Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Tea Kovačić

Igraći kromatski broj

Završni rad

Rijeka, srpanj 2024.

Sveučilište u Rijeci

Fakultet za matematiku

Sveučilišni prijediplomski studij Matematika

Tea Kovačić

Igraći kromatski broj

Mentor: dr. sc. Ana Grbac

Završni rad

Rijeka, srpanj 2024.

SAŽETAK

U ovom završnom radu glavna tematika nam je igraći kromatski broj. U uvodu ćemo početi s objašnjavanjem igre bojenja koju igraju dva igrača te ćemo objasniti i igraći kromatski broj. Da bismo to mogli, trebamo uvesti osnovne pojmove kao što su graf, susjedni vrhovi, pravilno bojenje, k-bojenje, kromatski broj. Prvo ćemo uvesti jednostavnije vrste grafova te pomoću teorema i propozicija iskazati njihove igraće kromatske brojeve i primjerima pokazati kako izgleda bojenje kad igraju dva igrača. Također, objasnit ćemo što je Petersenov graf te iskazati i dokazati njegov igraći kromatski broj kroz teorem čiji dokaz se sastoji od više slučajeva. U posebnom poglavlju objasnit ćemo Kartezijev produkt grafova, igraći broj boja i također objasniti igraći kromatski broj vezan uz njih.

Ključne riječi: *graf, susjedni vrhovi, pravilno bojenje, igraći kromatski broj, igra bojenja, jednostavni grafovi, Petersenov graf, Kartezijev produkt grafova, igraći broj boja*

Sadržaj

Poglavlje 1

UVOD

Ovaj rad započet ćemo objašnjavanjem igre bojenja namijenjene za dvije osobe koje koriste boje iz skupa $X = \{1, \dots, k\}$. Igrači naizmjenično boje vrhove zadanog konačnog grafa G. U igri nijedan par susjednih vrhova ne smije biti obojen istom bojom. Igru počinje prvi igrač koji i pobjeđuje ako su svi vrhovi grafa G obojeni. U suprotnom, pobjeđuje drugi igrač ako u bilo kojoj fazi igre postoji neobojen vrh kojem ne možemo pridružiti neku dopuštenu boju iz skupa X takvu da su susjedni vrhovi različito obojeni. S ovom igrom povezujemo igraći kromatski broj grafa G, a to je najmanji broj boja koje prvog igrača vode do pobjede. Igraći kromatski broj uveo je Hans Leo Bodlaender. On je nizozemski informatičar, profesor računarstva na Sveučilištu u Utrechtu.

1.1 Osnovni pojmovi

U ovom potpoglavlju definirat ćemo neke osnovne pojmove iz teorije grafova koje će nam trebati u nastavku.

Definicija 1.1.1. ***Graf*** *G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, gdje je*

- *$V(G) \neq \emptyset$ skup vrhova od G,*
- *$E(G)$ skup disjunktan s $V(G)$, a čije elemente nazivamo bridovima grafa G,*
- *ψ_G funkcija incidencije koja svakom bridu iz skupa $E(G)$ pridružuje neuređeni par, ne nužno različitih, vrhova iz $V(G)$.*

Definicija 1.1.2. *Graf H je* ***podgraf*** *grafa G, u oznaci $H \subseteq G$, ako je $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ i $\psi_H = \psi_G|_{E(H)}$.*

Napomena 1.1.1. *Broj vrhova grafa G označavamo s $\nu(G) = |V(G)|$. Broj bridova grafa G označavamo s $\varepsilon(G) = |E(G)|$.*

Definicija 1.1.3. *Za vrhove u i v grafa G kažemo da su* ***susjedni*** *ako postoji brid $e \in E(G)$ takav da vrijedi $\psi_G(e) = \{u, v\}$. Vrhove u i v zovemo* ***krajevima*** *brida e te kažemo da je brid e* ***incidentan*** *s vrhovima u i v.*

Definicija 1.1.4. *Za bridove kažemo da su* ***susjedni*** *ako imaju barem jedan zajednički kraj.*

Definicija 1.1.5. ***Petlja*** *je brid koji je incidentan samo s jednim vrhom.*

Definicija 1.1.6. *Dva ili više bridova s istim parom krajeva zovu se* ***višestruki bridovi****.*

Definicija 1.1.7. *Graf G nazivamo* ***jednostavan graf*** *ako taj graf nema petlji i nikoja dva brida ne spajaju isti par vrhova.*

Definicija 1.1.8. *Za graf G kažemo da je* ***prazan graf*** *ako vrijedi $E(G) = \emptyset$.*

Definicija 1.1.9. ***Trivijalan graf*** *je graf bez bridova i samo s jednim vrhom.*

Definicija 1.1.10. ***Stupanj vrha*** *v u grafu G je broj bridova koji su incidentni s v, pri čemu se petlje broje dva puta po dogovoru. Oznaka je $d(v)$.*

Napomena 1.1.2. *Za vrh v kažemo da je* ***izoliran*** *ako je $d(v) = 0$. Vrh v zovemo* ***list*** *ako je $d(v) = 1$.*

