# Geometrijske teme u nastavi matematike

**Ivančičević, Anita**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:014406

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-03-29**



*Repository / Repozitorij:*

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science









Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Anita Ivančičević**

# Geometrijske teme u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Anita Ivančičević**

# Geometrijske teme u nastavi matematike

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2017.

# Sadržaj

**Uvod** **1**

**1 Uloga geometrije u nastavi matematike** **2**

1. Povijesni pregled . . . . . 2

2. Zašto učiti geometriju? . . . . . 3

3. Geometrija u kurikulumu . . . . . 6

4. Geometrijsko mišljenje . . . . . 8

**2 Geometrijske teme u nastavi matematike u osnovnim školama** **12**

1. Razredna nastava . . . . . 13

2. Predmetna nastava . . . . . 14

   2.1. Peti razred . . . . . 14

   2.2. Šesti razred . . . . . 17

   2.3. Sedmi razred . . . . . 20

   2.4. Osmi razred . . . . . 22

**3 Geometrija u nastavi - primjeri iz prakse** **25**

1. Prepoznavanje oblika . . . . . 25

2. Simetrija . . . . . 27

3. Kutovi . . . . . 29

4. Površina . . . . . 31

   4.1. Površina kvadrata i površina pravokutnika . . . . . 34

   4.2. Površina paralelograma . . . . . 35

**Literatura** **36**

**Sažetak** **38**

**Summary** **39**

**Životopis** **40**

# Uvod

U radu su opisane geometrijske teme u nastavi matematike te problemi s kojim se nastavnici susreću prilikom obrade geometrijskih sadržaja.
U prvom poglavlju opisan je povijesni pregled geometrije kao grane matematike te samo pojmovno određenje geometrije. Naglasak je stavljen na ulogu geometrije u nastavi matematike te su navedene činjenice koje idu u prilog potrebi za podučavanjem geometrije u školama. Navedene su osnovne razlike i sličnosti u kurikulumima diljem svijeta te je opisan pojam geometrijskog mišljenja i važnost razvitka istog kod učenika.
U drugom poglavlju nalazi se pregled tema i ishoda učenja u Hrvatskoj u osnovnim školama podjeljen prema razinama obrazovanja te su spomenuti ključni pojmovi i navedeni neki od karakterističnih zadataka.
U zadnjem poglavlju opisani su problemi s kojima se učitelji susreću prilikom obrade nekih specifičnih nastavnih tema vezanih uz geometriju. Opisane su aktivnosti prilikom obrade površina nekih geometrijskih likova.

# Poglavlje 1

# Uloga geometrije u nastavi matematike

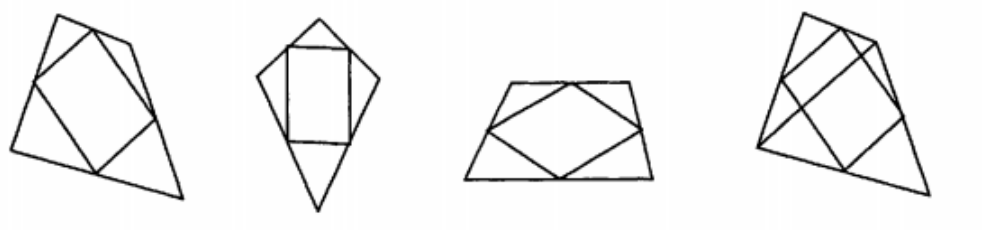
## 1. Povijesni pregled

Geometrija (geo = Zemlja, metria = mjerenje) je grana matematike koja se bavi proučavanjem svojstava i međusobnih odnosa prostornih oblika tj. geometrijskih tijela, površina, pravaca i točaka. Ljudi su oduvijek imali potrebu za korištenjem geometrije pa samim time početci geometrije sežu u prapovijesno doba. Geometrija je bila potrebna za izradu posuđa, za gradnju kuća i hramova... Prema mnogim povjesničarima, matematika se razvila iz geometrije ravnine čiji su važan dio upravo geometrijske konstrukcije. Tijekom povijesti postavljeni su mnogi geometrijski problemi, a mnogi od tih problema ni danas nisu riješeni. Na primjer, kvadratura kruga, duplikacija kocke, trisekcija kuta, samo su neki od spomenutih problema kojima su se matematičari bavili u povijesti i kojim se još uvijek bave. Geometrija se prvobitno razvijala kao induktivna znanost, odnosno znanost u kojoj su se tvrdnje izvodile primjenom indukcije. Prvi precizno postavljen pristup geometriji nalazimo u Euklidovom djelu Elementi sastavljenom od 13 knjiga : knjige 1 - 6 bave se planimetrijom; knjige 7 - 10 aritmetikom i teorijom brojeva u geometrijskoj formi (točnije u knjigama 7 - 9 dana je geometrijska teorija cijelih brojeva, a knjiga 10 posvećena je iracionalnim brojevima); knjige 11 - 13 bave se stereometrijom. U tom djelu Euklid (330. pr. Kr. - 275. pr. Kr.) izlaže sva do tada poznata znanja iz matematike i upravo to djelo se može usporediti s današnjom elementarnom geometrijom. Ta geometrija je prvi primjer deduktivnog sustava. Osnovni objekti euklidske geometrije ravnine su točke i pravci i oni zadovoljavaju grupe aksioma: aksiome incidencije, aksiome uređaja, aksiome metrike, aksiome simetrije te aksiom o paralelama. Aristotel (4. st. pr. Kr.), koji je osnivač formalne logike, dao je teorijske osnove na kojima se mogla zasnovati stroga deduktivnost geometrije. Za drevne grčke matematičare, geometrija je bila najveće dostignuće njihove znanosti, postizanje potpunosti i savršenstva kakvo im niti jedna druga grana znanosti nije mogla priuštiti. Proširili su raspon geometrije na mnoge nove vrste figura, krivulja, površina i tijela. Promijenili su metodologiju iz sistema pokušaja i pogrešaka na logičko zaključivanje. Brojni Grci su imali veliku ulogu u razvoju geometrije. Jedan od njih je Tales (7. st. pr. Kr.) koji je bio prvi grčki matematičar,

astronom i filozof. Danas u nastavi geometrije je neizbježna tema upravo njegov poučak koji kaže da je kut nad promjerom kružnice pravi kut. Od istaknutih grčkih matematičara bitnih za razvoj geometrije svakako treba spomenuti i Platona koji je osnova školu "Akademija" na čijem je ulazu pisalo: "Neka ne ulazi nitko tko ne zna geometriju!" što govori o važnosti geometrije još u ranim vremenima. Poznat je i otkrivanju pravilnih poliedara - Platonovih tijela. To su konveksni poliedri čije su strane pravilni mnogokuti s jednakim brojem vrhova, a svi kutovi među stranama su jednaki. Ima ih točno pet - tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar, ikozaedar.

# 2. Zašto učiti geometriju?

Još u ranom djetinjstvu čovjek postaje svjestan prostora oko sebe. Djeca se igraju s oblicima, uočavaju njihova očita svojstva i prepoznaju veze između njih. Promatraju široku paletu jednostavnih ali i složenih geometrijskih oblika u svakodnevnom okruženju i sami stvaraju jezik potreban za opisivanje istih. Najmlađi uzrasti ulaze u svijet geometrije tako što prepoznaju likove poput kruga, trokuta i kvadrata te počinju razumijevati pojmove poput horizontalno, vertikalno i paralelno, dok se djeca starijih uzrasta zanimaju za mjerenje, položaj i pokret. Samo opisivanje i klasificiranje nisu nužno trivijalni zadaci, štoviše oni vode ka zahtjevnijim zadacima kao što su definiranje i dedukcija. Mjerenje ima neizmjernu praktičnu važnost i vodi učenike ka boljem razumijevanju ideja duljine i kutova te njima povezanih pojmova kao što su površina i volumen. Iako navedeni pojmovi i ideje te njihovo razumijevanje imaju važnu ulogu u obrazovanju učenika, bit geometrije u nastavi matematike najviše se ogleda u dedukciji kao glavnom alatu za dokazivanje rezultata koji su često i jednostavni i iznenađujući. Odličan primjer iz prakse koji ilustrira element iznenađenja je prikazan na Slici 1.1. Od učenika je zatraženo da nacrtaju bilo koji četverokut, označe središta stranica te spoje označene točke kako bi formirali novi četverokut. Uspoređujući mnoge primjere učenici zaključuju da je rezultat uvijek paralelogram. Ovo se može na zanimljiv način učenicima predočiti u programima dinamične geometrije na računalu promatrajući što se događa sa oblikom ukoliko se vrhovi četverokuta pomiču i mijenjaju pozicije.

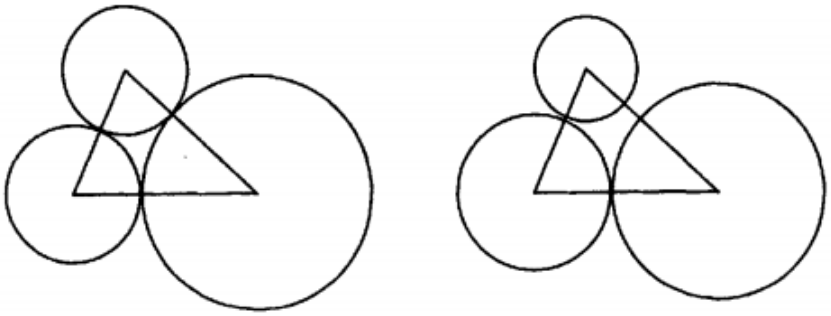


Slika 1.1: Četverokuti u ravnini

Rezultat je sam po sebi učenicima privlačan, no i dokaz koji pojašnjava zašto je to točno ima određenu dozu privlačnosti posebice zbog jednostavnosti argumenata. Geometrijskim problemima je moguće pristupiti na više načina; eksperimentalno ili praktički gdje su problemi riješeni mjerenjem i izračunima, no bit geometrije je u deduktivnom zaključivanju koje

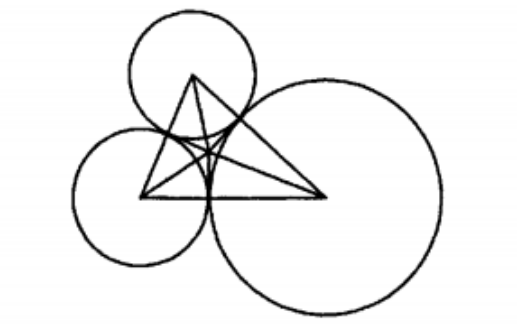
se temelji na geometrijskom razmišljanju i algebarskim operacijama. Unatoč tome često se nameće pitanje treba li geometrija biti implementirana u školski kurikulum i ako da u kojoj mjeri. Argumenti koji idu u prilog ideji da geometrija treba biti zastupljena u nastavi matematike su blisko povezani s razlozima zašto matematika uopće treba biti podučavana.

Zanimljivo je spomenuti da je geometrija u formi bliskog proučavanja Euklidovih Elemenata imala dominantno mjesto u kurikulumu Velike Britanije i bila preduvjet za upis na sveučilišta do kraja devetnaestog stoljeća. Tijekom dvadesetog stoljeća širom svijeta se usvaja ideja da matematika treba biti centralna znanost u poučavanju i da geometrija kao dio matematike ima glavnu ulogu u širem matematičkom kurikulumu, a razlog tome su želja za proširenjem prostorne svijesti i razvijanjem vještina prosuđivanja. Prostorna svijest predstavlja pomalo nejasnu ali svakako bitnu sposobnost opažanja i manipuliranja geometrijskim objektima koja se koristi i u svakodnevnom životu. Primjerice kod sklapanja različitih vrsta polica ili prilikom čitanja zemljopisne karte pa sve do sofisticiranijih aktivnosti kao što su arhitektura, grafički dizajn, navigacija itd. Zanimljiv primjer koji ilustrira mnoge karakteristike geometrije i njezine prednosti u nastavi matematike je prikazan na Slici 1.2. Zadan je problem konstrukcije tri kružnice koje se međusobno diraju pri čemu su zadana njihova središta.



Slika 1.2: Dirajuće kružnice

Lako je konstruirati dvije kružnice koje se diraju: problem je pronaći položaj u kojem se dvije kružnice diraju tako da treća kružnica precizno dira prve dvije. To se može postići eksperimentiranjem za neki trokut koristeći dinamičnu geometriju, ali čim se jedan vrh pomakne konstrukcija više ne odgovara. Potrebno je analizirati problem kako bi se pronašla opća metoda koja će davati točan rezultat neovisno o pomicanju vrhova. Prvi korak je napraviti skicu traženog rješenja kako bi se mogla analizirati ključna svojstva. To je prikazano dodatnim dužinama na Slici 1.3.



