

# Prijenos energije električnom strujom

---

**Borčić, Ivan**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:399882>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Ivan Borčić

PRIJENOS ENERGIJE ELEKTRIČNOM STRUJOM

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Ivan Borčić**

Diplomski rad

# Prijenos energije električnom strujom

Voditelj diplomskog rada: prof.dr.sc. Krešimir Kumerički

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2023.



## Sažetak

U radu proučavan je prijenos energije u jednostavnim strujnim krugovima. Električno polje unutar i izvan strujnog kruga uzrokuje površinska raspodjela naboja na vodiču, a magnetsko polje uzrokuje struja kroz žice. Pomoću električnog i magnetskog polja kvalitativno je određen Poyntingov vektor u prostoru oko jednostavnog strujnog kruga koji se sastoji od baterije, žaruljice i žica. Iz analize prijenosa energije dobiveno je da se energija odvodi iz baterije, a prenosi se na žaruljicu i putem žica i preko cijelog prostora oko žica. Navedeni su primjeri različitih strujnih krugova u kojima se analitički ili numerički pronašao Poyntingov vektor. Dobiveni teorijski rezultati u skladu su sa eksperimentalnim mjerenjima.

Ključne riječi: Energija, raspodjela naboja, strujni krug, električno polje, magnetsko polje, Poyntingov vektor

# Energy transfer by an electric current

## Abstract

In this thesis, we analysed the energy transfer in simple circuits. The electric field inside and outside the circuit is created by surface charges on the conductor, and the magnetic field is created by current flowing in the conductor. Using the electric and magnetic fields we qualitatively determined the Poynting vector in the space around the simple circuit, which consists of a battery, wires and a light bulb. From our analysis of the energy transfer we concluded that the energy is transferred from the battery, and is transferred to the light bulb through the wires and across the entire space around the wires. We described examples of different circuits in which the Poynting vector was found analytically or numerically. The obtained theoretical results are consistent with the experimental results.

Keywords: Energy, charge distribution, circuit, electric field, magnetic field, Poynting vector

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Prijenos energije u jednostavnom strujnom krugu</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Električno i magnetsko polje strujnog kruga</b>	<b>8</b>
3.1	Električno polje baterije u strujnom krugu . . . . .	9
3.2	Raspodjela naboja u strujnom krugu . . . . .	11
3.3	Energija električnog i magnetskog polja . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Analiza prijenosa energije u strujnim krugovima</b>	<b>25</b>
4.1	Prijenos energije u jednostavnom strujnom krugu . . . . .	25
4.2	Tok energije u drugim strujnim krugovima . . . . .	28
4.2.1	Prstenasti strujni krug . . . . .	28
4.2.2	Strujni krug sa uzemljenim cilindrom . . . . .	30
4.2.3	Koaksijalni kabel . . . . .	32
4.3	Simulacije strujnih krugova . . . . .	34
4.3.1	<i>Circuit Surveyor</i> . . . . .	34
4.3.2	<i>Falstad Circuit Simulator</i> . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>39</b>
	<b>Literatura</b>	<b>42</b>

# 1 Uvod

Elektricitet je pojava u prirodi koja se javlja pod utjecajem nabijenih tijela. Još od antičkih civilizacija znamo da kad se jantar istrlja krznom, dobiva sposobnost privlačenja laganih tijela, primjerice dlaka ili čestica prašine. U istom razdoblju otkriveno je da magnetit, mineral po kojem je magnetizam dobio svoje ime, privlači željezo. Dugo vremena su elektricitet i magnetizam bili samo zanimljivost i često su ih zamjenjivali jedno za drugo, a jedina primjena bila je izrada kompasa. U kasnom 16. stoljeću izdana je knjiga *De magnete*, engleskog fizičara i liječnika Williama Gilberta, u kojoj su opisani brojni eksperimenti sa elektricitetom i magnetizmom. Otkrio je da je Zemlja magnetska i da se elektricitet javlja i u drugim materijalima, ne samo jantaru. Nakon izlaska tog djela, raste interes za električne i magnetske pojave. Charles-Augustin de Coulomb je 1785. godine otkrio zakon privlačenja i odbijanja električnih naboja. Talijanski fizičar Alessandro Volta je 1799. godine izumio bateriju, što je tijekom 19. stoljeća dovelo do velikih napretka u istraživanju mogućnosti elektriciteta. Hans Christian Ørsted otkrio je kako se igla kompasa otklanja od sjevera pod utjecajem električne struje u vodiču blizu igle, a André-Marie Ampère pokazao je kako dva vodiča koja nose struju djeluju silom jedan na drugoga ovisno o jakosti i smjeru struje. Ta dva eksperimenta, kao i Faradayevo otkriće elektromagnetske indukcije bila su ključna za uspješno ujedinjavanje elektriciteta i magnetizma, koje je napravio James Clerk Maxwell u svojem radu „*On Physical Lines of Force.*” 1861. godine. U kasnom 19. stoljeću započinje nagli razvoj elektrotehnike i pojavljuje se velik broj izuma, primjerice Alexander Graham Bell izumio je jedan od prvih telefona, Nikola Tesla 1887. godine patentirao je indukcijski motor; Ottó Bláthy, Károly Zipernowsky i Miksa Déri napravili su prvi moderni transformator. U 20. stoljeću razvoj elektrotehnike se nastavio, a rezultirao je izumom vakuumskih cijevi, a kasnije i tranzistora, što je sredinom stoljeća dovelo do prvih modernih elektroničkih računala. Računala su otvorila put do nove industrijske revolucije i svijeta kakvog poznajemo danas.

Zbog velike važnosti elektriciteta i magnetizma u svakodnevnom životu, u obrazovnim se sustavima svih zemalja javljaju obje teme. U hrvatskom obrazovnom sustavu, učenici obrađuju teme elektricitet i magnetizam u osmom razredu osnovnih škola te u drugom, trećem i četvrtom razredu srednjih škola s gimnazijskim programima

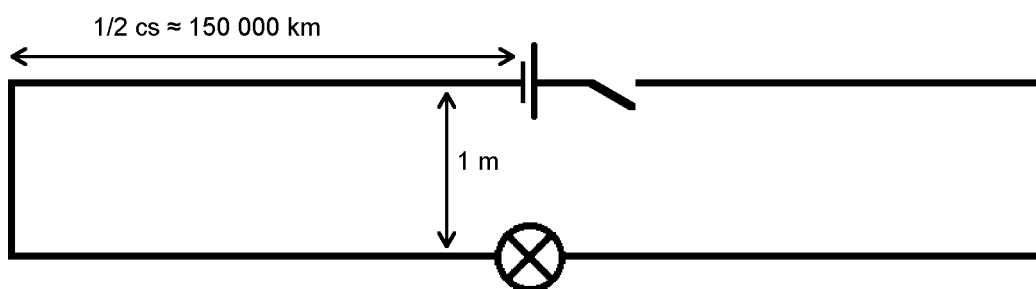


u sklopu nastavnog predmeta Fizika. Bitan dio nastave Fizike su strujni krugovi. Kroz analizu strujnih krugova, učenici ispituju svoje sposobnosti zaključivanja i primjene koncepata koji se obrađuju, kao što su naboj, energija, električno polje i napon. Učenici tako razvijaju konceptualni model koji koriste u nastavi. No neopreznim korištenjem tog modela mogu se pojaviti niz miskoncepcija koje uzrokuju probleme u razumjevanju i zaključivanju i u nastavi fizike i u svakodnevnom životu.

Inspiracija za izradu ovog diplomskog rada bio je video [15], u kojem popularizator znanosti dr. Derek Muller razmatra sljedeće konceptualno pitanje:

*Strujni krug sastavljen je od baterije, otvorene sklopke i žaruljice. Otpor žice je zanemariv. Razmak između baterije i žaruljice je 1 m, ali one su spojene na način da je žica od pozitivnog pola baterije do žaruljice duga  $1 \text{ cs} \approx 300\,000 \text{ km}$ , a istu duljinu ima žica od negativnog pola do žaruljice. Žaruljica je napravljena tako da se upali dok kroz nju teče vrlo slaba struja. ( $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$ )*

*Kada zatvorimo sklopku, koliko će vremena biti potrebno žaruljici da se upali?*

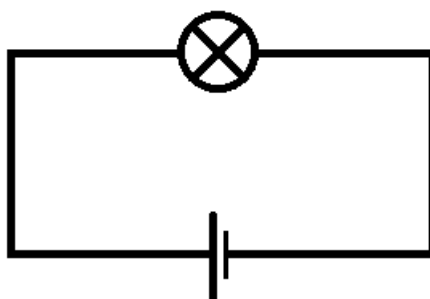


- (a) 0,5 s
- (b) 1 s
- (c)  $1 \text{ m} / c (\approx 3 \text{ ns})$
- (d) 2 s

Dr. Muller je kao ispravan odgovor ponudio odgovor (c), što je izazvalo veliku reakciju znanstvene zajednice. Mnogi su znanstvenici, elektroinženjeri i slični pokušali opovrgnuti njegov odgovor pronalaskom nelogičnosti i kontradikcija. Kako bi uopće mogli odgovoriti na konceptualno pitanje i razriješiti sve miskoncepcije trebamo razviti model prijenosa energije u strujnom krugu.

## 2 Prijenos energije u jednostavnom strujnom krugu

Uzmimo kao primjer jednostavan strujni krug koji se sastoji od baterije i žarulje spojene žicom tako da žarulja svijetli, kao na slici 2.1. Pitanje je na koji način žarulja dobiva energiju iz baterije? Mogući odgovor na to pitanje je da elektroni gibanjem kroz žicu prenose energiju iz baterije u žarulju. Mehanizam prijenosa bi onda mogao biti da elektron sudarima s ionima u niti žarulje prenese svoju kinetičku energiju na ione, a ta energija se pretvara u toplinsku energiju i žaruljica zasvijetli. Drugi način prijenosa bi mogao biti da prolaskom kroz niti žarulje elektron prenese svoju potencijalnu energiju na žarulju. No postoji nekoliko problema s modelom u kojem je elektron glavni prenositelj energije, iskazanim u radovima [5] i [6].



Slika 2.1: Slika prikazuje jednostavni strujni krug kojeg promatramo, baterija je spojena žicama na žaruljicu.

### ***Problem 1***

Elektroni nemaju dovoljnu brzinu da uopće stignu do žarulje u razumnom vremenu. U vodljivom materijalu brzina elektrona u smjeru struje iznosi otprilike  $10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , što bi značilo da ako je žica koja spaja bateriju sa žaruljicom duga 1 m, tada bi elektron žicom putovao desetak minuta, ili čak i duže jer je brzina elektrona u materijalima često puno manja od  $10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### ***Problem 2***

Čak i ako zanemarimo vrijeme potrebno da elektroni dođu do žarulje, njihova kinetička energija je premala i ima ih premalo da bi prenijeli značajnu količinu energije na žarulju. Ako svaki elektron ima kinetičku energiju  $E_1 = \frac{1}{2}m_e\bar{v}^2$ , tada je ukupna kinetička energija svih elektrona jednaka  $E_{\text{uk}} = NE_1$ , a koncentracija elektrona je

$n = \frac{N}{V}$ . Ako uzmemo da je žica duga 1 m i radijus joj je  $r = 1$  cm, ako je koncentracija reda veličine  $n \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$  i ako je prosječna brzina elektrona reda veličine  $\bar{v} \sim 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , tada za kinetičku energiju elektrona u žici dobivamo

$$E_1 \sim 10^{-37} \text{ J}, E_{\text{uk}} \sim 10^{-13} \text{ J}. \quad (2.1)$$

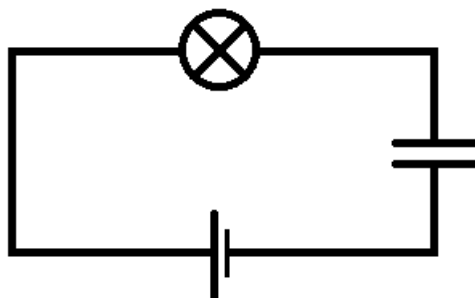
Ako uzmemo strujni krug koji se sastoji od baterije od 1 V i otpornika od 1  $\Omega$ , tada bi se na otpornik svake sekunde prenijelo 1 J energije, što je trinaest redova veličine više energije nego kinetička energija svih elektrona u žici.