Definicija 1.1.11. *Grafovi G i H su* ***izomorfni*** *($G \approx H$) ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\phi : E(G) \to E(H)$ takve da je očuvana relacija incidencije, tj. takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan s $\phi(e)$ u H.*

Definicija 1.1.12. *Za graf kažemo da je* ***regularan*** *ako su mu svi vrhovi istog stupnja.*

Definicija 1.1.13. *Za graf kažemo da je* ***k-regularan*** *ako je regularan s vrhovima stupnja k.*

Definicija 1.1.14. ***k-bojenje*** *vrhova grafa* G *je funkcija* $f : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, *koja svakom vrhu grafa* G *pridružuje jednu od* k *boja. Kažemo da je vrh* v *obojen bojom* i *ako je* $f(v) = i$.

Definicija 1.1.15. ***Pravilno bojenje*** *je bojenje kada su susjedni vrhovi obojeni različitim bojama.*

Definicija 1.1.16. ***Kromatski broj*** $\chi(G)$ *grafa* G *je najmanji broj boja potrebnih za pravilno bojenje vrhova grafa* G. G *je* ***k-kromatski*** *ako je* $\chi(G) = k$.

Napomena 1.1.3. *Graf s petljom ne možemo pravilno obojiti.*

Definicija 1.1.17. *Kažemo da je skup* $S \subseteq V(G)$ ***nezavisan skup*** *ako nikoja dva vrha iz* S *nisu susjedna u* G.

Definicija 1.1.18. ***Pravilno k-bojenje*** *grafa* G *je rastav skupa V(G) na k disjunktnih podskupova* $V_i = \{v \in V(G) \mid f(v) = i\}$ *koji su nezavisni, ali neki mogu biti i prazni.*

Definicija 1.1.19. ***Igraći kromatski broj*** $\chi_g(G)$ *grafa* G *predstavlja najmanji broj boja za koji prvi igrač ima zajamčenu pobjedničku strategiju.*

Poglavlje 2

IGRAĆI KROMATSKI BROJ

2.1 Igraći kromatski broj nekih jednostavnih vrsta grafova

U ovom poglavlju identificiramo igraći kromatski broj nekih poznatih klasa grafova kao na primjer staza, ciklusa, zvijezda, kotača, potpunih grafova i potpunih bipartitnih grafova.

Definicija 2.1.1. ***Šetnja*** *u grafu G je konačan niz $w = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$, pri čemu su članovi niza vrhovi v_j, $j = 0, \dots, k$, i bridovi e_i, $i = 1, \dots, k$, od grafa G takvi da su krajevi brida e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, $i = 1, \dots, k$.*

Napomena 2.1.1. *w je šetnja od v_0 do v_k, gdje je broj k duljina šetnje. Ako je $v_0 = v_k$ šetnja je zatvorena.*

Definicija 2.1.2. *Za šetnju u kojoj su svi bridovi međusobno različiti, ali se vrhovi mogu ponavljati kažemo da je* ***staza****.*

Definicija 2.1.3. *Staza u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti nazivamo* ***put****.*

Napomena 2.1.2. *Put s n vrhova označavamo s P_n. Duljina tog puta je $n - 1$ s n različitih vrhova.*

Definicija 2.1.4. ***Udaljenost*** *dva vrha v_1 i v_2 u grafu G, u oznaci $d(v_1, v_2)$, je duljina najkraćeg puta između njih.*

Definicija 2.1.5. *Dva su vrha* ***povezana*** *u grafu G ako postoji put između njih.*

Definicija 2.1.6. *Graf je* ***povezan*** *ako su svaka dva njegova vrha povezana putem.*

Definicija 2.1.7. ***Komponenta povezanosti*** *grafa G je maksimalan povezan podgraf.*

Definicija 2.1.8. *Zatvorena šetnja u kojoj su različiti svi vrhovi, osim prvog i zadnjeg, naziva se* ***ciklus****.*

Napomena 2.1.3. *Ciklus koji ima n vrhova označavamo s C_n.*

Definicija 2.1.9. ***Zvijezda*** *S_n je jednostavan graf sa skupom vrhova $V(S_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ i skupom bridova $E(S_n) = \{v_0v_i, i = 1, \ldots, n\}$. Vrh v_0 nazivamo* ***središnji vrh****, susjedan je svim ostalim vrhovima grafa te ima stupanj n. Stupanj preostalih vrhova grafa je 1.*

Definicija 2.1.10. ***Kotač*** *W_n je graf sa skupom vrhova $V(W_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ takvim da vrhovi $v_1, \ldots, v_n$ formiraju ciklus i vrh v_0 je susjedan s v_i, $i = 1, \ldots, n$.*

Definicija 2.1.11. ***Potpun graf*** *K_n je jednostavan graf s n vrhova za koje vrijedi da je svaki par vrhova susjedan.*

Definicija 2.1.12. *Kažemo da je graf* ***bipartitan*** *ako skup vrhova V(G) možemo podijeliti na dva podskupa, koji su međusobno disjunktni, na način da vrhovi iz jednog podskupa nisu međusobno susjedni.*

Definicija 2.1.13. ***Potpun bipartitni graf*** *$K_{m,n}$ je jednostavan graf koji zadovoljava sljedeća tri uvjeta:*

- *graf ima skup vrhova $V(G) = A \cup B$, gdje su A i B disjunktni neprazni skupovi*
- *A i B su nezavisni skupovi*
- *svaki vrh iz A je susjedan svakom vrhu iz B.*

Rezultati za ove klase grafova dani su sljedećim propozicijama.

