

# Osnovna svojstva unitarnih prostora

---

Fišer, Maja

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:887224>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-23**



**mathos**

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Maja Fišer**

**Osnovna svojstva unitarnih prostora**

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Maja Fišer**

**Osnovna svojstva unitarnih prostora**

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Suzana Miodragović  
Komentor: dr. sc. Marija Miloloža Pandur

Osijek, 2019.

## **Sažetak**

U ovom završnom radu proučavat ćemo osnovna svojstva unitarnih prostora. Definirat ćemo Gramovu determinantu kojom karakteriziramo linearnu nezavisnost skupa vektora. Zatim ćemo objasniti Gram – Schmidtov postupak ortogonalizacije vektora i na kraju upoznati se s unitarnim operatorom.

## **Ključne riječi**

Unitarni prostor, Gramova determinanta, skalari, vektori, ortogonalizacija, unitarni operatori

## **Basic properties of unitary spaces**

### **Summary**

In this final paper, we will study the basic properties of an unitary space. We will define the Gram determinant which characterizes linear independence of a set of vectors. Then we will explain the Gram-Schmidt orthogonalization procedure and introduce an unitary operator.

### **Key words**

Unitary space, the Gram determinant, scalars, vectors, orthogonalization, unitary operators



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Skalarni produkt i unitarni prostor . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Gramova matrica</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije vektora</b>	<b>8</b>
3.1	Ortonormirana baza . . . . .	9
3.2	Gram - Schmidtov postupak ortogonalizacije . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Unitarni operatori</b>	<b>16</b>
4.1	Svojstva unitarnog operatora . . . . .	16

# 1 Uvod

## 1.1 Skalarni produkt i unitarni prostor

Neka je  $U$  unitarni prostor nad poljem  $K$ . U ovom radu  $K$  će predstavljati polje  $\mathbb{R}$  realnih brojeva ili polje  $\mathbb{C}$  kompleksnih brojeva. Vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{R}$  se zove realan vektorski prostor, a nad poljem  $\mathbb{C}$  kompleksan vektorski prostor.

**Definicija 1** *Skalarni produkt* na vektorskom prostoru  $U$  je preslikavanje  $(\cdot|\cdot) : U \times U \rightarrow K$  (svakom uređenom paru  $(x, y) \in U \times U$  je pridružen skalar  $(x, y) \in K$ ) sa svojstvima:

- (1) *aditivnost u prvom argumentu:*  $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y) \quad (x_1, x_2, y \in U)$ ,
- (2) *homogenost u prvom argumentu:*  $(\alpha x|y) = \alpha(x|y) \quad (x, y \in U, \alpha \in K)$ ,
- (3) *konjugirana simetričnost:*  $(x|y) = \overline{(y|x)} \quad (x, y \in U)$ ,
- (4) *nenegativnost:*  $(x|x) \geq 0 \quad (x \in U)$ ,
- (5) *(pozitivna) definitnost:*  $(x|x) = 0$  onda i samo onda, kada je  $x = 0$ .

Vektorski prostor nad kojim je definiran skalarni produkt naziva se **unitarni prostor**.

Uvjeti (1) i (2) znače da je  $(\cdot|\cdot)$  linearni funkcional u prvoj varijabli, tj.

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2|y) = \alpha_1(x_1|y) + \alpha_2(x_2|y).$$

Iz uvjeta (3) slijedi da je  $(\cdot|\cdot)$  antilinearan funkcional u drugoj varijabli, tj.

$$(x|\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \overline{(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2|x)} = \overline{\beta_1(y_1|x) + \beta_2(y_2|x)} = \overline{\beta_1} \overline{(y_1|x)} + \overline{\beta_2} \overline{(y_2|x)} = \overline{\beta_1} (x|y_1) + \overline{\beta_2} (x|y_2).$$

**Primjer 1** Neka je  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija zadana s

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Pokažite da je  $f$  skalarni produkt.

Rješenje:

Provjerimo zadovoljava li  $f$  sva svojstva skalarnog produkta:

(1) *nenegativnost:*

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$$

(2) *definitnost:*

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \text{ akko } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \text{ akko } x_i^2 = 0, \forall i, \text{ akko } x_i = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

(3) linearnost:

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta(y_1, y_2, \dots, y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n)) &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) z_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha x_i z_i + \sum_{i=1}^n \beta y_i z_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ &= \alpha f((x_1, x_2, \dots, x_n), (z_1, z_2, \dots, z_n)) + \beta f((y_1, y_2, \dots, y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n)). \end{aligned}$$

(4) konjugirana simetričnost:

Vrijedi li  $f((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = f((y_1, y_2, \dots, y_n), (x_1, x_2, \dots, x_n))$  ?

Vrijedi da je  $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i$  (zbog komutativnosti množenja u  $\mathbb{R}$ ), pa  $f$  zadovoljava svojstvo konjugirane simetričnosti.

**Primjer 2** Neka je  $U = K^n$  za neki  $n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$  fiksni skalari,  $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in U$ .

$$(v|w) := \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \overline{w_j}$$

$(\cdot|\cdot)$  je skalarni produkt na  $K^n$ . Za  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$  ovo je standardni skalarni produkt na  $K^n$ .

**Primjer 3** Neka je  $U = M_n(K)$  za neki  $n \in \mathbb{N}$ , gdje je  $M_n(K)$  vektorski prostor svih kvadratnih matrica reda  $n$  nad poljem  $K$ . Za  $A, B \in U$  definiramo

$$(A|B) := \text{tr}(AB^*),$$

gdje je  $B^* = \overline{B^T}$  matrica adjungirana matrici  $B$ .  $(\cdot|\cdot)$  je skalarni produkt na  $M_n(K)$ . Naime, za matrice  $A = [\alpha_{ij}], B = [\beta_{ij}]$  imamo  $(A|B) = \text{tr}([\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \overline{\beta_{jk}}]) = \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} \overline{\beta_{jk}}$  pa je unitarni prostor  $M_n(K)$  prirodno izomorfizan unitarnom prostoru  $K^{n^2}$  uz standardni skalarni produkt ( $n^2$ -torke iz  $K^{n^2}$  možemo poistovjetiti s  $n \times n$  matricama).