Slika 1.3: Dirajuće kružnice - dodatne dužine

Uvjet da se kružnice moraju dirati znači da postoje zajedničke tangente dviju kružnica kroz svaku točku dirališta i da bi određivanje točke sjecišta bio koristan korak u konstrukciji. Spajanje te točke s vrhom trokuta navodi na zaključak da je točka sjecišta tangenti zapravo točka sjecišta simetrale kutova trokuta iz čega se lako zaključuje da je točka sjecišta zapravo središte kružnice upisane trokutu i da su tri točke dirališta kružnica zapravo točke gdje upisana kružnica dira trokut. Koraci u konstrukciji traženih točaka su sljedeći.

- Korak 1. Konstruiraj simetralu dva kuta u trokutu.
- Korak 2. Iz točke sjecišta konstruiraj okomicu na jednu od stranica trokuta.
- Korak 3. Konstruiraj dvije kružnice koje diraju tu točku.
- Korak 4. Konstruiraj treću kružnicu.

Ukoliko je konstrukcija provedena u programima dinamične geometrije pomicanjem trokuta odmah se može provjeriti da je konstrukcija ispravna u svim slučajevima. Ako je konstrukcija izvedena na papiru, koristeći šestar i ravnalo, učenici mogu napraviti više konstrukcija koristeći različite trokute. Rješenje ovog problema zahtjeva pažljiv pristup koji je očigledno ovisan o pozadinskom poznavanju geometrije, točnije o poznavanju svojstava tangente. Mnogi ljudi, posebice oni koji nemaju dobro razvijeno geometrijsko razmišljanje, preferiraju pristupati geometrijskim problemima uz pomoć algebre. Kod problema dirajućih kružnica algebarski pristup daje jednostavnije rješenje koje vodi ka jednostavnijoj konstrukciji. Ako se duljine stranica trokuta označe s $a, b, c$ i polumjeri kružnica sa $x, y, z$, slijede tri jednadžbe:

$$x + y = a, \quad y + z = b, \quad z + x = c$$

Zbrajanje ove tri jednadžbe daje

$$2(x + y + z) = a + b + c \quad \Rightarrow \quad x + y + z = \frac{1}{2}(a + b + c) = s$$

gdje je $s$ poluopseg trokuta. Iz zadnje jednadžbe mogu se izraziti tri polumjera u terminima poluopsega i duljina stranica trokuta:

$$x = s - b, \quad y = s - c, \quad z = s - a.$$

Iz navedenog primjera uočava se važnost geometrije u kurikulumu nastave matematike, prvenstveno zbog toga što ima mnoge karakteristike koje doprinose učenicima u smislu njihova intelektualnog razvoja i matematičkog znanja. Mnogi stručnjaci danas smatraju geometriju najvažnijim faktorom koji omogućuje spremnost čovjeka za osnovno obrazovanje i samoobrazovanje u najrazličitijim granama ljudske djelatnosti. U nastavi geometrije od učenika se uporno teži razvoju intuicije, prostornog i logičkog mišljenja i formiranju njihovih konstruktivno - geometrijskih sposobnosti i navika. Nastava geometrije je značajna s različitih gledišta:

1. logičkog - proučavanje geometrije je izvor i sredstvo aktivnog intelektualnog razvoja čovjeka i njegovih umnih sposobnosti;

2. spoznajnog - pomoću geometrije dijete spoznaje svijet oko njega, njegove prostorne i količinske odnose;

3. primijenjenog - trodimenzionalna euklidska geometrija je osnova koja osigurava čovjekovu spremnost za svladavanje različitih polja i profesija te mu čini dostupnim neprekidno obrazovanje i samoobrazovanje;

4. povijesnog - na primjerima iz povijesti razvoja geometrije prati se ne samo razvoj matematike nego i ljudske kulture u cjelini;

5. filozofskog - geometrija pomaže da se svijet u kojem živimo osmisli, te da se formiraju razvojne naučne pretpostavke o realnom fizičkom prostoru.

Dodatno, učenici razvijaju praktične vještine i stvaraju znanje potrebno za primjenu u svakodnevnim situacijama. To vodi ka sljedećem poglavlju koje govori o tome što učenici trebaju naučiti i odgovara na važnja pitanja o tome kako bi geometrija uopće trebala biti podučavana.

# 3. Geometrija u kurikulumu

Kada se govori o geometriji u matematičkom kurikulumu, postoje mnoga zajendička stajališta u različitim zemljama svijeta, no postoje i razilaženja u mišljenjima po tom pitanju. Hoyles, Foxman i Kuchermann tijekom proučavanja geometrije u matematičkom kurikulumu nailaze na značajan konstrast između primjerice Nizozemske, gdje je geometrija u velikoj mjeri povezana sa svakodnevnim životom i Francuske i Japana gdje je malo veze s stvarnim svijetom. U Engleskoj matematički kurikulum je određen Engleskim nacionalnim kurikulumom. Kako bi odgovorili na rastuću brigu po pitanju geometrije, trenutna verzija kurikuluma u Engleskoj jasno određuje geometrijski sadržaj koji je potrebno poznavati s obzirom na razinu obrazovanja na kojoj se učenici nalaze. Primjerice, za učenike između

11 i 16 godina, navedene su sljedeće obavezne teme: svojstva trokuta i drugih pravocrtnih oblika, svojstva kruga, specificiranje transformacija, svojstva ransformacija, koordinate, vektori, mjere i konstrukcije. Kurikulum ne određuje točne definicije, teoreme i konstrukcije koje učenike treba svladati. Tri tipična ishoda učenja su:

- prisjetiti se definicije specijalnih tipova pravocrtnih oblika, uključujući kvadrat, trokut, paralelogram, trapez i romb;
- dokazati i primjeniti teorem o obodnom i središnjem kutu;
- koristeći ravnalo i šestar konstruirati jednakostraničan trokut, simetralu kuta, okomicu na pravac i pravac paralelan s danim pravcem.

Uspoređujući kurikulum u Engleskoj s kurikulumom u Americi nailazi se na dokument kojim je reguliran nastavni plan i program pod imenom Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM (1989) te njegovu inačicu Principles and Standards for School Mathematics, NCTM (2000b). Iako ne tako detaljno kao Engleski nacionalni kurikulum, kurikulum u Americi također sadržava isti opseg tema i naglasak je stavljen na jednake stvari. Za razliku od Engleske gdje geometriji nije eksplicitno dano mjesto u kurikulumu, u Americi se geometrija smatra velikom prednošću za razvoj matematičkog prosuđivanja. U Hrvatskoj geometrija je implementirana u nastavu matematike od samog početka obrazovanja u smislu prepoznavanja likova te jednostavnih konstrukcija čija je svrha razvoj fine motorike pa sve do fakultetske razine obrazovanja gdje se obrađuju najkompleksnije teme iz geometrije. Nastavni plan i program se ne razlikuje puno od onog i Engleskoj iako je uočeno da u ishodima učenja postoji malo poveznica između geometrijskog znanja i stvarnog fizičkog svijeta te primjene na njega. Unatoč tome što postoji mnogo poveznica između nastavnih planova diljem svijeta, javljaju se i varijacije po pitanju praktičkog pristupa te dokaza i primjena što rezultira razlikama u prenošenju samog geometrijskog znanja. Objekti na kojima se bazira geometrija u nastavi matematike su:

- poligoni i njihova svojstva, s naglaskom na trokut, četverokut i pravilne poligone,
- krug i njegova svojstva povezana s tetivama, polumjerom i kutovima,
- 3D figure poput sfere, valjka, stožca,
- druge krivulje poput parabole, elipse i hiperbole i njihova svojstva.

Prva dva od navedenih objekata su uvršteni u većinu školskih kurikuluma dok se uloga trećeg i četvrtog navedenog razlikuje od države do države. Za uspješno učenje geometrije potrebno je imati činjenično znanje i sposobnost uočavanja posebnih svojstava koja dovode do rješenja, a upravo razvoj toga i jeste glavna uloga geometrije koja se kristalizira u svim kurikulumima. Prvi dodir učenika s geometrijom usko je povezan sa Van Hieleovom ranom fazom vizualizacije i samim početcima analize i dedukcije kroz ispitivanje svojstava oblika i klasificiranje istih. Do 11. godine djeca se pretežito bave prepoznavanjem oblika i pravilnim

imenovanjem te korištenjem pravilnog vokabulara za opisivanje svojstava i položaja, no uz to uče mjeriti duljine i kutove. Mjerenje igra veliku ulogu u eksperimentiranju s geometrijom: mjerenje duljine se razvije prije nego što se krene na kompleksnije strukture poput mjerenja kutova, površina i volumena, no i samom mjerenju prethodi usporedba u smislu uspoređivanja dvaju oblika samo vizualizacijom bez korištenja ikakvih pomagala. Isto vrijedi i za spomenute kompleksnije strukture. Većina matematičkih aktivnosti spaja mnoge različite ideje tako da zadaci i problemi često nisu samo geometrijski nego uključuju i druge aspekte poput brojanja, računanja i u kasnijoj fazi algebarskih operacija. Koliko god je važno usredotočiti se na specifične ideje, toliko je bitno zadatke i probleme u nastavi matematike stavljati u kontekst koji je učenicima razumljiv i lako predočiv.

# 4. Geometrijsko mišljenje

Geometrijskim mišljenjem bavili su se Nizozemci Pierre van Hiele i Dine van Hiele-Geldof. Primjetivši da njihovi učenici imaju problema sa učenjem geometrije, Dina i Pierre izgrađuju teoriju o tome što se događa u ljudskom mozgu od trenutka kada on postaje sposoban da samo prepoznaje neke geometrijske oblike, pa do trenutka kada je sposoban da izvede formalne dokaze za tvrdnje koje opisuju osobine tih objekata. Prema njihovoj teoriji, svaka osoba je na određenoj razini geometrijskog mišljenja, a postignuta razina ne ovisi o kronološkoj dobi ili količini znanja. Razine geometrijskog mišljenja prikazuje Tablica 1.1.

| RAZINA | OBJEKT MIŠLJENJA | PROIZVOD MIŠLJENJA |
|---|---|---|
| 0. VIZUALIZACIJA | oblici i njihov izgled (čemu su nalik) | klase ili grupe oblika koji „izgledaju slično“ |
| 1. ANALIZA | klase oblika (umjesto pojedinačnih oblika s razine 0) | svojstva geometrijskih oblika |
| 2. NEFORMALNA DEDUKCIJA | svojstva geometrijskih oblika | odnosi među svojstvima geometrijskih oblika |
| 3. DEDUKCIJA | odnosi među svojstvima geometrijskih oblika | deduktivni aksiomatski sustavi geometrije (ravnine i prostora) |
| 4. STROGOST | deduktivni aksiomatski sustavi geometrije (ravnine i prostora) | uporaba različitih aksiomatskih sustava geometrije(euklidska i neeuklidska geometrija) |

Tablica 1.1: Razine geometrijskog mišljenja prema van Hieleu

Na samom početku obrazovanja tj. u razrednoj nastavi učenici se uglavnom nalaze na nultoj razini, dok na kraju osnovnoškolskog obrazovanja većina učenika ne prelazi drugu razinu. Učenička postignuća i ishodi učenja propisani Nacionalnim okvirnim kurikulumom

formirani su u skladu s van Hielovim razinama geometrijskog razmišljanja. Kako postoji pet razina razmišljanja, supružnici van Hieel preporučuju pet faza s postupcima čiji je cilj pomoći učenicima u svladavanju danih faza. To su faze:

1. **Faza informiranja** - u ovoj fazi se učenici upoznaju sa materijalima te učitelj uočava što su učenici do tada svladali o određenoj temi te ih upoznaje sa temom koju će obrađivati;

2. **Faza usmjerenog vođenja** - učenicima se daje da nešto prave, mjere ili obavljaju slične praktične zadatke čija je svrha otkrivanje odnosa koji do tada nisu poznati;

3. **Faza objašnjavanja** - učenici pokušavaju sami objasniti ono što su uočili kroz praktični rad, a nakon toga ih učitelj upućuje u pravilnu terminologiju;

4. **Faza slobodnog usmjeravanja** - faza u kojoj se rješavaju konkretni problemi;

5. **Faza integriranja** - faza u kojoj se objedinjuju prethodna znanja.