Propozicija 2.1.1. *Neka je P_n put, $n \geq 2$. Tada vrijedi*

$$\chi_g(P_n) = \begin{cases} 2\,, & \textit{ako je } n = 2 \textit{ ili 3} \\ 3\,, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz:

Za $n = 2$ prvi igrač uvijek pobjeđuje. Ako je $n = 3$, pobjednička strategija prvog igrača je obojiti srednji vrh prvi. Za $n \geq 4$, ako postoje samo dvije boje, onda drugi igrač može pobijediti bojenjem vrha na udaljenosti 2 od vrha kojeg je obojio prvi igrač prisiljavajući na taj način treću boju na njihovom zajedničkom susjedu. Ako postoje tri boje, budući da je svaki vrh susjedan s najviše dva vrha, prvi igrač će zajamčeno pobijediti bez obzira gdje on napravi prvi korak.

□

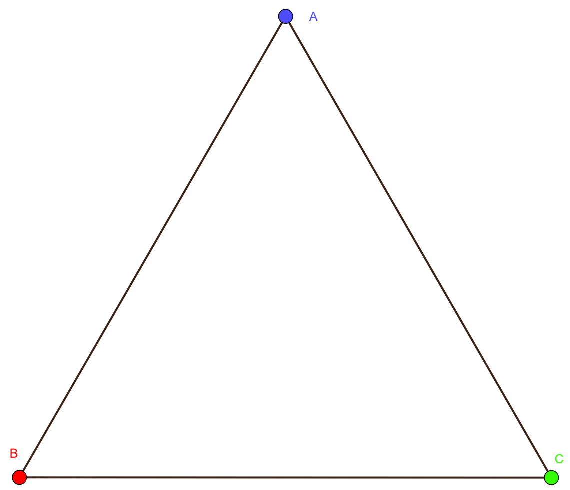
Propozicija 2.1.2. *Neka je C_n ciklus, $n \geq 3$. Tada vrijedi $\chi_g(C_n) = 3$.*

Dokaz:

Slično grafovima puteva, bez obzira kakav potez napravi prvi igrač, on će zajamčeno pobijediti s 3 boje pošto je svaki vrh susjedan s 2 vrha.

□

Primjer 2.1.1. *Bojenje ciklusa C_3 prikazano je na sljedećoj slici.*



Slika 2.1: Ciklus C_3

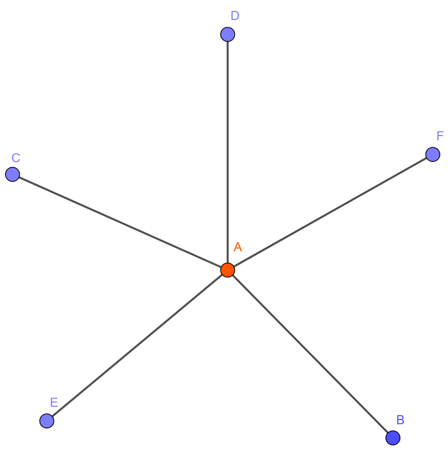
Propozicija 2.1.3. *Za bilo koju zvijezdu S_n, $n \geq 2$, imamo $\chi_g(S_n) = 2$.*

Dokaz:

Pokazati da drugi igrač može pobijediti s jednom bojom bez obzira na potez drugog igrača je trivijalno. Sada pokazujemo da prvi igrač može pobijediti s dvije boje. U bilo kojoj zvijezdi S_n, strategija prvog igrača je da u prvom potezu oboji središnji vrh. Sljedeći potezi prvog ili drugog igrača je obojiti vanjske vrhove drugom bojom. Pošto vanjski vrhovi čine nezavisan skup, druga boja je dovoljna za obojiti sve preostale vrhove. Stoga, $\chi_g(S_n) = 2$.

□

Primjer 2.1.2. *Na sljedećoj slici dat ćemo primjer bojenja zvijezde S_5.*



Slika 2.2: Zvijezda graf S_5

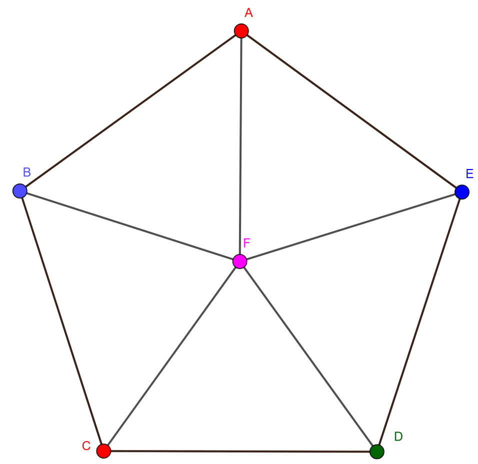
Propozicija 2.1.4. *Za bilo koji kotač W_n, $n \geq 3$, imamo $\chi_g(W_n) = 4$.*

Dokaz:

Kao i kod strategije prvog igrača u zvjezdanom grafu, on boji središnji vrh u njegovom prvom potezu. Preostali neobojeni vrhovi čine podgraf od W_n izomorfan ciklusu reda n, koji ima igraći kromatski broj 3. Stoga, $\chi_g(W_n) = 4$.