**Teorem 1** Neka je  $U$  unitaran prostor. Za  $u \in U$  stavimo  $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$  (nenegativan drugi korijen). Tada funkcija  $u \mapsto \|u\|$  s vektorskog prostora  $U$  u skup  $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$  ima sljedeća svojstva:

- (1) za  $u \in U$  vrijedi da je  $\|u\| = 0$  akko  $u = 0$ ,
- (2) za  $u \in U$  i  $\alpha \in K$  vrijedi  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ ,
- (3) vrijedi **nejednakost trokuta**, tj.  $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|, \forall u_1, u_2 \in U$ .

Nadalje, za bilo koja dva vektora  $u_1, u_2 \in U$  vrijedi **Cauchy-Schwarz-Bunyakowskyjeva nejednakost**:

$$|(u_1|u_2)| \leq \|u_1\| \cdot \|u_2\|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su  $u_1$  i  $u_2$  linearno zavisni.

Dokaz:

Svojstvo (1) neposredna je posljedica definitnosti skalarnog produkta.

Svojstvo (2) posljedica je linearnosti i konjugirane simetričnosti:

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x | \lambda x) = \lambda \bar{\lambda} (x | x) = |\lambda|^2 \|x\|^2.$$

Dokažimo sada C-S-B nejednakost. Za vektore  $u_1, u_2 \in U$  zbog pozitivnosti norme, linearnosti skalarnog produkta u prvoj varijabli i hermitske simetrije imamo redom:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(u_1 | u_1)u_2 - (u_2 | u_1)u_1\|^2 = ((u_1 | u_1)u_2 - (u_2 | u_1)u_1 | (u_1 | u_1)u_2 - (u_2 | u_1)u_1) \\ &= ((u_1 | u_1)u_2 | (u_1 | u_1)u_2 - (u_2 | u_1)u_1) - ((u_2 | u_1)u_1 | (u_1 | u_1)u_2 - (u_2 | u_1)u_1) \\ &= (u_1 | u_1) \overline{(u_1 | u_1)} (u_2 | u_2) - (u_1 | u_1) \overline{(u_2 | u_1)} (u_2 | u_1) - (u_2 | u_1) \overline{(u_1 | u_1)} (u_1 | u_2) \\ &\quad + (u_2 | u_1) \overline{(u_2 | u_1)} (u_1 | u_1) = \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - \|u_1\|^2 \overline{(u_1 | u_2)} (u_1 | u_2) \\ &= \|u_1\|^2 (\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - |(u_1 | u_2)|^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_1\|^2 (\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - |(u_1 | u_2)|^2) \geq 0$$

Ako je  $u_1 = 0$ , onda vrijedi da je  $|(u_1 | u_2)| = \|u_1\| \|u_2\|$ , jer su obje strane nula.

Ako je  $u_1 \neq 0$ , vrijedi da je  $\|u_1\|^2 > 0$ , pa dijeljenjem gornje nejednakosti s  $\|u_1\|^2$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - |(u_1 | u_2)|^2 &\geq 0, \\ \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 &\geq |(u_1 | u_2)|^2. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi akko

$$(u_1 | u_1)u_2 - (u_2 | u_1)u_1 = 0,$$

tj.

$$\begin{aligned} (u_1 | u_1)u_2 &= (u_2 | u_1)u_1 \quad / : (u_1 | u_1) \\ u_2 &= \frac{(u_2 | u_1)}{(u_1 | u_1)} u_1, \end{aligned}$$

tj. ako i samo ako su  $u_1$  i  $u_2$  linearno zavisni.

Pokažimo sada nejednakost trokuta, tj.  $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|, \forall u_1, u_2 \in U$ :

$$\begin{aligned} \|u_1 + u_2\|^2 &= (u_1 + u_2 | u_1 + u_2) = (u_1 | u_1) + (u_1 | u_2) + (u_2 | u_1) + (u_2 | u_2) \\ &= \|u_1\|^2 + (u_1 | u_2) + \overline{(u_1 | u_2)} + \|u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + 2 \operatorname{Re}(u_1 | u_2) + \|u_2\|^2 \\ &\leq \|u_1\|^2 + 2|(u_1 | u_2)| + \|u_2\|^2 \leq \|u_1\|^2 + 2\|u_1\| \|u_2\| + \|u_2\|^2 \\ &= (\|u_1\| + \|u_2\|)^2. \end{aligned}$$

□



Funkciju  $u \mapsto \|u\|$  definiranu na vektorskom prostoru  $U$  i s vrijednostima u skupu  $\mathbb{R}_+$  koja ima svojstva (1), (2), (3) iz prethodnog teorema nazivamo **norma**, a vektorski prostor na kojem je norma definirana nazivamo **normirani prostor**.

Ako je  $U$  normiran prostor s normom  $\|\cdot\|$  postavlja se pitanje da li je možda ta norma dobivena iz nekog skalarnog produkta na prostoru  $U$ . Vrlo jednostavan odgovor na to pitanje, kojeg navodimo bez dokaza, vezan je uz jednu geometrijsku jednakost, koja vrijedi za bilo koji paralelogram u ravnini: zbroj kvadrata duljina stranica paralelograma jednak je zbroju kvadrata duljina njegovih dviju dijagonala.