U [2] su prikazana tipična ponašanja učenika na određenog razini što učiteljima može olakšati posao u prepoznavanju razine na kojoj se učenik nalazi. Aktivnosti za učenike trebaju biti prilagođene njima, a tek nakon što se odredi kojoj razini pripada učenik, moguće je organizirati aktivnosti primjerene njemu. Za ilustraciju, Tablica 1.2 i Tablica 1.3 navode primjere ponašanja učenika u fazi vizualizacije i u fazi analize.

| Razina 0 - vizualizacija | |
|---|---|
| TIPIČNO GEOMETRIJSKO PONAŠANJE UČENIKA | UTJECAJ NA NASTAVU OBLIKA I PROSTORA |
| Učenici: | U nastavu treba uključiti dovoljno: |
| - često koriste nevažna vizualna svojstva (npr. boju) pri prepoznavanju geometrijskih tijela te njihovu uspoređivanju, klasificiranju i opisivanju, | - učeničkih aktivnosti s mnogo sortiranja i klasificiranja, |
| - obično se pozivaju na vizualne prototipove tijela i lako se zbunjuju orijentacijom tijela (npr. kocku koja nije prikazana u standardnom položaju ne prepoznaju kao kocku,) | - raznolikih primjera oblika kako njihove nebitne osobine ne bi previše dobile na važnosti, |
| - nisu sposobni pojmiti beskonačno mnogo varijacija određenog tipa geometrijskog tijela (npr. u terminima njegove orijentacije i oblika). | - učeničkih aktivnosti koje se fokusiraju na specifične osobine ili svojstva oblika kako bi učenici razvijali razumijevanje geometrijskih svojstava i prirodno ih počeli koristiti. |

Tablica 1.2: Geometrijsko ponašanje učenika i moguć utjecaj na nastavu oblika i prostora na razini vizualizacije

Kao što je vidljivo iz Tablice 1.2 učenici na razini vizualizacije svoje misli baziraju isključivo na osnovu percepcije i na toj osnovi i donose odluke. Učenici su u stanju prepoznati geometrijske likove poput trokuta, četverokuta ili kruga ali svojstva im nisu poznata dok na razini analize vide oblike kao skup svojstava te su u stanju naučiti pojmove kojim ih opisuju, ali ih još uvijek ne mogu povezati. Na ovoj razini učenici još uvijek ne mogu odrediti koja svojstva nekog oblika su potrebna, a koja dovoljna da ga opišu. Znanstvene teorije poput van Hielove teorije o geometrijskom mišljenju temelj su većine nastavnih kurikuluma diljem svijeta. U sljedećem će poglavlju biti prikazano na koji način je geometrija zastupljena u nastavi matematike u osnovnim školama u Republici Hrvatskoj.

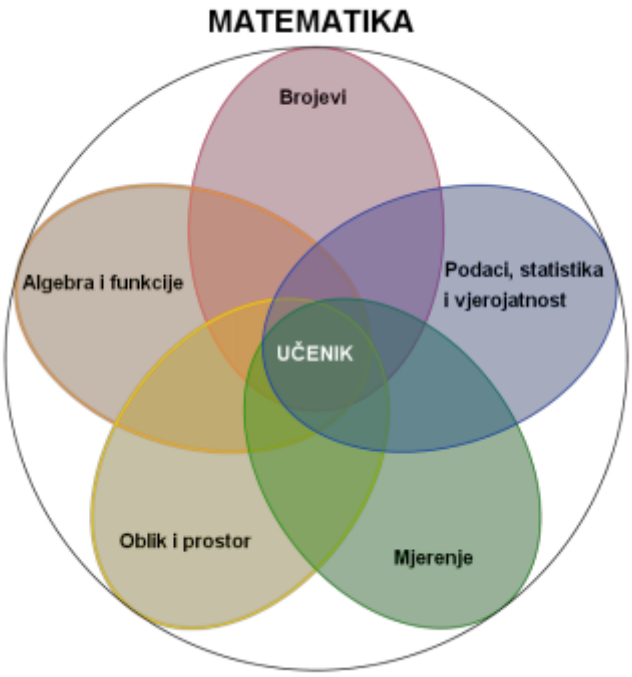
| Razina 1 - analiza | |
|---|---|
| TIPIČNO GEOMETRIJSKO PONAŠANJE UČENIKA | UTJECAJ NA NASTAVU OBLIKA I PROSTORA |
| Učenici: | U nastavu treba uključiti dovoljno: |
| - eksplicitno uspoređuju tijela u terminima njihovih bitnih svojstava | - osmisliti dovoljno učeničkih aktivnosti fokusiranih na geometrijska svojstva oblika, a ne samo na njihovo prepoznavanje |
| - izbjegavaju inkluzije među različitim klasama tijela (npr. kocku i kvadar smatraju disjunktnim klasama, odnosno smatraju da nemaju zajedničkih elemenata) | - prepoznati i iskoristiti činjenicu da uvođenjem novih geometrijskih koncepata raste broj svojstava oblikai |
| - sortiraju tijela s obzirom na samo jedno svojstvo (npr. s obzirom na svojstva strana) | - ideje primjenjivati na cijele klase oblika (npr. sve prizme), a ne na pojedinačne modele. |

Tablica 1.3: Geometrijsko ponašanje učenika i moguć utjecaj na nastavu oblika i prostora na razini anallize

# Poglavlje 2

# Geometrijske teme u nastavi matematike u osnovnim školama

U ovom poglavlju navedeni su omjeri geometrije i drugih nastavnih tema u osnovnoj školi te je naglasak stavljen na ishode učenja te učenička postignuća koja su propisana u Republici Hrvatskoj Nacionalnim okvirnim kurikulumom objavljenim u veljači 2016. godine. Sam razvoj matematike temelji se na matematičkim idejama kao što su broj, oblik, struktura i promjena. Upravo su oko tih koncepata grupirane domene u nastavi matematike na Brojeve, Algebru i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje, Podatke, statistiku i vjerojatnost. Udio svake domene prilagođen je razini na kojoj se učenik nalazi te je temeljen na razvojnim mogućnostima učenika. Domene koje obuhvaćaju geometriju su Oblik i prostor te Mjerenje.




Slika 2.1: Domene predmeta matematika

# 1. Razredna nastava

U razrednoj nastavi Nacionalnim okvirnim kurikulumom određeno je ukupno 97 tema iz matematike od čega je 29 (29.9%) geometrijskih. (Tablica 2.1)

| R | UKUPNO TEMA | GEOMETRIJSKE TEME |
|---|---|---|
| 1. | 21 | 1. Tijela u prostoru,<br>2. Ravne i zakrivljene plohe,<br>3. Ravne i zakrivljene crte,<br>4. Točka,<br>5. Odnosi među predmetima,<br>6. Geometrijski likovi. |
| 2. | 31 | 1. Dužina kao spojnica dviju različitih točaka,<br>2. Stranice kvadrata, pravokutnika i trokuta. |
| 3. | 23 | 1. Ravnina, i likovi u ravnini,<br>2. Pravac, polupravac i dužina kao dijelovi pravca,<br>3. Mjerenje dužine,<br>4. Pravci koji se sijeku i usporedni pravci,<br>5. Okomiti pravci,<br>6. Krug, kružnica,<br>7. Mjerenje obujma tekućine,<br>8. Mjerenje mase. |
| 4. | 22 | 1. Kut,<br>2. Pravi kut,<br>3. Šiljasti i tupi kutovi,<br>4. Trokut,<br>5. Vrste trokuta s obzirom na stranice,<br>6. Pravokutni trokut,<br>7. Opseg trokuta,<br>8. Pravkutnik i kvadrat,<br>9. Opseg pravokutnika i kvadrata,<br>10. Mjerenje površina,<br>11. Površina pravokutnika i kvadrata,<br>12. Kvadar i kocka,<br>13. Obujam kocke. |

Tablica 2.1: Raspodjela nastavnih tema iz matematike u razrednoj nastavi (MZOŠ, 2016.)

U prvom razredu predviđena je obrada 6 geometrijskih tema tj. 28.57% i one se odnose pretežito na osnovne geometrijske objekte. Učenici gradivo usvajaju na razini prepoznavanja i imenovanja. U drugom razredu su samo 2 teme iz geometrije odnosno 6.45% pri čemu se obje odnose na geometriju ravnine. U trećem razredu udio geometrijskih tema je 34.78% tj. 8 tema. Uvode se osnovni matematički pojmovi - ravnina i pravac, te kružnica kao dio kruga. U četvrtom razredu uočava se najveći udio geometrijskih tema i iznosi 59.09%.

Uvode se kompleksnije strukture poput kutova, kvadra i kocke. Iz tablice se može uočiti da u razrednoj nastavi propisane su samo dvije teme iz geometrije prostora dok su ostale teme geometrije ravnine, što nije ni čudno s obzirom na to da geometrija prostora učenicama predstavlja teži koncept za shvatiti.
Neki od ishoda učenja propisanih za razrednu nastavu podijeljeni po ciklusima učenja su:

- 1. ciklus
  - prepoznati, imenovati, izgraditi, opisati, usporediti i razvrstati jednostavne trodimenzionalne oblike i njihove dijelove
  - prepoznati i prikazati jednostavne prostorne oblike u različitim položajima
  - istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja prostornih oblika rabeći stvarne materijale

- 2. ciklus
  - prepoznati, imenovati, izgraditi, usporediti i klasificirati prostorne geometrijske oblike te istražiti, uočiti, opisati i primijeniti njihova geometrijska svojstva
  - istražiti i predvidjeti ishode sastavljanja i rastavljanja složenijih i prostornih oblika rabeći stvarne materijale
  - rabeći makete te kvadratne i trokutaste mreže točaka, skicirati prostorne oblike sastavljene od kocaka i njihove tlocrte, nacrte i bokocrte

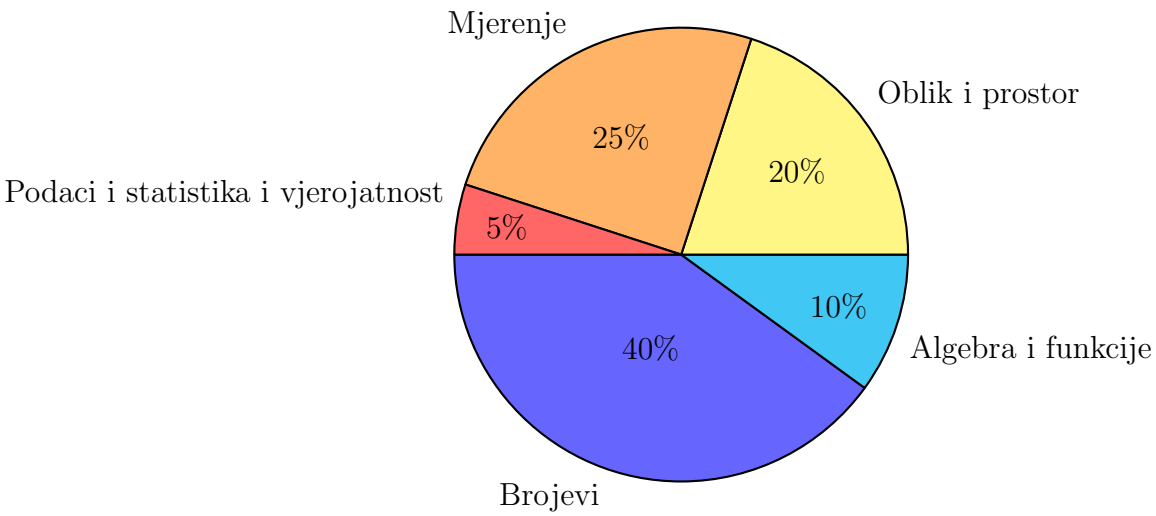
- 3. ciklus
  - prepoznati, imenovati, izgraditi i klasificirati prostorne geometrijske oblike te istražiti, uočiti i precizno opisati njihova geometrijska svojstva
  - primijeniti osnovne odnose i zakonitosti u vezi s prostornim geometrijskim oblicima
  - skicirati i nacrtati tlocrte, nacrte, bokocrte i mreže prostornih oblika te izgraditi prostorne oblike na temelju njihovih ravninskih prikaza.

# 2. Predmetna nastava

Za predmetnu nastavu predviđeno je ukupno 131 nastavna tema od čega geometrijske teme čine 37.4% tj. 49 nastavnih tema.