### **Problem 3**

Struja teče u strujnom krugu od baterije kroz žarulju i ponovno do baterije. Ako elektroni prenose energiju od baterije do žarulje, tada bi elektroni koji izlaze iz žarulje trebali prenositi dio energije od žarulje do baterije.

### **Problem 4**

Ako modificiramo naš strujni krug tako da dodamo kondenzator između baterije i žarulje, tada se energija ne bi mogla prenositi elektronima jer strujni krug nije zatvoren, elektroni su zarobljeni u žici. No ako spojimo takav krug, žaruljica zasvijetli, što vidimo u pokusu iz videa [12], što znači da se energija prenijela preko praznog prostora.



Slika 2.2: Strujni krug s baterijom, žaruljicom i kondenzatorom spojenim serijski. Ovisno o karakteristikama strujnog kruga (naponu baterije, otporu žaruljice i kapacitetu kondenzatora) mijenjat će se vrijeme u kojemu žaruljica svijetli.

Kućanstava dobivaju električnu energiju iz elektrana preko transformatorskih stanica, u kojima se napon transformatorom prilagođava na vrijednosti koje su po-

godne za korištenje kućanskih aparata. U tom slučaju ne postoji ni jedan elektron koji putuje od elektrane sve do kućanskih aparata jer transformator radi na principu međuindukcije - energija se prenosi sa primarne zavojnice (primara) do sekundarne zavojnice (sekundara) koje nisu povezane žicom. Energija se opet prenosi preko praznog prostora.

### ***Problem 5***

U nekim udžbenicima [10, p.834], [11, p.845], prijenos energije u strujnom krugu objašnjen je koristeći pojam potencijalne energije naboja tj. elektrona. No, pogrešno je reći da elektron ima potencijalnu energiju - potencijalna energija svojstvo je sustava od najmanje dva tijela i pripada cijelom sustavu. Nemoguće je reći koliki dio energije pripada jednom, a koliki dio energije pripada drugom tijelu.

### ***Problem 6***

U izmjeničnim strujnim krugovima, prosječna driftna brzina elektrona u žici je 0, u prosjeku se elektroni ne miču od određenog položaja, stoga ne mogu prenositi energiju iz baterije na žaruljicu.

### ***Problem 7***

Elektroni u žici ne guraju jedni druge žicom putem električne sile, jer se električna sila elektrona pokraća sa silom kojom pozitivni ioni djeluju na elektrone.

Svi navedeni problemi upućuju na nevaljanost modela u kojem elektron gibanjem kroz strujni krug prenosi energiju sa baterije na žarulju. Dakle, potreban nam je ispravniji konceptualni model koji treba uzeti u obzir da se energija prenosi izuzetno brzo, ne prenosi se sudarima ili „razmjennom” potencijalne energije te da je dozvoljen prijenos energije preko praznog prostora.

Jedan način da izbjegnemo probleme je da promatramo model u kojem zamislimo energiju sustava samo kao realni broj koji se može izračunati u svakom trenutku. Iznos broja ima svojstvo da je očuvan - jednak prije i nakon neke promjene unutar sustava. Tada nije važno kako se i kojim se putem energija prenijela, na ta pitanja u ovom modelu možda nije ni moguće pronaći odgovor, jedino je bitno da izračunati

broj bude jednak. Ako promatramo sustav Zemlja - Sunce, tada nije bitno kako oni međudjeluju na velikim udaljenostima, već je bitna činjenica da međudjeluju. Iskristimo li isti model u slučaju strujnog kruga na slici 2.1, na pitanje kako se prenosi energija iz baterije u žaruljicu nije moguće odgovoriti - energija pripada sustavu strujnog kruga i uvijek je očuvana. Iako je model sasvim matematički valjan, on nam ne odgovara na pitanja koja smo postavili. Zato trebamo naći model s kojim ćemo moći odgovoriti na naša pitanja.

Takav model je „model polja”, u kojem umjesto pojedinačnih naboja ili energije kao matematičkog pomagala promatramo raspodjele naboja, električnu struju, električno i magnetsko polje; četiri pojma koja opisuje i povezuje elektrodinamika. Elektrodinamika je nastala u 19. stoljeću kada je škotski fizičar James Clerk Maxwell objedinio električne i magnetske pojave u jednu teoriju. Teorija se temelji na četiri jednačbe:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (2.5)$$

gdje je  $\rho$  gustoća naboja po jedinici volumena,  $\vec{J}$  je gustoća struje, fizikalna veličina koja se definira kao tok naboja po jedinici površine poprečnog presjeka u jedinici vremena;  $\epsilon_0$  je permitivnost vakuumu,  $\mu_0$  je permeabilnost vakuumu,  $\vec{\nabla} \cdot$  je operator divergencije,  $\vec{\nabla} \times$  je operator rotacije,  $\frac{\partial}{\partial t}$  je operator parcijalne derivacije po vremenu, a  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  su električno i magnetsko polje, respektivno. Jednačbe 2.2 i 2.3 su Gaussov zakon za elektricitet i magnetizam, jednačba 2.4 je Faradayev zakon, a jednačba 2.5 je Ampereov zakon.

Maxwellove su jednačbe predvidjele elektromagnetske valove i iznos brzine kojom se gibaju, a predviđaju i da električna i magnetska polja u prostoru nose energiju, što bi moglo riješiti probleme sa modelom u kojem elektroni prenose energiju.

Kako bi odgovorili na pitanje „na koji način žarulja dobiva energiju iz baterije?” tre-

bamo pobliže opisati raspodjelu naboja, električna i magnetska polja strujnog kruga prikazanog na slici 2.1.

### 3 Električno i magnetsko polje strujnog kruga

Električno polje vektorska je veličina koja svakoj točki prostora pridružuje silu po naboju koja bi djelovala na probni naboj u toj točki. Električno polje stvara svaki naboj ili raspodjela naboja u prostoru, a rezultatno električno polje u točki dano je vektorskim zbrojem svih električnih polja u toj točki. U strujnom krugu, za određivanje smjera i iznosa električnog polja koristimo Ohmov zakon, koji glasi:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (3.1)$$

gdje je  $\sigma$  električna vodljivost. U slučaju da je vektor gustoće struje okomit na površinu poprečnog presjeka  $A$  i da je iznos gustoće struje konstantan po cijeloj dužini žice, tada možemo povezati jakost struje i gustoću struje relacijom:

$$I = JA. \quad (3.2)$$

Iz jednadžbe 3.1 i 3.2, možemo vidjeti da je jakost struje proporcionalna iznosu električnog polja, što znači da u jednostavnom strujnom krugu električno polje mora biti istog iznosa u svakoj točki koja ima istu vodljivost, tj. u vodiču. U otporniku, električno polje bit će drugačijeg iznosa zbog različitog iznosa vodljivosti. Smjer električnog polja isti je kao i smjer vektora gustoće struje, koji je uvijek usmjeren u smjeru struje i prati geometriju žica.

Magnetsko polje vektorska je veličina koja opisuje magnetsku interakciju između naboja, struja i materijala. Za razliku od električnog polja, magnetsko polje stvaraju naboji ili raspodjele naboja u gibanju ili magneti. Ako uzmemo kao primjer vrlo dugu žicu kojom teče struja snage  $I$ , tada je iznos magnetskog polja u točki prostora udaljenoj od osi koja prolazi kroz žicu za  $r$  jednak:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (3.3)$$

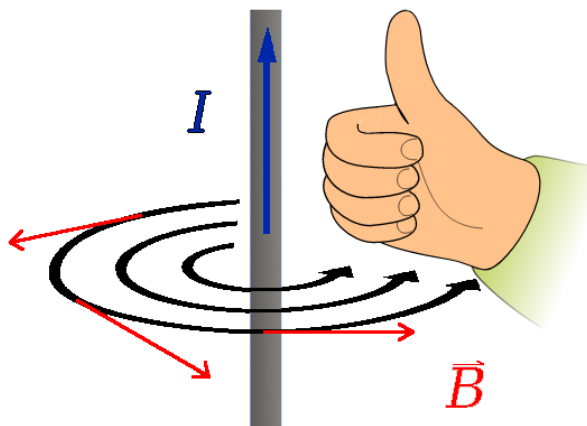
gdje je  $\mu_0$  permeabilnost vakuuma,  $I$  jakost struje, a  $r$  udaljenost od osi koja prolazi žicom do točke u kojoj promatramo polje. Smjer magnetskog polja vodiča dan je pravilom desne ruke, prikazanim na slici 3.1. Magnetsko polje uvijek je tangencijalno na kružnice koje opisuju prsti desne ruke.

Smjer magnetskog polja unutar žice određuje se na isti način kao i van žice, pravilom

desne ruke, a iznos unutar žice jednak je:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, \quad (3.4)$$

gdje je  $r$  udaljenost od središta žice do promatrane točke,  $I$  jakost struje, a  $R$  radijus žice. Kada je  $r = R$ , tada se iznos magnetskog polja svodi na jednadžbu 3.3 sa uvrštenim  $r = R$ .



Slika 3.1: Pravilo desne ruke - palac pokazuje smjer struje žice, savinuti prsti pokazuju kružnice na kojima tangente pokazuju smjer magnetskog polja. Slika, uz uređivanje, preuzeta iz [13].

U primjeru sa slike 2.1, relativno je jednostavno naći magnetska polja u i oko vodiča budući da imamo stalnu struju  $I$ , tako i električno polje unutar vodiča koje je stalnog iznosa i paralelno sa smjerom struje, no za pronalazak električnog polja izvan našeg strujnog kruga potrebno je pronaći raspodjelu naboja strujnog kruga.

