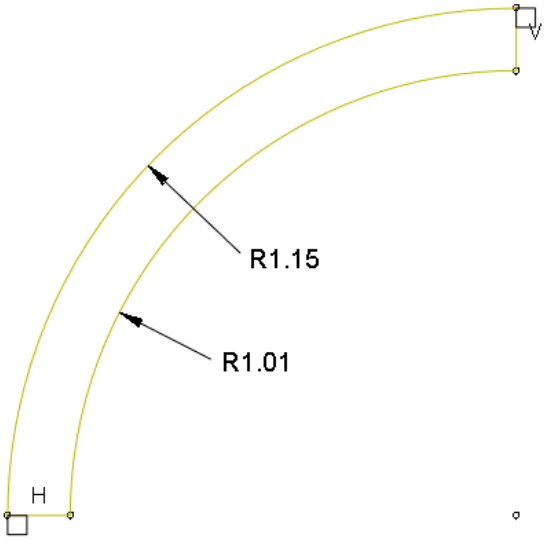
Tablica 8.1. Dimenzije neopterećene arterije *Neo-Hooke* materijalnog modela

Unutarnji radijus R_u [mm]	1,00647
Vanjski radijus R_v [mm]	1,14787
Duljina L [mm]	0,98522

Koristeći sada dobivene dimenzije neopterećene krvne žile radi se simulacija metodom konačnih elemenata u programu *Abaqus* radi uspoređivanja rezultata s početnim dimenzijama opterećene krvne žile.

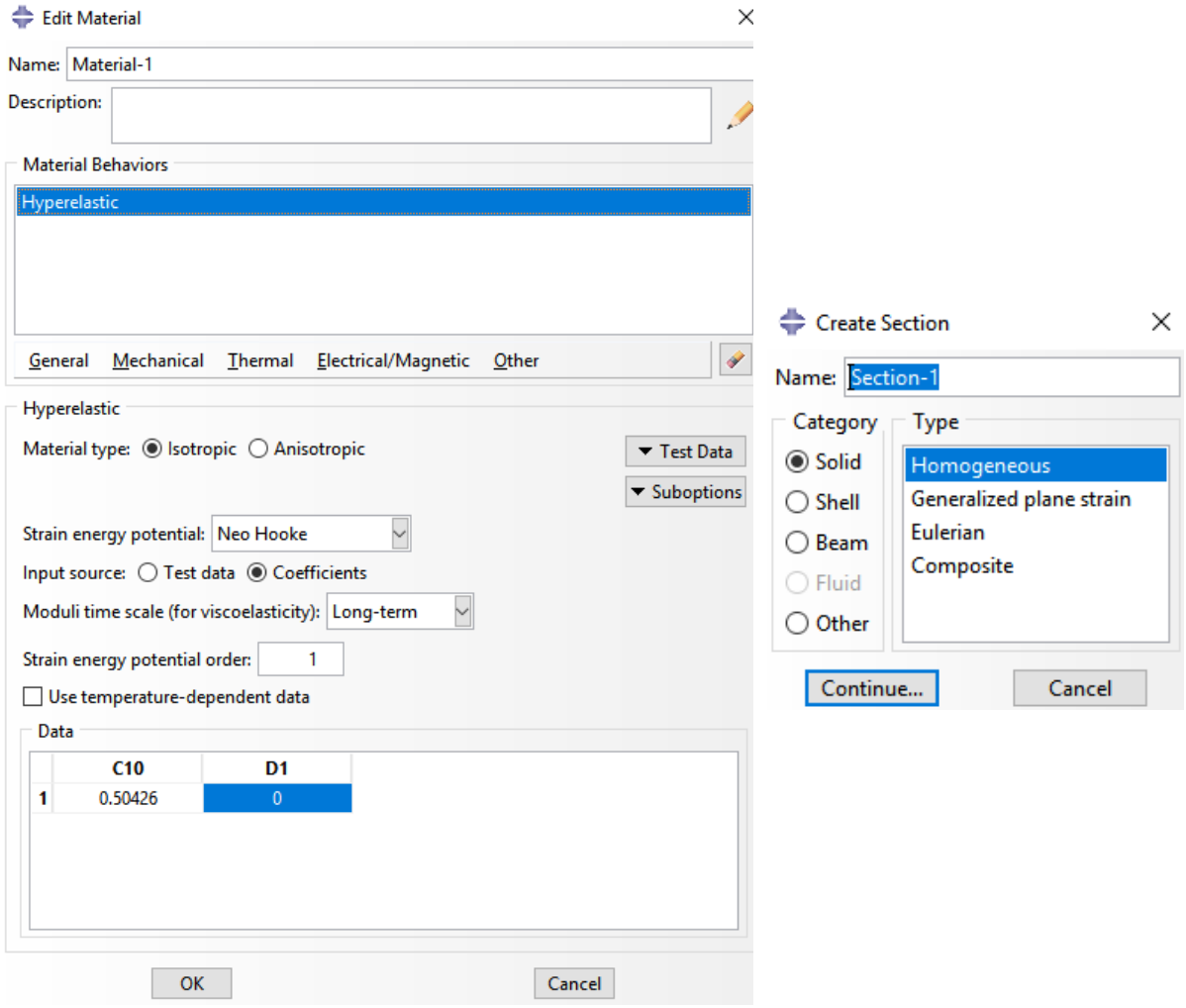
8.1.3 Simulacija i usporedba rezultata

Slika 8.2 prikazuje crtanje modela koji će biti simuliran iz dobivenih vrijednosti za dimenzije neopterećene arterije



Slika 8.2. Kreiranje modela za simulaciju *Neo-Hooke* materijalnim modelom

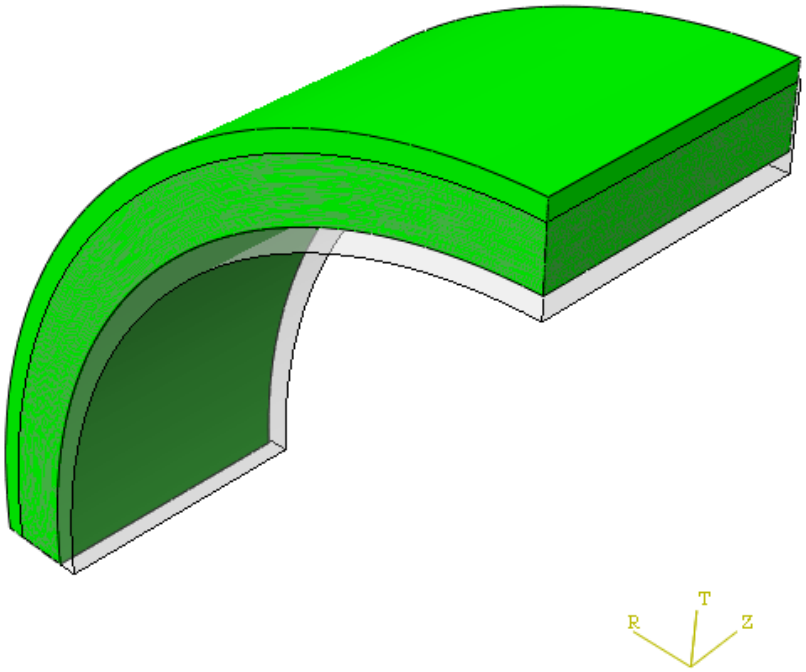
Kako bi moglo biti određeno ponašanje modela uslijed opterećenja, mora biti zadan materijal. Korišten je hiperelastičan *Neo-Hooke* materijalni model kao i u proračunu te je materijalna konstanta upisana na za to predviđeno mjesto (Slika 8.3).



Slika 8.3. Postavke materijala

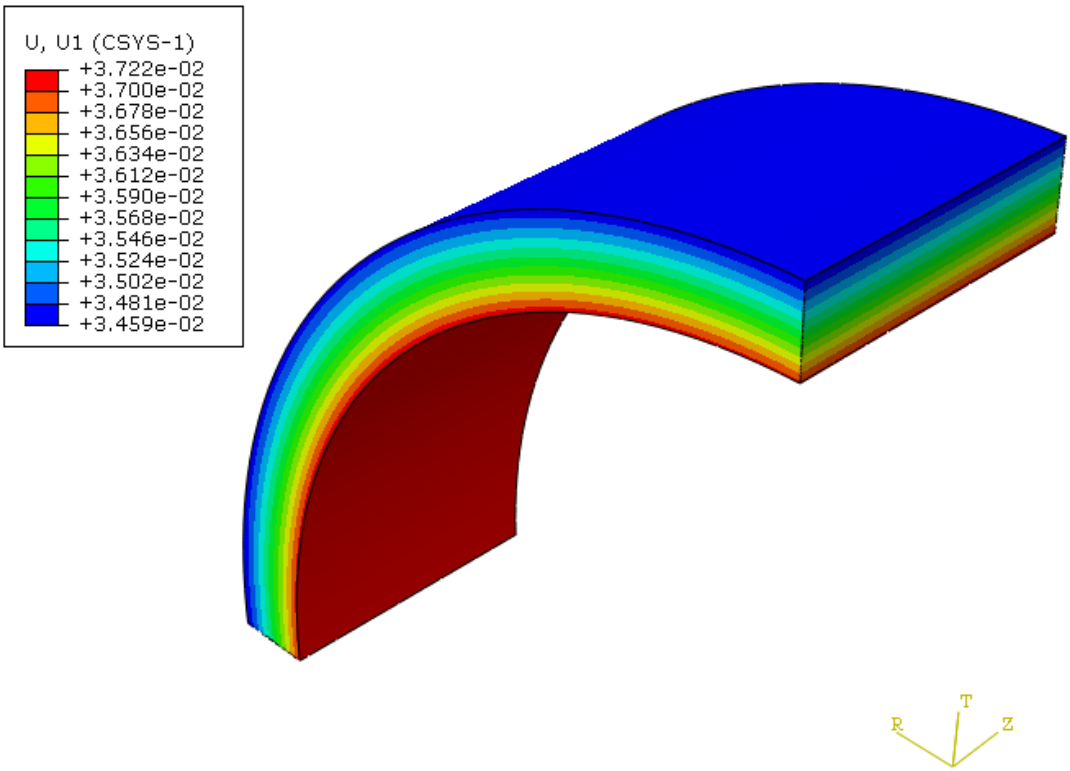
Također osim uvjeta simetrije mora biti zadano i opterećenje. S obzirom da je u proračunu korišten najjednostavniji slučaj u kojem djeluje samo tlak, samo njega se i zadaje na unutarnjoj stijenci modela u iznosu $P = 0{,}013$ MPa.

Pokretanjem programa dobivaju se rezultati te se očitavaju radijalni i aksijalni pomak na mjestima koja su prethodno opisana. Slika 8.4 prikazuje odnos između opterećenog i neopterećenog modela. Može se primijetiti da je osim povećanja radijusa zbog djelovanja tlaka na unutarnju stijenku došlo i do skraćivanja arterije u aksijalnom smjeru. To može biti objašnjeno nestlačivim materijalom, odnosno uvjetom da volumen mora biti konstantan.



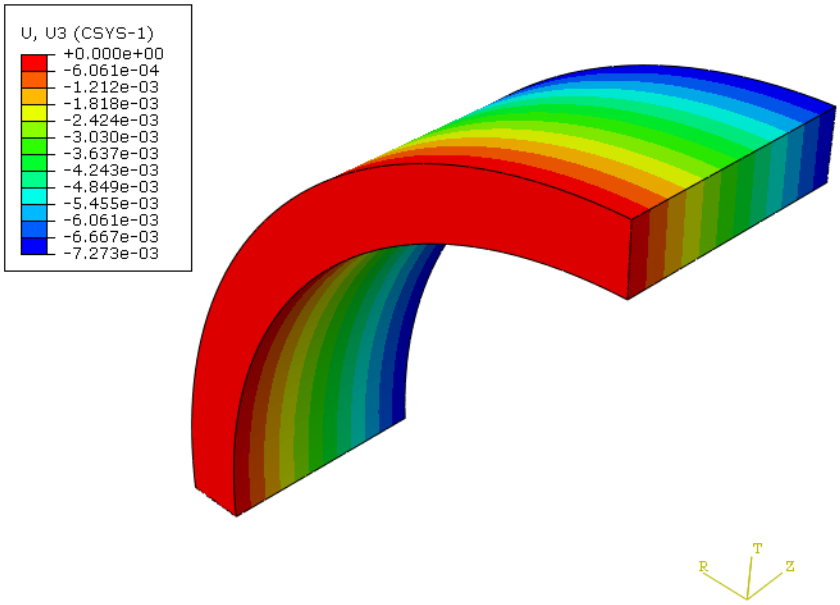
Slika 8.4. Usporedni prikaz opterećene (zeleno) i neopterećene (prozirno) geometrije

Raspodjelu radijalnog pomaka s iznosima prikazuje Slika 8.5. Može biti primijećeno da je najveći pomak u radijalnom smjeru na unutarnjoj stijenci, a najmanji na vanjskoj što znači da je osim radijalnog širenja cijelog modela došlo i do smanjenja njegove debljine.