## 2.1. Peti razred

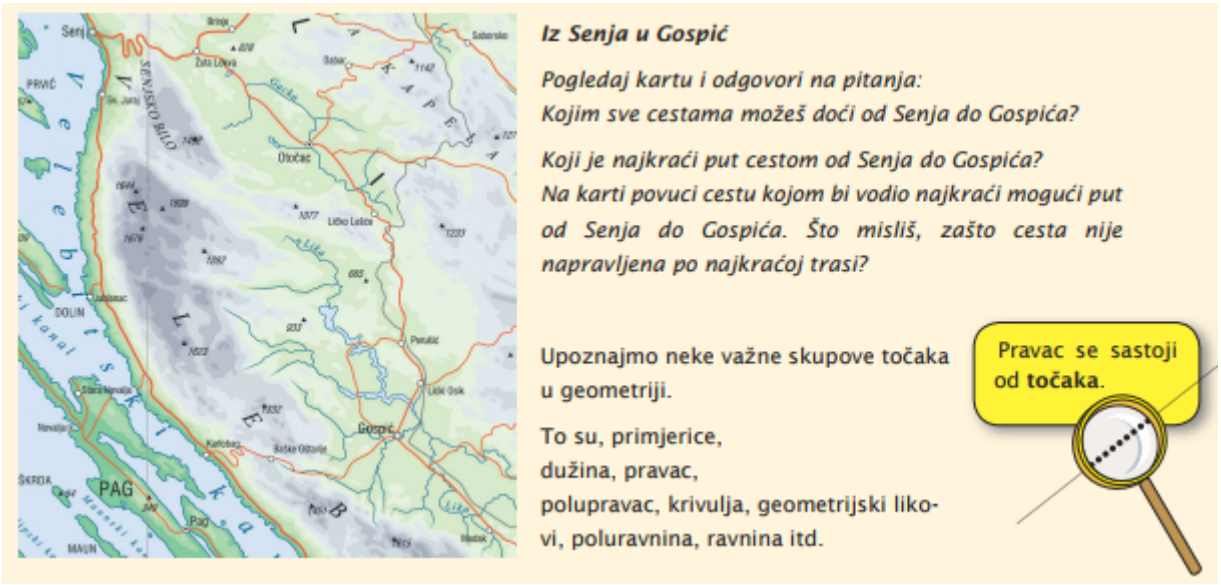
Program geometrije petog razreda obuhvaća osnovne geometrijske objekte, točku, pravac i ravninu, krug te pojam kuta. Na Slici 2.2 prikazan je udio domena u 5. razredu osnovne škole, pri čemu geometrijske teme spadaju pod mjerenje te oblik i prostor. Može se primjeniti da geometrija u petom razredu čini 45% gradiva matematike.




Slika 2.2: Udio domena u 5. razredu OŠ

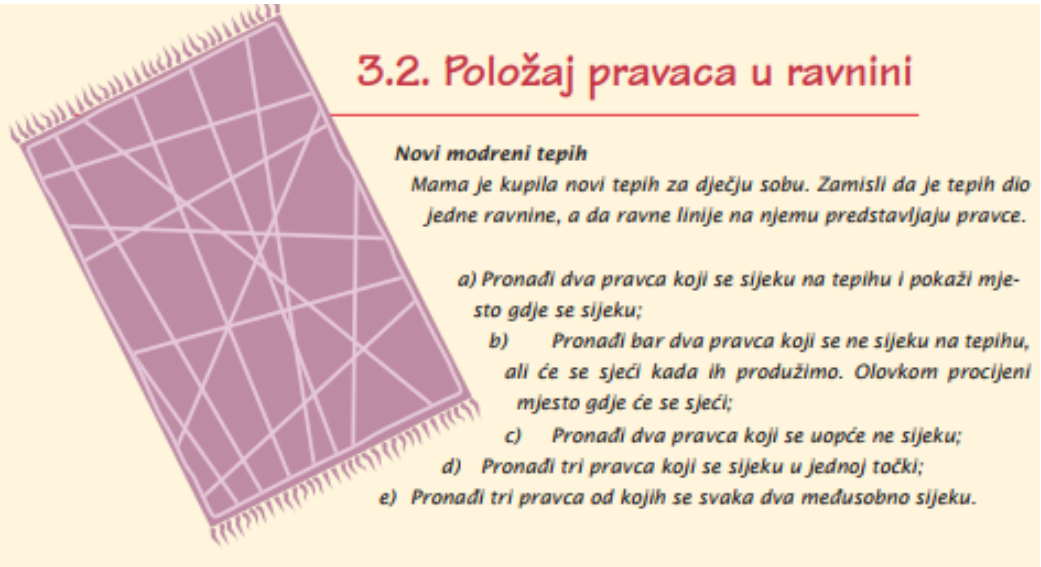
Iako su se učenici s pojmom geometrije i osnovnim gometrijskim oblicima susreli i u ranijim fazama obrazovanja, nastava geometrije u petom razredu započinje upoznavanjem učenika s povijesnim činjenicama bitnim za razumijevanje geometrijskog sadržaja. Učenike se upoznaje s podrijeklom riječi geometrija te se opisuje na koji način su ljudi primjenili praktično geometriju prvi puta. Povijesni razvoj geometrije nudi mogućnost stvaranja i prepričavanja zanimljivih priča čija je svrha zainteresirati djecu za geometriju općenito. Početno i osnovno znanje iz geometrije trebalo bi učenicima pomoći u orijentaciji u prostoru.

Do ove razine obrazovanja učenici su već upoznati s pojmom točke, pravca i ravnine. Česta pogreška je prilikom crtanja pravca gdje učenici ne shvaćaju da ustvari crtaju samo jedan njegov dio. Slično vrijedi i za polupravac, kut, ravninu i poluravninu. Na ovoj razini učenja od učenika se inzistira na pravilnom korištenju šestara te ostalog geometrijskog pribora ali i na preciznom definiraju pojmova u smislu razumijevanja osnovnih pojmova, a ne čistog učenja napamet. Osim teorijskog znanja učenicima se prezentiraju zadaci koji su vezani uz svakodnevni život i koji na najbolji način ukazuju na primjenu geometrije na fizički svijet. Jedan takav primjer je zadatak iz udžbenika za peti razred koji se nalazi na Slici 2.3.




Slika 2.3: Zadatak za peti razred - iz Senja u Gospić

Zadaci ovog tipa u praksi se pokazuju najzanimljivijim učenicima i najlakšim za svladavanje i razumijevanje pojmova vezanih iz gradivo geometrije. Još jedan od takvih primjera nalazi se na Slici 2.4.




Slika 2.4: Zadatak za peti razred - novi moderni tepih

Pojam kruga i prepoznavanje oblika kruga učenici svladaju već u prvom razredu osnovne škole i malo tko ima problema s time u petom razredu. Učenici u petom razredu uče pojmove poput kružnice, polumjera kružnice, središta kružnie te točaka na kružnici. Ishodi učenja od učenika zahtjevaju da razlikuje pojmove kruga i kružnice. Neki od ishoda učenja koji su navedeni u Nacionalnom okvirnom kurikulumu Republike Hrvatske za geometriju u petom razredu osnovne škole su:

**Za ocjenu dovoljan:**

- Prepoznaje osnovne elemente prostora (točku, pravac, polupravac, dužinu i ravninu) uz odgovarajuće oznake
- Prepoznaje i opisuje kvadrat, pravokutnik, trokut, kružnicu, krug i njegove dijelove, kut i vrste kutova.
- Konstruira simetralu dužine i osnosimetrično preslikava sliku u kvadratnoj mreži.

**Za ocjenu dobar:**

- Opisuje međusobne odnose elemenata u ravnini uz odgovarajuće oznake.
- Konstruira zbroj/razliku dužina i crta bilo koji zadani geometrijski lik.
- Centralno simetrično preslikava.

**Za ocjenu vrlo dobar:**

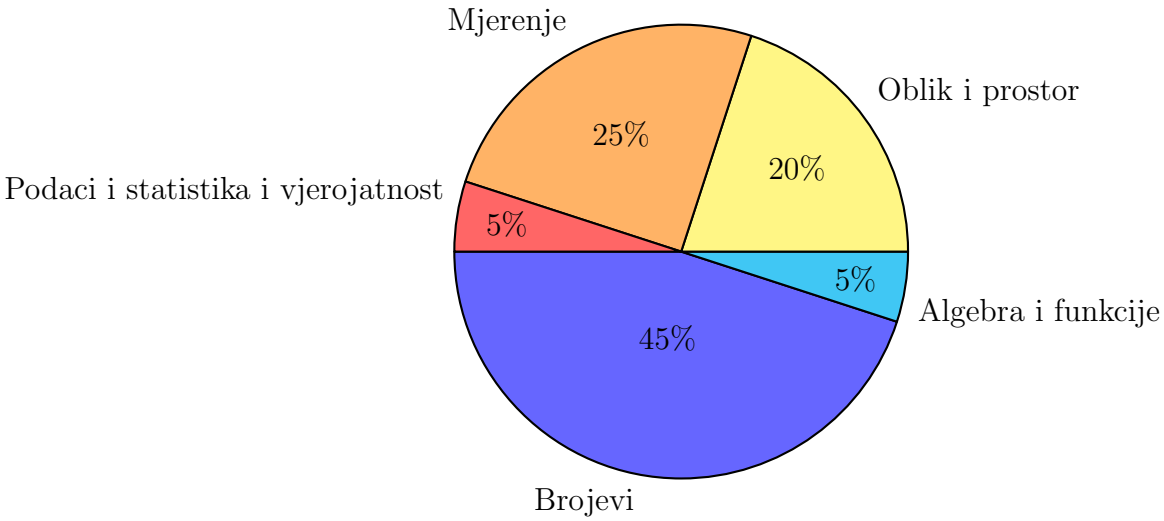
- Precizno i uredno crta/konstruira geometrijske likove.
- Osnosimetrično i centralnosimetrično preslikava složenije likove.
- Određuje mjere sukuta i vršnih kutova zadanih u stupnjevima, minutama i sekundama.

**Za ocjenu odličan:**

- Određuje mjere kutova u složenijim geometrijskim situacijama.
- Samostalno i precizno preslikava likove kompozicijom osne i centralne simetrije.
- Konstruira/crta zadane/uočene položaje među elementima prostora analizirajući njihova svojstva i odnose.

## 2.2. Šesti razred

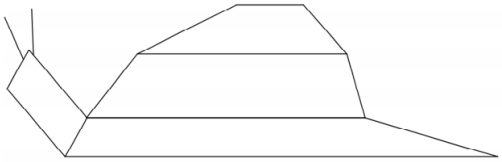
U šestom razredu osnovne škole učenici se u nastavi matematike prilikom obrade geometrijskih tema bave trokutima, analizom svojstava trokuta i odnosa, konstruiraju i analiziraju četverokut s naglaskom na kvadrat, pravokutnik i romb, translatiraju sliku, crtaju i zbrajaju/oduzimaju vektore te računaju i primjenjuju opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta. Na Slici 2.5 može se uočiti da je omjer geometrijskih tema u odnosu na ostale jednak kao i u petom razredu.



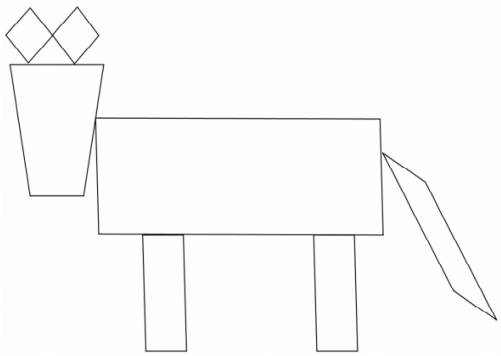

Slika 2.5: Udio domena u 6. razredu OŠ

Ovdje se lako uočava koliko je važno da su učenici dobro svladali gradivo petog razreda. Pojam opsega i površine trokuta te četverokuta nastavnicima daje prostora za implementiranje zanimljivih zadataka koji ne samo da učenicima pomažu u svladavanju te nastavne cjeline nego pomoću njih vježbaju finu motoriku ruku, razvijaju smisao za veličine u prirodi te promatraju opsege i površine u stvarnom svijetu.

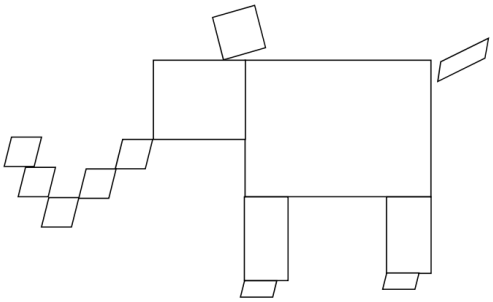
Jedan od takvih zadataka je ilustriran na Slici 2.6 - 2.9. Učenicima su dani papiri sa crtežima, uglavnom životinja, sastavljenih od četverokuta a zadatak je izračunati sveukupnu površinu papira potrebnog za izradu takvog crteža. Učenici prvo dobivaju manje crteže,a zatim i one veće. Neki crteži se sastoje od samo pravokutnika i kvadrata, a na nekima su i paralelogrami i trapezi. Učenicima se daju crteži prema potrebi odnosno prema procjeni učitelja.



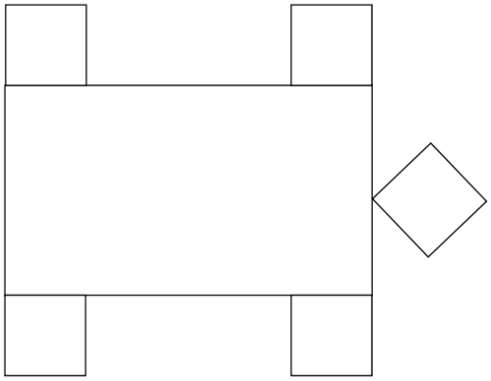
Slika 2.6: Crtež 1.