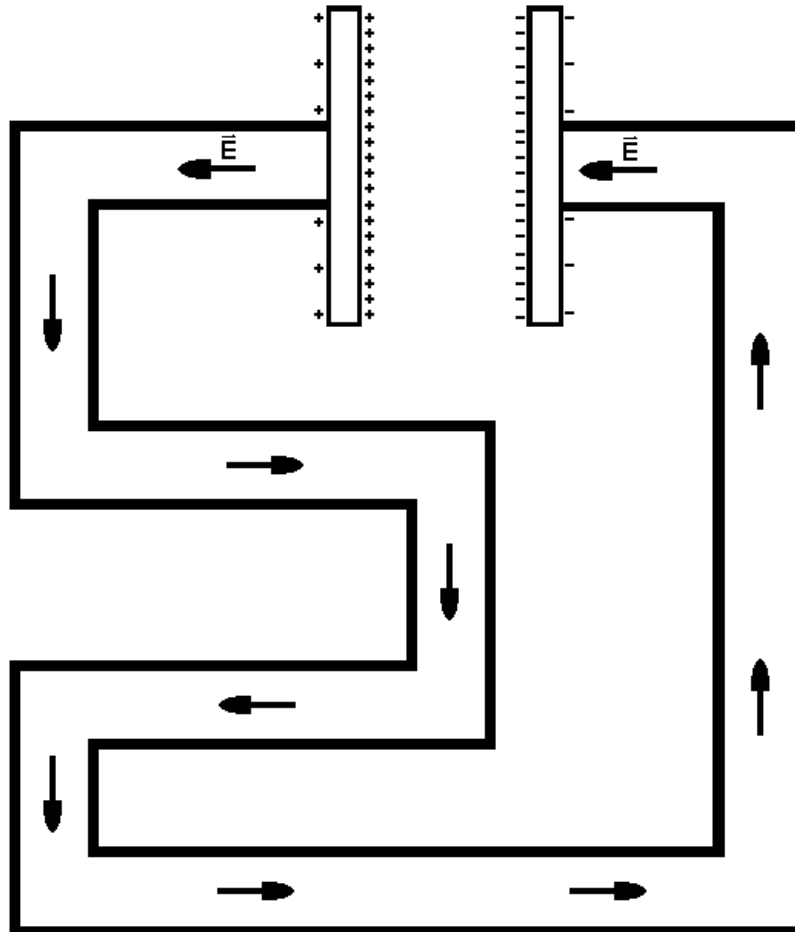
### 3.1 Električno polje baterije u strujnom krugu

Iz jednadžbi 3.1 i 3.2 zaključili smo da će električno polje unutar strujnog kruga biti paralelno smjeru struje, a imat će i isti iznos u dijelovima vodiča koji imaju istu vodljivost. Sada želimo saznati koja raspodjela naboja stvara takvo električno polje. Budući da je baterija element strujnog kruga bez kojeg naš strujni krug ne funkcionira, moguće je zaključiti da su upravo naboji na bateriji isključivo odgovorni za električno polje unutar strujnog kruga. Sada ćemo pokazati da to nije slučaj.

Promotrimo primjer jednostavnog strujnog kruga, sastavljenog od baterije i žice, prikazan na slici 3.3 i zadan u radu [9]. Bateriju u ovom strujom krugu aproksimiramo

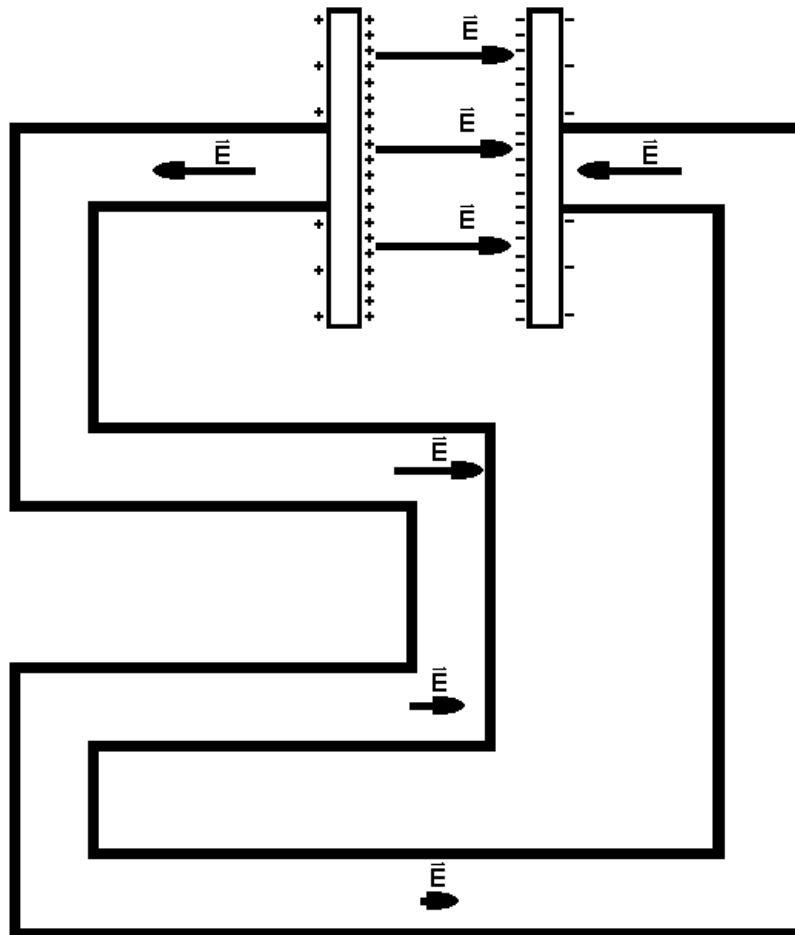


kondenzatorom velikog kapaciteta. Nabijene ploče kondenzatora spojene su žicom. Analiziramo slučaj u vremenskom periodu u kojem je jakost struje  $I$  kroz strujni krug konstantna, što znači da se kondenzator ponaša kao baterija. Iz relacija 3.1 i 3.2 zaključujemo da električno polje u ovom krugu treba biti kao na slici 3.2



Slika 3.2: Slika prikazuje električno polje unutar strujnog kruga sa kondenzatorom i žicama.

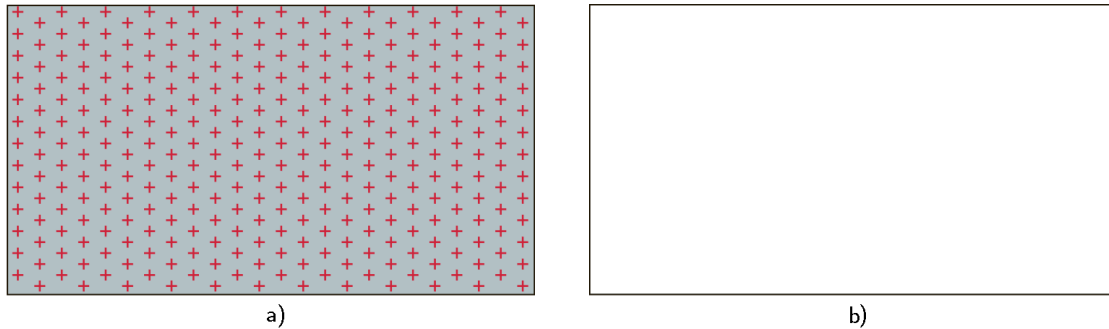
No, ako pogledamo na sliku 3.3, vidjet ćemo da električno polje u vodiču kojeg stvaraju naboji na kondenzatoru nije konstantnog iznosa, a nije ni u svim dijelovima žice u istom smjeru kao i smjer struje, što znači da naboji na kondenzatoru samostalno ne proizvode električno polje unutar žica. Problem postaje još veći ako u strujni krug dodamo žaruljicu. Tada će električno polje u žaruljici ovisiti o udaljenosti od baterije, što je suprotno od našeg iskustva. Stoga, moramo pronaći raspodjelu koja stvara ispravno električno polje.



Slika 3.3: Slika prikazuje jednostavni strujni krug, gdje nabijeni kondenzator ima ulogu baterije. Ploče kondenzatora spojene su žicama, a prikazano je i električno polje, koje je uzrokovano samo raspodjelom naboja na pločama.

### ***3.2 Raspodjela naboja u strujnom krugu***

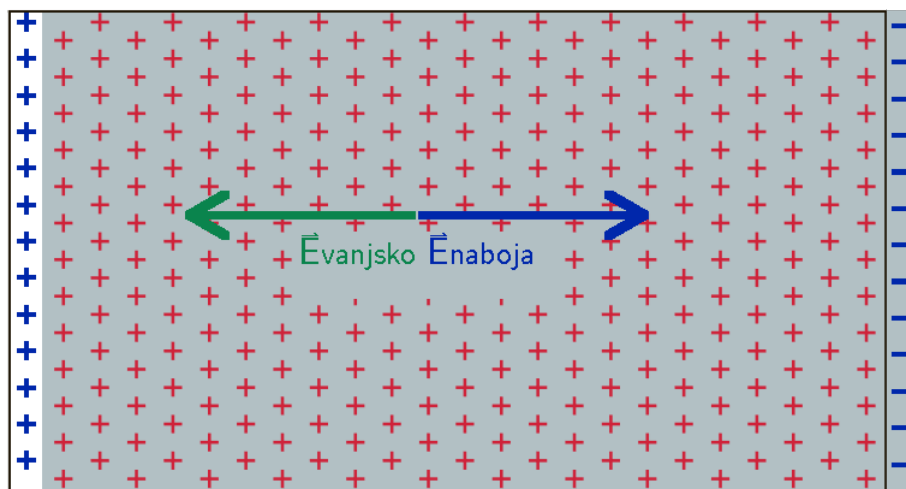
Ključan dio svakog strujnog kruga je vodič. Vodiči su najčešće napravljeni od metala koji se sastoji od velikog broja pozitivnih i negativnih naboja u posebnoj konfiguraciji. Pozitivni naboji u metalu su atomske jezgre koje su raspoređene u periodičnu strukturu. Unutarnji elektroni svakog atoma vezani su uz jezgru, a vanjski elektroni tvore kemijske veze između atoma. No, neki su vanjski elektroni slobodni kretati se po cijelom volumenu metala. Oni tvore elektronsko „more”. Upravo su zbog prisutstva tih elektrona metali dobri vodiči.



Slika 3.4: Slika pod a) prikazuje jedan dio vodiča: nepolarizirani metal. Crvenim plusevima označeni su pozitivni naboji (jezgre atoma metala), a elektronsko „more” označeno je svjetlo plavom bojom. Preuzeto iz [18, slika 14.25]. Slika pod b) prikazuje isti slučaj, metal prikazujemo kao da ne sadrži naboje jer je gustoća naboja jednaka 0.

Na slici 3.4, prikazani metal nije spojen u strujni krug, niti na njega djeluje neko vanjsko električno polje. U tom je slučaju metal električki neutralan, pa ga često prikazujemo samo kao prazan pravokutnik. To je i opravdano, jer se u svakom dijelu volumena električna polja pozitivnih i negativnih naboja ponište, pa je električni učinak jednak kao i da naboja nema.

Ako postoji neko vanjsko električno polje koje djeluje na taj metal, tada se naboji unutar metala raspodjele tako da ponište utjecaj vanjskog električnog polja, kao što je prikazano na slici 3.5.



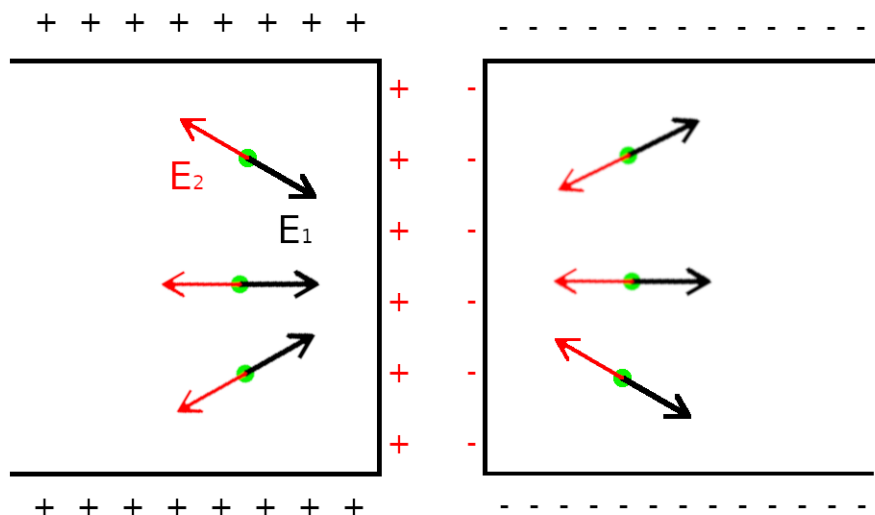
Slika 3.5: Slika prikazuje situaciju kada na metal djelujemo nekim vanjskim električnim poljem. Naboji se raspodjele tako da se elektronsko more pomakne u suprotnom smjeru od smjera vanjskog električnog polja, označenog plavom bojom. Tada je na lijevom kraju metala manjak elektrona, a na desnom kraju metala je višak elektrona. Upravo ti naboji na krajevima vodiča (označeni plavom bojom) stvaraju električno polje koje poništava vanjsko električno polje.