□

Primjer 2.1.3. *Prmjer bojenja kotača W_5 prikazat ćemo na sljedećoj slici.*



Slika 2.3: Kotač W_5

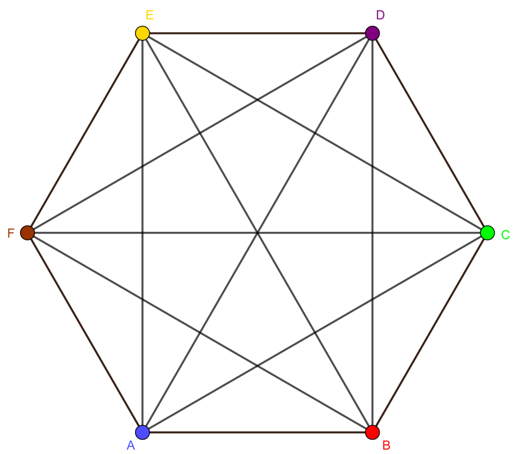
Propozicija 2.1.5. *Neka je K_n potpuni graf. Tada je $\chi_g(K_n) = n$.*

Dokaz:

Budući da su vrhovi od K_n u parovima susjedni, nijedna dva vrha ne mogu se obojiti istom bojom. Stoga je $\chi_g(K_n) = n$.

□

Primjer 2.1.4. *Sljedeća slika prikazuje primjer bojenja potpunog grafa K_6.*



Slika 2.4: Potpuni graf K_6

Propozicija 2.1.6. *Neka je $K_{m,n}$ potpuni bipartitni graf. Tada je*

$$\chi_g(K_{m,n}) = \begin{cases} 2\,, & \textit{ako je } min(m,n) = 1 \\ 3\,, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz:

Budući da je graf bipartitan, skup vrhova se dijeli na dva nezavisna skupa A i B, $|A| = m$, $|B| = n$. Razmatramo dva slučaja.

Slučaj 1: $min(m,n) = 1$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $|A| = 1$. Prvi igrač pobjeđuje bojenjem jedinog vrha u A. Budući da su vrhovi u B nezavisni, jedna boja je dovoljna da ih obojimo sve.

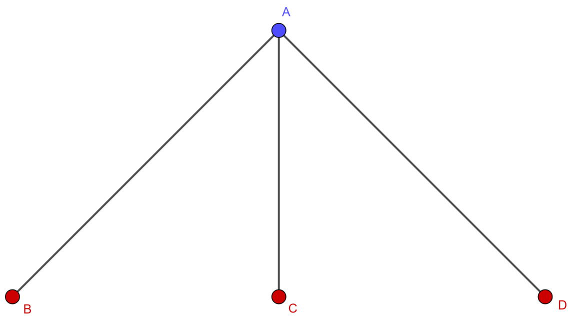
Slučaj 2: $m \geq 2$, $n \geq 2$

Budući da je svaki vrh u A susjedan sa svakim vrhom u B, jasno je da se moraju koristiti najmanje dvije boje. Štoviše, budući da je $m \geq 2$, $n \geq 2$, drugi igrač može uzrokovati da su vrhovi u jednom od dva skupa, A ili B, obojeni s dvije boje. To pokazuje da je $\chi_g(K_{m,n}) \geq 3$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prvi igrač odlučio obojiti vrh u skupu A s prvom bojom. Ako drugi igrač odgovori na ovaj potez bojeći drugi vrh u istom nezavisnom skupu s drugom bojom, tada prvi igrač odgovara koristeći treću boju u drugom nezavisnom skupu, što svodi graf na samo tri boje. S druge strane, ako drugi igrač boji u drugom nezavisnom skupu, tada možemo vidjeti da će prvi igrač, bez obzira koji potez odigra, pobijediti u igri s tri dane boje.

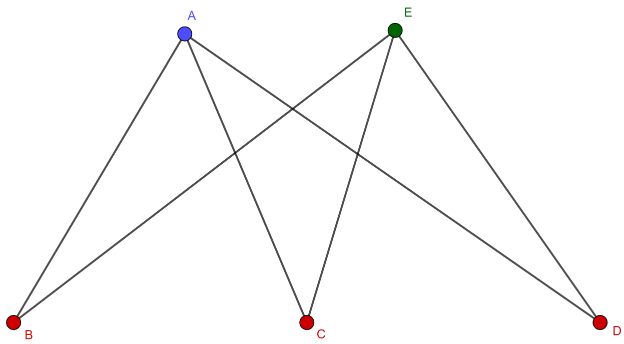
U oba slučaja, prvi igrač može pobijediti koristeći tri boje. Stoga je $\chi_g(K_{m,n}) = 3$.