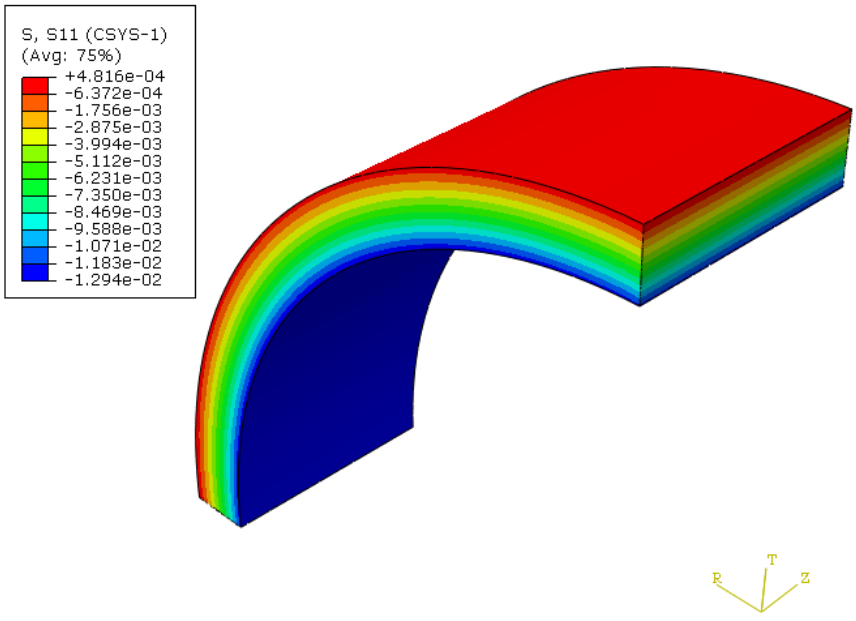
Slika 8.5. Raspodjela radijalnog pomaka po modelu arterije

Slika 8.6 prikazuje raspodjelu aksijalnog pomaka. Crvenom bojom prikazano je područje bez pomaka i to na mjestu gdje je postavljen rubni uvjet simetrije u tom smjeru pa tamo pomaka ne bi smjelo ni biti. Najveći iznos pomaka je na suprotnoj strani te negativan predznak označava da se pomak dogodio suprotno od smjera aksijalne osi što znači da se model aksijalno skratio.



Slika 8.6. Raspodjela aksijalnog pomaka po modelu arterije

Slika 8.7 prikazuje raspodjelu radijalnog naprezanja po modelu. Na unutarnjoj stijenci je bilo zadano 0,013 kPa te je to na ovoj slici prikazano plavom bojom. Kao što je očekivano, vidljivo je da vrijednost nije egzaktna već približna sa zanemarivom greškom. Greška bi mogla biti smanjena povećanjem broja elemenata, no time bi samo bilo dobiveno značajno dulje vrijeme računanja uz vrlo malu razliku.



Slika 8.7. Raspodjela radijalnog naprezanja po modelu arterije

Nakon očitanja iz simulacije, pomaci su zbrojeni s početnim vrijednostima neopterećenog modela te su dobivene dimenzije opterećene arterije:

Tablica 8.2. Dimenzije opterećene arterije dobivene simulacijom *Neo-Hooke* materijalnog modela

Unutarnji radijus R_u [mm]	1,04385
Vanjski radijus R_v [mm]	1,18249
Duljina L [mm]	0,970674

Uspoređujući dobivene vrijednosti s vrijednostima opterećene krvne žile s početka proračuna, greška iznosi:

- za unutarnji presjek: $\Delta R_u = 0{,}0069$ mm, tj. 0,66%,
- za vanjski presjek: $\Delta R_v = 0{,}008$ mm, tj. 0,68%
- u aksijalnom smjeru: $\Delta L = 0.0145$ mm, tj. 1,48%

8.2 Opterećenje krvne žile aproksimirane *Neo-Hooke* materijalnim modelom na tlak i aksijalnu silu

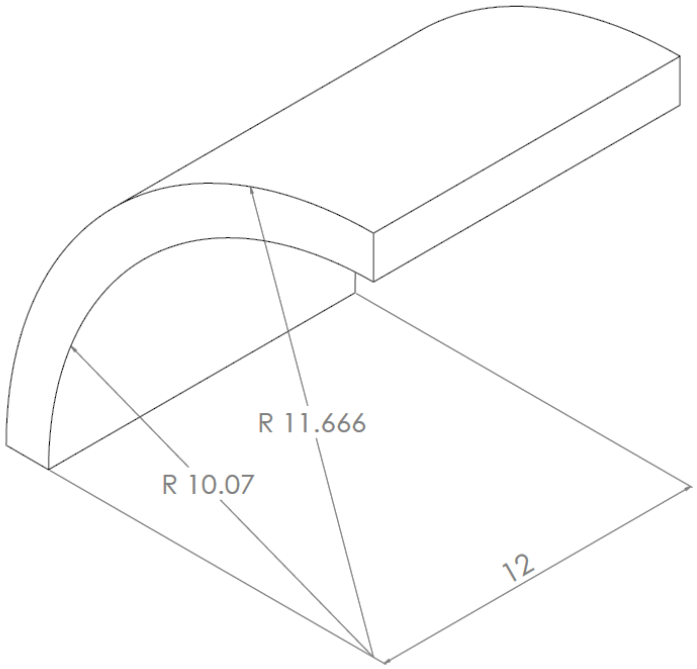
S obzirom da se krvožilni sustav razvija još u djetinjstvu, a njegove komponente, točnije arterijska stijenka se sastoji od elastina, kolagena i glatkih mišića, rastom mišići i kolagen rastu, no elastin ne raste nego se deformira čime uzrokuje naprezanja u aksijalnom smjeru krvnih žila. Stoga će u svrhu približavanja stvarnim uvjetima osim tlaka na unutarnjoj stijenci krvne žile u sljedećem proračunu biti korišteno i aksijalno istezanje.

8.2.1 Poznati podaci u opterećenom stanju krvne žile

Iznos zadanog aksijalnog predistezanja je:

$$\lambda_Z = 1{,}2 \tag{48}$$

Osim toga, ponovno se koristi *Neo-Hooke* materijalni model s konstantom materijala $C_1 = 0{,}50426$ MPa, tlak na unutarnjoj stijenci će sada biti jednak tlaku sistole i iznosi $P = 0{,}016$ MPa, te geometriju koju prikazuje Slika 8.8.



Slika 8.8. Dimenzije opterećene arterije

8.2.2 Izračun dimenzija neopterećene arterije

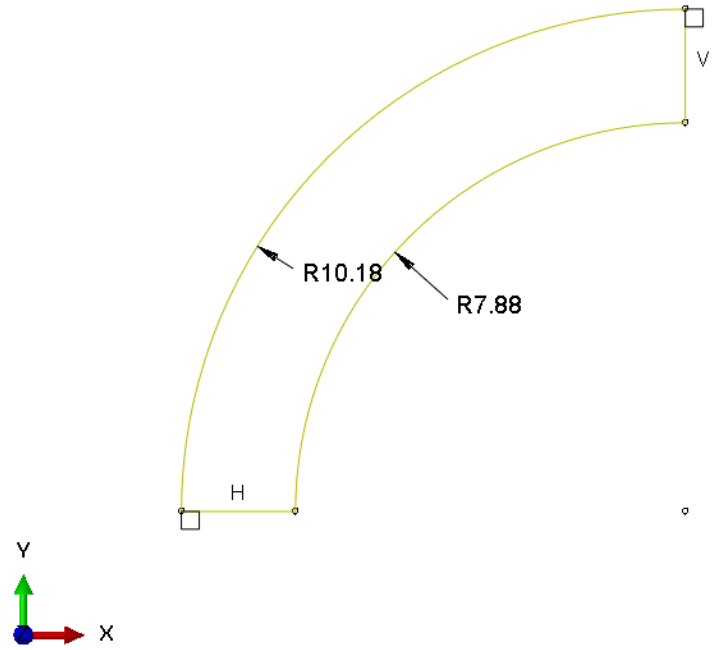
Nakon implementiranja prethodno opisanih jednadžbi u kôd dobivaju se početne vrijednosti kako prikazuje Tablica 8.3.

Tablica 8.3. Dimenzije neopterećene arterije *Neo-Hooke* materijalnog modela s predistezanjem

Unutarnji radijus R_u [mm]	7,87925
Vanjski radijus R_v [mm]	10,1839
Duljina L [mm]	10

Kako bi ove dimenzije bile provjerene, ponovno se radi simulacija metodom konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus.*

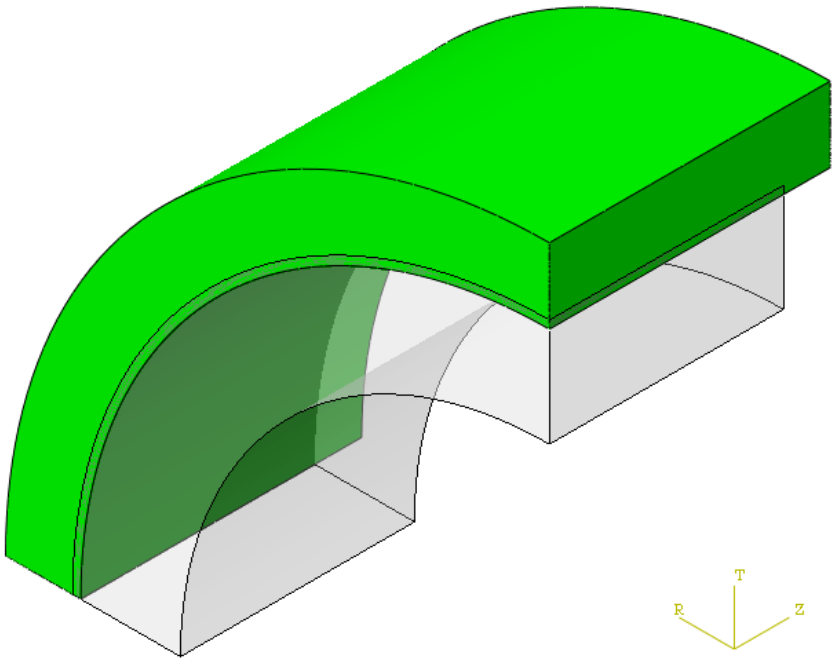
8.2.3 Simulacija i usporedba rezultata



Slika 8.9. Dimenzije neopterećene geometrije za simulaciju *Neo-Hooke* materijalnim modelom s predistezanjem

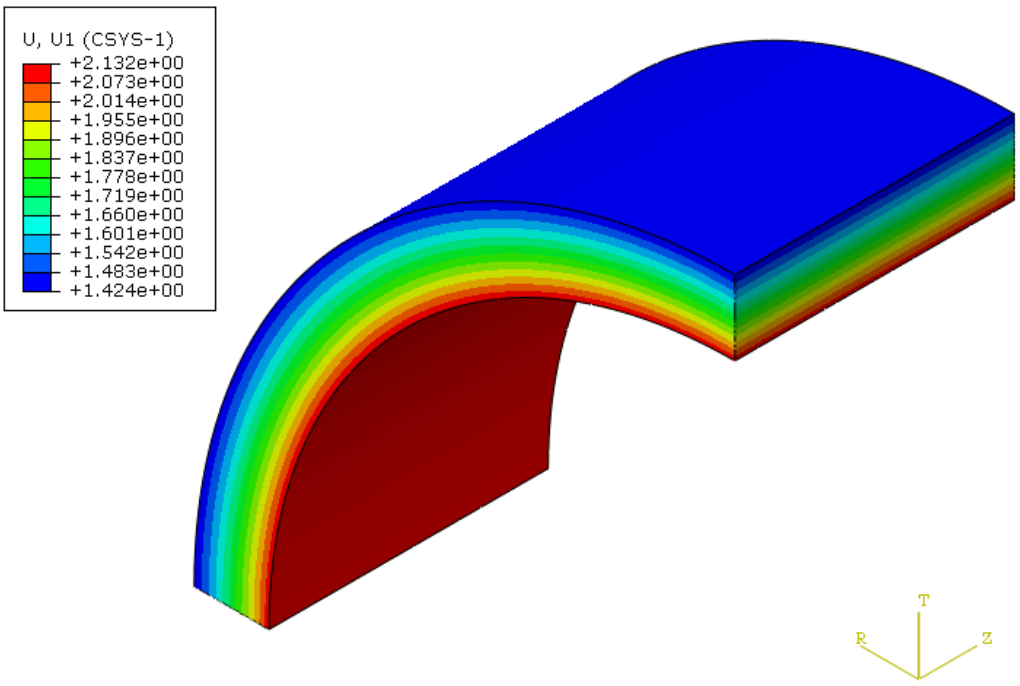
Radi jednostavnosti, ovdje su istezanje i tlačno opterećenje za simulaciju postavljeni u istom koraku iako se u stvarnosti istezanje odvija konstantno dok tlak djeluje impulsno radom srca te bi bilo pravilnije da je predistezanje postavljeno prije tlačnog opterećenja.