Proces pomicanja elektronskog mora događa se vrlo brzo (puno manje od nanosekunde) jer je potreban vrlo mali pomak elektronskog mora, udaljenosti puno manje od promjera atoma, prema [18, p.563].

Za otvoreni strujni krug sastavljen od baterije, žice i žaruljice vrijede sljedeće tvrdnje:

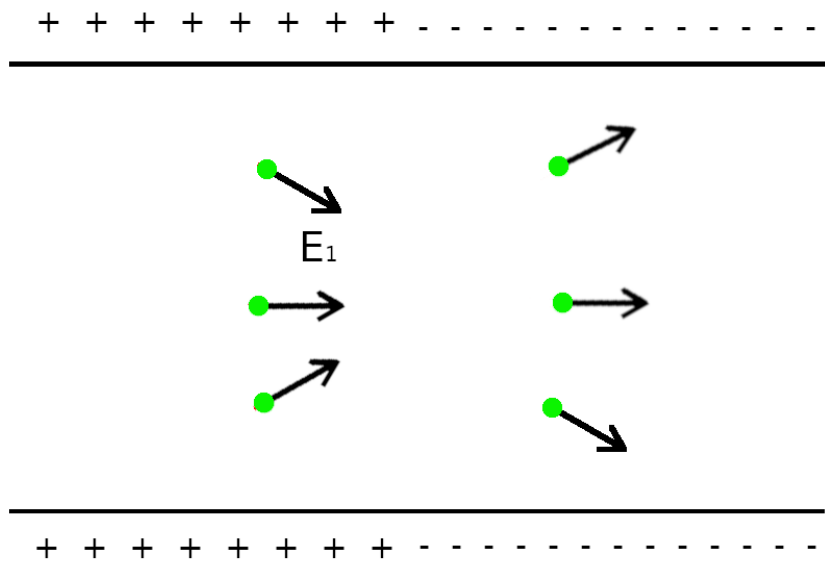
1. U vodiču gustoća naboja jednaka je 0, jer je jednak broj pozitivnih i negativnih naboja pa se njihovi doprinosi ponište.
2. Iznos resultantnog električnog polja  $\vec{E}$  unutar vodiča jednak je nuli, zato što bilo koje električno polje uzrokuje pomicanje jedne vrste naboja na jednu stranu, a drugu vrstu naboja na drugu stranu toliko dugo dok ti naboji ne stvore električno polje koje poništava početno električno polje.
3. Svi naboji koji narušavaju električnu neutralnost u vodiču nalaze se na površini vodiča
4. Kemijski procesi unutar baterije razdvajaju i drže razdvojenima pozitivne i negativne naboje između svojih elektroda. Iako cijela baterija nije nabijena, na negativnoj elektrodi bit će višak elektrona, a na pozitivnoj elektrodi manjak elektrona.

Iz navedenih činjenica slijedi da u trenutku prije zatvaranja strujnog kruga već postoji raspodjela naboja na površini vodiča, pozitivna raspodjela naboja na žici spojenoj na pozitivnu elektrodu i negativna raspodjela naboja na žici spojenoj na negativnu elektrodu.



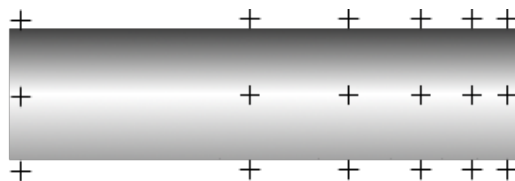
Slika 3.6: Slika prikazuje žicu prije zatvaranja strujnog kruga. Lijeva žica spojena je na pozitivnu elektrodu baterije, a desna žica spojena je na negativnu elektrodu baterije. Zelenom bojom označene su točke u kojima promatramo električno polje, a crvenom bojom označeni su naboji na vrhovima žica i rezultatna električna polja  $\vec{E}_2$  unutar žica koja ti naboji proizvode. Crnom bojom označeni su naboji na površini žica i rezultatna električna polja  $\vec{E}_1$  koja ti naboji proizvode.

Budući da znamo da je električno polje unutar vodiča jednako 0, tada možemo razdvojiti ukupno električno polje na dva doprinosa: jedan doprinos koji dolazi od naboja na vrhovima vodiča, a drugi doprinos koji dolazi od ostalih naboja, kako je prikazano na slici 3.6. No, kad konačno spojimo vodiče, naboji se u vrhovima ponište, a zbog toga nestaje i njihov doprinos električnom polju, što znači da u trenutku spajanja vodiča postoji električno polje unutar vodiča koje je nastalo od raspodjele površinskih naboja na vodiču, prikazano na slici 3.7.



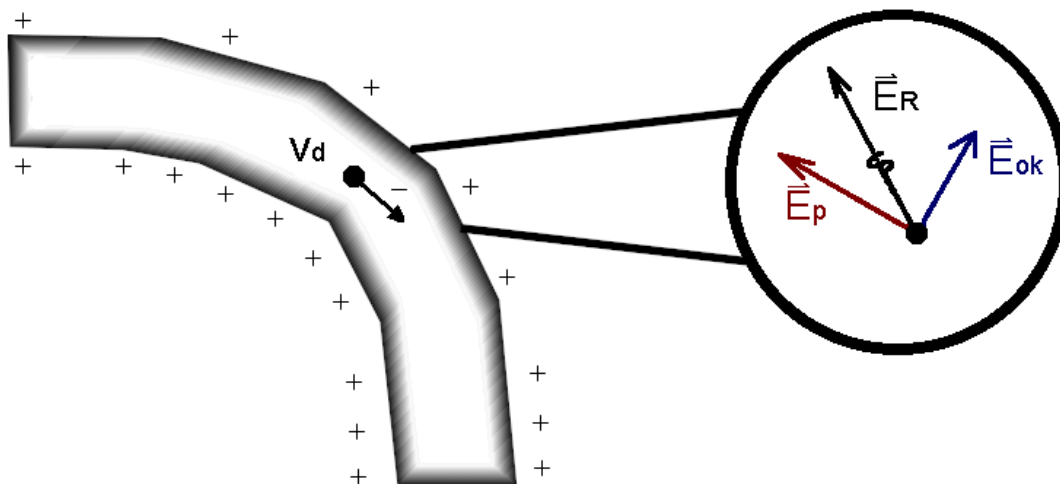
Slika 3.7: Slika prikazuje žice na slici 3.6, ali u trenutku nakon što su se spojile i zatvorile strujni krug.

Nakon što je struja potekla, površinski se naboji u vrlo kratkom vremenu raspodjele tako da je električno polje unutar vodiča paralelno sa vodičem. Jedan mogući način da se to postigne je da imamo gradijent naboja na površini vodiča, primjer takvog slučaja prikazan je na slici 3.8, gdje imamo raspodjelu naboja koja se linearno mijenja s udaljenosti od kraja žice.



Slika 3.8: Jedna mogućnost raspodjele naboja na površini žice koja stvara uniformno električno polje usmjereno u smjeru struje unutar žice. Električno polje unutar ove žice usmjereno je prema lijevo, stoga će sila na elektron biti prema desno.

Ako kod vodiča postoje zavoji, tada električno polje pokazuje iz unutrašnjosti vodiča prema površini, pa se na njoj nakupljaju naboji dok u vodiču ne nastane električno polje u smjeru struje. Nastalo električno polje uzrokuje skretanje elektrona koji putuje unutar vodiča. Primjer raspodjele naboja koja proizvodi takvo električno polje nalazi se na slici 3.9.

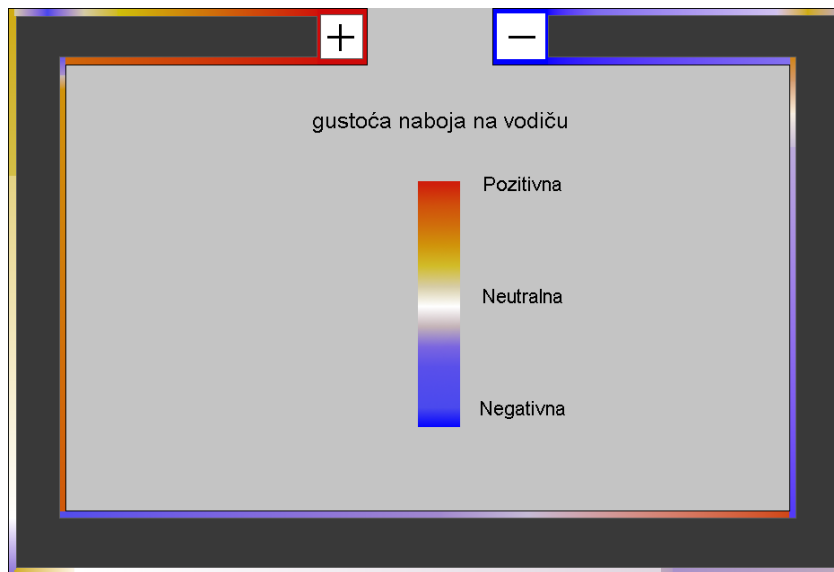


Slika 3.9: Raspodjela naboja na površini žice kod zavoja u žici. Na elektron u zavoju djeluje rezultantno električno polje označeno crnom bojom, a to polje je rastavljeno na okomitu i paralelnu komponentu, označene plavom i crvenom bojom, respektivno.

Okomita komponenta električnog polja na slici 3.9 uzrokuje silu na elektron koja ima ulogu centripetalne sile, tj. uzrokuje skretanje elektrona. Paralelna komponenta, kao i u ostatku žice, održava iznos brzine, jer iako stalno električno polje uzrokuje stalnu silu koja uzrokuje stalnu akceleraciju, elektron se jako često sudara s pozitivnim ionima u materijalu žice. Sudari uzrokuju usporavanje elektrona, a električno polje ih ponovno ubrzava. Prosječna brzina kojom se elektron kreće u smjeru struje pod utjecajem električnog polja zove se driftna brzina.

Broj naboja koji je potreban da dovoljno promijeni električno polje i uzrokuje skretanje elektrona je vrlo malen. Prema radu [20], ako je struja jakosti  $I=100$  A, tada će biti potreban naboj jednak naboju 100 elektrona. Za slučaj kada imamo struju jakosti  $I=1$  mA, tada će biti potreban prosječni makroskopski naboj od jedne tisućine jednog elektrona.

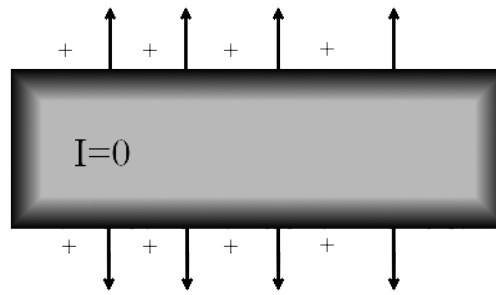
U realnim slučajevima raspodjela naboja je drugačija (primjerice u prostoru od pozitivnog pola baterije do otpornika može se javiti i raspodjela negativnih naboja, ovisno o geometriji i karakteristikama elemenata strujnog kruga), ali ova raspodjela jest dovoljno dobra aproksimacija. Na slici 3.10 prikazana je površinska raspodjela naboja na vodiču u pravkutnom strujnom krugu sa žicom jednolike otpornosti.