□

Primjer 2.1.5. *Na sljedećim slikama prikazano je bojenje bipartitnih grafova $K_{1,3}$ i $K_{2,3}$.*



Slika 2.5: Graf $K_{1,3}$

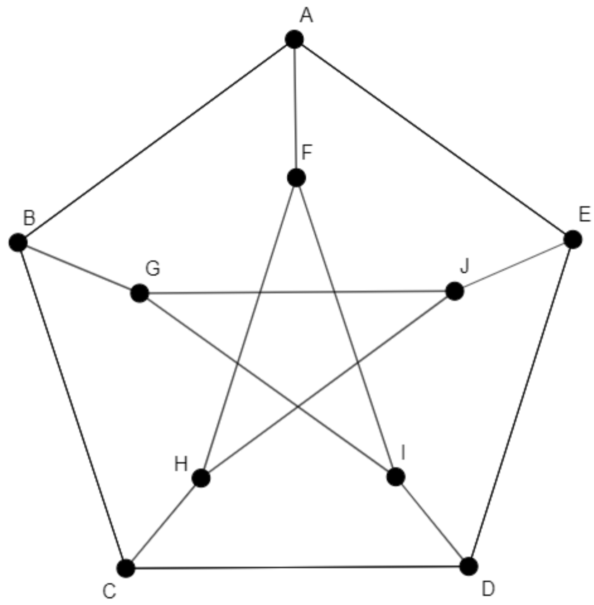


Slika 2.6: Graf $K_{2,3}$

2.2 Igraći kromatski broj Petersenovog grafa

Petersenov graf je graf s nizom svojstava koje ga svrstavaju u jedno od ključnih otkrića na području teorije grafova. Ime je dobio po Juliusu Petersenu koji je 1898. godine zaključio da je ovaj graf najmanji 3-regularan graf bez mostova[1] koji nije 3-bridno obojiv. Alfred Bray Kempe je prvi koji je nacrtao taj graf 1886. godine.

[1]Brid grafa G, čijim se uklanjanjem povećava broj komponenti povezanosti, nazivamo most.



Slika 2.7: Petersenov graf

Označimo li Petersenov graf s π, tada je igraći kromatski broj ovog grafa dan sljedećim rezultatom.

Teorem 2.2.1. *Ako je π Petersenov graf, tada je $\chi_g(\pi) = 3$.*

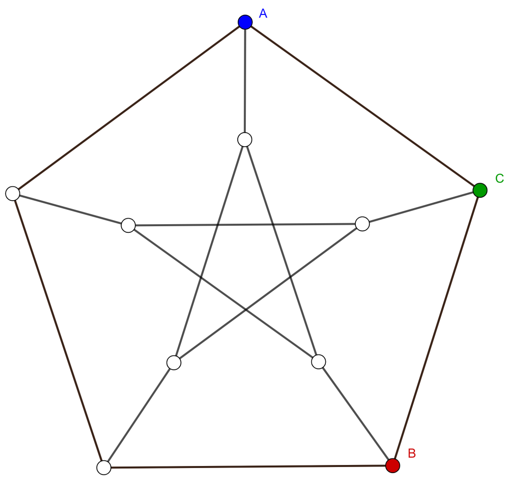
Dokaz:

Dokaz se sastoji od dva dijela.

1. Pokazat ćemo da drugi igrač pobjeđuje ako se koristi manje od 3 boje.

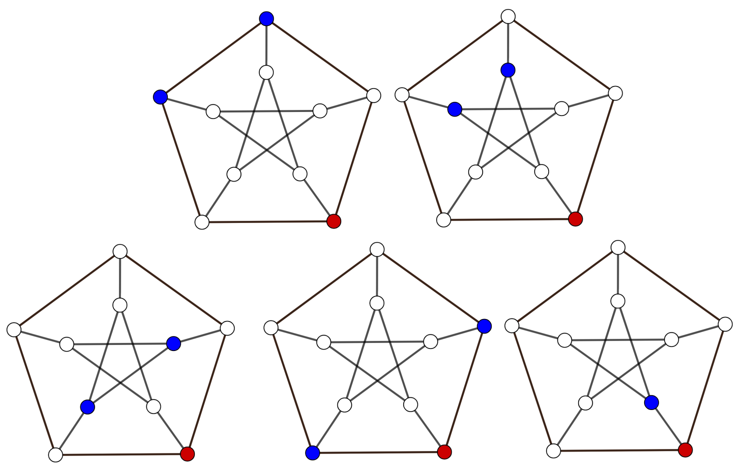
2. Pokazat ćemo da prvi igrač ima pobjedničku strategiju kada se koriste 3 boje.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da prvi igrač boji vrh u vanjskom ciklusu grafa. Drugi igrač zatim boji vrh na udaljenosti 2 od vrha kojeg je obojio prvi igrač. Dva obojena vrha imaju zajedničkog susjeda te to sada zahtjeva treću boju. Dakle, drugi igrač pobjeđuje kada igramo sa samo dvije boje.