Slika 8.10. prikazuje razliku geometrije arterije sa i bez opterećenja. Vidljivo je da opterećena arterija ima veću duljinu u aksijalnom smjeru te veći promjer. S obzirom na to da je pretpostavljena nestlačivost, debljina arterije se morala smanjiti što se i dogodilo.

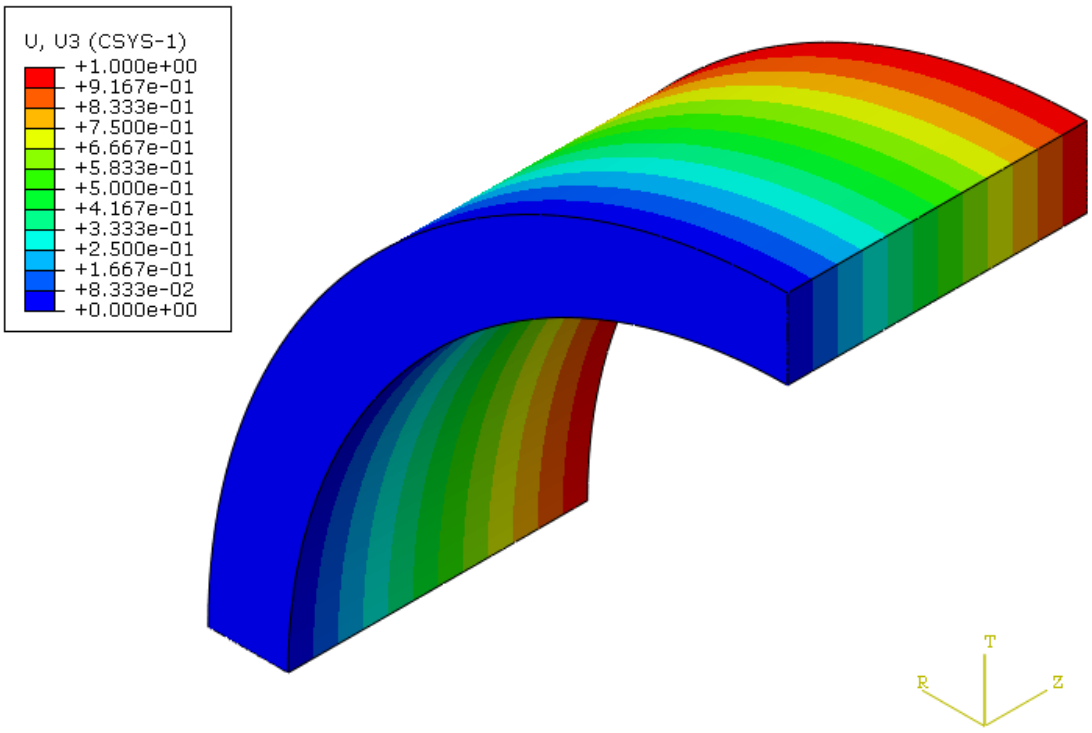


Slika 8.10. Odnos opterećenog (zeleno) i neopterećenog (prozirno) modela za *NeoHooke* materijalni model

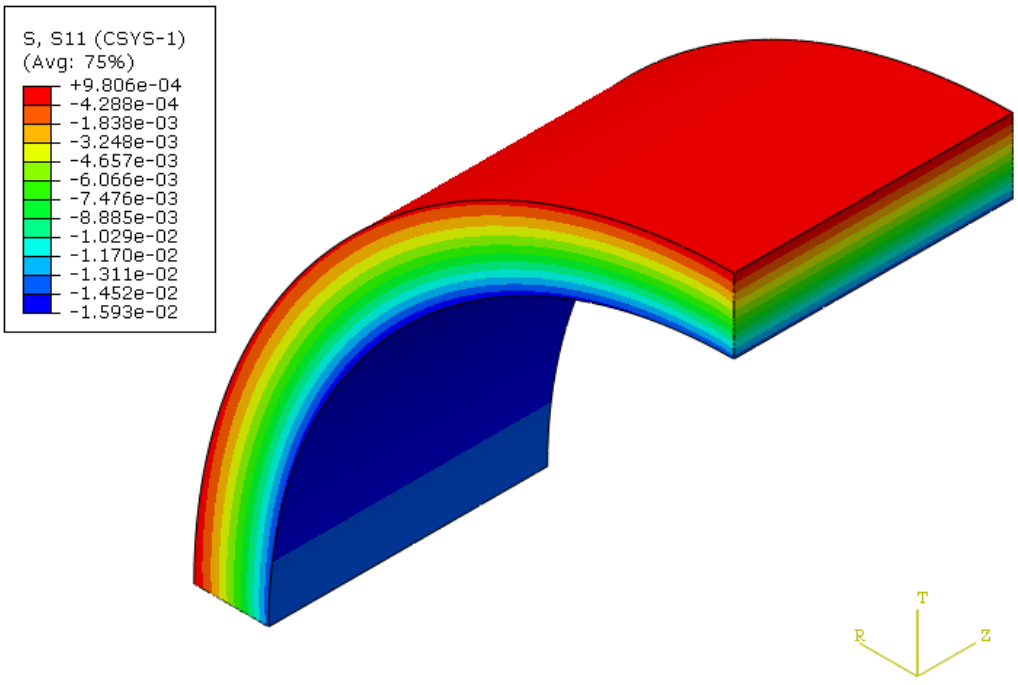
Slika 8.11 i Slika 8.12 prikazuju raspodjelu radijalnog i aksijalnog pomaka po modelu, a Slika 8.13 prikazuje raspodjelu tlaka po modelu.



Slika 8.11. Raspodjela radijalnog pomaka u_r za *NeoHooke* materijalni model



Slika 8.12. Raspodjela aksijalnog pomaka u_z za *NeoHooke* materijalni model



Slika 8.13. Raspodjela radijalnog naprezanja σ_r za *NeoHooke* materijalni model

Kao i u prethodnom primjeru, na istim točkama se vrši očitavanje radijalnog i aksijalnog pomaka te njihovim zbrajanjem s početnim vrijednostima neopterećenog stanja dobivaju se dimenzije opterećene arterije (Tablica 8.4).

Tablica 8.4. Dimenzije opterećene arterije dobivene simulacijom *Neo-Hooke* materijalnog modela s predistezanjem

Unutarnji radijus R_u [mm]	9,9964
Vanjski radijus R_v [mm]	11,608
Duljina L [mm]	12

Uspoređujući dobivene vrijednosti s vrijednostima opterećene krvne žile s početka vidljivo je da je greška zanemariva:

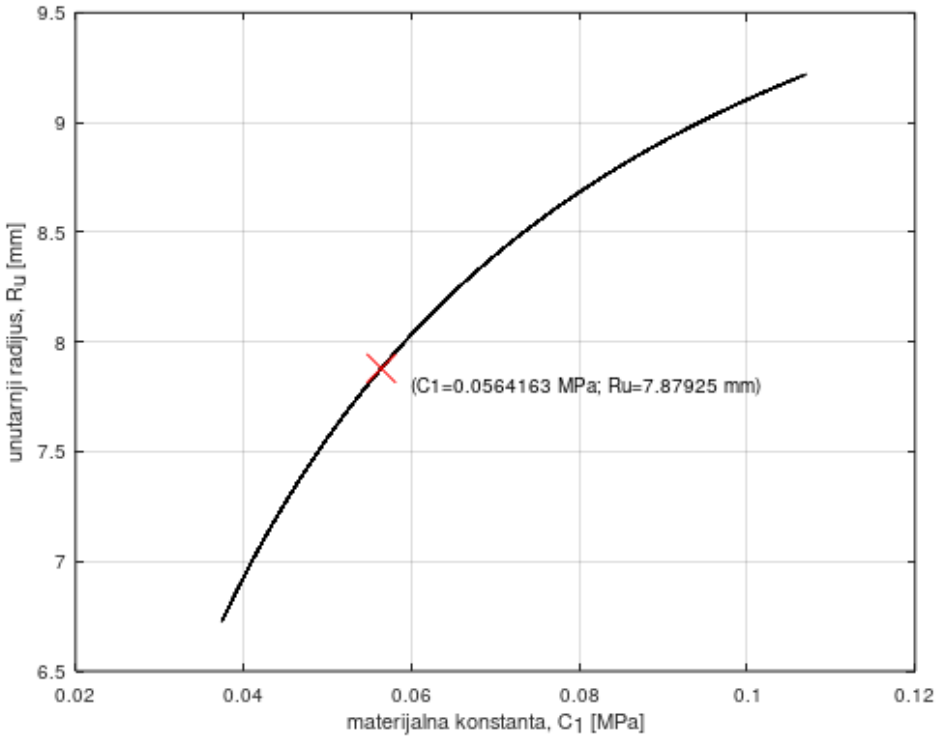
- za unutarnji presjek: $\Delta R_u = 0{,}0736$ mm, tj. 0,73%,
- za vanjski presjek: $\Delta R_v = 0{,}058$ mm, tj. 0,5%

S obzirom da je aksijalno istezanje bilo poznato i definirano kao rubni uvjet, vrijednost aksijalne duljine je egzaktna.

8.2.4 Ovisnost neopterećene geometrije o materijalnim parametrima

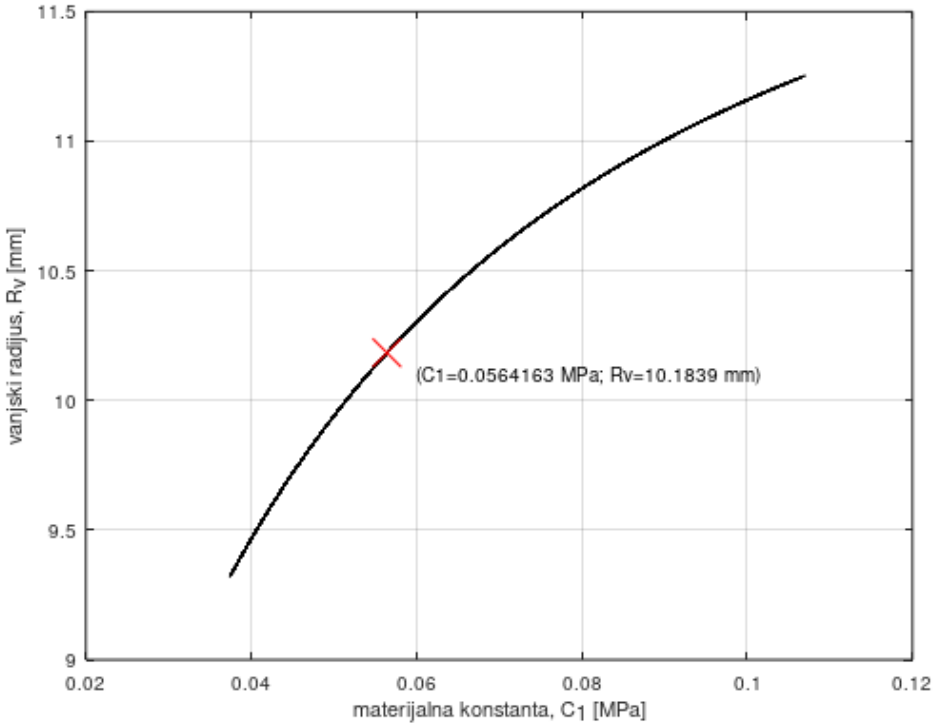
Za *Neo-Hooke* materijalni model postavljen je raspon istezanja u aksijalnom smjeru od 1,1 do 1,3 sa 50 podjela, a istezanje u cirkularnom smjeru je od 1 do 1,3 sa također 50 podjela. To znači da će matrica materijalne konstante imati dimenzije 50x50, odnosno neopterećena geometrija će biti određena za 2500 različitih materijalnih konstanti. Ovom podjelom se pokušalo simulirati grešku prilikom mjerenja koja bi rezultirala krivim materijalnim parametrima iz čega proizlaze krive vrijednosti neopterećene geometrije. Rezultati su prikazani grafovima u nastavku.