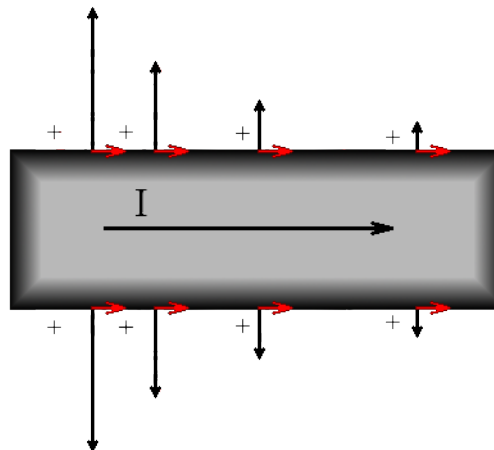
Slika 3.10: Raspodjela naboja i električno polje u realnijem slučaju strujnog kruga s baterijom i žicama jednolike otpornosti . Sa crvenim i žutim nijansama označena je pozitivna raspodjela naboja, a plavim nijansama označena je negativna raspodjela naboja. Slika je napravljena prema rezultatima simulacije računalnog programa Ansoft Maxwell SV iz rada [1, slika 7].

Površinske raspodjele naboja na vodiču stvaraju električno polje i izvan vodiča. Na slici 3.11a vidi se površinska raspodjela naboja na vodiču ako njime ne teče struja. Naboj je uniformno raspodjeljen, električno polje unutar vodiča iščezava, a van vodiča je uniformno, usmjereno okomito od površine vodiča. Na slici 3.11b, vidi se kako se raspodjela naboja na površini promijenila tako da bude sličnija raspodjeli na slici 3.8. Takva raspodjela stvara uniformno polje unutar vodiča. Promjena raspodjele naboja utječe i na električno polje izvan vodiča, na dijelovima prostora oko vodiča električno polje je jače što je više naboja nakupljeno na površini vodiča. Prema graničnim uvjetima za električno polje iz [8, p.89], komponenta električnog polja koja je paralelna sa površinom vodiča uvijek je jednaka na granici između dvaju materijala, u ovom slučaju vodiča i zraka. Zbog toga, korisno je promatrati komponente električnog polja koje su paralelne ili okomite na površinu vodiča. Paralelna komponenta tik iznad vodiča bit će jednakog iznosa kao paralelna komponenta električnog polja tik unutar vodiča u svakoj promatranoj točki na vodiču, a u istim točkama okomita komponenta električnog polja bit će veća oko dijelova vodiča na kojima je više naboja. Na slici 3.11c, komponente su zbrojene u resultantno električno polje oko vodiča kojim teče struja.

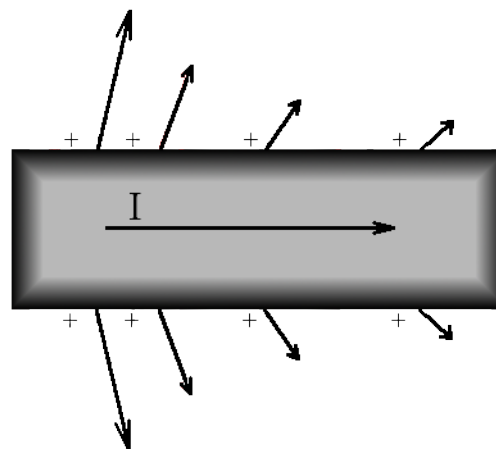




a)



b)



c)

Slika 3.11: Slika prikazuje žicu, raspodjelu naboja, struju i električno polje na površini žice. Pod a) prikazan je slučaj kada strujni krug još nije zatvoren. Pod b) strujni je krug spojen i crnim je strelicama prikazana okomita komponenta električnog polja, a crvenim strelicama prikazana je paralelna komponenta električnog polja. Pod c) komponente su zbrojene u rezultantno električno polje na površini žice.

U realnim uvjetima iznos komponente električnog polja paralelne sa smjerom struje gotovo je zanemariv prema iznosu električnog polja okomitog na površinu žice, no

postaje dovoljno velik u slučaju da promatramo otpornik, o čemu nam govori Ohmov zakon iskazan u jednadžbi 3.1. Veza između vodljivosti i otpora za cilindričnu žicu dana je izrazom:

$$\frac{1}{\sigma} = R \frac{A}{L}, \quad (3.5)$$

gdje je  $R$  električni otpor,  $A$  površina poprečnog presjeka žice, a  $L$  je duljina žice. U slučaju da je gustoća struje jednakog iznosa i okomita na površinu poprečnog presjeka i da je električno polje stalno usmjereno u smjeru struje, jednadžbu 3.1 možemo zapisati kao:

$$I = \frac{V}{R}. \quad (3.6)$$

Iz jednadžbe 3.5 i 3.6 vidimo da ako strujnim krugom teče struja jakosti  $I$ , što je veći otpor otpornika, to je električno polje unutar samog otpornika veće od električnog polja u vodiču, pa je smjer ukupnog električnog polja izvan otpornika sve dalji od okomice na površinu vodiča.

Koristeći izraze 3.1 i 3.2 možemo procijeniti iznos električnog polja unutar vodiča. Ako je vodič kojim teče struja jakosti  $I = 1$  A, poprečnog presjeka  $1 \text{ mm}^2$ , napravljen od bakra vodljivosti  $\sigma = 5,67 \times 10^7 \text{ ohm}^{-1}\text{m}^{-1}$ , tada će mu električno polje iznositi  $E = 1,8 \times 10^{-5} \text{ V/m}$ . Koristeći izraz za električno polje jednog elektrona naboja  $q$ ;  $E_1 = (1/4\pi\epsilon_0) q/r^2$ , dobiva se da je iznos električnog polja unutar vodiča jednak iznosu električnog polja jednog elektrona na udaljenosti od 1 cm od njega.

Za procjenu ovisnosti iznosa električnog polja oko vodiča o udaljenosti od vodiča pomoći će nam izraz za električno polje beskonačne uniformno nabijene žice:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.7)$$

gdje je  $\lambda$  linijska gustoća naboja, a  $r$  udaljenost od žice. U elektrodinamici, gustoća naboja je broj naboja neprekidno raspodjeljenim po jedinici duljine, površine ili volumena. Naboji koji čine sva električna polja su pojedinačni, no u realnim slučajevima ima ih jako puno, pa je ipak opravdano koristiti gustoću naboja. Izraz 3.7 ne vrijedi u strujnim krugovima, ali on ipak daje aproksimaciju u kojoj je električno polje obrnuto proporcionalno udaljenosti od žice  $r$ . U radu [7, jednadžba 16.], dobiven je rezultat za električno polje izvan cilindričnog vodiča kojim teče struja, komponenta okomita na površinu vodiča obrnuto je proporcionalna s  $r$ , ali ovisi i o udaljenosti  $z$  od sre-

dine žice do točke koja leži na osi žice. U radu [7, jednadžba 20.] opisan je slučaj kada postoji raspodjela naboja na površini, a jakost je struje  $I$  jednaka 0, dobiveni se rezultat svodi na jednadžbu 3.7.

Kako bi prepoznali značaj električnog i magnetskog polja oko vodiča u prijenosu energije trebamo se pobliže upoznati s relacijama koje povezuju električna i magnetska polja i energiju.

### 3.3 Energija električnog i magnetskog polja

Za uspostavljanje određene raspodjele naboja u prostoru trebamo uložiti energiju. U slučaju realnih materijala imamo velik broj naboja, električnu i magnetsku interakciju između naboja, tako da je korisnije koristiti gustoće energije, a ne same energije. Gustoća energije definira se kao ukupna energija po jedinici volumena sadržana u prostoru. Izrazi za gustoće energija električnog i magnetskog polja su:

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (3.8)$$

Izraz za ukupnu gustoću energije elektromagnetskog polja jednaka je:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (3.9)$$

Izraz za gustoću energije električnog polja možemo iskoristiti na primjeru nabijenog pločastog kondenzatora. Električno polje takvog kondenzatora dano je izrazom:

$$E = \frac{V}{d}, \quad (3.10)$$

gdje je  $V$  napon između ploča kondenzatora, a  $d$  udaljenost između ploča. Električno je polje izvan prostora kondenzatora zanemarivo, pa promatramo samo prostor između ploča kondenzatora. Ako je  $A$  površina ploča, tada je volumen prostora dan izrazom:

$$V = Ad. \quad (3.11)$$

Gustoću energije treba pomnožiti s volumenom promatranog prostora kako bi dobili ukupnu energiju  $U$  sadržanu u kondenzatoru:

$$u_E Ad = U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V^2}{d^2} Ad. \quad (3.12)$$

Kapacitet pločastog kondenzatora definira se kao:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (3.13)$$

Kao konačan rezultat za ukupnu energiju, uz izraz  $C = \frac{Q}{V}$ , dobivamo:

$$U = \frac{1}{2} V^2 C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV. \quad (3.14)$$

Izraz 3.14 je dobro poznata relacija za energiju kondenzatora. Gustoća energije magnetskog polja može se iskoristiti kako bi pronašli ukupnu energiju zavojnice. Izvan zavojnice, magnetsko polje približno iščezava, a unutar zavojnice duljine  $l$  i broja zavoja  $N$ , magnetsko polje dano je izrazom:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}. \quad (3.15)$$

Ukupnu energiju ponovno pronalazimo umnoškom gustoće energije sa volumenom promatranog prostora - prostor unutar zavojnice. Ako je površina poprečnog presjeka  $A$ , a duljina zavojnice  $l$  tada je ukupna energija zavojnice dana izrazom:

$$u_B Al = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 N^2}{l^2} I^2 Al. \quad (3.16)$$

Iz jednadžbe 3.16 i izraza za induktivitet zavojnice

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (3.17)$$

moguće je dobiti konačan izraz za ukupnu energiju zavojnice:

$$U = \frac{1}{2} LI^2. \quad (3.18)$$

Jednadžba 3.18 je dobro poznati izraz za energiju zavojnice. Vidimo kako izraz 3.9 daje ispravne relacije za energiju električnog i magnetskog polja.