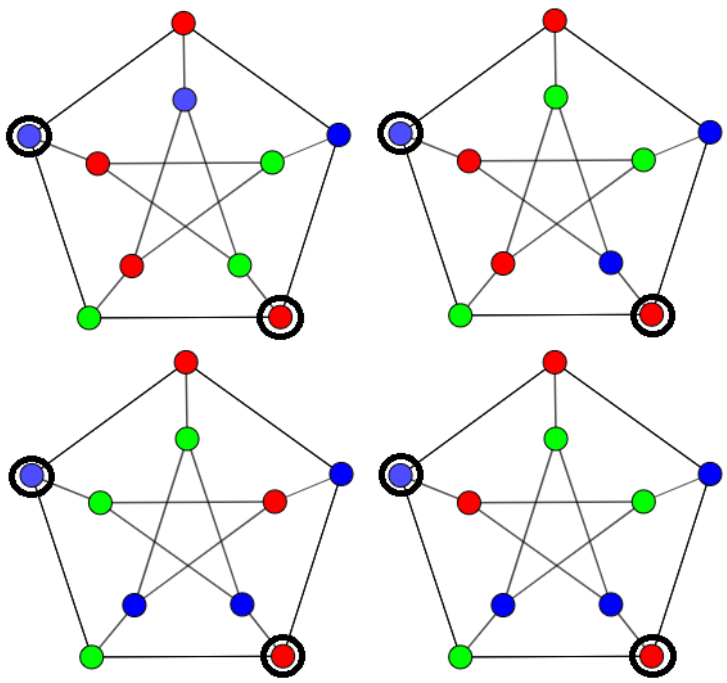
Slika 2.8: Bojenje Petersenovog grafa

Uzastopni potezi pokazuju da nam je potrebna treća boja. Dakle, $\chi_g(\pi) \geq 3$.
U drugom dijelu, prvi igrač opet počinje s jednim vrhom vanjskog ciklusa i ovdje pokazujemo da prvi igrač ima pobjedničku strategiju s tri boje. Dakle, s ovim početnim potezom, bez obzira kako odigra drugi igrač, prvi igrač će uvijek moći pobijediti.
Razmatramo pet slučajeva koji odgovaraju prvom potezu drugog igrača. Oni su prikazani na slici u nastavku.