**Teorem 2 (Jordan - Neumann)** *Neka je  $U$  normiran prostor s normom  $x \mapsto \|x\|$ . Tada su sljedeća dva svojstva međusobno ekvivalentna:*

- (1) *Postoji skalarni produkt  $(x,y) \mapsto (x|y)$  na  $U$  takav da je  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .*
- (2) *Za bilo koje  $x,y \in U$  vrijedi tzv. **jednakost paralelograma**:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

*U tom slučaju skalarni produkt sa svojstvom  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$  je jedinstven i u slučaju polja  $K = \mathbb{R}$  zadan je s:*

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

*a u slučaju  $K = \mathbb{C}$  s:*

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Kada god imamo normu  $\|\cdot\|$  na vektorskom prostoru  $U$  smisleno je definirati i preslikavanje  $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  formulom  $d(x,y) = \|x - y\|$ . Prirodno je ovakvo preslikavanje shvaćati kao razdaljinsku funkciju ili metriku na  $U$ , tj. funkciju koja mjeri udaljenost elemenata  $x$  i  $y$ . Zaista  $d(x,y)$  ima sva razumna svojstva koja intuitivno očekujemo da vrijede, naime:

- (1)  $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in U,$
- (2)  $d(x,y) = 0$  onda i samo onda ako je  $x = y,$
- (3)  $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in U,$
- (4)  $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x,y,z \in U.$

**Napomena 1** *Skup  $U$  na kojem je zadana funkcija  $d$  koja svakom uređenom paru  $(x,y) \in U$  pridružuje realan broj  $d(x,y)$  s navedenim svojstvima, zove se **metrički prostor**.*

## 2 Gramova matrica

Skalarni produkt u unitarnom prostoru omogućava da ispitamo je li neki skup vektora linearno zavisen ili nije. Pokažimo kako se to radi.

Neka je zadan konačan skup vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$  iz unitarnog prostora  $U$ . Da bismo ispitali linearnu zavisnost toga skupa, moramo promatrati relaciju

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (1)$$

i vidjeti je li (1) moguće zadovoljiti na netrivialan način. Pomnožimo li (1) skalarno zdesna s  $x_k$ , imamo

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n | x_k) = 0,$$

tj.

$$\alpha_1 (x_1 | x_k) + \alpha_2 (x_2 | x_k) + \dots + \alpha_n (x_n | x_k) = 0 \text{ za } k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Sada je (2) homogen sustav od  $n$  linearnih jednadžbi s nepoznicama  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Matrica koeficijenata (točnije transponirana matrica) tog sistema je

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \dots & (x_1 | x_n) \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \dots & (x_2 | x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \dots & (x_n | x_n) \end{bmatrix}.$$

U prvom retku te matrice dolazi skalarni produkt vektora  $x_1$  s vektorima  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tim redom, u drugom retku produkt vektora  $x_2$  s  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tim redom, itd.

**Definicija 2** Za svakih  $n$  vektora unitarnog prostora matrica  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  potpuno je određena i zove se **Gramova matrica** vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Determinanta matrice  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  zove se **Gramova determinanta** vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i označava  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Teorem 3** Neka je  $U$  unitaran prostor, vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  iz  $U$  su linearno nezavisni akko je  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ , tj. Gramova matrica je regularna. U tom slučaju je  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ .

Dokaz:

Pretpostavimo da su vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  linearno zavisni i neka su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  skalari (od kojih je barem jedan različit od nule) takvi da je  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$ . Tada za svaki  $j \in \{1, \dots, n\}$  vrijedi:

$$0 = \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k | x_j \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k | x_j).$$





$x_1, x_2, \dots, x_n$  na sljedeći način:

$$x = \det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_{n-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_{n-1}) & x_2 \\ (x_3|x_1) & (x_3|x_2) & \dots & (x_3|x_{n-1}) & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \dots & (x_n|x_{n-1}) & x_n \end{bmatrix}.$$

Posebno, primijetimo da je  $\alpha_n = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Uz uvedene oznake imamo

$$(x|x_j) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \alpha_k (x_k|x_j) = \Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pri čemu je  $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  oznaka za determinantu matrice koja se iz Gramove matrice dobije tako da se zadnji stupac zamijeni  $j$ -tim stupcem iste matrice:

$$\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_{n-1}) & (x_1|x_j) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_{n-1}) & (x_2|x_j) \\ (x_3|x_1) & (x_3|x_2) & \dots & (x_3|x_{n-1}) & (x_3|x_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \dots & (x_n|x_{n-1}) & (x_n|x_j) \end{bmatrix}.$$

Za  $1 \leq j \leq n-1$  u  $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  su  $j$ -ti i  $n$ -ti stupac jednaki pa je  $\Gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Nadalje,  $\Gamma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Dakle, vrijedi

$$(x|x_j) = 0 \quad \text{za } j = 1, \dots, n \quad \text{i} \quad (x|x_n) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Odatle je

$$0 \leq (x|x) = (x|x) \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \alpha_k x_k = \overline{\alpha_n} (x|x_n) = \overline{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Isto zaključivanje mogli smo provesti za vektore  $x_1, x_2, \dots, x_n$  za bilo koji  $k$ . Dakle, vrijedi:

$$\overline{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})} \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0 \quad \text{za } k = 2, \dots, n.$$

Vektori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  su linearno nezavisni, pa su sve determinante

$$\Gamma(x_1), \Gamma(x_1, x_2), \dots, \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

različite od nule. Budući da vrijedi  $\Gamma(x_1) = \|x_1\|^2 > 0$ , iz gornje nejednakosti za  $k = 2$  slijedi  $\Gamma(x_1, x_2) > 0$ , odakle iz gornje nejednakosti za  $k = 3$  slijedi  $\Gamma(x_1, x_2, x_3) > 0$ , i tako redom korak po korak sve do  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ .

□



### 3 Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije vektora

U ovom poglavlju ćemo navesti Gram - Schmidtov postupak ortogonalizacije, te pokazati zašto ima smisla provoditi ovaj postupak. Prisjetimo se najprije osnovnih definicija.

**Definicija 3** Kažemo da su dva vektora  $x, y$  unitarnog prostora  $U$  **okomiti** i pišemo  $x \perp y$ , ako je  $(x|y) = 0$ . Također, dva skupa  $U_0, U_1 \subseteq U$  su **okomiti** i pišemo  $U_0 \perp U_1$ , ako je  $(x_0|x_1) = 0, \forall x_0 \in U_0, x_1 \in U_1$ .

**Definicija 4** Skup svih vektora iz  $U$  koji su okomiti na neki skup  $U_0 \subseteq U$  zove se **ortogonalan komplement** skupa  $U_0$  i označava s  $U_0^\perp$ .

**Primjer 4** Neka je  $S \subseteq U$ . Tada je  $S^\perp = \{u \in U : u \perp S\}$  potprostor od  $U$ .

Rješenje:

Neka su  $x, y \in S^\perp$ . Tada je  $(x|a) = 0$  i  $(y|a) = 0, \forall a \in S$ .

Neka su  $\alpha, \beta \in K$  i  $a \in S$  proizvoljni. Tada  $(\alpha x + \beta y|a) = \alpha(x|a) + \beta(y|a) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ .

To znači da je  $\alpha x + \beta y \in S^\perp$  što povlači da je  $S^\perp$  potprostor od  $U$ .

Ako je  $U$  konačnodimenzionalan unitaran prostor i  $U_0$  potprostor, onda je  $U_0^\perp$  također direktni komplement potprostora  $U_0$ , pa je  $U_0 + U_0^\perp = U$  (vidi Teorem 5).

Suma ovog tipa zove se **ortogonalna** i označava  $\oplus$ . Prema tome je  $U = U_0 \oplus U_0^\perp$ .

Općenito kažemo da je  $U$  **ortogonalna suma** potprostora  $U_1, \dots, U_m$  i pišemo  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ , ako je  $U = U_1 + \dots + U_m$  i svaki vektor potprostora  $U_i$  ortogonalan je na svaki vektor potprostora  $U_j$  za  $i \neq j$ .

Primjetimo da je ortogonalni komplement potprostora  $U_0$  jednoznačno određen tim potprostorom, dok to isto ne vrijedi za direktan komplement tog prostora. Ortogonalni komplement  $U_0^\perp$  piše se također i kao

$$U_0^\perp = U \ominus U_0.$$

**Definicija 5** Kažemo da je vektor  $e$  **normiran** ili **jedinični vektor**, ako je  $\|e\| = 1$ .

**Definicija 6** Skup vektora zove se **ortogonalan** ako su bilo koja dva vektora toga skupa međusobno okomita. Skup vektora zove se **ortonormiran** ako je on ortogonalan skup i ako je svaki njegov element normiran vektor. (Nenul vektor  $x$  normiramo tako da ga pomnožimo s  $\frac{1}{\|x\|}$ , tj. gledamo vektor  $\frac{x}{\|x\|}$ ).

### 3.1 Ortonormirana baza

**Propozicija 1** *Neka je  $U$  unitaran prostor. Svaki ortogonalan skup u  $U$  koji ne sadrži nulvektor je linearno nezavisan. Posebno, svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan.*

Dokaz:

Neka je

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = 0,$$

gdje je  $\{u_1, \dots, u_k\}$  ortogonalan skup koji ne sadrži nulvektor. Pomnožimo ovu jednadžbu skalarno sa  $u_j$  za neki  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Zbog linearnosti skalarnog produkta u prvoj varijabli imamo

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (u_i | u_j) = 0,$$

odnosno

$$\alpha_1 (u_1 | u_j) + \dots + \alpha_k (u_k | u_j) = 0.$$

Pretpostavili smo da je skup ortogonalan pa je  $u_j$  ortogonalan na sve  $u_i$ ,  $i \neq j$ . To znači da od cijele sume ostane samo jedan član pa imamo

$$\alpha_j (u_j | u_j) = 0.$$

Sada koristimo da početni skup nije sadržavao nulvektor pa je  $u_j \neq 0$ , onda je i  $(u_j | u_j) \neq 0$  zbog definicije skalarnog produkta. To znači da je nužno  $\alpha_j \neq 0$ . Ovdje je  $j$  bio proizvoljan pa slijedi da mora vrijediti  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ , odnosno skup je linearno nezavisan.

□

Dakle, prvo korisno svojstvo koje smo dobili je linearna nezavisnost, ali od ortonormiranih skupova možemo dobiti puno više.

Pretpostavimo sada da unitarni prostor  $U$  ima ortonormiranu bazu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  (za sad još ne znamo da takva postoji za općeniti unitarni prostor  $U$ ). Znamo da se svaki  $x \in U$  može zapisati na jedinstven način u toj bazi, dakle

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

gdje su koeficijenti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  jedinstveno određeni skalari. Kada radimo općenito s bazom pronalazak tih skalara nije jednostavan posao, svodi se na  $n \times n$  linearni sustav.