Slika 2.7: Crtež 2.



Slika 2.8: Crtež 3.



Slika 2.9: Crtež 4.

Osim primjene na zadatke, Nacionalni okvirni kurikulum propisuje osnovne ishode učenja ovisno o ocjeni:

**Za ocjenu dovoljan:**

- Opisuje sukladnost trokuta i konstruira trokut kojemu su zadane duljine svih triju stranica.
- Konstruira kvadrat i pravokutnik.
- Prepoznaje translaciju te translatirane crteže/slike.

**Za ocjenu dobar:**

- Konstruira trokut kojemu su zadane duljine stranica i/ili mjere kutova.
- Konstruira paralelogram i romb koristeći se njihovim svojstvima.
- Dopunjava započeti crtež do translatirane slike.

**Za ocjenu vrlo dobar:**

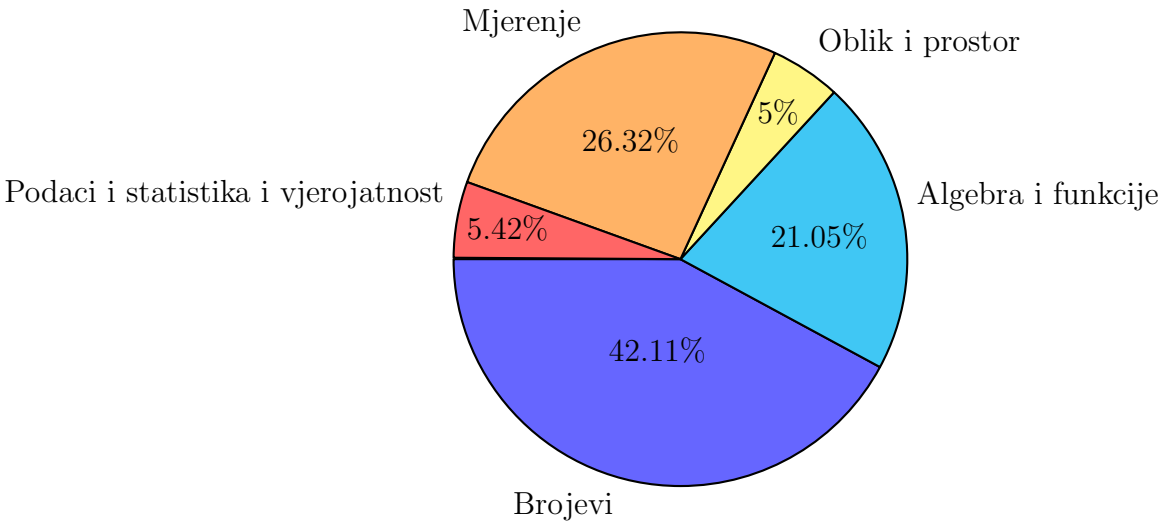
- Samostalno i precizno konstruira sve vrste trokuta, primjenjujući analizu.
- Samostalno i precizno crta trapez i opisuje njegova svojstva.
- Translatira slike jednostavnijih ravninskih likova.

**Za ocjenu odličan:**

- Povezuje konstrukciju trokuta s poučcima o sukladnosti trokuta.
- Konstruira četverokute uz raspravu.
- Samostalno i precizno translatira složenije slike ravninskih likova.

## 2.3. Sedmi razred

Sedmi razred donosi promjene po pitanju omjera geometrije i drugih polja matematike u nastavi. (Slika 2.10)




Slika 2.10: Udio domena u 7. razredu OŠ

Učenici se počinju baviti kompleksnijim pojmovima u poljima algebre i brojeva što ostavlja manje prostora za geometrijske teme. Kompleksnije strukture uvode se i u geometrijske teme pa tako učenici konstruiraju pravilne mnogokute i koriste se njima pri stvaranju složenijih geometrijih motiva, pridružuju racionalne brojeve točkama pravca, u kordinatnom sustavu u ravnini crtaju točke i preslikavaju ih osnom/centralnom simetrijom i translacijom te računaju i primjenjuju opseg i površinu mnogokuta i kruga i njegovih dijelova. Tema "Mnogokuti" daje mogućnosti za povezivanje matematike i problema iz svakodnevnog života, kroz što učenici na fizičkim problemima mogu razviti osjećaj o tome zašto su bitni pojmovi opsega i površine te znanje i korištenje formula. Jedan od takvih zadataka je sljedeći:

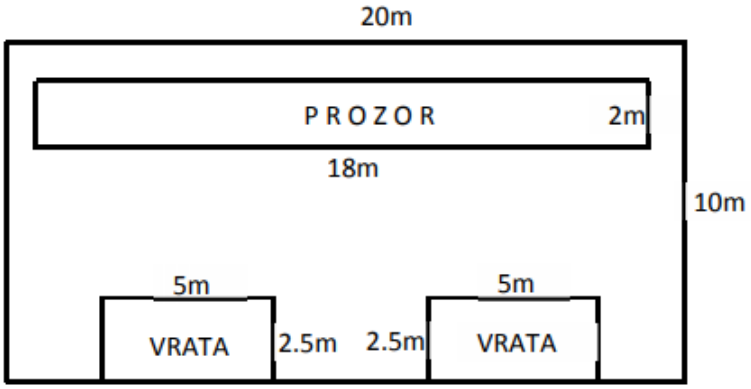
Zadatak: Poslodavac Nikola treba oličiti jedan zid spremišta (vidi Sliku 2.11).

a) Izračunaj koliku površinu treba oličiti.

b) Koliko kanti boje od 15 litara treba kupiti ako se s jednom kantom može oličiti $100m^2$?

c) Koliko će platiti boju ako jedna kanta košta 130kn?

d) U planu je drugom bojom obojiti rubove uz vrata i prozor (kao okvir). Kolika će biti ukupna duljina tih crta?




Slika 2.11: Zadatak s površinom

Osim što ovakav tip zadataka doprinosi lakšem razumijevanju nastavnih cjelina, on učenicima pomaže u razvoju prostornog mišljenja i logičkog razmišljanja te ima pozitivan učinak na učeničku volju i želju za matematikom. Nije teško primjetiti da mnogi nastavnici nastavu još uvijek izvode na tradicionalan, klasičan način. Gradivo sedmog razreda vezano za geometrijske teme učiteljima daje mnoštvo prostora za improvizaciju i daje im slobodu u izboru resursa i mogućnosti povezivanja kako sa stvarnim svijetom, tako i sa drugim nastavnim područjima. Istraživanje preovedeno u 15 osnovnih škola Novog Zagreba od učenika je tražilo odgovor na pitanje zašto uče matematiku. U uzorku je bilo 374 učenika 8. razreda, koji su dali odgovor na 25 pitanja iz upitnika kojeg su autori rabili u istraživanju. Čak njih 58.7% je izjavilo da matematiku uče zbog ocjene, a samo nešto više od 15 njih da uče zbog zanimljivosti matematičkih sadržaja. Upravo iz tog razloga mnogi stručnjaci se slažu sa činjenicom da su geometrijske teme najpogodnije za razvoj učeničke motivacije za matematike, a upravo teme poput površine i opsega nude najviše mogućnosti za izbor zanimljivih tema. Nešto više o površini i problemima s kojim se nastavnici susreću prilikom obrade te teme se govori u Poglavlju 3.

Ishodi učenja navedeni u Nacionalnom okvirnom kurikulumu su sljedeći:

**Za ocjenu dovoljan:**

- Računa opseg i površinu kruga, po potrebi uz uporabu džepnoga računala.
- Prepoznaje i zapisuje opseg i površinu nacrtanoga mnogokuta u kvadratnoj mreži.
- Preračunava mjerne jedinice za duljinu, masu, vrijeme, volumen tekućinu, površinu i kut.

**Za ocjenu dobar:**

- Samostalno i sigurno računa opseg i površinu mnogokuta, po potrebi uz uporabu džepnoga računala.
- Samostalno i sigurno računa opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.

- Samostalno i sigurno preračunava mjerne jedinice (temperaturu, srednju brzinu), po potrebi uz uporabu džepnoga računala.

**Za ocjenu vrlo dobar:**

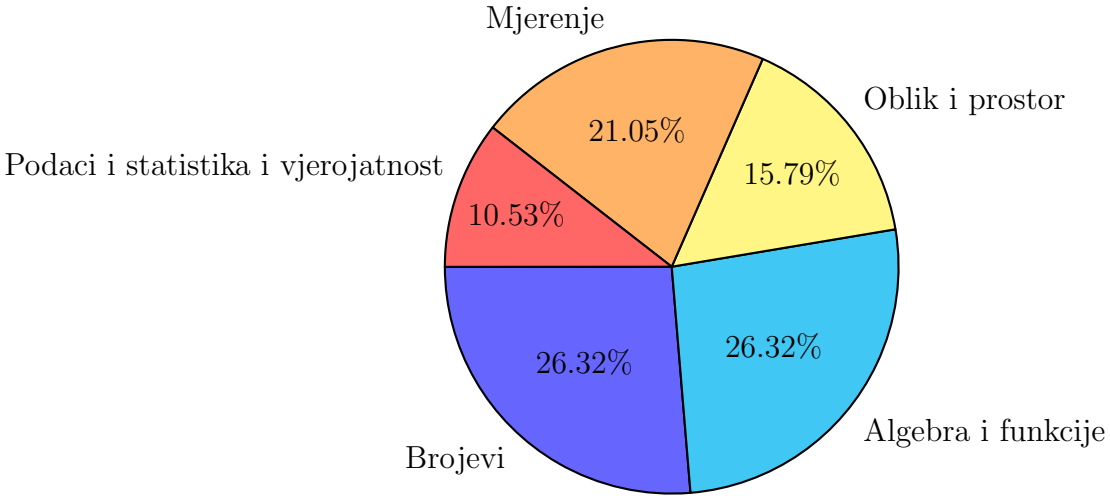
- Računa opseg i površinu geometrijskih oblika sastavljenih od mnogokuta.
- Računa opseg i površinu geometrijskih oblika sastavljenih od krugova i njegovih dijelova.
- Preračunava mjerne jedinice pri rješavanju jednostavnijih problema.

**Za ocjenu odličan:**

- Bira strategije za izračunavanje opsega i površine mnogokuta u rješavanju problema iz geometrije i stvarnoga života.
- Bira strategije za izračunavanje opsega i površine kruga i njegovih dijelova u rješavanju problema iz geometrije i stvarnoga života.
- Odabire pogodnu mjernu jedinicu pri rješavanju problema iz matematike i drugih područja.

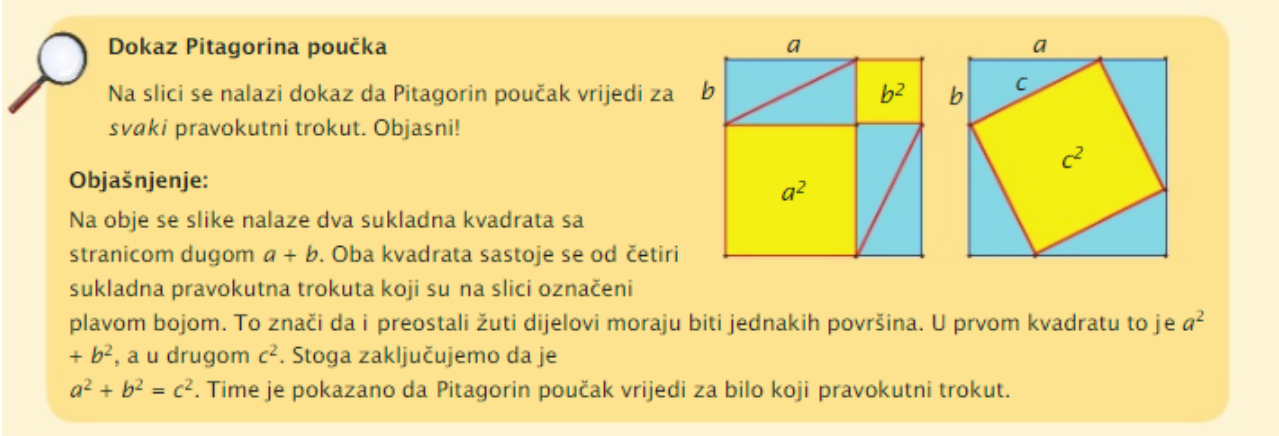
## 2.4. Osmi razred

Osmi razred osnove škole učenicima donosi do sada najkompleksnije geometrijske teme koje više nemaju za cilj naučiti učenike temeljnim pojmovima te primjeni određenih formula, nego učenike potiču na razvitak prostorne percepcije, na kreiranje korelacije s drugim predmetima, na promatranje tijela koja ih okružuju ali i na razumijevanje njima kompleksnijih teorema poput Talesovog poučka i Pitagorinog poučka. Na ovoj razini učenja, učenicima se pokazuju i jednostavniji dokazi spomenutih teorema. Omjer geometrijskih tema u odnosu na druge nalazi se na Slici 2.12.