Slika 8.14 prikazuje ovisnost unutarnjeg radijusa o materijalnoj konstanti. Crvenim „X“ označena je vrijednost točnog materijalnog parametra te njemu pripadnog unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije koja je prethodno izračunata i provjerena simulacijom.



Slika 8.14. Ovisnost unutarnjeg radijusa o materijalnoj konstanti C_1

Slika 8.15 prikazuje ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti. Ponovno je crvenim „X“ prikazana pozicija za ispravne vrijednosti materijalne konstante i vanjskog radijusa.

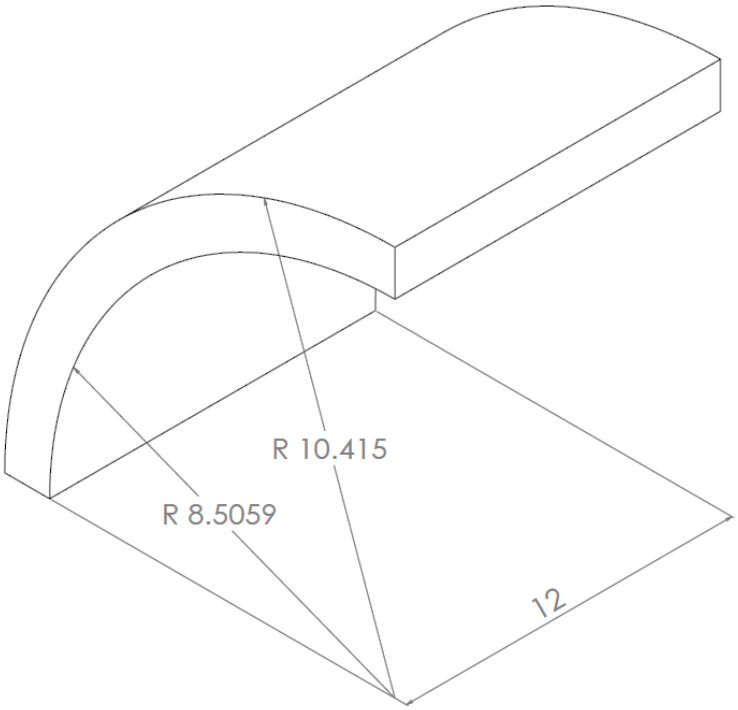


Slika 8.15. Ovisnost vanjskog radijusa o materijalnoj konstanti C_1

8.3 Opterećenje krvne žile aproksimirane *Mooney-Rivlin* materijalnim modelom na tlak i aksijalnu silu

8.3.1 Poznati podaci u opterećenom stanju arterije

Osim početnih dimenzija opterećene arterije koje prikazuje Slika 8.16, poznati su iznosi koeficijenata $C_1 = 0.049253$ MPa i $C_2 = 0.0098136$ MPa te iznos tlaka na unutarnjoj stijenci od 16 kPa kao i u prethodnom primjeru.



Slika 8.16. Dimenzije opterećene arterije

8.3.2 Izračun dimenzija neopterećene arterije

Jednakim postupkom kao u prethodnom primjeru, programiranjem kôda u *Octave*, dobivaju se iznosi duljina neopterećene arterije koji iznose kako prikazuje Tablica 8.5.

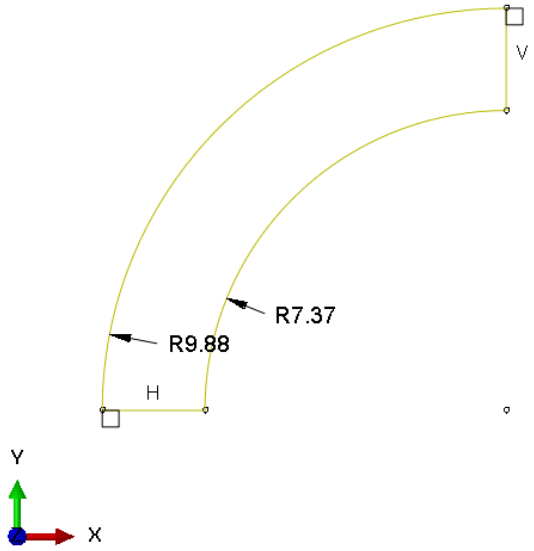
Tablica 8.5. Dimenzije neopterećene arterije *Mooney-Rivlin* materijalnog modela

Unutarnji radijus R_u [mm]	7,37234
Vanjski radijus R_v [mm]	9,88421
Duljina L [mm]	10

Ponovno radi provjere radi se simulacija metodom konačnih elemenata koristeći dobivene iznose neopterećene geometrije te uspoređeni su rezultati.

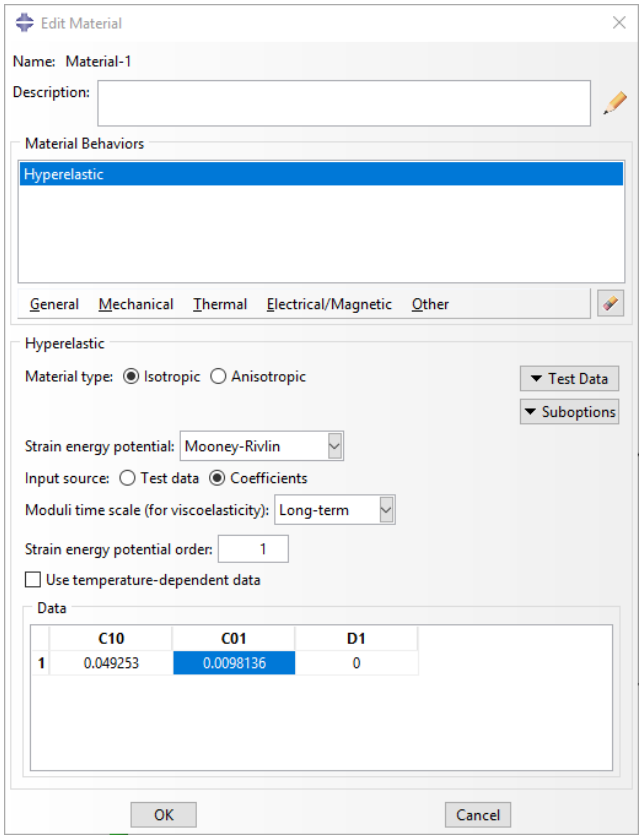
8.3.3 Simulacija i usporedba rezultata

Slika 8.17 prikazuje crtanje modela s izračunatim dimenzijama neopterećene geometrije za simulaciju.



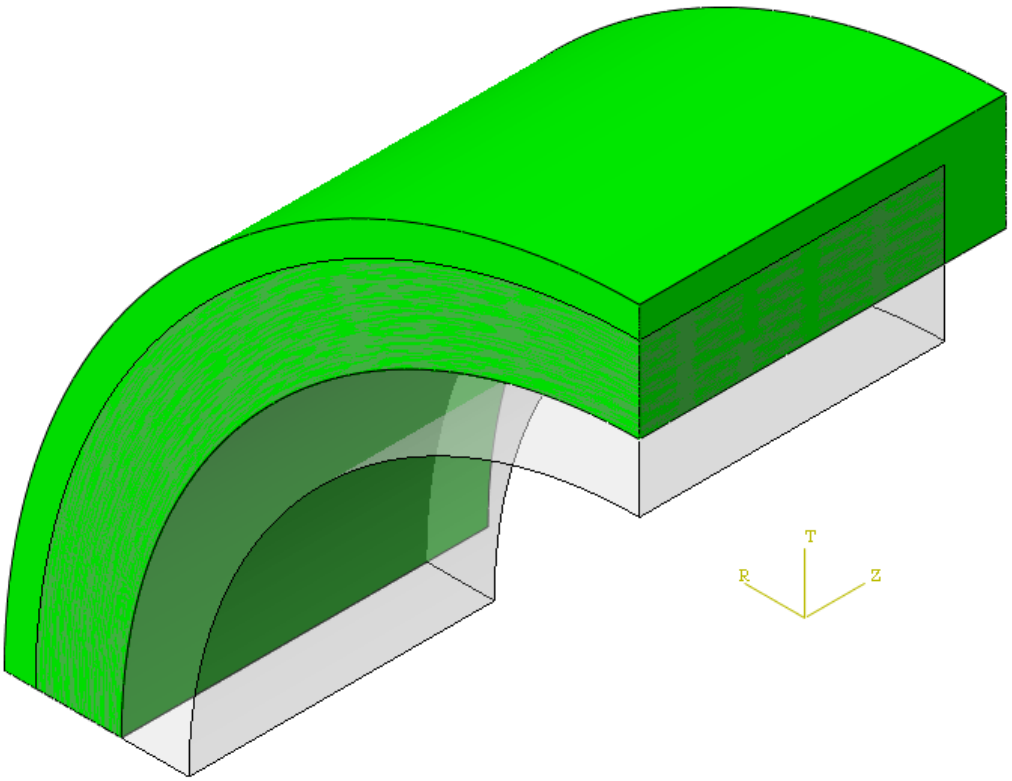
Slika 8.17. Dimenzije neopterećene geometrije za simulaciju *Mooney-Rivlin* materijalnim modelom

S obzirom na to da je ovdje korišten drugačiji materijalni model, mora biti i zadan u *Abaqusu* što prikazuje Slika 8.18.

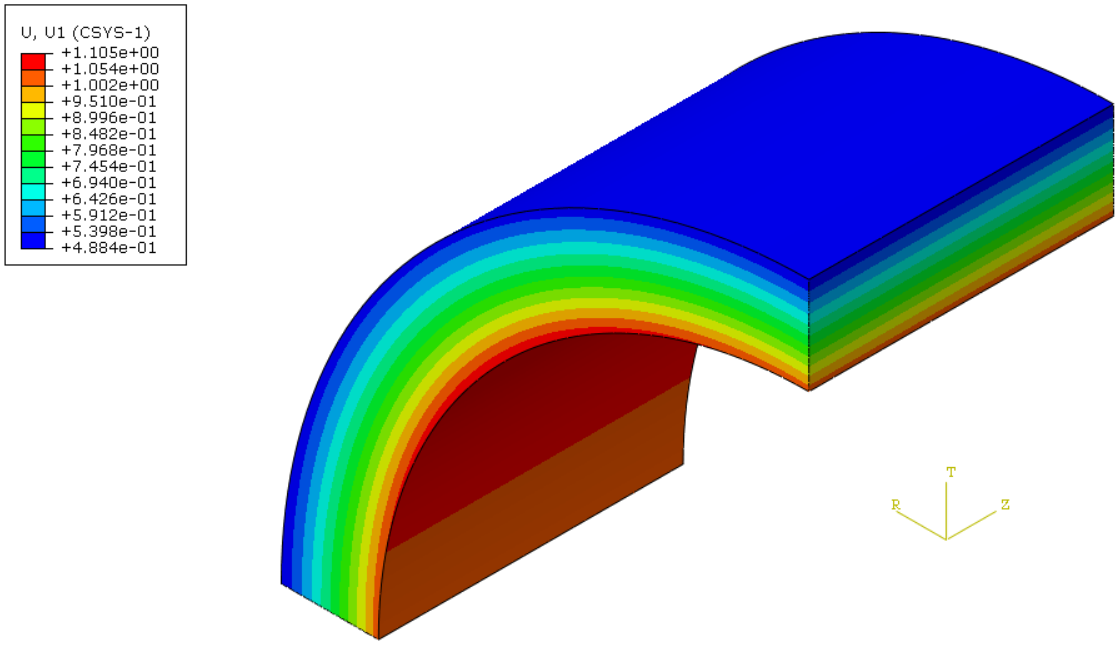


Slika 8.18. Zadavanje koeficijenata *Mooney-Rivlin* materijalnog modela

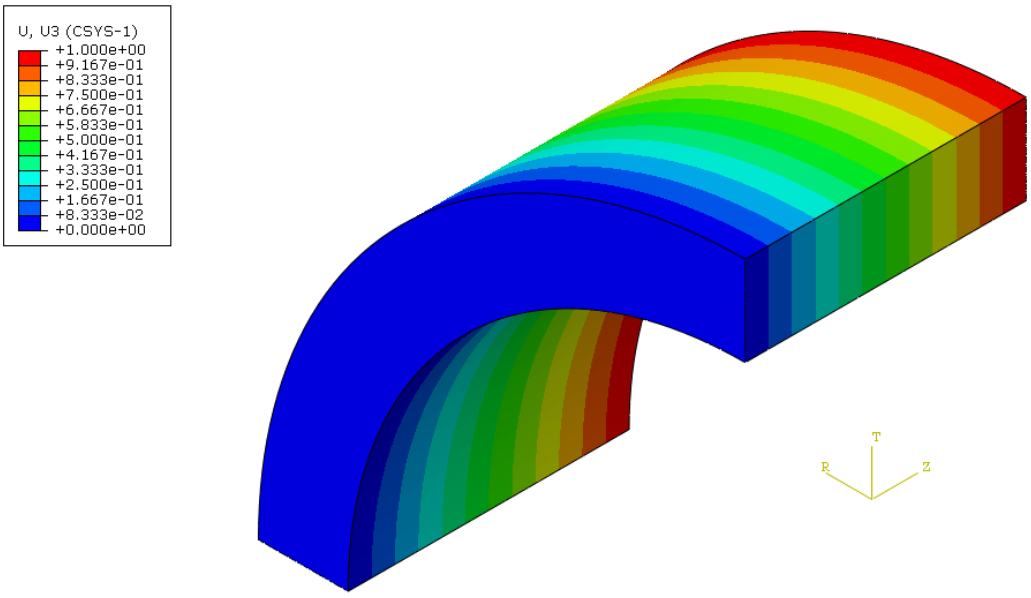
Pokretanjem simulacije dobivaju se rezultati kako prikazuju Slika 8.20, Slika 8.21 i Slika 8.22. Slika 8.19 prikazuje usporedbu geometrije opterećene i neopterećene arterije.