Međutim, ako imamo posla s ortonormiranom bazom dovoljno je izračunati  $n$  skalarnih produkata. Naime, imamo

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad / (\cdot | e_j) \\(x | e_j) &= \alpha_j (e_j | e_j) \\(x | e_j) &= \alpha_j,\end{aligned}$$

što znači da je svaki od koeficijenata upravo skalarni produkt danog vektora s odgovarajućim članom ortonormirane baze, odnosno

$$x = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i.$$

Isto tako, skalarni produkt dva vektora možemo lijepo izraziti u ortonormiranoj bazi koristeći gornji prikaz. Neka su  $x, y \in U$ , imamo

$$\begin{aligned}(x | y) &= \left( \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i \mid \sum_{j=1}^n (y | e_j) e_j \right) \\&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x | e_i) \overline{(y | e_j)} (e_i | e_j) \\&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x | e_i) (e_j | y) \delta_{ij} \\&= \sum_{i=1}^n (x | e_i) (e_i | y)\end{aligned}$$

Primijetimo da je ovo zapravo formula kojom smo računali standardni skalarni produkt na  $\mathbb{R}^n$ , pri čemu je pripadna ortonormirana baza bila upravo ona kanonska,  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

Ortonormiran skup koji je baza od  $U$  zove se **ortonormirana baza** od  $U$ .

Ako je  $f = \{f_1, \dots, f_m\}$  ortonormirana baza drugog unitarnog prostora  $V$  i  $A \in L(U, V)$  gdje  $L(U, V)$  označava skup svih linearnih operatora s  $U$  u  $V$ , sličan račun pokazuje da je element matrice  $A(f, e)$  na presjecištu  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca jednak  $\alpha_{ij} = (Ae_j | f_i)$ :

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} (Ae_1 | f_1) & (Ae_2 | f_1) & \dots & (Ae_n | f_1) \\ (Ae_1 | f_2) & (Ae_2 | f_2) & \dots & (Ae_n | f_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Ae_1 | f_m) & (Ae_2 | f_m) & \dots & (Ae_n | f_m) \end{bmatrix}.$$

**Teorem 4** Neka je  $\{e_1, \dots, e_k\}$  ortonormiran podskup unitarnog prostora  $U$  i neka je  $x \in U$ .

(1) Vrijedi tzv. **Besselova nejednakost**

$$\sum_{j=1}^k (x | e_j)^2 \leq \|x\|^2.$$



Pri tome vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je  $x \in [\{e_1, \dots, e_k\}]$ . U tom slučaju je

$$x = \sum_{j=1}^k (x|e_j)e_j.$$

(2) Stavimo

$$x_0 = \sum_{j=1}^k (x|e_j)e_j.$$

Za svaki  $y \in [\{e_1, \dots, e_k\}]$ ,  $y \neq x_0$ , vrijedi stroga nejednakost

$$\|x - x_0\| < \|x - y\|.$$

Dakle,  $x_0$  je jedinstvena najbolja aproksimacija vektora  $x$  iz potprostora razapetog vektorima  $e_1, \dots, e_k$ .

Dokaz teorema 4 se može naći u [3].

**Teorem 5** (teorem o ortogonalnoj projekciji) Neka je  $U$  unitarni prostor i  $V$  konačnodimenzionalan potprostor. Tada je  $U = V \dot{+} V^\perp$ . Drugim riječima, za svaki vektor  $x \in U$  postoje jedinstveni vektori  $y \in V$  i  $z \in V^\perp$  takvi da je  $x = y + z$ . Nadalje, ako je  $U$  konačnodimenzionalan, vrijedi  $V^{\perp\perp} = V$ .

Dokaz:

Neka je  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortonormirana baza od  $V$ . Za dani vektor  $x \in U$  stavimo

$$y = \sum_{1 \leq k \leq n} (x|e_k)e_k \quad \text{i} \quad z = x - y, \quad \text{dakle} \quad x = y + z.$$

Tada je  $y \in V$ . Nadalje, za bilo koji  $j \in \{1, \dots, n\}$  je

$$(z|e_j) = (x|e_j) - \left( \sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k | e_j \right) = (x|e_j) - \sum_{k=1}^n (x|e_k)\delta_{kj} = 0,$$

dakle  $z \perp [\{e_1, \dots, e_n\}] = V$ . Treba još dokazati jedinstvenost takvih vektora. Ako pretpostavimo da su i  $y' \in V$  i  $z' \perp V$  takvi da je  $x = y' + z'$ , onda je  $y + z = y' + z'$ , dakle  $y - y' = z' - z$ . Označimo taj vektor s  $u$ . Tada  $u = y - y'$  pokazuje da je  $u \in V$ , a  $u = z' - z$  pokazuje da je  $u \perp V$ . No tada je  $u \perp u$ , dakle  $(u|u) = 0$ , odakle slijedi  $u = 0$ . Dakle,  $y' = y$  i  $z' = z$ .

Dokažimo još posljednju tvrdnju. Prema dokazanom znamo da vrijedi  $\dim V^\perp = \dim U - \dim V$ , a odatle

$$\dim V^{\perp\perp} = \dim U - \dim V^\perp = \dim U - (\dim U - \dim V) = \dim V.$$

Kako je očito  $V \subseteq V^{\perp\perp}$ , slijedi  $V^{\perp\perp} = V$ .

□

### 3.2 Gram - Schmidov postupak ortogonalizacije

Neka je  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  konačan ili prebrojiv niz vektora iz unitarnog prostora  $U$  i neka je  $[S]$  potprostor određen sa  $S$ , tj. skup svih linearnih kombinacija vektora iz  $S$ . Sada ćemo opisati postupak koji omogućava da se skup  $S$  ortonormira, tj. nadomjesti ortonormiranim skupom  $S_0$  koji razapinja isti potprostor  $[S]$ . Taj se postupak naziva **Gram-Schmidov postupak ortogonalizacije**.

Najprije navedimo teorem koji rješava pitanje egzistencije (pa i konstrukcije) ortonormirane baze u konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima:

**Teorem 6 (Gram-Schmidt)** Neka je  $x_1, x_2, \dots$  konačan ili beskonačan linearno nezavisan niz vektora u unitarnom prostoru  $U$ .