Slika 2.12: Udio domena u 8. razredu OŠ

Neke od geometrijskih tema u osmom razredu osnovne škole su modeli i mreže geometrijskih tijela, volumen i opošje geometrijskih tijela, koordinatni sustav u ravnini, vjerojatnost događaja te već spomenuti Talesov i Pitagorin poručak. Obrada Pitagorinog poučka pruža nastavnicima mogućnost praktičnog rada koji rezultira dokazom Pitagorinog poučka. U praksi se pokazalo da su učenici veoma zainteresirani za proučavanje dokaza na ovaj način te da oni koji obrade ovu cijelinu na takav način nemaju problema sa pamćenjem i primjenom formule u budućnosti. Na Slici 2.13 se nalazi jedan od dokaza Pitagorinog poučka koji je dostupan učenicima u udžbenicima matematike za osmi razred.




Slika 2.13: Dokaz Pitagorinog poučka

S obzirom na to da su matematika kao znanost i matematika kao nastavni predmet vrlo povezane, dokazivanje poučaka kao što je Pitagorin poučak ima vrlo važno mjesto u nastavi matematike. Iako su mišljenja podijeljena po pitanju toga da li učenici trebaju biti upoznati sa dokazima ukoliko se kasnije u životu neće baviti istima, u nastavi matematike mnogi nastavnici implementiraju dokaze. U prilog tome ide činjenica da svaki čovjek ima potrebu za rasuđivanjem, a matematički dokazi upravo se temelje na sposobnosti rasuđivanja. Iako za neke nastavnike poučavanje dokazivanja predstavlja izazov, praksa je pokazala da učenici koji su se bavili jednostavnijim dokazima u osmom razredu imaju bolje rezultate u daljnjem školovanju.
Neki od ishoda učenja za geometrijske teme u osmom razredu su :
**Za ocjenu dovoljan:**

- Prema zadanoj mreži opisuje geometrijsko tijelo (četverostranu prizmu, piramidu, valjak i stožac) uz skiciranje.
- Konstrukcijom dijeli dužinu na n jednakih dijelova.
- Izriče Pitagorin poučak i obrazlaže ga na ponuđenome predlošku.

**Za ocjenu dobar:**

- Određuje broj vrhova, bridova i strana geometrijskoga tijela (prizma i piramida, valjak i stožac) i crta njegovu mrežu.

- Konstrukcijom dijeli dužinu na proporcionalne dijelove u omjeru manjemu od jedan.
- Računa duljinu nepoznate stranice pravokutnoga trokuta pomoću Pitagorinog poučka.

**Za ocjenu vrlo dobar:**

- Izrađuje modele geometrijskih tijela na osnovi njihovih ravninskih prikaza.
- Konstrukcijom dijeli dužinu u omjeru većemu od jedan.
- Računa nepoznate elemente trokuta i četverokuta pomoću Pitagorinog poučka.

**Za ocjenu odličan:**

- Analizira prostorne oblike sastavljene od osnovnih geometrijskih tijela uz preciznu uporabu matematičkoga jezika.
- Primjenjuje Talesov poučak za rješavanje geometrijskih problema.
- Bira strategije za izračunavanje oplošja i volumena u rješavanju problema iz geometrije i stvarnoga života.

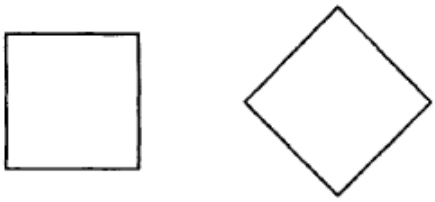
# Poglavlje 3

# Geometrija u nastavi - primjeri iz prakse

U sljedećim primjerima promatraju se različite aktivnosti čija je primarna svrha upoznavanje sa simetrijom, kutovima, preciznim crtanjem, transformacijama te najbolje ilustriraju prilike za učenje važnih pojmova, razvitak ključnih ideja i važnost razumijevanja i shvaćanja prije nego pogađanja.

## 1. Prepoznavanje oblika

Na Slici 3.1 je prikazan kvadrat u dva različita položaja. Praksa pokazuje da kada se učenike pita koji je to lik, većina učenika prepoznaje kvadrat u položaju s lijeve strane dok kvadrat s desne strane opisuju kao dijamant. Ovo je pokazano u dijalogu ispod.



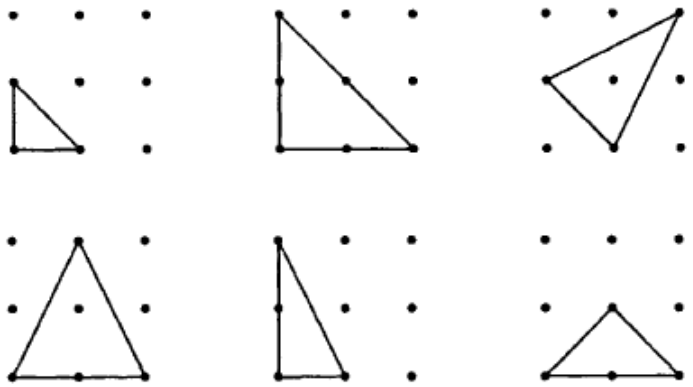
Slika 3.1: Kvadrat ili dijamant?

- Učitelj: Koji je ovo lik?
  [Pokazuje na kvadrat kojemu je stranica položena horizontalno ]
- Učenik: Kvadrat.
- Učitelj: Ako ga okrenemo ovako, koji onda lik dobijemo?
  [Isti kvadrat zakrenut za 45°]
- Učenik: Dijamant.

Problem koji se ovdje javlja je ne samo korištenje izraza „dijamant“ umjesto romb nego i teškoća shvaćanja da kvadrat je i dalje kvadrat bez obzira na njegovu orijentaciju. Uočeno

je da učenici teško shvaćaju činjenicu da bilo koji oblik može biti dvije stvari odjednom – i kvadrat i dijamant. Na sličan način dolazi do zabune i prilikom klasificiranja kvadrata kao posebnog slučaja pravokutnika ili pravokutnika kao posebnog slučaja paralelograma. Način na koji se ove teškoće mogu prevladati je svakako približavanje oblika učenicima u smislu opisivanja njegovih bitnih svojstava koja ga čine upravo tim oblikom. Čisto navođenje imena i jednostavnih definicija nije dosta, no današnji razvoj tehnologije omogućava predočavanje likova u interaktivnim programima u kojima se na primjeru okretanja oblika, u ovom slučaju kvadrata, učenike upoznaje s različitim položajima koje isti može imati.

U sljedećem primjeru, na Slici 3.2 učenici imaju zadatak napraviti trokut spajanjem točaka danih na kvadratnoj rešetki. Zadatak je moguće učenicima dati na računalu, na ploči ili na listu papira. Početni zadatak je uočiti koliko trokuta je moguće napraviti. Slika 3.2 pokazuje 6 različitih trokuta, no učenici trebaju biti izazvani da uvide koliko je različitih trokuta moguće pronaći. To može rezultirati razgovorom o tome što zapravo znači „različitih" trokuta. Učenici će u većini slučajeva trokute koji su isti, ali različito orijentirani smatrati različitim, baš kao u primjeru s kvadratom. Ovaj primjer daje priliku za upoznavanje s jednakokračnim i pravokutnim trokutima i činjenicom da pravokutan trokut može biti u isto vrijeme i jednakokračan. Česta zabuna je i pretpostavka učenika da je trokut i donjem lijevom kutu jednakokračan, što daje priliku učitelju da razgovara s učenicima o svojstvima jednostraničnih trokuta i pojašnjavanju kako i bez mjerenja prepoznati da spomenuti trokut nije jednostraničan.

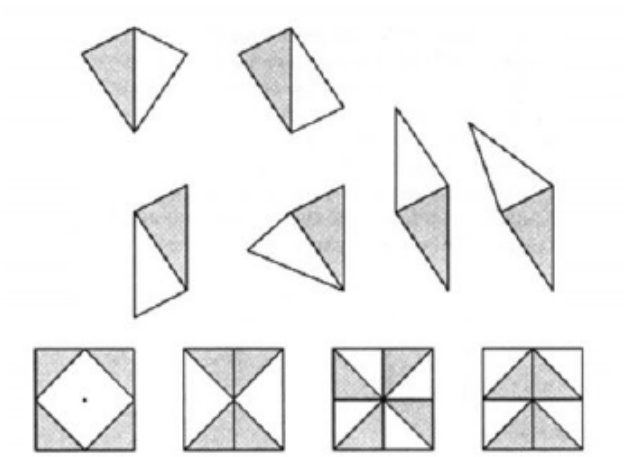


Slika 3.2: Trokut na $3 \times 3$ rešetki

Drugi izazov u ovom primjeru je povezan s određivanjem koliko položaja svaki trokut može zauzeti. Ovo zapravo predstavlja vježbu brojanja koja zahtjeva sistematski pristup ali i uključuje posjedovanje geometrijskih vještina povezanih sa transformacijom. Primjerice, prvi trokut na Slici 3.2 moguće je postaviti na 4 različita načina što daje 16 mogućnosti ukupno. Na isti način učenici se mogu upoznati sa svojstvima kvadrata ili nekih drugih poligona, ovisno o veličini rešetke.

# 2. Simetrija

Oblici na Slici 3.3 su napravljeni spajanjem četiri mala pravokutna jednakokračna trokut, a služe za poboljšavanje učeničke sposobnosti opisivanja i formiranja mentalnih slika oblika te na koncu odlučivanja koliko osi simetrije mogu pronaći.



Slika 3.3: Simetrični oblici

Dijalog ispod pokazuje neke od svojstava koje učenici mogu upoznati pomoću zadanih oblika.

- Učitelj: Opiši mi ovaj oblik. (Prvi lijevo)

- Učenik 1: To je mali kvadrat unutar velikog kvadrata.

- Učenik 2: Vidim 4 trokuta u kutovima.

- Učitelj: Što možete reći o tim trokutima?

- Učenik 3: Svi su iste veličine.

- Učenik 4: Svi imaju prave kutove.

- Učitelj: Još nešto?

- Učenik 5: To su jednakokračni trokuti.

- Učitelj: Koliki dio oblika je isjenčan?

- Učenik 6: Pola.

- Učitelj: Kako znaš?

- Učenik 7: Zato što 4 trokuta stanu unutar malog kvadrata.

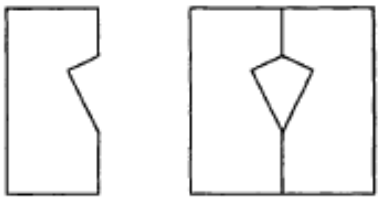
- Učitelj: Postoji li linija simetrije?

- Učenik 8: Da, kroz sredinu i kroz dijagonalu.

- Učitelj: Još neka ideja?

- Učenik 9: Kroz drugu dijagonalu i horizontalno od jedne do druge strane.

Treći oblik nema os simetrije, što često nije lako uočljivo učenicima. U tom slučaju učenike treba poticati na proučavanje i eksperimentiranje sa ovakvim oblicima kako bi se doista uvjerili da ne postoji os simetrije. Također, učenicima treba jasno dati do znanja da neki oblici nemaju os simetrije uopće i da dodavanje osječanih dijelova kao u navedenom primjeru može zavarati onog tko proučava oblik. Presavijanje i rezanje papira su vrlo korisni načini proučavanja simetrije i njeni svojstava koji učenicima daju priliku da sami predvide što će se dogoditi vizualizirajući mentalnu sliku i ispitujući njene karakteristike. (kako je prikazano na Slici 3.4) Lijevo je papir kvadratnog oblika savijen napola, a desno je isti papir na kojemu je izrezan trokut. Od učenika se traži da predvide oblike koji će se dobiti kada se papir otvori.



Slika 3.4: Izrezivanje papira

- Učitelj: Papir je savijen i izrazan je trokut na sredini. Koji oblik će poprimiti rupa kada se papir otvori?

- Učenik 1: Oblik će imati 4 strane.

- Učitelj: Kako znaš?

- Učenik 2: Zato što su po dvije strane izrezane s obje strane papira.

- Učitelj: Kako nazivamo oblik koji dobijemo?

- Učenik 3: Kvadrat.

- Učenik 4: Ne, strane nisu jednake duljine. To je pravokutnik.

- Učitelj: Slažu li se svi s tim?

- Učenik 5: Dvije gornje strane su male, a dvije donje velike, tako da ne može biti pravokutnik.

- Učenik 6: To je deltoid.