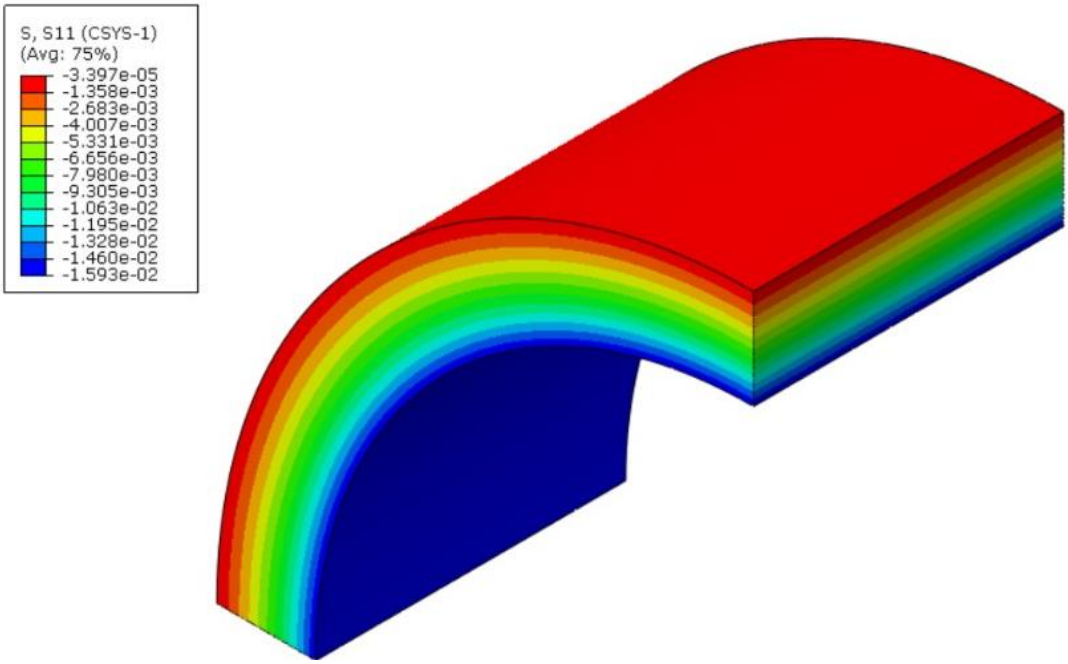
Slika 8.19. Odnos opterećene (zeleno) i neopterećene (prozirno) arterije



Slika 8.20. Raspodjela radijalnog pomaka u_r za *Mooney-Rivlin* materijalni model



Slika 8.21. Raspodjela aksijalnog pomaka u_z za *Mooney-Rivlin* materijalni model



Slika 8.22. Raspodjela radijalnog naprezanja σ_r za *Mooney-Rivlin* materijalni model

Očitavanjem pomaka u radijalnom i aksijalnom smjeru te zbrajanjem s dimenzijama neopterećene geometrije dobivaju se rezultate simulacije koji su zatim uspoređeni s prethodno dobivenim rezultatima.

Tablica 8.6 Dimenzije opterećene arterije iz simulacije *Mooney-Rivlin* materijalnog modela

Unutarnji radijus R_u [mm]	8,40843
Vanjski radijus R_v [mm]	10,3726
Duljina L [mm]	12

Uspoređujući vrijednosti poznate na početku i rezultate proračuna i simulacije dobiva se greška koja iznosi:

- za unutarnji presjek: $\Delta R_{\mathrm{u}} = 0{,}097$ mm, tj. 1,15%,
- za vanjski presjek: $\Delta R_{\mathrm{v}} = 0{,}042$ mm, tj. 0,41%

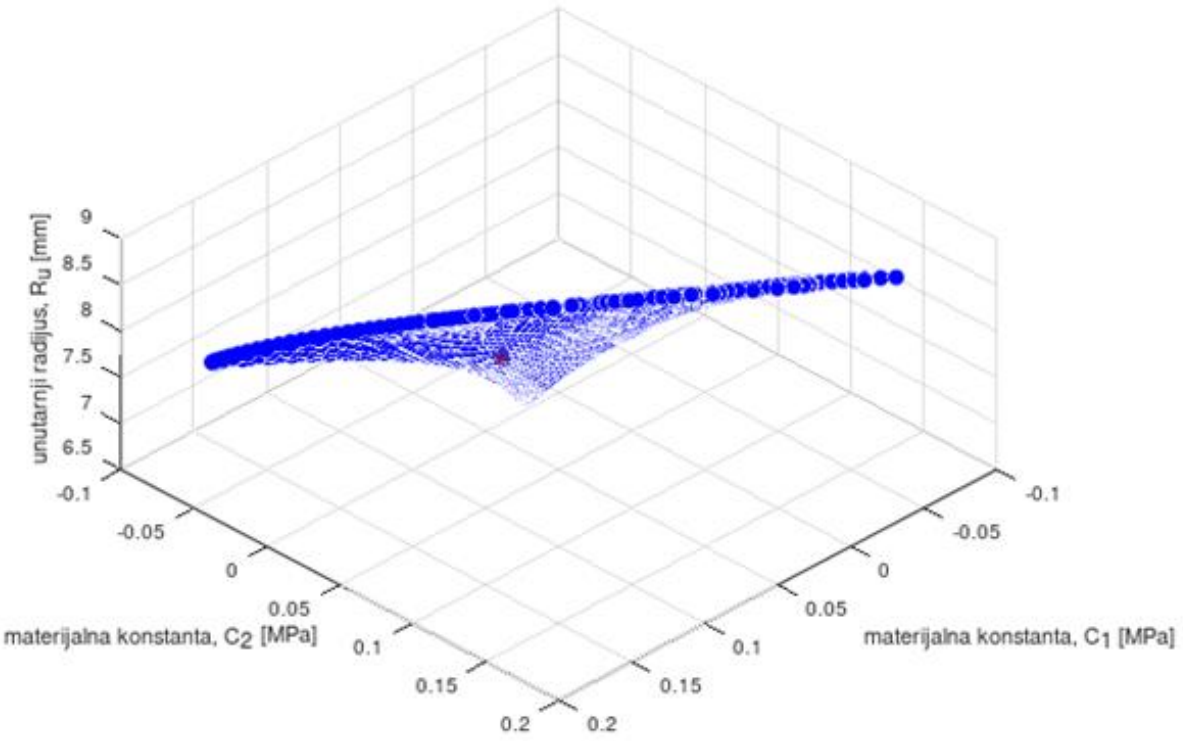
U aksijalnom smjeru nema razlike među rezultatima.

8.3.4 Ovisnost neopterećene geometrije o materijalnim parametrima

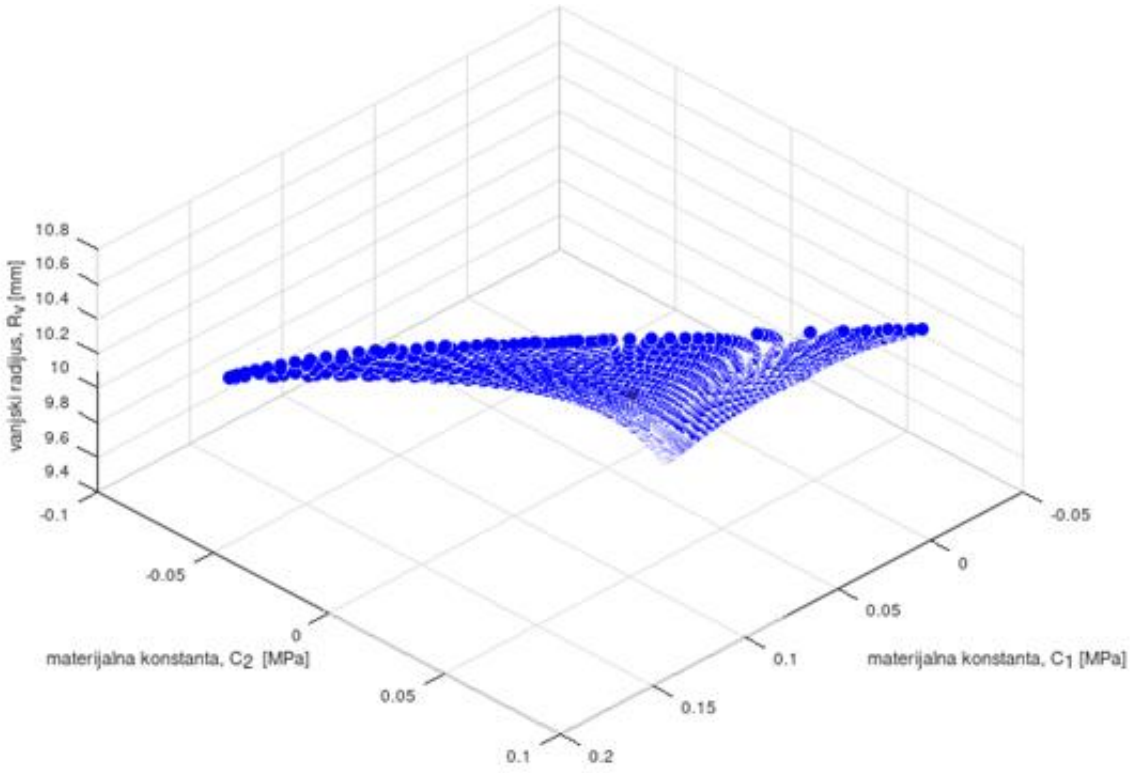
U svrhu dobivanja matrice s materijalnim parametrima, vrijednosti istezanja ponovno imaju raspon kao što je navedeno u 8.2.4 što znači su ovdje dvije matrice veličine 50x50 elemenata. Materijalni parametri dolaze u paru, što znaci da parametar na mjestu $C_1[\mathrm{i},\mathrm{j}]$ odgovara parametru na mjestu $C_2[\mathrm{i},\mathrm{j}]$ što uvelike olakšava računanje te će moći biti napravljeno samo 2500 kombinacija. Grafovi ovisnosti prikazani su u nastavku.

Ukoliko se kombiniraju obje materijalne konstante, rezultati će biti prikazani u trodimenzionalnom grafu gdje su na horizontalnim osima vrijednosti materijalnih parametara, a vodoravna os predstavlja vrijednosti neopterećene geometrije za kombinacije parametara. Potrebno je napomenuti da su vrijednosti neopterećene geometrije ograničene da ne mogu biti veće od vrijednosti dimenzija opterećene geometrije.

Slika 8.23 prikazuje ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalim konstantama. Crvenom točkom prikazana je pozicija prethodno izračunate vrijednosti unutarnjeg radijusa za točne materijalne parametre. Istu stvar prikazuje Slika 8.24, no ovdje se umjesto o unutarnjem radi o vanjskom radijusu neopterećene geometrije.