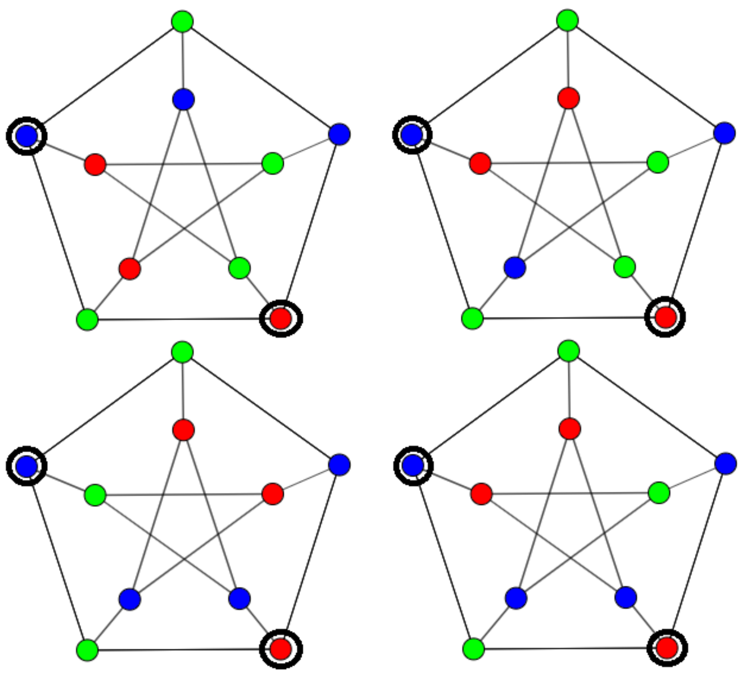


Slika 2.9: Pet slučajeva prvog poteza drugog igrača

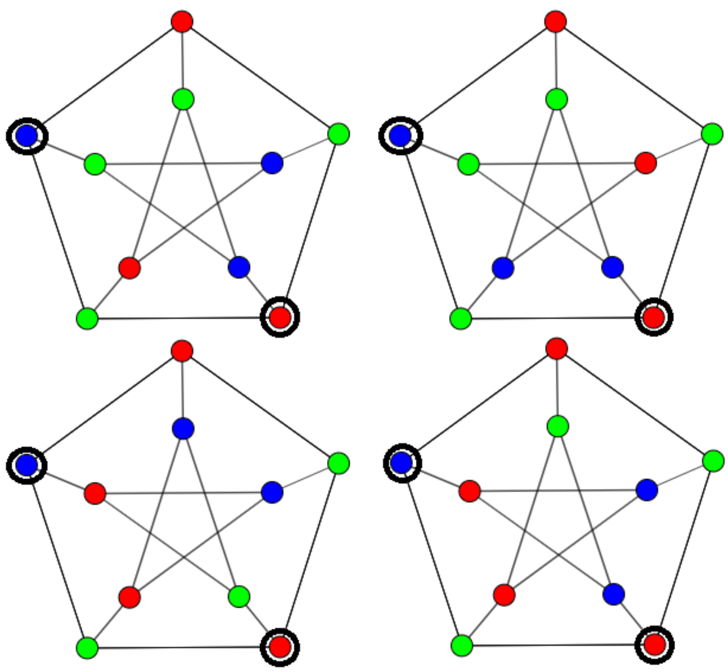
Obojeni vrhovi označeni su određenom bojom što predstavlja potez igrača. Na primjer, prvi igrač je upotrijebio crvenu boju u svom prvom potezu. Plava boja pokazuje gdje će drugi igrač napraviti svoj prvi potez. Kada postoje dva plava vrha u grafu, to znači da su dva vrha simetrična u odnosu na vrh koji je obojio prvi igrač, a drugi igrač može izabrati bilo koji vrh za obojiti.
Svaki od ovih slučajeva može se podijeliti na nekoliko podslučajeva koji pokazuju drugi potez prvog igrača. Dokaz je dovršen ispitivanjem svih mogućih poteza i protupoteza prvog i drugog igrača.



Slika 2.10: Slučaj 1 - u vanjskom ciklusu je jedan zeleni vrh



Slika 2.11: Slučaj 1 - u vanjskom ciklusu je jedan crveni vrh



Slika 2.12: Slučaj 1 - u vanjskom ciklusu je jedan plavi vrh

Na slikama iznad pokazani su svi mogući potezi i protupotezi prvog i drugog igrača za prvi od pet slučajeva prvog poteza drugog igrača. Analogno se pokazuje za ostale slučajeve i podslučajeve. U svemu tome može se pokazati da prvi igrač može spriječiti da vrh ima tri različito obojena susjeda te ograničiti igru na tri različite boje. Ovo pokazuje da je $\chi_g(\pi) = 3$.

$\square$

2.3 Igraći kromatski broj Kartezijevog produkta grafova

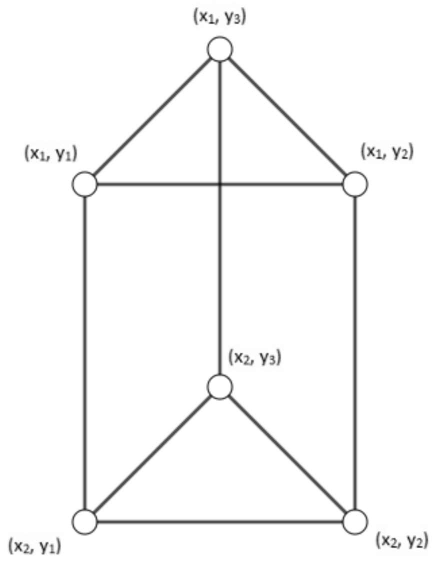
Već smo ranije objasnili igru bojenja koju igraju dva igrača naizmjenično. Definirali smo kromatski broj $\chi(G)$, ali i igraći kromatski broj $\chi_g(G)$ nekog grafa G. Ti pojmovi će nam biti potrebni u nastavku. Znamo da nam rezultat igre bojenja ovisi o grafu G i broju boja u skupu X. Jasno nam je da igraći kromatski broj zadovoljava

$$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

pri čemu je $\Delta(G)$ najveći stupanj vrha u G.

Definicija 2.3.1. *Neka su G i H grafovi. Kartezijev produkt $G \times H$ grafova G i H je graf sa skupom vrhova $V(G) \times V(H) = \{(u, v) \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$ i skupom bridova $E(G \times H) = \{\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \mid u_1, u_2 \in V(G),\ v_1, v_2 \in V(H)$ t.d. $u_1 = u_2$ i $(v_1, v_2) \in E(H)$ ili $(u_1, u_2) \in E(G)$ i $v_1 = v_2\}$.*

Primjer 2.3.1. *Razmatramo put P_2 sa skupom vrhova $V(P_2) = \{x_1, x_2\}$ i ciklus C_3 sa skupom vrhova $V(C_3) = \{y_1, y_1, y_3\}$. Kartezijev produkt $P_2 \times C_3$ prikazali smo na slici ispod.*



Slika 2.13: Graf $P_2 \times C_3$

Definicija 2.3.2. *Neka su G i H grafovi. Ako je $v \in V(H)$, tada se podgraf G_v od $G \times H$, kojeg čine vrhovi ih skupa $\{(u, v) \mid u \in V(G)\}$ i bridovi incidentni samo s tim vrhovima, naziva **G-vlaknom**. **H-vlakno** je definirano na sličan način.*

Definicija 2.3.3. ***Igraći broj boja*** *grafa G definiran je modificiranjem pravila igre bojenja sljedećim redom. Igrači fiksiraju pozitivan cijeli broj k, a umjesto bojenja vrhova, u svakom potezu označavaju samo neoznačeni vrh. Drugi igrač pobjeđuje ako, u nekoj fazi, neki neoznačeni vrh ima k označenih susjeda, dok prvi igrač pobjeđuje ako se to nikada ne dogodi. Igraći broj boja grafa G definiran je kao najmanji broj k za koji prvi igrač ima pobjedničku strategiju na grafu G, a označen je simbolom $col_g(G)$.*

Sljedeći rezultati daju gornju granicu za igraći kromatski broj Kartezijevog produkta grafova s obzirom na igraći broj boja.