Vježbe poput ove nude veliku paletu mogućnosti za eksperimentiranje i diskusiju. Moguće je varirati sam izgled oblika ali i broj presavijanja papira. Neke od mogućnosti koje učitelji mogu koristiti su sljedeće:

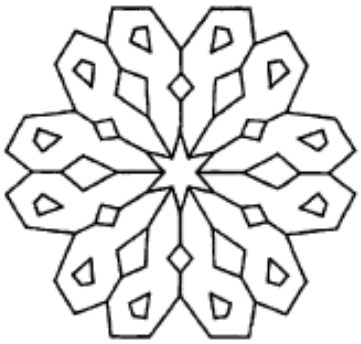
- Napraviti dva presavijanja pod pravim kutom. Oblici koji se dobiju ukoliko se rupa reže od rubova:

  - kvadrat, jednakokračni trokut, bilo koji trokut, deltoid, pravokutnik

- Napraviti tri presavijanja pod 45° Oblici koji se dobiju ukoliko se rupa reže od rubova:

  - jednakokračni trokut, pravokutni trokut, bilo koji drugi trokut.

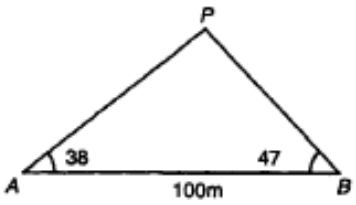
Savijanjem papira pod kutem od 30° ili 60° i rezanje različitih rupa učenici mogu kreirati različite atraktivne pahuljaste oblike (Slika 3.5). Ovakav tip vježbe posebno se dopada manjim uzrastima učenika te može voditi do korisnih diskusija o simetričnosti ali i doprinosi razvoju osjećaja za prostor.



Slika 3.5: Zanimljivi simetrični oblici

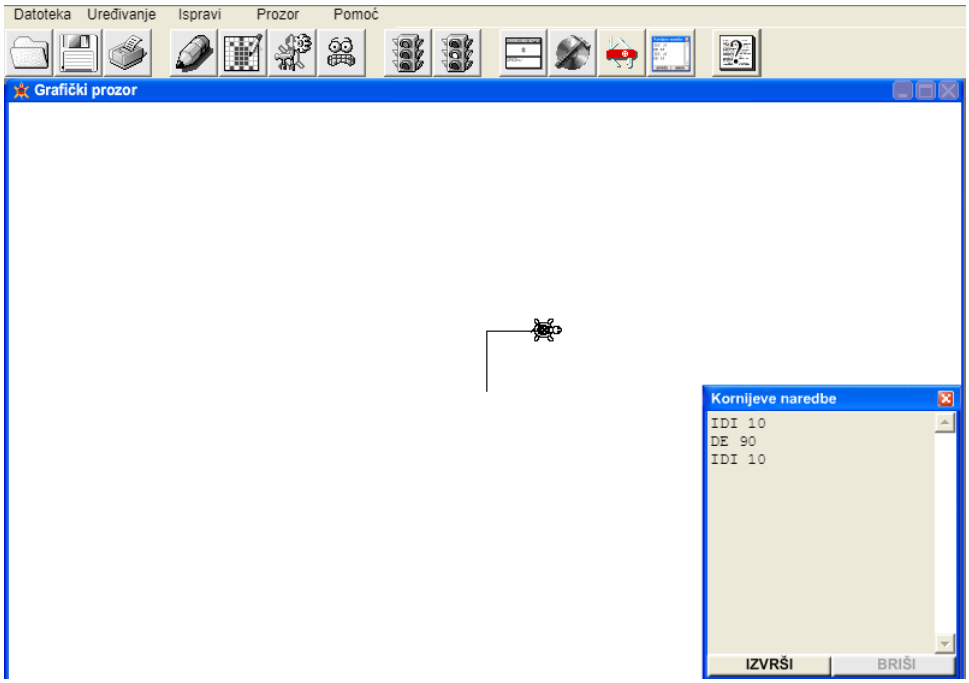
# 3. Kutovi

Pojam i ideja kuta za učenike predstavlja puno teži koncept za shvaćanje nego što je duljina. Nije teško pronaći i kreirati zanimljive zadatke čija je uloga poboljšavanje vještina mjerenja. Nakon inicijalnih vježbi u kojima učenici uvježbavaju mjerenje i konstrukciju kutova, što doprinosi i razvoju fine motorike, dobivene vještine mogu biti povezane sa stvarnim situacijama i korištene za razvoj drugih geometrijskih ideja. Primjerice, mjerenje kuta elevacije kako bi se odredila visina drveta ili korištenje para kutova mjerenih s dvije pozicije kako bi se utvrdila udaljenost nekog objekta. Slika 3.6 upravo pokazuje kako kutevi od 38° i 47° gledani iz nekog objekta $P$ na dvije točke $A$ i $B$, udaljene 100 metara jedna od druge mogu pomoći pri određivanju udaljenosti objekta. Osim toga, ovaj tip zadatka nameće pitanje traži li se udaljenost od točke $P$ do $A$ i $P$ do $B$ ili okomita udaljenost od $P$ do dužine $AB$.




Slika 3.6: Udaljenost dva objekta

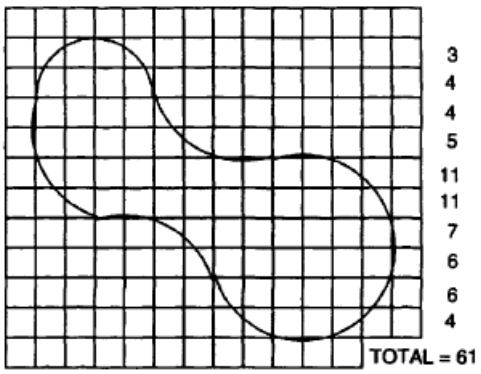
Jedan od glavnih problema s kojima se učenici susreću pri učenju kutova jeste rukovanje kutomjerom stoga je važno učenike osvijestiti pravilnom postavljanju i očitavanju vrijednosti. LOGO je softverski program koji ima posebno važnu ulogu u uvođenju učenika u samo mjerenje kutova čak i prije nego učenici sami krenu s mjerenjem pomoću kutomjera. Pomoću ovog programa, kreiranog za učenike manjeg uzrasta što ga čini lako razumljivog, učenici sami konstruiraju i mjere veličine raznih kutova. LOGO je posebice vrijedan program za razvijanje osjećaja za mjeru veličine kuta i moguće ga je koristiti i kao uvod u mjerenje stupnjeva čak i prije nego što su učenici spremni za praktički rad. Na Slici 3.7 vidimo dvije stranice trokuta nastale micanjem kursora (poznatijeg kao "kornjača") za 10 jedinica unaprijed i zakretanjem za 90 stupnjeva u desno te micanje za još 10 jedinica unaprijed.




Slika 3.7: Softverski program - LOGO

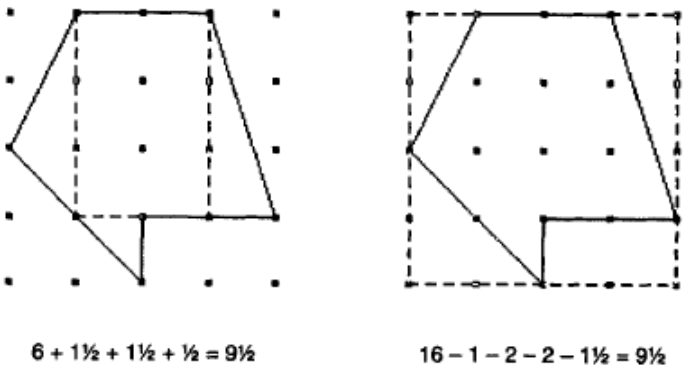
# 4. Površina

Koncept površine javlja se kada želimo ili usporediti dva ravninska lika jedan s drugim ili s jedinicom mjere. Sama površina ima široku primjenu u svakodnevnom životu poput površine tla kada želimo odrediti broj potrebnih pločica, površine zida kako bi odredili količinu boje i mnoge druge. Učenici u početcima obrazovanja s pojmom površine upoznaju se putem pitanja koji od dva oblika je veći i istražujući svojstva kvadrata i drugih oblika predstavljenih na rešetki. Bilo da je lik nepravilan ili sa zaobljenim krajevima, osnovna ideja koja se usađuje u učenike je pronalazak broja kvadrata koje taj lik pokriva, što je ilustrirano na Slici 3.8. Ovakav tip vježbe pruža mogućnost povezivanja sa stvarnim situacijama poput međusobnog uspoređivanja veličine ruku.



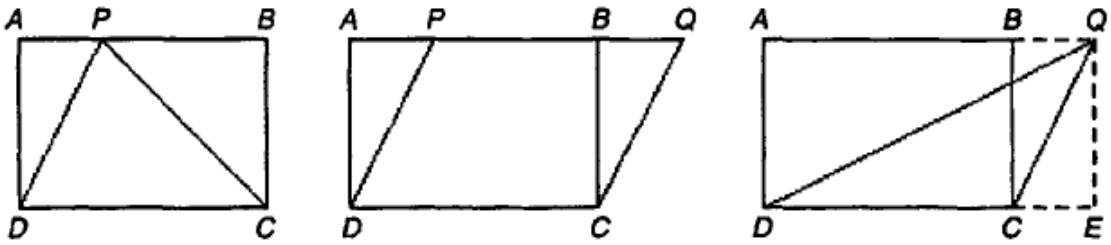

Slika 3.8: Kvadratna rešetka

Na ovaj način učenici sami uočavaju potrebu za standardnom jedinicom mjere kao što je metar kvadratni ili centimetar kvadratni. U ranim fazama zadaci ne moraju sadržavati neke od učenicima poznatih oblika, no kada se pojavi primjerice trokut od učenika se zahtjeva da odrede površinu trokuta koristeći neku neformalnu metodu. Slika 3.9 pokazuje dvije različite strategije za pronalazak takve površine. Jedna se temelji na "dijeljenju" i "dodavanju", a druga na "zaokruživanju" i "oduzimanju". Učenike treba poticati da sami razvijaju svoje metode, a jedan od načina je i zadatak u kojemu sami kreiraju svoje oblike, a zatim pronalaze njihovu površinu.




Slika 3.9: Površina trokuta

Unatoč tome, oblici ne dolaze uvijek posloženi na rešetki na način da je jednostavno odrediti površinu lika. Tada je nužno krenuti razvijati formalniji način pronalaska površine standardnih oblika. Jedna od jednostavnijih formula za površinu i s kojom učenici nemaju previše poteškoća je formula za površinu pravokutnika. Jedini problem na koji učenici mogu naići je nedovoljna uvježbanost množenja, te je uočeno da učenici lako množe prirodne brojeve dok u slučaju razlomaka ovakve zadatke često ne riješe točno. Stoga je preporučljivo učenicima u ranim fazama obrade površine pravokutnika duljine zadavati kao male prirodne brojeve. Nakon što su učenici svladali površinu pravokutnika i paralelograma prelaze na površinu trokuta. Jedan od pristupa u obradi je pronalazak površine paralelograma te dokazivanje da površina trokuta čini polovicu odgovarajućeg paralelograma. Na Slici 3.10 navedena su tri primjera od kojih prva dva vode ka standardnom povezivanju površine trokuta i paralelograma, i treći primjer u kojemu je zadatak pronalaska površine trokuta $QCD$ nešto kompliciraniji.



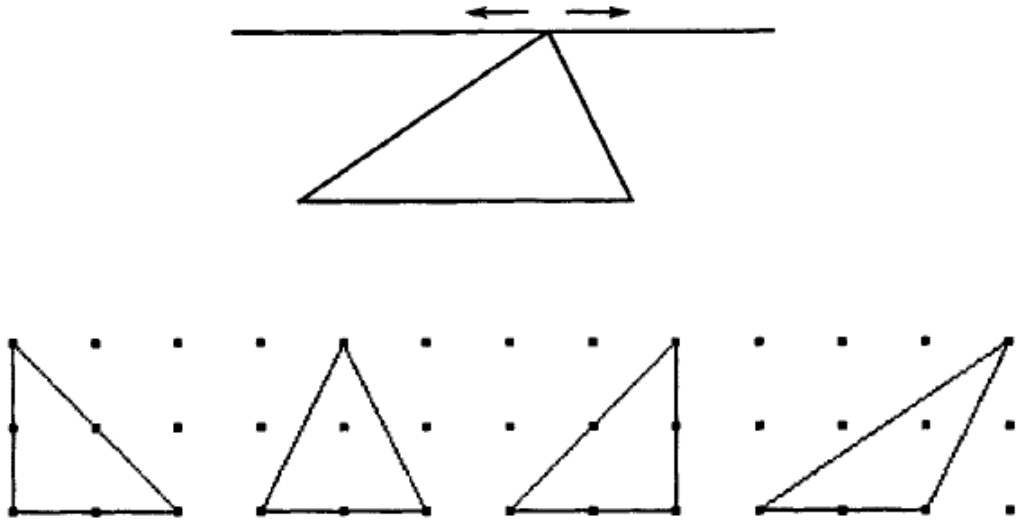

Slika 3.10: Površina trokuta

Spomenuta strategija "zakoruživanja" i "oduzimanja" koju učenici koriste dovodi učenike do sljedeće jednadžbe:

Površina trokuta $QCD =$

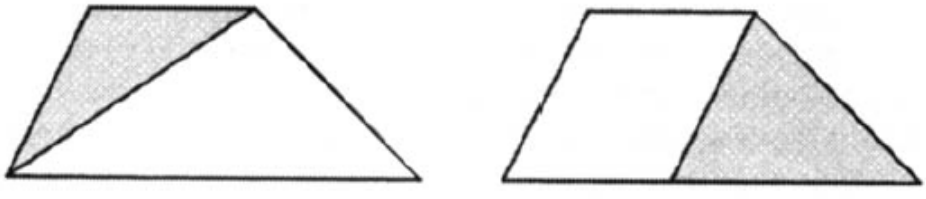
$$\frac{1}{2}\, pravokutnika\ AQED - \frac{1}{2}\, pravokutnika\ BQEC = \frac{1}{2}\, pravokutnik\ ABCD.$$

Iako je ovakav tip vježbe jednostavan alat za razvoj rasuđivanja, ne daje učenicima dobar intuitivan osjećaj zašto je metoda računanja površine jednaka kao kod prvog trokuta. Tu dolazi mogućnost za upotrebu dinamičnog softvera koji generira trokute čije su baze i površine jednake, a gornji vrh klizi po pravcu paralelnim s bazom trokuta. Slika 3.11 prikazuje trokut u programu dinamične geometrije te različite položaje trokuta koji imaju jednaku površinu.