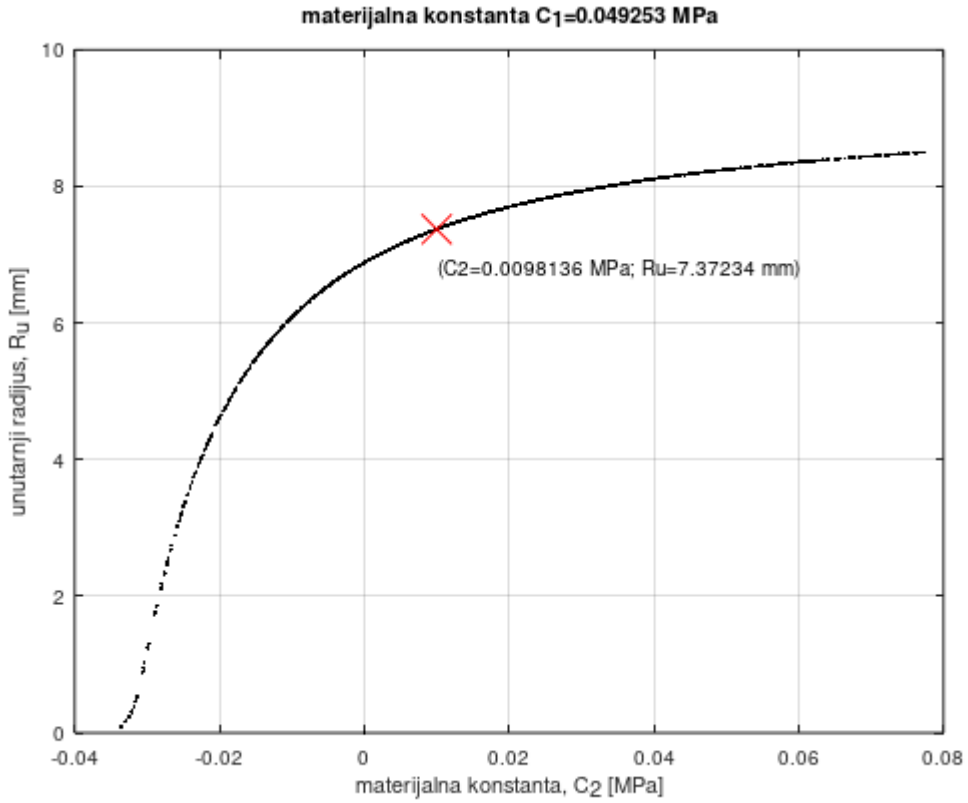
Slika 8.23. Ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnim konstantama



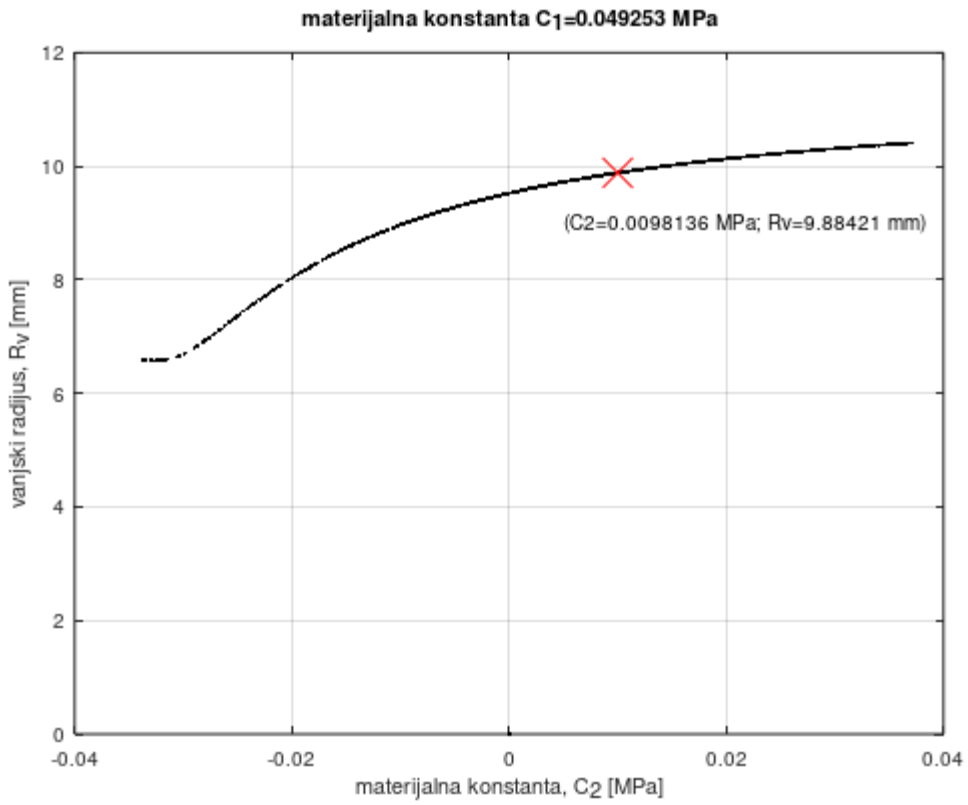
Slika 8.24. Ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnim konstantama

Kako bi bio ispitan utjecaj samo jednog od materijalnih parametara na dimenzije neopterećene geometrije, jedan od materijalnih parametara se varira, a drugi ima konstantnu vrijednost i to onu koja je zadana kao početna vrijednost prilikom proračuna.

Slika 8.25 i Slika 8.26 prikazuju ovisnost unutarnjeg odnosno vanjskog radijusa kada je materijalna konstanta C_1 konstantna te se varira C_2. Ponovno je crvenom oznakom „X“ obilježena pozicija točne vrijednosti za zadani problem.

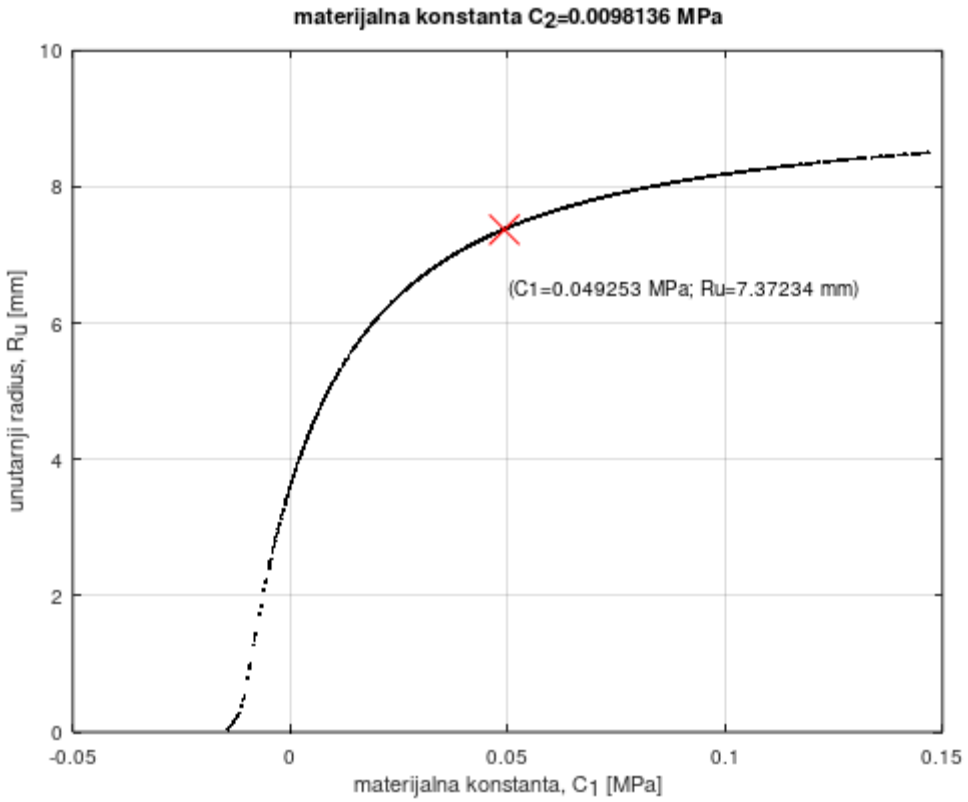


Slika 8.25. Ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti C_2

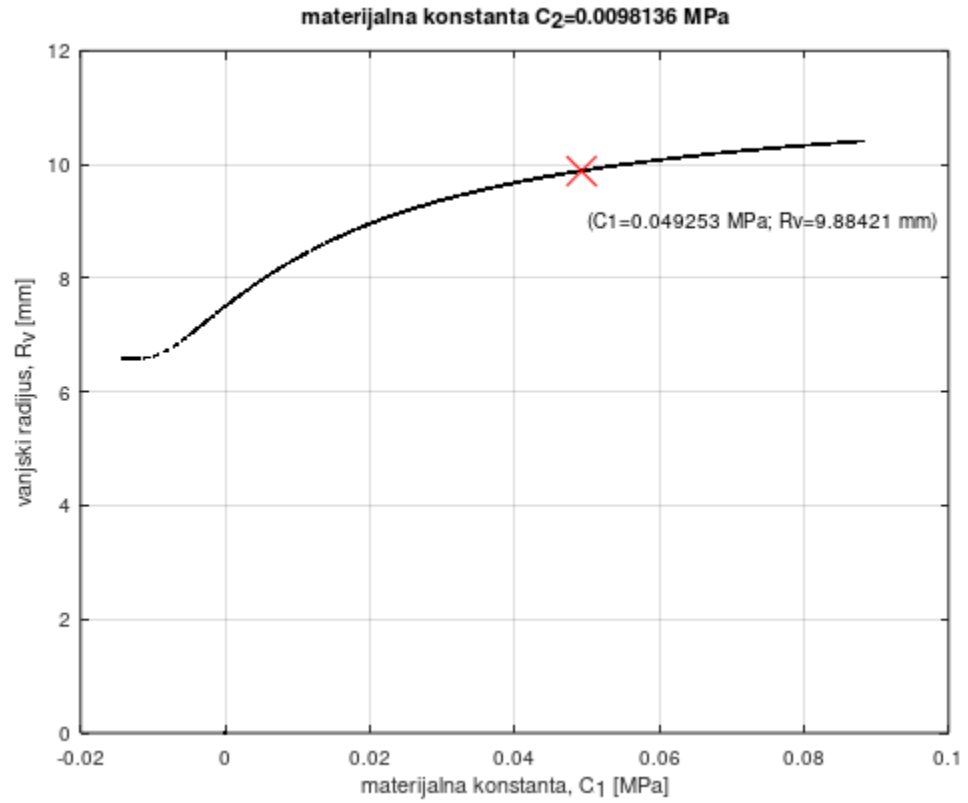


Slika 8.26. Ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti C_2

Slika 8.27 i Slika 8.28 prikazuju ovisnost unutarnjeg i vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti C_1 koja je varirana, dok je vrijednost C_2 konstanta. Ponovno je crvenim „X“ obilježena pozicija točne vrijednosti.



Slika 8.27. Ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti C_1

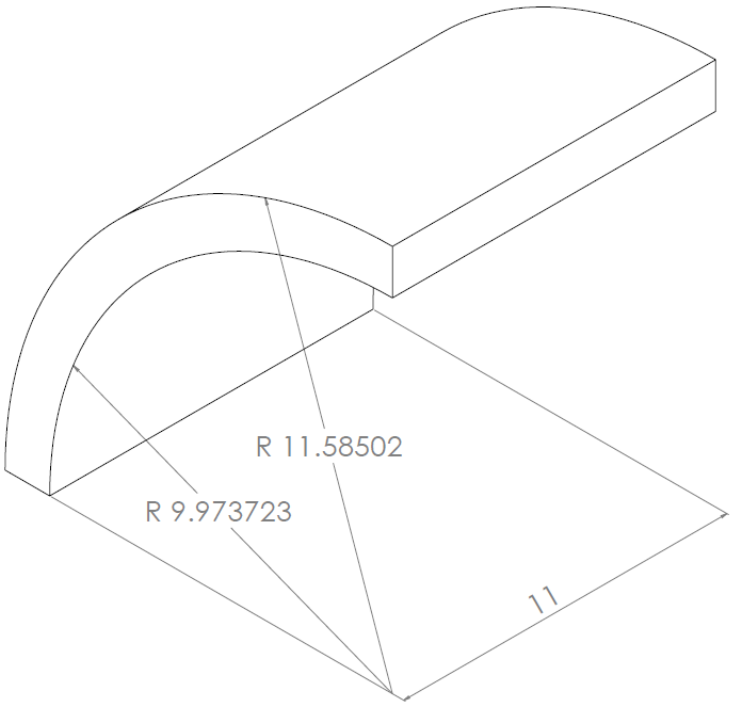


Slika 8.28. Ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnoj konstanti C_1

8.4 Opterećenje krvne žile aproksimirane *Holzapfel–Gasser–Ogden* materijalnim modelom na predistezanje i tlak

8.4.1 Poznati podaci u opterećenom stanju arterije

Kao i dosad, poznate su vrijednosti veličine modela tj. geometrija, konstante materijalnog modela te opterećenje. Gabarite prikazuje Slika 8.29, materijalne konstante iznose: $C_1 = 0{,}055$ MPa, $k_1 = 0{,}0373$ MPa, $k_2 = 22$, $\kappa = 0$, kut kolagenskih vlakana: $\alpha = 45°$, tlak je kao i dosad jednak tlaku sistole: $P = 120$ mmHg $= 0{,}016$ MPa, a predistezanje iznosi $\lambda_z = 1{,}1$.