Propozicija 2.3.1. *Pretpostavimo da je $G = (V, E)$ graf s $E = E_1 \cup E_2$. Neka je $G_1 = (V, E_1)$ i $G_2 = (V, E_2)$. Tada vrijedi*

$$\chi_g(G) \leq col_g(G) \leq col_g(G_1) + col_g(G_2).$$

Korolar 2.3.1. *Za bilo koji Kartezijev produkt $G \times H$ grafova G i H imamo*

$$\chi_g(G \times H) \leq col_g(G \times H) \leq col_g(\bigcup_{v \in V(H)} G_v) + \Delta(H).$$

U ovom poglavlju ćemo dati i točnu vrijednost igraćeg kromatskog broja grafa $W_n \times P_2$, koji je Kartezijev produkt dvaju grafova, n-kotača W_n i puta P_2.

Propozicija 2.3.2. *Ako je $n \geq 3$, tada je $3 \leq \chi_g(W_n \times P_2) \leq 5$.*

Dokaz:

Nije teško vidjeti da za $n \geq 3$ vrijedi

$$\chi(W_n \times P_2) = \begin{cases} 3\,, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 4\,, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Dakle, korištenjem nejednakosti $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$ imamo da za svaki cijeli broj $n \geq 3$ vrijedi $3 \leq \chi_g(W_n \times P_2)$. U Korolaru 2.3.1, za $n \geq 3$, ako stavimo da je $G = W_n$ i $H = P_2$, tada je jasno da je $\Delta(P_2) = 1$. Budući da je $col_g(W_n) = 4$, dalje dobivamo

$$\chi_g(W_n \times P_2) \leq col_g(W_n \times P_2) \leq 5.$$

□

Doista, prvi igrač pobjeđuje s 5 ili više boja. Stupanj vrhova Kartezijevog produkta $W_n \times P_2$ je 4, osim za središta kotača, tj. središta W_n-vlakna, koja imaju stupanj $n + 1$. Dakle, prvi igrač pobjeđuje ako prvo oboji spomenuta središta u svojim prvim potezima. Točna vrijednost igraćeg kromatskog broja Kartezijevog produkta $W_n \times P_2$ dana je sljedećim teoremom.

Teorem 2.3.1. *Za $n \geq 3$, vrijedi da je $\chi_g(W_n \times P_2) = 5$.*

Dokaz možemo pronaći u [5].

Poglavlje 3

ZAKLJUČAK

Kroz ovaj završni rad objasnili smo kako funkcionira igra bojenja koju igraju dva igrača naizmjence. Iskazali i dokazali smo igraći kromatski broj klasa grafova kao što su putevi, ciklusi, zvijezde, kotači. Objasnili smo također i igraći kromatski broj potpunih grafova te bipartitnih grafova. Dokazi se provode ispitivanjem svih mogućih poteza dvaju igrača. Sve smo upotpunili primjerima sa slikama. Prikazali smo i rezultat igraćeg kromatskog broja Petersenovog grafa, razradili smo jedan od podslučaja dokaza Teorema 2.2.1. za Petersenov graf, a ostali se dokazuju analogno ispitivanjem svih mogućih poteza i protupoteza prvog i drugog igrača. Objasnili smo kako izgleda Kartezijev produkt grafova, definirali igraći broj boja te iskazali točnu vrijednost igraćeg kromatskog broja Kartezijevog produkta $W_n \times P_2$ grafova W_n i P_2. Danas, proučavanje igraćeg kromatskog broja je daleko od završenog. Određivanje kromatskog broja grafova, dobivenog različitim operacijama grafova, problem je kojeg će rješavati buduća istraživanja.

Popis slika

LITERATURA

[1] V. K. Balakrishnan, K. Ranganathan, A Textbook of Graph Theory, Springer, New York, 2012.

[2] F.Harary, Graph Theory, Addison Wesley series in mathematics, Addison-Wesley, 1969.

[3] R. Shaheen, Z. Kanaya, K. Alshehada, Game Chromatic Number of Some Regular Graphs, Open Journal of Discrete Mathematics, 9, 159-164, 2019.

[4] C. J. Destacamento, A. D. Rodriguez, L. Aquino-Ruivivar, The Game Chromatic Number of Some Classes of Graphs, Presented at the DLSU Research Congress 2014, De La Salle University, Manila, Philippines, March 6-8, 2014.

[5] U. Akcan, E. Akyar, H. Akyar, Game Chromatic Number of $W_n \times P_2$, Journal of Science and Arts, Year 16, No. 1(34), pp. 5-12, 2016.