Postoji još jedno važno svojstvo elektromagnetskog polja. Ako je konfiguracija električne i magnetske komponente elektromagnetskog polja takva da u nekoj točki komponente nisu paralelne i ako im je iznos različit od nule, tada se energija prenosi iz okoline te točke. Uzmimo u obzir malu površinu oko promatrane točke, definiranu kao dio ravnine koju obuhvaćaju vektori električnog i magnetskog polja. Tada možemo definirati i smjer odvođenja energije: okomit istovremeno i na električno i magnetsko polje. Objekt kojeg smo dobili je vektor, a naziva se Poyntingov vektor, prema engleskom fizičaru Johnu Henryju Poyntingu koji je razvio samu teoriju. Matematički izraz za Poyntingov vektor je:

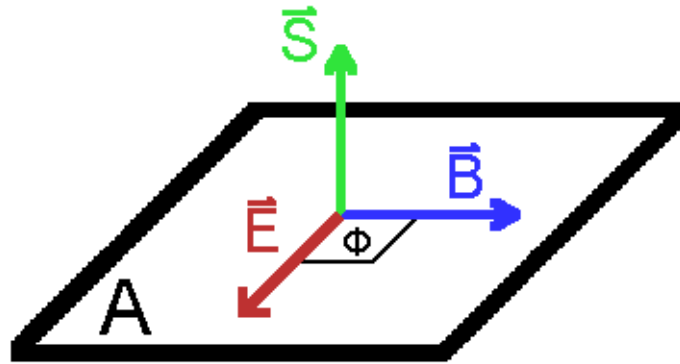
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (3.19)$$

Fizikalno, Poyntingov vektor je veličina koja označava prijenos energije elektromagnetskog polja po jedinici vremena po jedinici površine. Iznos Poyntingovog vektora je

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB \sin(\phi), \quad (3.20)$$

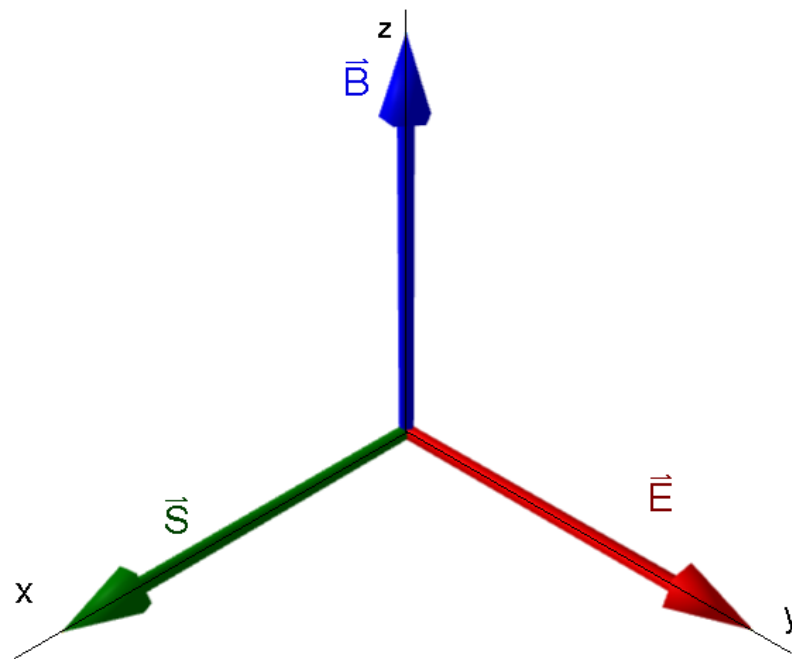
gdje je  $\phi$  kut između  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ . U slučaju da su vektori električnog i magnetskog polja okomiti, tada je iznos Poyntingovog vektora jednak:

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB. \quad (3.21)$$



Slika 3.12: Poyntingov vektor pokazuje prijenos energije preko površine u jedinici vremena.

Smjer Poyntingovog vektora određuje se pravilom desne ruke, ispružene prste usmjerimo u smjeru električnog polja, tada prste savinemo prema vektoru magnetskog polja. Ispruženi palac nam tada pokazuje smjer Poyntingovog vektora.



Slika 3.13: Poyntingov vektor u slučaju da električno polje usmjereno prema +y-osi, a magnetsko polje usmjereno prema +z-osi. Poyntingov vektor tada je usmjeren prema +x-osi.

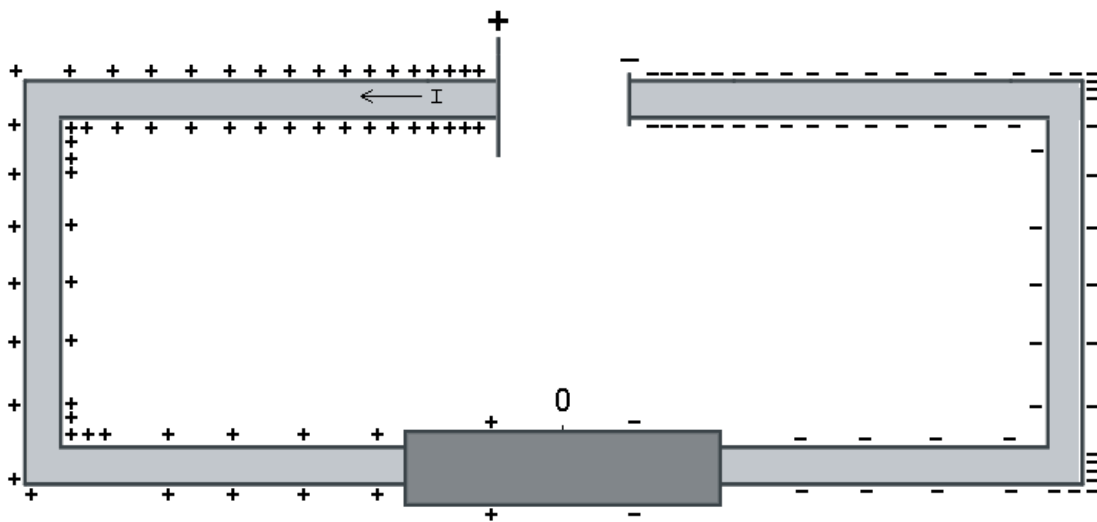
U slučaju elektromagnetskih valova, električno i magnetsko polje su stalno okomiti jedno na drugo, pa u svakom trenutku postoji Poyntingov vektor. On pokazuje u smjeru širenja vala, što znači da se i energija prenosi u smjeru širenja vala. Ako kao

primjer elektromagnetskog vala uzmemo svjetlost sa Sunca, tada se energija sa Sunca može prenijeti na neko tijelo na Zemlji, primjerice na automobil koji se zagrijava pod utjecajem Sunčeve svjetlosti. To nam govori da Poyntingov vektor stvarno pokazuje prijenos energije elektromagnetskim poljima. Poyntingov vektor možemo iskoristiti i u slučaju istosmjernog strujnog kruga. Ako iskoristimo definiciju Poyntingovog vektora na dijelovima prostora koji sadrži strujni krug i gdje su električno i magnetsko polje okomiti jedno na drugo, tada bi Poyntingov vektor opisivao količinu energije koja se prenese po površini u jedinici vremena.

## 4 Analiza prijenosa energije u strujnim krugovima

### 4.1 Prijenos energije u jednostavnom strujnom krugu

Sada možemo pobliže promotriti kako se prenosi energija u jednostavnom strujnom krugu prikazanom na slici 2.1. Trebamo odrediti smjer električnog i magnetskog polja u vodiču i oko vodiča, unutar i oko otpornika te u bateriji. Iz navedenih veličina možemo koristeći relaciju 3.19 pronaći Poyntingov vektor koji nam pokazuje smjer prijenosa energije u strujnom krugu.



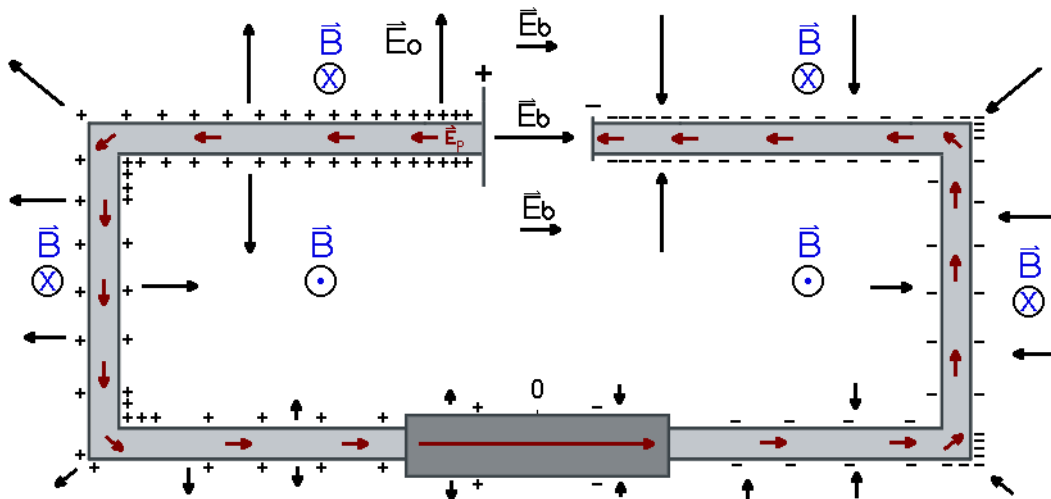
Slika 4.1: Raspodjela naboja na strujnom krugu.

Na slici 4.1, prikazana je raspodjela naboja na površini strujnog kruga koja uzrokuje električno polje u vodiču i izvan vodiča. Iz te raspodjele možemo naći smjer i aproksimativan iznos električnog polja u odabranim točkama. Smjer električnog polja oko žice već smo pronašli na slikama 3.11. Ako žica ima mali otpor, smjer je gotovo okomit na žicu, orijentiran je prema vani u dijelu strujnog kruga koji je bliži pozitivnom polu baterije, kao na slici 3.11a). Kad dođemo do otpornika, raspodjela naboja na njemu uzrokuje mijenjanje smjera okomite komponente električnog polja. Na desnoj strani otpornika, ona je usmjerena prema unutrašnjosti otpornika. Nakon otpornika, duž vodiča, okomita komponenta usmjerena je prema unutrašnjosti vodiča. Magnetsko polje oko žice i otpornika određuje se kao na slici 3.1.

Preostaje nam odrediti smjer električnog i magnetskog polja unutar i oko baterije.

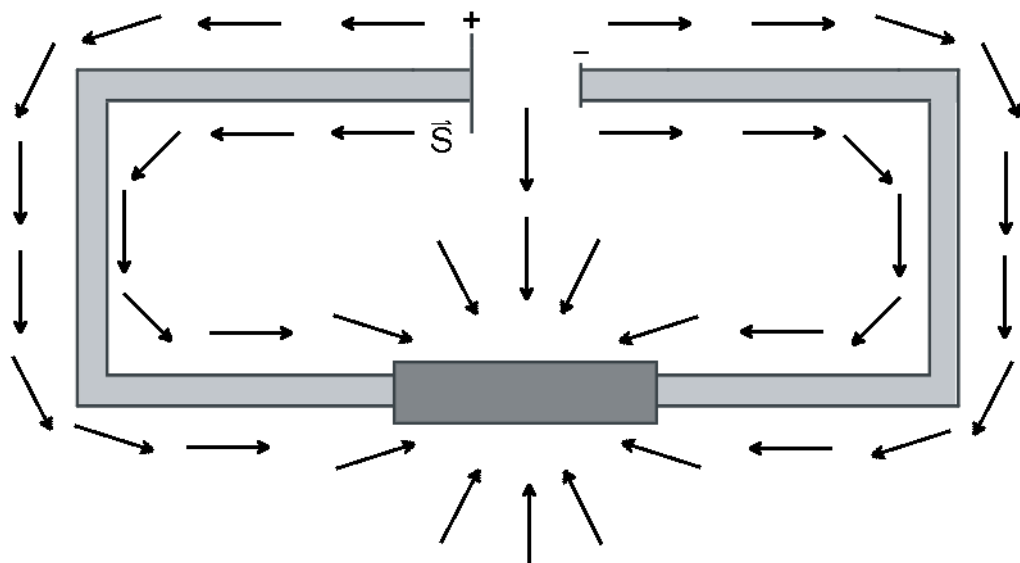


Električno polje usmjereno je od pozitivnog prema negativnom polu, ali struja teče od negativnog do pozitivnog pola baterije. Izvan baterije, njezino električno polje je slabije nego unutra i usmjereno je od pozitivnog do negativnog pola baterije.



Slika 4.2: Slika prikazuje električno i magnetsko polje u prostoru oko i unutar strujnog kruga. Crvenom bojom označena je komponenta električnog polja koja je paralelna sa smjerom struje, a crnom bojom je označena komponenta okomita na žicu. Plavom bojom označen je smjer magnetskog polja.