Slika 8.29. Dimenzije opterećene arterije

8.4.2 Izračun dimenzija neopterećene arterije

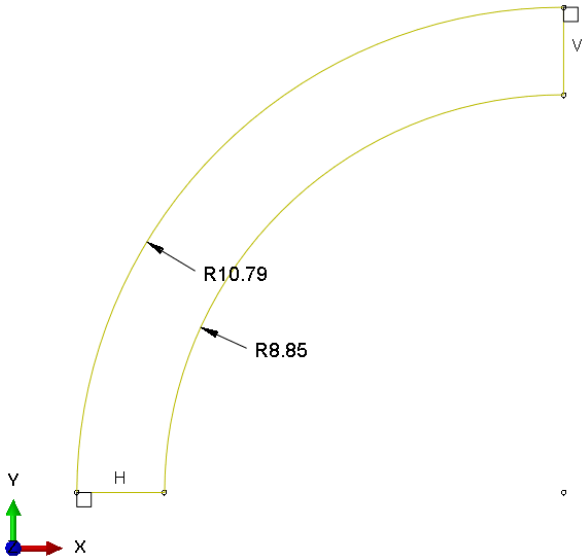
Implementiranjem prethodno izvedenih jednadžbi u program *Octave* dobiva se veličina neopterećene geometrije kako prikazuje Tablica 8.7.

Tablica 8.7. Dimenzije neopterećene arterije HGO materijalnog modela

Unutarnji radijus R_u [mm]	8,84768
Vanjski radijus R_v [mm]	10,7932
Duljina L [mm]	10

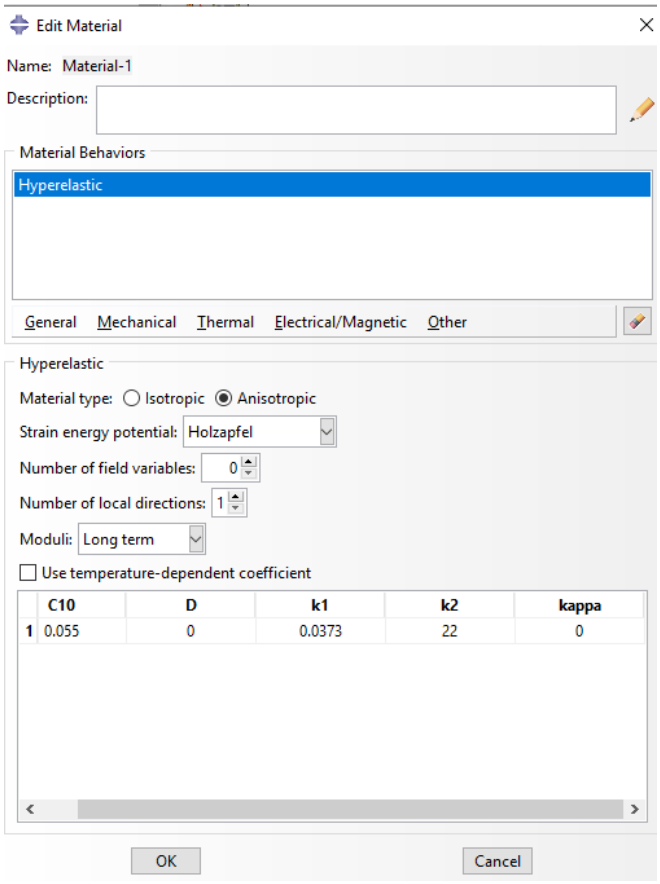
8.4.3 Simulacija i usporedba rezultata

Ponovno radi provjere rezultata napravljena je simulacija. Model s dimenzijama neopterećene arterije dobivene proračunom napravljen je u *Abaqusu* kako prikazuje Slika 8.30.



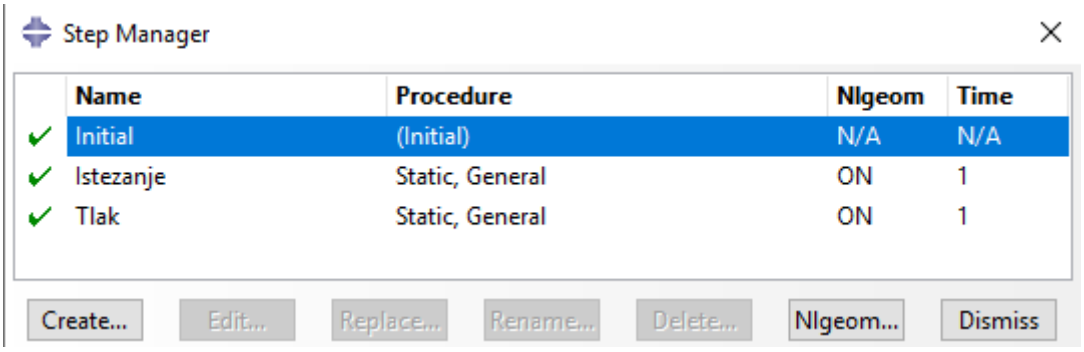
Slika 8.30. Dimenzije neopterećenog modela za simulaciju HGO materijalnim modelom

S obzirom da je ponovno promijenjen materijalni model, Slika 8.31 prikazuje zadavanje materijalnih konstanti u programu.



Slika 8.31. Materijalna svojstva HGO modela

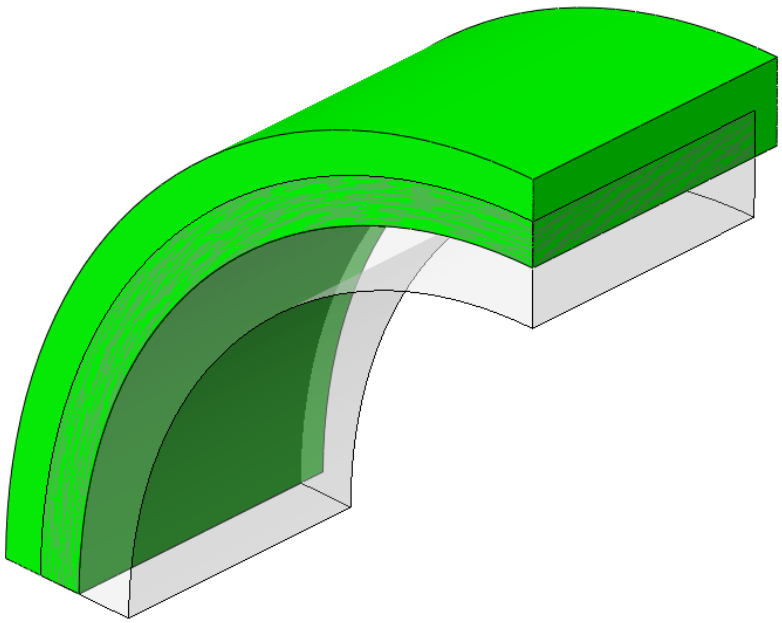
U svrhu približavanja stvarnim uvjetima gdje istezanje prethodi tlačnom opterećenju, napravljena su dva koraka (Slika 8.32) koja će slijediti odgovarajućim redoslijedom.



Slika 8.32. Predistezanje zadajemo prije tlaka

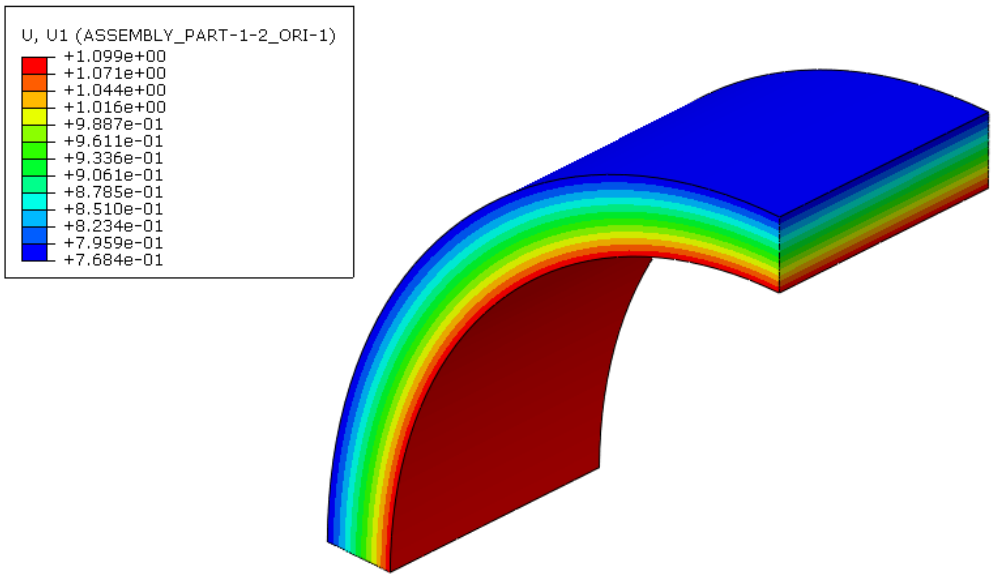
Rubni uvjeti simetrije u cirkularnom i aksijalnom smjeru te produljenje u aksijalnom smjeru zadani su u koraku *'Istezanje'*. Tlak (16 kPa) je zadan u koraku *'Tlak'*. S obzirom da se ovdje radi o anizotropnom materijalnom modelu koji nema jednaka svojstva u svim smjerovima, morao je biti napravljen lokalni koordinatnu sustav koji se ne poklapa s globalnim pa je potrebno paziti u kojem koordinatnom sustavu se zadaju rubni uvjeti. S obzirom da je dogovoreno da zadani tlak uvijek djeluje okomito na površinu, kod njega ne treba biti zadan koordinatni sustav.

Slika 8.33 prikazuje međusobni odnos modela neopterećene i opterećene arterije. Ponovno je došlo do izduživanja i širenja te stanjivanja modela.