Slika 3.11: Pozicioniranje trokuta

Spomenuti problem prepoznavanja trokuta s istom površinom zapravo je problem uočavanja visine nekog oblika. Učenici često za visinu trokuta uzimaju jednu od kateta, pogotovo u situacijama kada je baza trokuta stavljena u standardnu horizontalnu poziciju. Vježbe u kojima je učenici dana numerička vrijednost duljine baze i visine dobre su za uvježbavanje formule za površinu trokuta, no ne pruža mogućnosti za razmijevanje što koja varijabla predstavlja. Zato je preporučljivo učenike stavljati u situaciju u kojoj sami moraju izmjeriti duljine stranice te promisliti što je to visina. Kako trokut čini osnovu za sve poligone, pravilno određivanje njegove površine je dovoljno za rješavanje široke palete problema s površinom. Primjerice, Slika 3.12 pokazuje kako se površina trapeza može na dva načina odrediti rastavljanjem na jednostavnije oblike: dva trokuta ili paralelogram i trokut.



Slika 3.12: Površina trapeza

U sljedećim potpoglavljima opisane su aktivnosti koje nastavnici koriste prilikom obrade pojma površina.

## 4.1. Površina kvadrata i površina pravokutnika

Kao motivaciju za rad učitelj zadaje učenicima zadatak:
Zadatak: Filip popločava kupaonicu. Kupaonica ima oblik pravokutnika čije su dimenzije $1.8m \times 3m$. Pločice su dimenzija $50cm \times 60cm$. Koliko pločica Filipu treba za popločiti kupaonicu?

Zadatak je prikladan učenicima 6. razreda osnovne škole, i u trenutku postavljanja istog učenici još ne znaju računati površinu pravokutnika i kvadrata.

**Cilj nastavne aktivnosti:** Učenici će otkriti formulu za površinu kvadrata i pravokutnika
**Nastavni oblik:** Rad u paru
**Nastavna metoda:** Metoda analize i dedukcije
**Potreban materijal:** Milimentarski papir za svakog učenika
**Tijek aktivnosti:** Na početku aktivnosti nastavnik podijeli učenike u parove i svaki par dobije milimetarski papir. Učenici su u prethodnom razredu obradili površinu kvadrata čije su stranice jedinične duljine.

N: Kolika je površina kvadratića sa stranicom duljine $1mm$?
U: Njegova površina je jednaka $1mm^2$.
N: Kolika je površina kvadratića sa stranicama duljine $1cm$?
U: Njegova je površina $1cm^2$.
N: Kako bismo mogli izračunati površinu nekog geometirjskog lika čije stranice nisu jedinične dužine?
U: Mogli bismo prebrojiti koliko kvadratića jedinične površine stane u taj geometrijski lik.

Tada nastavnik učenicima daje zadatak da svaki par na milimetarski papir treba nacrtati jedan pravokutnik i jedan kvadrat zadanih dimenzija. Svaki par je dobio milimetarski papir s jednom od oznaka: $A, B, C, D$. Parovi s slovom $A$ crtaju kvadrat s duljinom stranice $2cm$ i pravokutnik s duljinama $4cm$ i $6cm$. Parovi s oznakom $B$ crtaju kvadrat s duljinom stranice $3cm$ i pravokutnik s duljinama $3cm$ i $7cm$. Parovi s slovom $C$ kvadrat duljine stranice $4cm$ i pravoktunik $2cm$ i $6cm$, te parovi sa oznakom $D$ kvadrat s duljinom stranice $5cm$ i pravokutnik s duljinama stranica $2cm$ i $3cm$. Tada učenici sami prebrojavaju od koliko se jediničnih kvadrata sastoje kvadrati i pravokutnici. Svoje rezultate upisuju i dvije tablice (Tablica 3.1 i Tablica 3.2) iz kojih nakon toga izvode zaključke.

| Kvadrat | |
|---|---|
| Duljina stranice($cm$) | Površina($cm$) |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |

Tablica 3.1: Površina kvadrata

| Pravokutnik | | |
|---|---|---|
| Duljina stranice $a$ ($cm$) | Duljina stranice $b$ ($cm$) | Površina($cm$) |
| 4 | 6 | 24 |
| 3 | 7 | 21 |
| 2 | 6 | 12 |
| 2 | 3 | 6 |

Tablica 3.2: Površina pravokutnika

Analogijom i generalizacijom učenici dolaze do zaključka da je površina kvadrata sa stranicom duljine $a$ jednaka $a \cdot a$. Na jednak način učenici dolaze do zaključka da je površina pravokutnika jednaka $P = ab$. Nakon što su otkrili formule za tražene površine, učenici rješavaju motivacijski zadatak.

## 4.2. Površina paralelograma

Kao i u prošlom primjeru nastavnik učenicima zadaje motivacijski zadatak:

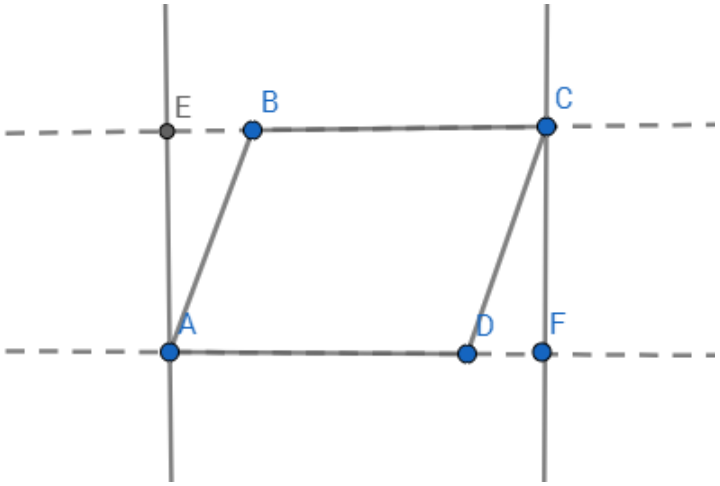
Zadatak Ivana i Ena su se posvađale oko toga koja od njih ima veći bazen. Ivana tvrdi da je njezin bazen veći, a Ena da je obratno. Oba bazena imaju oblik paralelograma. Enin bazen je dug $5m$, a širok $4m$. Ivanin bazen je dug $6m$, a širok $3m$. Koja je od djevojčica u pravu?

**Cilj nastavne aktivnosti:** Učenici će otkriti formulu za površinu paralelograma
**Nastavni oblik:** Rad u paru
**Nastavna metoda:** Metoda analize i dedukcije
**Potreban materijal:** Paralelogrami od papira, škare
**Tijek aktivnosti:** Učenici su raspodijeljeni u parove te svaki par dobije jedan list papira sa

slikama paralelograma. Nastavnik učenike pitanjima navodi na zaključak da trebaju izrezati paralelogram i presložiti ga tako da dobiju neki geometrijski lik kojemu znaju izračunati površinu. Naglasak treba staviti na to da se površina paralelograma neće promijeniti ukoliko se njegovi dijelovi preslože. Iako će prva ideja biti da paralelogram izrežu duž dijagonale, nastavnik navodi učenike da ga režu duž visine. Preslagivanjem izrezanih dijelova učenici dobivaju pravokutnik. Na ovoj razini učenja učenici znaju izračunati površinu pravokutnika pa lako dolaze do formule za površinu paralelograma $P = a \cdot Va$. Nastavnik potom pušta učenike da izrežu i druge paralelograme te se uvjere da formula koju su dobili vrijedi općenito. Učenici potom rješavaju motivacijski zadatak. Nastavnik im napominje da površinu paralelograma mogu izračunati i po formuli $P = b \cdot Vb$.
Ukoliko nastavnik uoči da postoje učenici koji bi mogli svladati i dokaz ovakve tvrdnje u nastavu se može ubaciti i dokaz da uočena tvrdnja uistinu vrijedi.

DOKAZ:

Neka je $ABCD$ paralelogram, točka E nožište visine iz vrha $A$ na pravac $BC$.
Prema $S - S - K$ teoremu trokuti $AED$ i $BCF$ su sukladni pa imaju jednaku površinu.
Stoga je $P(ABCD) = P(AED) + P(EBCD) = P(BFC) + P(EFCD) = a \cdot v$
jer je EFCD pravokutnik sa stranicama duljina $a$ i $v$ (Slika 3.13).




Slika 3.13: Površina paralelograma

# Literatura


[1] V. Andrilović, M. Čudina -Obradović,*Osnove opće i razvojne psihologije: psihologija odgoja i obrazovanja II*, Školska knjiga, Zagreb, 1994.

[2] A. Čižmešija, R. Svedrec, T. Soucie, N. Radović, *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2010.

[3] D. French, *Teaching and Learning Geometry - Issues And Methods In Mathematical Education*, Continuum, 2004.

[4] L. Kralj, Z. Ćurković, D. Glasnović Gracin, S. Banić, M. Stepić, *Petica+ 5 - udžbenik i zbirka zadataka za 5. razred osnovne škole*, SysPrint, Zagreb, 2010.

[5] L. Kralj, Z. Ćurković, D. Glasnović Gracin, S. Banić, M. Stepić, *Petica+ 6 - udžbenik i zbirka zadataka za 6. razred osnovne škole*, SysPrint, Zagreb, 2010.

[6] L. Kralj, Z. Ćurković, D. Glasnović Gracin, S. Banić, M. Stepić, *Petica+ 7 - udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole*, SysPrint, Zagreb, 2010.

[7] L. Kralj, Z. Ćurković, D. Glasnović Gracin, S. Banić, M. Stepić, *Petica+ 8 - udžbenik i zbirka zadataka za 8. razred osnovne škole*, SysPrint, Zagreb, 2010.

[8] V. Poljak, Didaktika, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[9] MZOS, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (2016). Nacionalni okvirni kurikulum, URL: `http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf`

# Sažetak

U ovom radu prikazan je osvrt na geometrijske teme u nastavi matematike s naglaskom na nastavu matematike u osnovnim školama. Navedeni su ishodi učenja propisani Nacionalnim okvirnim kurikulumom te obrađene neke posebne nastavne teme te aktivnosti koje nastavnicima pomažu u obradi istih.

**Ključne riječi:** geometrija, ishodi učenja, kurikulum, geometrijsko mišljenje.

# Summary

This paper will give review on geometric subjects in teaching mathematics with ephasis on teaching mathematics in elementary school. We will give learning outcomes given by Croatian nacional curriculum and we will process some specific themes and activities linked to them.

**Key words:** geometry, learning outcomes, curriculum, geometric reasoning.

# Životopis

Anita Ivančičević je rođena 10. siječnja 1994. godine u Slavonskom Brodu. Osnovnu školu završila je u OŠ Ivan Kozarac u Županji gdje je upisana u spomen knjigu učenika za izniman uspjeh i uzorno vladanje tijekom osam godina školovanja. 2008. godine je upisala Opću gimnaziju u Županji, a 2012. upisuje Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom osnovne i srednje škole aktivno je sudjelovala u volonterskom radu udruge za osobe s posebnim potrebama "Golubovi" u Županji, a po preseljenju u Osijek volonterski rad nastavlja u Dječjoj osječkoj kreativnoj kućici - Dokkica gdje je podučavala učenike matematiku.