Sada znamo smjer i orijentaciju električnog i magnetskog polja u svakom dijelu strujnog kruga, pa prema jednadžbi 3.19 možemo pronaći Poyntingov vektor u cijelom prostoru strujnog kruga.

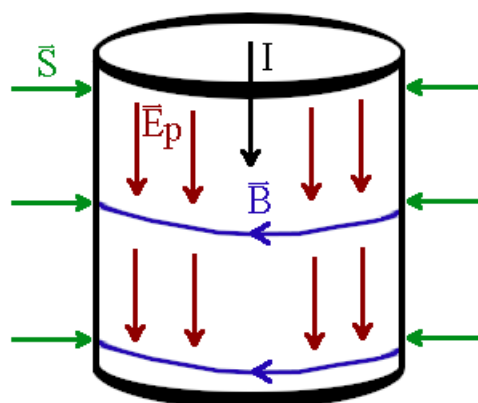


Slika 4.3: Slika prikazuje konačan rezultat za smjer Poyntingovog vektora u odabranim točkama strujnog kruga. Smjer Poyntingovog vektora označen je crnom bojom.

Na slici 4.3 vidimo kako je usmjeren Poyntingov vektor oko elemenata strujnog kruga. Blizu baterije, Poyntingov vektor usmjeren je od baterije, što znači da se energija odvodi od baterije koristeći elektromagnetska polja u prostoru. Oko žice koja spaja pozitivan pol baterije s otpornikom, Poyntingov vektor paralelan je sa smjerom struje, no u dijelu žice koja spaja otpornik s negativnim polom baterije Poyntingov vektor suprotne je orijentacije od smjera struje. Kod otpornika, smjer Poyntingovog vektora mijenja se od lijeve do desne strane, ali ostaje usmjeren prema unutrašnjosti otpornika, što znači da se energija prenosi na otpornik.

Iz definicije Poyntingovog vektora 3.21 možemo procjeniti ovisnost njegovog iznosa o udaljenosti od žice. Iz jednadžbi 3.7 i 3.3 vidimo da su i električno i magnetsko polje obrnuto proporcionalni udaljenosti od žice, pa je iznos Poyntingovog vektora obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti od žice, što je spomenuto u radu [2]. Unutar žice, iznos električnog polja je gotovo zanemariv ako uzimamo žicu s vrlo malim iznosom otpora, a magnetsko polje se smanjuje što smo bliže osi žice, stoga je iznos Poyntingovog vektora zanemariv unutar žice. Gotovo sva energija se prenosi u prostoru oko žice.

Kako bi usporedili ovaj model s drugim modelima i eksperimentom, moramo izračunati koliko se energije prenijelo na žaruljicu u ovom procesu. Zbog jednostavnosti, možemo promatrati dio žice odmah ispod površine vodiča, koji se nalazi blizu žaruljice. Električno polje unutar žice usmjereno je paralelno sa žicom. Smjer Poyntingovog vektora određuje se vektorskim produktom električnog i magnetskog polja.



Slika 4.4: Žicu blizu žarulje modeliramo cilindrom radijusa  $r$  i visinom  $d$ . Na slici označeni su smjer struje  $I$ , magnetsko polje na površini vodiča  $B$ , smjer električnog polja  $E$  na površini vodiča i Poyntingov vektor  $S$ .

Budući da su u svakoj točki prostora električno i magnetsko polje okomiti jedno na drugo, iznos Poyntingovog vektora dan je u jednadžbi 3.21. Iznos Poyntingovog vektora količina je prenesene energije u jedinici vremena po jedinici površine, pa možemo izračunati prenesenu snagu:

$$P = SA = \frac{1}{\mu_0} EBA. \quad (4.1)$$

Površina koju promatramo je površina plašta cilindra, koja se računa prema formuli

$$A = 2\pi rd. \quad (4.2)$$

Iznos električnog polja možemo saznati koristeći razliku potencijala između krajeva žice

$$E = \frac{V}{d} \leftrightarrow V = Ed. \quad (4.3)$$

Stoga, ukupna snaga koja se prenese na komad žice jednaka je:

$$P = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 I}{2r\pi} 2r\pi V = VI. \quad (4.4)$$

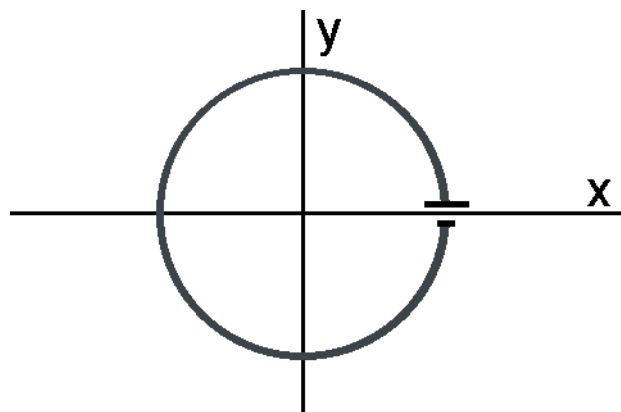
Iz našeg modela dobivamo da se prenesena snaga na komad žice podudara s dobro poznatom relacijom za snagu.

## 4.2 Tok energije u drugim strujnim krugovima

Budući da električno i magnetsko polje strujnog kruga ovisi o geometriji strujnog kruga, važno je promotriti i druge strujne krugove sa baterijom, žicama i otpornicima.

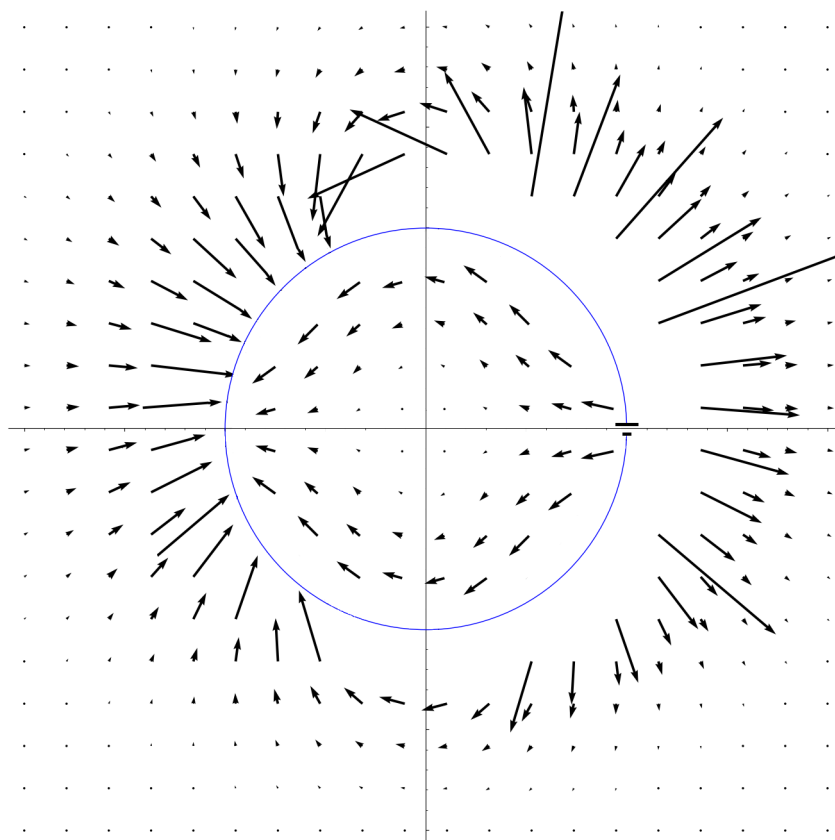
### 4.2.1 Prstenasti strujni krug

U radu [4] napravljeni su izračuni u kojima se promatra strujni krug u obliku prstena. Krug, prikazan na slici 4.5, sastoji se od baterije i žice s jednolikom linearnom raspodjelom otpora.



Slika 4.5: Strujni krug u obliku prstena koji se obradio u radu [4]. Pretpostavlja se da je otpor žice jednolik po cijeloj žici.

Za isti strujni krug napravljen je i izračun Poyntingovog vektora u prostoru strujnog kruga. Na slici 4.6 vidi se kako se energija prenosi ne samo preko žica, nego i preko prostora kojeg strujni krug obuhvaća, kao i prostorom kojeg strujni krug ne obuhvaća.



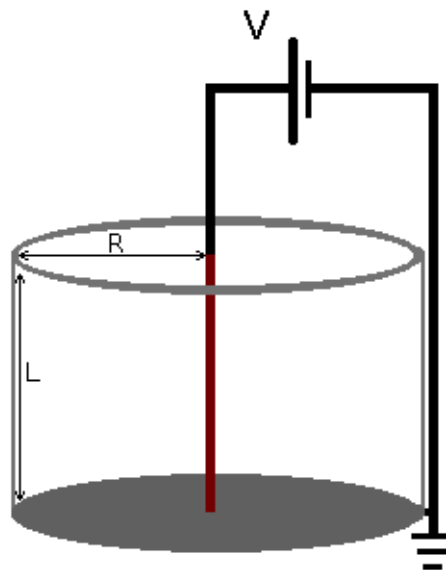
Slika 4.6: Poyntingov vektor za strujni krug u obliku prstena. Vrlo blizu strujnog kruga iznos Poyntingovog vektora je barem jedan red veličine veći od iznosa najvećeg od prikazanih vektora na slici. Napravljeno prema radu [4, jednađbe 40, 41] u programu *SageMath*.

Iznos Poyntingovog vektora najveći je jako blizu žice. U istom radu izračunata je snaga koja se sa dijela prstena s baterijom prenese na drugi dio. I u tom slučaju, rezultat koji se dobio jednak je kao i u jednadžbi 4.4.

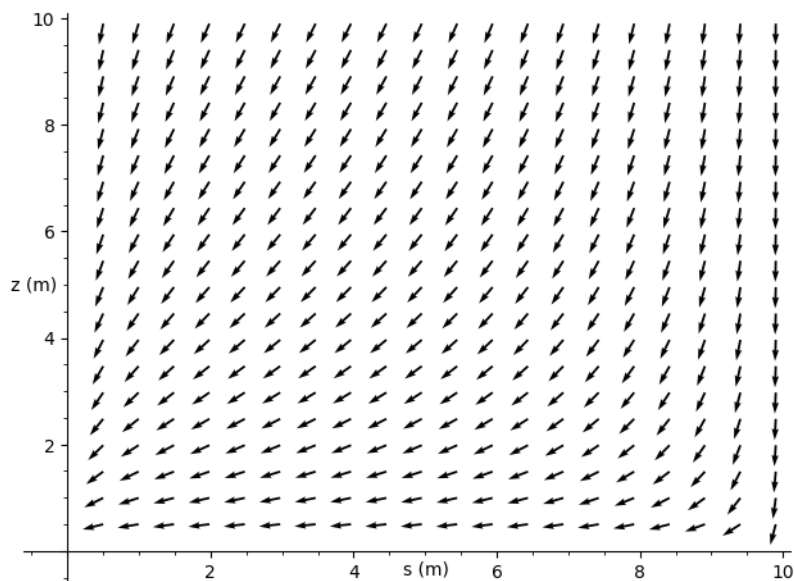
#### 4.2.2 Strujni krug sa uzemljenim cilindrom

U radu [3], proučavan je strujni krug na slici 4.7, tj. dio žice vodljivosti  $\sigma$  koji je obuhvaćen cilindričnom ljuskom. Izračunato je električno i magnetsko polje između žice i cilindra, iz kojih se dobio Poyntingov vektor.