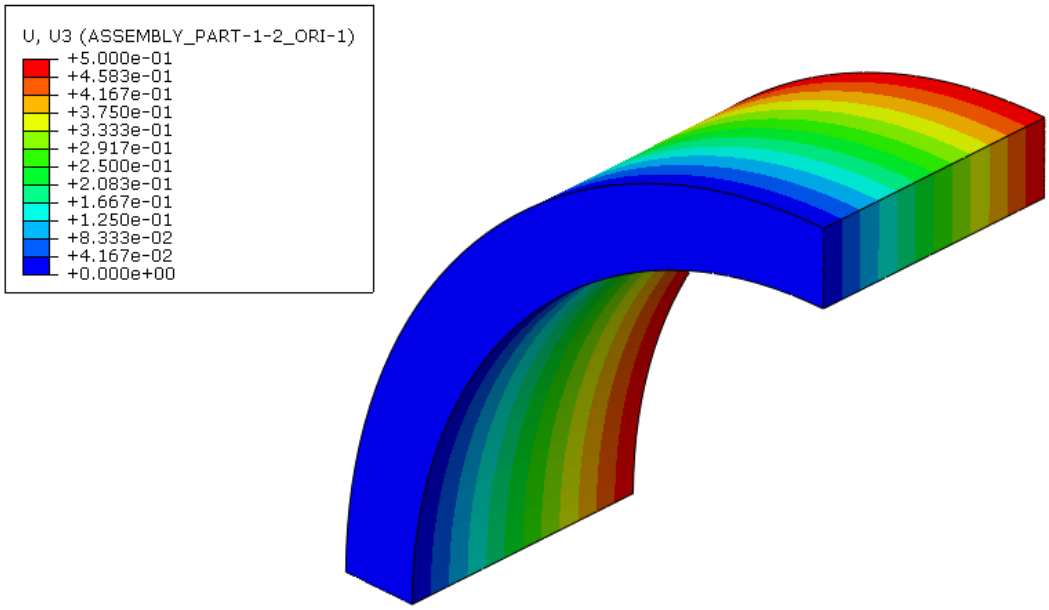


Slika 8.33. Odnos opterećene (zeleno) i neopterećene (prozirno) arterije

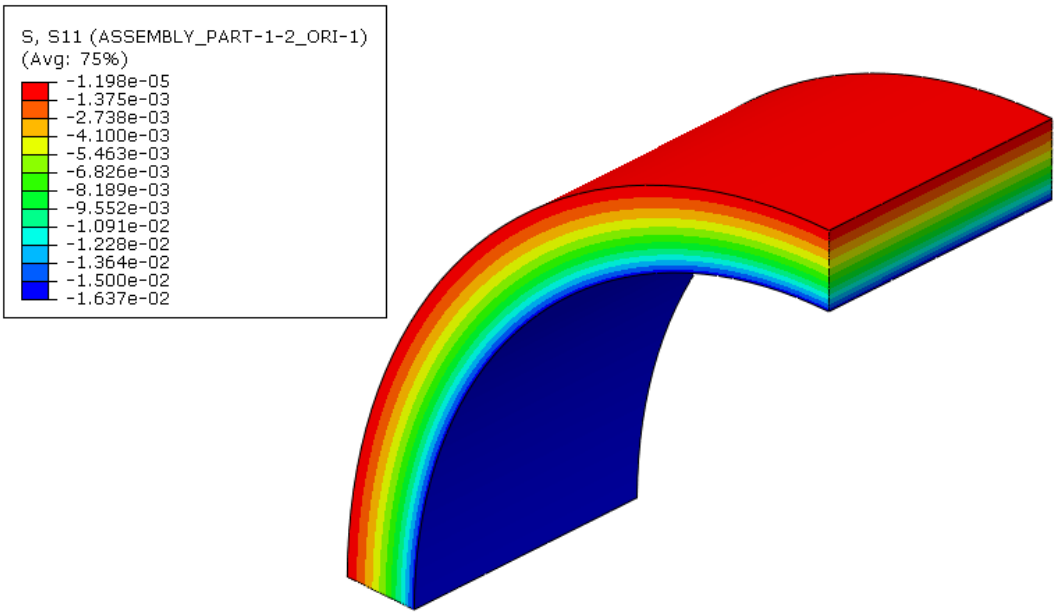
Slika 8.34 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka po arteriji, Slika 8.35 prikazuje raspodjelu aksijalnog pomaka po arteriji gdje je vidljivo da je rub na kojem je zadan rubni uvjet simetrije ostao nepomaknut (plavo), a suprotan rub gdje je zadan pomak od $0{,}5\ \mathrm{mm}$ se toliko i pomaknuo (crveno). Slika 8.36 predstavlja raspodjelu tlaka po modelu. Na unutarnjoj stijenci, gdje je zadan tlak od $0{,}016\ \mathrm{MPa}$ ima neznatnu grešku te sada iznosi $0{,}01637\ \mathrm{MPa}$, a negativan predznak dolazi uslijed orijentacije koja je suprotna usmjerenju radijalne osi koordinatnog sustava. Na vanjskoj stijenci se tlak može aproksimirati nulom.



Slika 8.34. Raspodjela radijalnog pomaka u_r po modelu arterije za HGO materijalni model



Slika 8.35. Raspodjela aksijalnog pomaka u_z za HGO materijalni model



Slika 8.36. Raspodjela radijalnog σ_r naprezanja po modelu arterije za HGO materijalni model

Očitavanjem radijalnog i aksijalnog pomaka na prethodno predstavljenim točkama te zbrajanjem s vrijednostima neopterećene geometrije dobivene proračunom dolazi se do rezultata koje prikazuje Tablica 8.8.

Tablica 8.8. Dimenzije opterećene arterije dobivene iz simulacije HGO materijalnog modela

Unutarnji radijus R_u [mm]	9,9464
Vanjski radijus R_v [mm]	11,5616
Duljina L [mm]	11

Uspoređujući vrijednosti poznate na početku i rezultate proračuna i simulacije dobivaju se greške koje iznose:

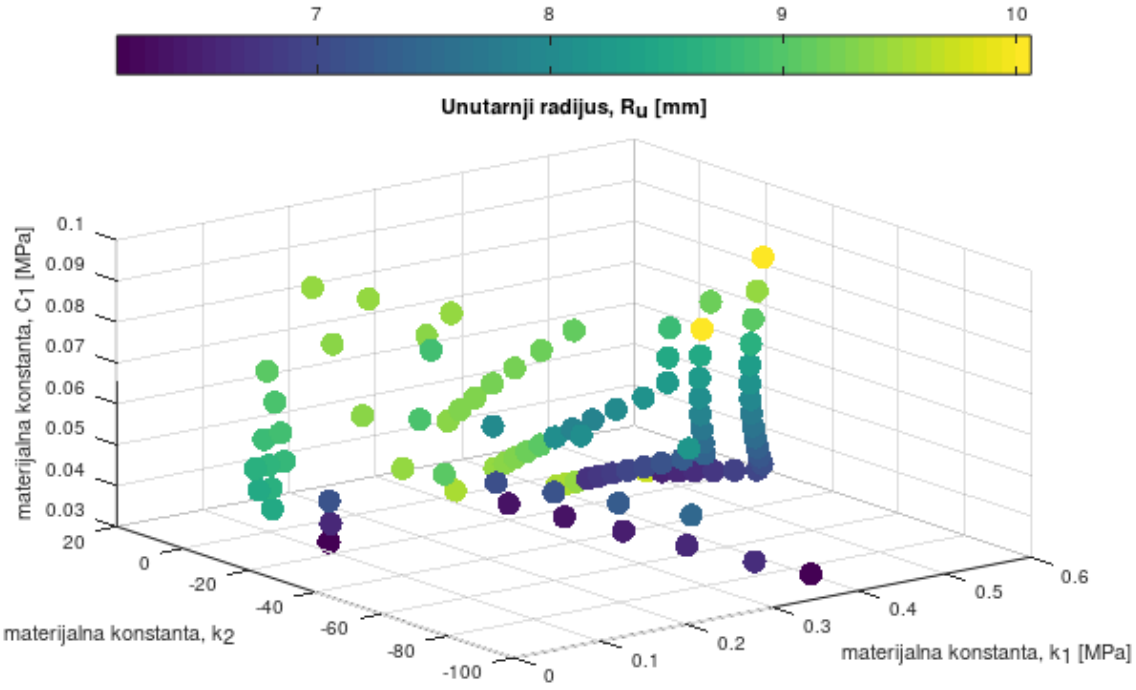
- za unutarnji presjek: $\Delta R_u = 0{,}027$ mm, tj. 0,27%,
- za vanjski presjek: $\Delta R_v = 0{,}023$ mm, tj. 0,2%

Kao i u prethodnim primjerima, vrijednosti aksijalne duljine se u potpunosti podudaraju.

8.4.4 Ovisnost neopterećene geometrije o materijalnim parametrima

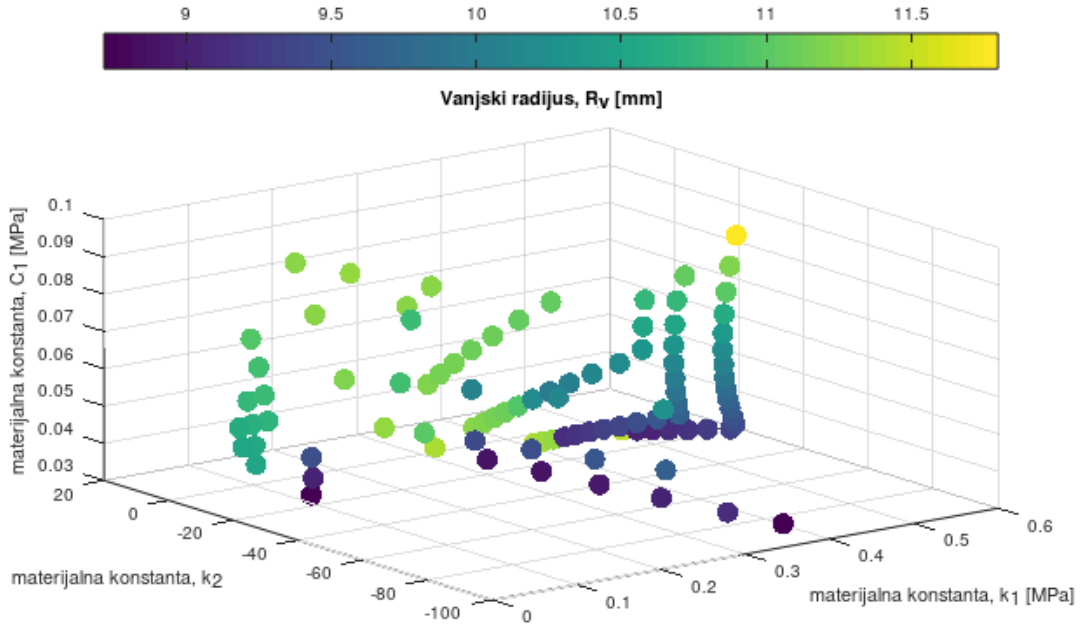
Kao i u prethodnim primjerima, i ovdje je prikazan utjecaj materijalnih parametara na iznose neopterećene geometrije. Korišteni raspon istezanja u aksijanom smjeru je od 1,05 do 1,15, a za radijalni smjer istezanje ima raspon od 1 do 1,2. Slika 8.37 prikazuje ovisnost vrijednosti unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnim parametrima gdje su na osima

postavljeni materijalne konstante, a vrijednost radijusa je prikazana bojom čija se legenda vidi iznad dijagrama.



Slika 8.37. Ovisnost unutarnjeg radijusa neopterećene geometrije o materijalnim konstantama

Slika 8.38 prikazuje istu ovisnost, samo se ovdje radi o vrijednostima vanjskog radijusa neopterećene geometrije.



Slika 8.38. Ovisnost vanjskog radijusa neopterećene geometrije o materijalnim konstantama

9 Zaključak

U radu je prikazano određivanje dimenzija neopterećene geometrije arterija za tri materijalna modela: *Neo-Hooke*, *Mooney-Rivlin* i *Holzapfel-Gasser-Ogden* (HGO). Također, svi proračuni su provjereni simulacijom metodom konačnih elemenata te su rezultati uspoređeni i izračunata je greška. Može se zaključiti da se prikazanim postupkom dobiva dovoljna točnost izračuna vrijednosti neopterećene geometrije uz poznate materijalne parametre odabranog materijalnog modela te uz poznate vrijednosti dimenzija opterećene geometrije i opterećenja tj. krvnog tlaka dobivenih medicinskom dijagnostikom. Isto tako, može se primijetiti da je kod svih modela došlo do smanjenja unutarnjeg i vanjskog radijusa u odnosu na opterećeno stanje. Točnije veća je promjena na unutarnjem radijusu nego na vanjskom čime se povećava debljina stijenke neopterećenog modela što je i logično jer je pretpostavljen uvjet nestlačivosti. Zanimljivo je uočiti da tlak ima veći utjecaj na arterije od aksijalnog predistezanja uzrokovanog elastinom koje u opterećenom stanju arterije nastoji smanjiti promjer arterije.

Također, u radu je prikazan utjecaj materijalnih parametara na dimenzije neopterećene arterije.

Za *Neo-Hooke* materijalni model može se vidjeti da se variranjem materijalne konstante C_1 unutarnji i vanjski radijus neopterećene geometrije ponašaju slično, tj. debljina stijenke arterije je gotovo konstantna i neovisna o materijalnoj konstanti.

Kod *Mooney-Rivlin* materijalnog modela konstante C_1 i C_2 imaju gotovo jednak utjecaj na promjenu geometrije iz opterećenog u neopterećeno stanje, no mnogo više utječu na promjenu unutarnjeg radijusa nego vanjskog. Pogotovo značajan utjecaj imaju negativne vrijednosti konstanti.

HGO materijalni model pokazuje blago veći utjecaj konstante C_1 na geometriju od ostale dvije materijalne konstante, no s obzirom da je jednadžba materijalnog modela prilično kruta, vrijednosti neopterećene geometrije se ne mogu izračunati za veća odstupanja jedne od konstanti, materijalne konstante uvijek moraju dolaziti u parovima što otežava prepoznavanje najutjecajnije materijalne konstante.

LITERATURA

[1] Peter R. Hoskins, Patricia V. Lawford, Barry J. Doyle, Cardiovascular Biomechanics, Springer, 2017.g.

[2] Piaras Kelly, Solid Mechanics Lecture Notes, The University of Auckland, 2013.g.

[3] Ivo Alfirević, Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Golden marketing, 2003.g.

[4] Toni Škugor, Diplomski rad, FSB, 2018.g.

[5] Jurica Sorić, Metoda konačnih elemenata, Golden marketing, 2004.g.

[6] L. Cardamone, A. Valentín, J. F. Eberth, J. D. Humphrey, Origin of axial prestrech and residual stress in arteries, Springer, 2009.g.

[7] https://brilliant.org/wiki/newton-raphson-method/(24.11.2020.)

[8] G. A. Holzapfel, R. W. Ogden, Biomechanics: Trends in Modeling And Simulation, Springer, 2017.g.

[9] M.Smoljkić. J. Vander Sloten, P. Segers, N. Famaey, Non-invasive, energy-based assessment of patient-specific material properties of arterial tissue, Biomechajnics and Modeling in Mechanobiology, 2015.g., 1045-2056. str.