(1) Postoji ortonormirani niz  $e_1, e_2, \dots \in U$  sa svojom da je

$$[\{x_1, x_2, \dots, x_k\}] = [\{e_1, \dots, e_k\}], \forall k. \quad (4)$$

(2) Uz dodatni uvjet

$$(e_k | x_k) > 0, \forall k \quad (5)$$

ortonormirani niz iz tvrdnje (1) je jedinstven.

Dokaz:

$[\{e_1\}] = [\{x_1\}]$  znači da je  $e_1 = \alpha x_1$  za neki skalar  $\alpha$ . Iz zahtjeva  $\|e_1\| = 1$  slijedi da mora biti  $|\alpha| = \frac{1}{\|x_1\|}$ . Nadalje,  $(e_1 | x_1) = \alpha \|x_1\|^2$ , pa dodatni zahtjev  $(e_1 | x_1) > 0$  znači da mora biti  $\alpha > 0$ . Dakle,  $|\alpha| = \frac{1}{\|x_1\|}$ , tj.  $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$  je jedini jedinični vektor takav da je  $[\{e_1\}] = [\{x_1\}]$  i  $(e_1 | x_1) > 0$ . Pretpostavimo da smo našli ortonormirane vektore  $e_1, \dots, e_k$  takve da vrijede (4) i (5) za  $k = 1, 2, \dots, n$ . Dokazat ćemo sada da postoji jedinstven jedinični vektor  $e_{n+1}$  takav da vrijede (4) i (5) za  $k = n + 1$ . Na taj način će teorem 4 matematičkom indukcijom biti u potpunosti dokazan.

Zahtjev (4) za  $k = n + 1$  znači da mora biti  $e_{n+1} \in [\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}]$ , a kako je po pretpostavci  $[\{x_1, x_2, \dots, x_n\}] = [\{e_1, \dots, e_n\}]$ , to znači da mora biti  $e_{n+1} \in [\{e_1, \dots, e_n, x_{n+1}\}]$ . Tražimo dakle vektor  $e_{n+1}$  u obliku

$$e_{n+1} = \alpha x_{n+1} + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Za  $1 \leq k \leq n$  mora biti  $0 = (e_{n+1} | e_k) = \alpha (x_{n+1} | e_k) + \alpha_k$ , a to znači  $\alpha_k = -\alpha (x_{n+1} | e_k)$  za  $k = 1, 2, \dots, n$ . Prema tome,

$$e_{n+1} = \alpha y, \text{ gdje je } y = x_{n+1} - (x_{n+1} | e_1) e_1 - (x_{n+1} | e_2) e_2 - \dots - (x_{n+1} | e_n) e_n.$$

Vektor  $e_{n+1}$  je jedinični ako i samo ako je  $|\alpha| = \frac{1}{\|y\|}$ . Nadalje, imamo

$$(e_{n+1}|x_{n+1}) = \alpha(x_{n+1} - \sum_{k=1}^n (x_{n+1}|e_k)e_k|x_{n+1}) = \alpha[\|x_{n+1}\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x_{n+1}|e_k)|^2].$$

Izraz u uglatoj zagradi je strogo pozitivan jer zbog linearne nezavisnosti vektor  $x_{n+1}$  nije u potprostoru  $[\{x_1, x_2, \dots, x_n\}] = [\{e_1, e_2, \dots, e_n\}]$ . Dakle  $(e_{n+1}|x_{n+1}) > 0$  ako i samo ako je  $\alpha > 0$ . To znači da mora biti  $\alpha = \frac{1}{\|y\|}$ . Dakle, postoji jedan i samo jedan jedinični vektor  $e_{n+1}$  takav da vrijede (4) i (5) za  $k = n + 1$ . To je vektor  $e_{n+1} = \frac{1}{\|y\|}y$  pri čemu je  $y = x_{n+1} - \sum_{1 \leq k \leq n} (x_{n+1}|e_k)e_k$ .

□

Za jedinstveni niz  $e_1, e_2, e_3, \dots$  iz tvrdnje (1) Teorema 5 kažemo da je iz niza  $x_1, x_2, x_3, \dots$  dobiven **Gram - Schmidtom postupkom ortonormiranja**.

**Korolar 1** Neka je  $U$  konačnodimenzionalan unitaran prostor. Tada postoji ortonormirana baza od  $U$ . Štoviše, svaki ortonormiran podskup od  $U$  sadržan je u nekoj ortonormiranoj bazi od  $U$ .

Dokaz:

Neka je  $\{x_1, \dots, x_n\}$  baza prostora  $U$  i primjenimo Gram - Schmidtov postupak. Kako dobiveni ortonormirani skup  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uz ostalo zadovoljava  $[\{e_1, \dots, e_n\}] = [\{x_1, \dots, x_n\}]$ , pa je taj skup i baza za  $U$ . Nadalje, neka je  $\{x_1, \dots, x_k\}$  ortonormiran podskup od  $U$ . Tada je taj skup linearno nezavisan, pa je sadržan u nekoj bazi  $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  od  $U$ . Gram - Schmidtom postupkom ortonormiranja dolazimo do ortonormirane baze  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  od  $U$ . Iz dokaza Teorema 4 i iz ortonormiranosti skupa  $\{x_1, \dots, x_k\}$  je jasno da je  $e_1 = x_1, \dots, e_k = x_k$ . Dakle, ortonormiran skup  $\{x_1, \dots, x_k\}$  sadržan je u ortonormiranoj bazi  $\{x_1, \dots, x_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ .

□

**Teorem 7** Neka je  $x_1, x_2, \dots$  linearno nezavisan niz u unitarnom prostoru  $U$ . Jedinstveni ortonormiran niz  $e_1, e_2, \dots$  iz tvrdnje (2) Teorema 6 dan je formulama

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1, \quad e_k = \frac{\det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_{k-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_{k-1}) & x_2 \\ (x_3|x_1) & (x_3|x_2) & \dots & (x_3|x_{k-1}) & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \dots & (x_k|x_{k-1}) & x_k \end{bmatrix}}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)}}, \quad k \geq 2.$$

Dakle, za  $k \geq 2$  je  $e_k = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)}}y_k$ , pri čemu je vektor  $y_k$  zadan kao determinanta matrice koja se iz Gramove matrice  $G(x_1, x_2, \dots, x_k)$  dobije tako da se zadnji  $(k - ti)$  stupac zamijeni stupcem vektora  $x_1, x_2, \dots, x_k$  (preciznije,  $y_k$  je razvoj determinante po zadnjem stupcu).



Dokaz:

Neka su vektori  $y_k$  definirani kao u iskazu Teorema:

$$y_1 = x_1, \quad y_k = \det \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \dots & (x_1|x_{k-1}) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \dots & (x_2|x_{k-1}) & x_2 \\ (x_3|x_1) & (x_3|x_2) & \dots & (x_3|x_{k-1}) & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_k|x_1) & (x_k|x_2) & \dots & (x_{k-1}|x_{k-1}) & x_k \end{bmatrix} \quad \text{za } k \geq 2.$$

U dokazu Teorema 3 vidjeli smo da je tada:

$$(y_k|x_j) = 0 \quad \text{za } 1 \leq j \leq k-1; \quad (y_k|x_k) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k); \\ \|y_k\|^2 = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Vektor  $y_j$  je linearna kombinacija vektora  $x_1, x_2, \dots, x_j$ . Stoga je

$$[\{y_1, \dots, y_k\}] \subseteq [\{x_1, \dots, x_k\}].$$

Nadalje, za  $j < k$  vektor  $y_j$  je linearna kombinacija vektora  $x_1, x_2, \dots, x_j$ , pa zbog  $(y_k|x_i) = 0$  za  $i < k$  slijedi  $(y_k|y_j) = 0$ . To pokazuje da su vektori niza  $y_1, y_2, y_3, \dots$  međusobno ortogonalni. Kako je

$$(y_k, x_k) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,$$

to je  $y_k \neq 0, \forall k$ . Zaključujemo da su vektori  $y_1, y_2, \dots$  linearno nezavisni, pa slijedi  $\dim[\{y_1, y_2, \dots, y_k\}] = k$ . Zbog inkluzije  $[\{y_1, y_2, \dots, y_k\}] \subseteq [\{x_1, x_2, \dots, x_k\}]$  slijedi jednakost  $[\{y_1, y_2, \dots, y_k\}] = [\{x_1, x_2, \dots, x_k\}]$ . Napokon, neka su  $e_1, e_2, \dots$  vektori iz iskaza Teorema:  $e_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$ . Tada je  $e_1, e_2, e_3, \dots$  ortonormiran niz takav da  $[\{e_1, e_2, \dots, e_k\}] = [\{x_1, x_2, \dots, x_k\}], \forall k$  i

$$(x_k|e_k) = \frac{(x_k|y_k)}{\sqrt{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}} = \sqrt{\frac{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})}} > 0.$$

Time je Teorem 7 u potpunosti dokazan. □

**Primjer 5** Vektor  $a = 2e_1 - e_2 + e_3$  treba prikazati kao linearnu kombinaciju vektora  $x_1 = e_1 + e_2 + e_3, x_2 = e_1 + e_2 - e_3, x_3 = e_1 - e_2 + e_3$ .

Rješenje:

Budući da je vektor

$$x = \begin{bmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & (x_1|x_3) & x_1 \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & (x_2|x_3) & x_2 \\ (x_3|x_1) & (x_3|x_2) & (x_3|x_3) & x_3 \\ (a|x_1) & (a|x_2) & (a|x_3) & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 3 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 3 & x_3 \\ 4 & -2 & 6 & a \end{bmatrix}$$

okomit na vektore  $x_1, x_2, x_3$ , tj. na bazu prostora, to je  $x = 0$ . Odavde je

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} x_2 - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} a = 0,$$

tj.

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2a = 0 \Rightarrow a = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3.$$

**Primjer 6** Provedimo prethodno opisan postupak ortonormiranja baze  $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 0)\}$ .

Rješenje:

Gledamo prvi vektor iz baze  $e'_1 = x_1 = (1, 1, 1)$ , pa ga normiramo:  $e_1 = \frac{e'_1}{\|e'_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$ .

Zatim izračunamo ortogonalnu projekciju  $e'_2$  drugog vektora  $x_2$  iz baze na vektor  $e_1$ :

$$\begin{aligned} e'_2 &= x_2 - (x_2|e_1)e_1 = (1, 0, 1) - ((1, 0, 1)|(1, 1, 1)) \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \\ &= (1, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) \cdot 2 = \frac{1}{3}(1, -2, 1), \end{aligned}$$

te ga normiramo:

$$e_2 = \frac{1}{3}(1, -2, 1) \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = (1, -2, 1) \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

I na kraju pomoću  $e_1$  i  $e_2$  izračunamo ortonormiranu projekciju trećeg vektora iz početne baze na potprostor razapet s  $e_1$  i  $e_2$ :

$$\begin{aligned} e'_3 &= x_3 - (x_3|e_1)e_1 - (x_3|e_2)e_2 = (2, 0, 0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= (2, 0, 0) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) - \frac{2}{6}(1, -2, 1) = (1, 0, -1), \\ e_3 &= (1, 0, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Konačno dobivamo ortonormiranu bazu  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .



## 4 Unitarni operatori

Iz same definicije unitarnog prostora  $U$  vidimo da je svakom uređenom paru  $(x, y)$  vektora  $x, y \in U$  pridružen skalar  $(x, y) \in K$ . Imamo li neku funkciju-operator  $A$  definiran na  $U$  s vrijednostima u  $U$ , jasno je da će općenito  $A$  mijenjati skalarni produkt, tj. bit će  $(A(x)|A(y)) \neq (x|y)$ . Tako npr. funkcija  $A$ , koja svakom vektoru pridružuje nulvektor mijenja skalarni produkt. S druge strane je od interesa da se nađu i po mogućnosti karakteriziraju svi operatori  $M : U \rightarrow U$  za koje je

$$(M(x)|M(y)) = (x|y)$$

za sve  $x, y \in U$ . Treba očekivati da svi takvi operatori razapinju grupu s obzirom na koju su „geometrijska“ svojstva unitarnog prostora invarijantna.

Budući da u rješavanju ovog problema treba razlikovati slučaj  $\dim U < \infty$  i slučaj beskonačno dimenzionalnog prostora, pretpostavimo da je  $\dim U < \infty$ .

**Definicija 7** Operator  $M : U \rightarrow U$ , za koji vrijedi

$$(M(x)|M(y)) = (x|y), \forall x, y \in U, \quad (6)$$

zove se **unitaran operator**.

### 4.1 Svojstva unitarnog operatora

Pokažimo najprije da je unitaran operator  $M : U \rightarrow U$  linearan, tj. da vrijedi

$$M(\alpha x + \beta y) = \alpha Mx + \beta My$$

za sve  $\alpha, \beta \in K, x, y \in U$ .

Naime,

$$M(\alpha x + \beta y) - \alpha Mx - \beta My \in \text{Im}(M), \quad (7)$$

gdje je  $\text{Im}(M)$  slika operatora  $M$  (to je potprostor od  $U$ ).

Za proizvoljno  $z \in U$  imamo

$$\begin{aligned} & (M(\alpha x + \beta y) - \alpha M(x) - \beta M(y)|M(z)) = \\ & = (M(\alpha x + \beta y)|M(z)) - \alpha(M(x)|M(z)) - \beta(M(y)|M(z)) \\ & = (\alpha x + \beta y|z) - \alpha(x|z) - \beta(y|z) = 0 \end{aligned}$$

jer  $M$  čuva skalarni produkt. Prema tome je

$$M(\alpha x + \beta y) - \alpha Mx - \beta My \perp \text{Im}(M). \quad (8)$$

Iz (7) i (8) zaključujemo da je  $M(\alpha x + \beta y) - \alpha Mx - \beta My = 0$  jer  $\text{Im}(M) \oplus \text{Im}(M)^\perp = U$ . Dakle,  $M$  je linearan operator.

Nadalje, zahtjev (6) je ekvivalentan zahtjevu  $\|Mx\| = \|x\|, \forall x \in U$ . Ovo se zove izometričnost. Dakle, unitarni operatori čuvaju normu vektora.

Također, zahtjev (6) implicira da je  $M$  injektivan operator.

Naime, ako je  $Mx = 0$ , onda zbog  $\|Mx\| = \|x\|$  odmah slijedi da je i  $x = 0$ .

Štoviše,  $M$  je i surjektivan operator, tj.  $Im(M) = U$ . Zaista, za svaku ortonormiranu bazu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  od  $U$ , vektori  $Me_1, \dots, Me_n$  linearno su nezavisni jer

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k Me_k = 0$$

povlači

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (Me_k | Mx) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (e_k | x) = 0,$$

za sve  $x \in U$ . Uvrštavajući redom  $x = e_1, \dots, e_n$  u prethodni izraz dobivamo  $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ . Kako je  $\{Me_1, \dots, Me_n\}$  linearno nezavisan skup od  $n$  elemenata, to je  $Im(M) = U$ , pa linearan operator  $M$  preslika  $U$  na  $U$ .

Dakle, unitaran operator je bijektivan pa ima inverzni operator. Nadalje, vrijedi sljedeći teorem:

**Teorem 8** Neka je  $U$  konačnodimenzionalan unitaran prostor i  $M \in L(U)$  linearan operator na  $U$ . Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:

- (1)  $M$  je unitaran.
- (2) Za svaku ortonormiranu bazu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  od  $U$ , skup  $\{Me_1, \dots, Me_n\}$  je ortonormirana baza za  $U$ .
- (3) Postoji ortonormirana baza  $\{e_1, \dots, e_n\}$  od  $U$  takva da je i skup  $\{Me_1, \dots, Me_n\}$  ortonormirana baza za  $U$ .

Prethodni teorem pokazuje da je i inverzni operator  $M^{-1}$  unitarnog operatora  $M$ , također unitaran. To je zato što i  $M^{-1}$  ortonormirane baze prevodi u ortonormirane baze, samo u obrnutom smjeru.

Za unitaran operator  $M$  na  $U$  vrijedi

$$(Mx | y) = (x | M^{-1}y), \forall x, y \in U. \quad (9)$$

Naime, za proizvoljan  $x, y \in U$  postoji  $v \in U$  tako da je  $Mv = y$ . Tada je  $v = M^{-1}y$ . Sada je

$$(Mx | y) = (Mx | Mv) = (x | v) = (x | M^{-1}y).$$

**Teorem 9** Neka je  $U$  konačnodimenzionalan unitaran prostor i  $M \in L(U)$ . Tada postoji jedinstveni operator  $M^* \in L(U)$  takav da je

$$(Mx | y) = (x | M^*y), \forall x, y \in U. \quad (10)$$

Operator  $M^*$  iz Teorema 9 zove se **adjungirani operator** operator  $M$ . Iz (9) i (10) uočavamo da za unitaran operator  $M$  vrijedi  $M^{-1} = M^*$ .

## Literatura

- [1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [2] D. Butković, *Kompleksni konačnodimenzionalni vektorski prostori*, Odjel za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2007.
- [3] H.Kraljević, *Vektorski prostori*, Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2008., skripta