Kako se vidi iz slike 4.8, Poyntingov vektor usmjeren je prema žici i prolazi čitavim prostorom između ljuske i žice. Poyntingov vektor možemo rastaviti na komponente. U ovom slučaju, paralelna komponenta na površinu žice je ona koja pokazuje prijenos energije preko polja oko žice, a okomita komponenta odgovorna je za prijenos energije u žicu. Komponenta Poyntingovog vektora paralelna sa žicom linearno je ovisna o  $z$ , što je veći  $z$ , to je iznos paralelne komponente manji.

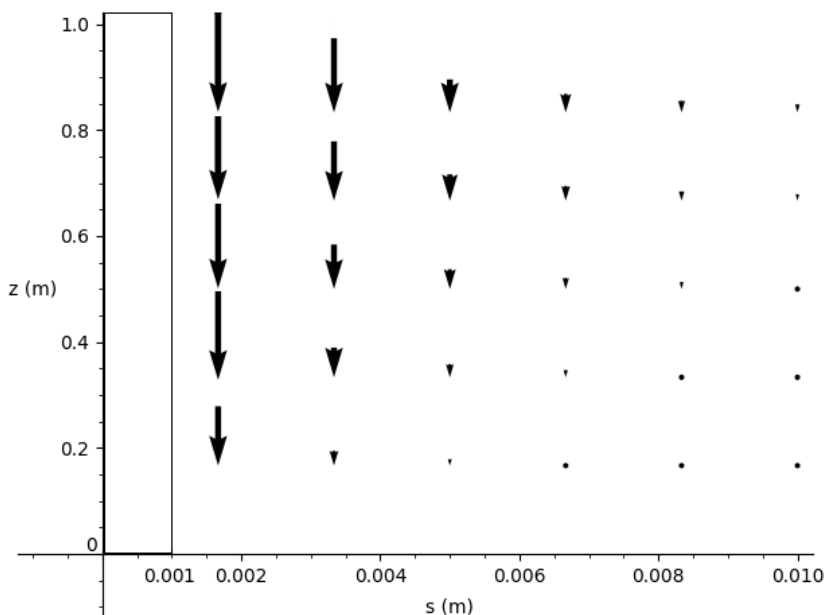


Slika 4.7: Strujni krug sastoji se od baterije, žice i uzemljene cilindrične ljuske čiji donji dio zatvara strujni krug. Dio žice koji se promatra označen je crvenom bojom.



Slika 4.8: Graf prikazuje Poyntingov vektor na s-z osima, gdje je s udaljenost od z-osi. Strelice pokazuju smjer, no duljine strelica nisu vezane uz iznos Poyntingovog vektora. Slika je napravljena u softveru *SageMath* prema radu [3, jednadžba 10].

Na slici 4.9 vidimo kako je iznos paralelne komponente Poyntingovog vektora najveći blizu z-osi, a već do 0,2 cm od žice dovoljno se smanji da možemo reći da je zanemariv.



Slika 4.9: Graf prikazuje komponentu Poyntingovog vektora paralelnu sa žicom na s-z osima. Radijus žice je 1 mm a radijus cilindra je 10 cm. Slika je napravljena u softveru *SageMath* prema radu [3, jednadžba 10].

Pomoću Poyntingovog vektora izračunati su radijusi cilindričnih dijelova prostora  $R_{50}$

i  $R_{75}$  kroz kojih se prenese 50 % i 75 % energije, respektivno. Za žicu radijusa  $a = 1$  mm duljine 1 m i radijus ljske  $R = 10$  cm dobiva se

$$R_{50} = 1 \text{ cm i } R_{75} = 3,2 \text{ cm.} \quad (4.5)$$

Najveći dio energije prenese se u prostoru blizu žice. U istom radu napravljen je izračun za energiju po jedinici vremena koja se prenese na žicu. Dobio se rezultat za snagu:

$$P = \sigma \left( \frac{V}{L} \right)^2 \pi a^2 L, \quad (4.6)$$

gdje je  $\sigma$  električna vodljivost žice. Žica je cilindričnog oblika, radijusa  $a$ , stoga za nju vrijedi:

$$A = a^2 \pi. \quad (4.7)$$

Koristeći jednadžbu 4.6 i uz relacije 3.5 i 4.7, lako se dobiva izraz za snagu:

$$P = \frac{V^2}{R}. \quad (4.8)$$

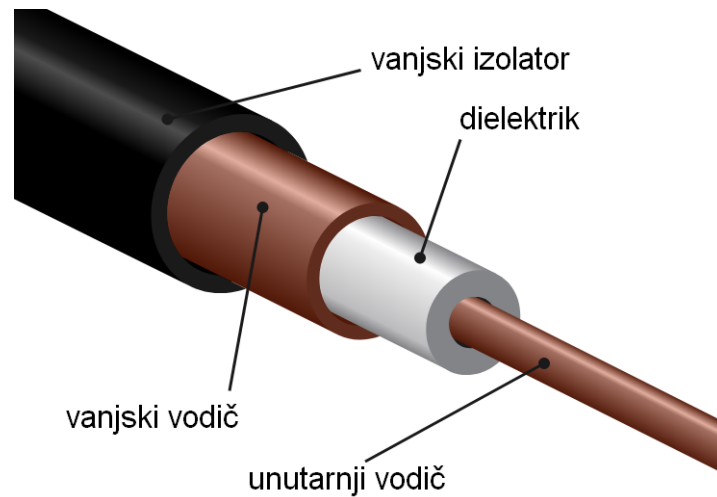
Rezultat za snagu 4.8 jednak je dobro poznatom izrazu za snagu.

### 4.2.3 Koaksijalni kabel

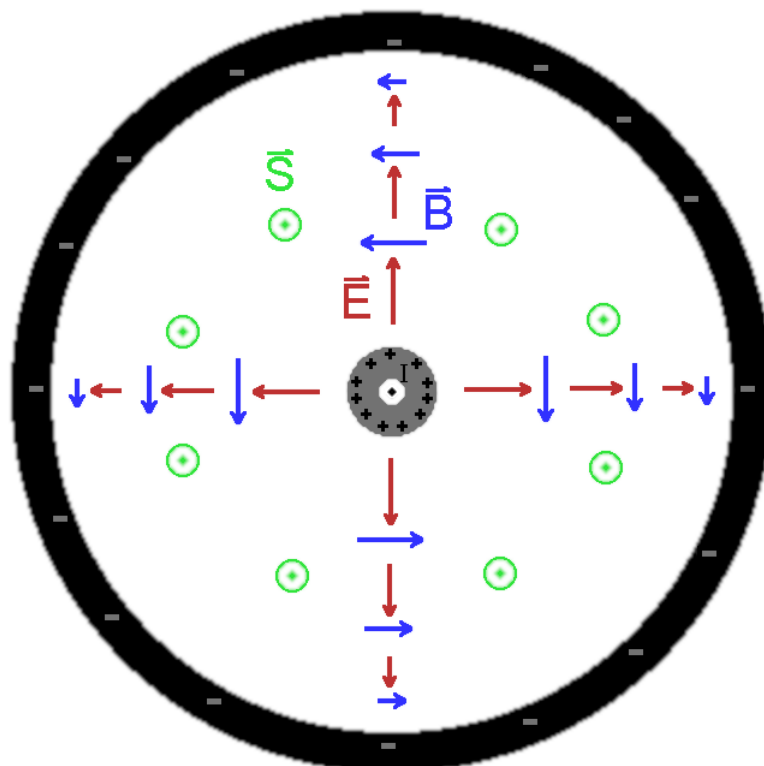
Koaksijalni kabel je zbir žica preko kojih se prenosi struja ili električni signal. Žice su postavljene tako da tvore unutarnji i vanjski vodič tako da je vanjski vodič koncentričan unutarnjem vodiču. Oni su izolirani jedno od drugoga izolatorom, tj. dielektrikom. Izvana, vanjski vodič presvučen je plastičnim izolatorom. Kroz unutarnji se vodič vodi struja, a po vanjskom vodiču struja se vraća nazad.

Ako pretpostavimo da je unutarnji vodič malog otpora spojen na pozitivnu elektrodu baterije, tada se na njegovoj površini javlja raspodjela pozitivnih naboja. Vanjski vodič malog otpora spojen je na negativnu elektrodu baterije i na njegovoj se površini javlja raspodjela negativnog naboja. Raspodjele naboja na oba vodiča stvaraju električno polje koje je okomito na površinu i unutarnjeg i vanjskog vodiča. Električno polje izvan kabla poništava se jer se poništavaju doprinosi raspodjeli naboja na unutarnjem i vanjskom vodiču. Struje vanjskog i unutarnjeg vodiča stvaraju magnetsko polje. Da bi odredili tok energije, treba spoznati činjenicu da je izvan koaksijalnog ka-

bla iznos magnetskog polja jednak 0, doprinos magnetskog polja unutarnjeg vodiča se u tom području poništava sa doprinosom magnetskog polja vanjskog vodiča. Stoga, u prostoru izvan kabla nema ni električnog ni magnetskog polja, pa Poyntingov vektor također iščezava.



Slika 4.10: Slika prikazuje sastavne dijelove koaksijalnog kabla. Preuzeto iz [14]



Slika 4.11: Slika prikazuje poprečni presjek koaksijalnog kabla, crvenim strelicama označen je smjer električnog polja, plavim strelicama označen je smjer magnetskog polja, sa zelenom bojom označen je smjer Poyntingovog vektora, a sa simbolima + i - označena je površinska raspodjela naboja.

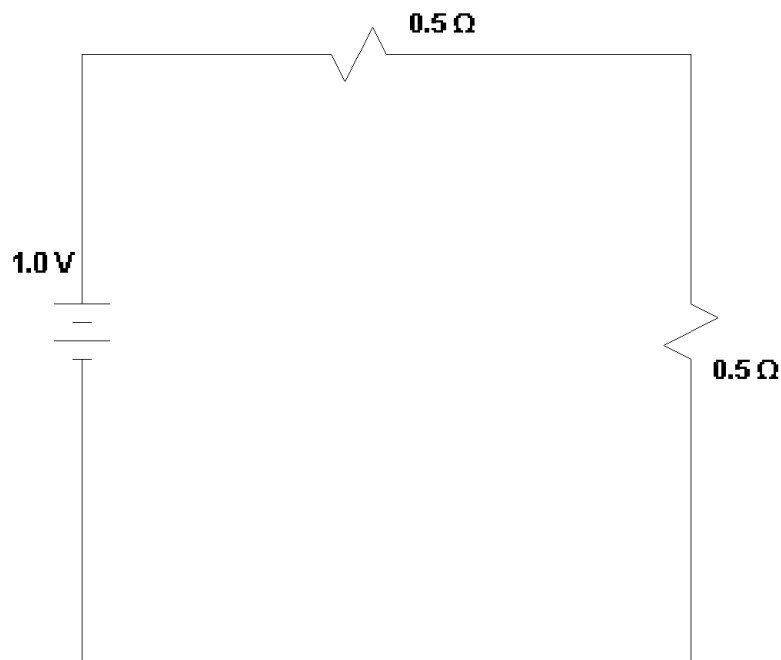


Budući da izvan kabla i električno i magnetsko polje izvan kabla iščezava, tada je sva energija sadržana unutar kabla prema jednadžbi 3.8. Uvrštavajući relacije 3.7 i 3.3 u jednadžbu 3.19, dobivamo da je iznos Poyntingovog vektora i toka energije najveći blizu unutarnjeg vodiča.

### 4.3 Simulacije strujnih krugova

#### 4.3.1 Circuit Surveyor

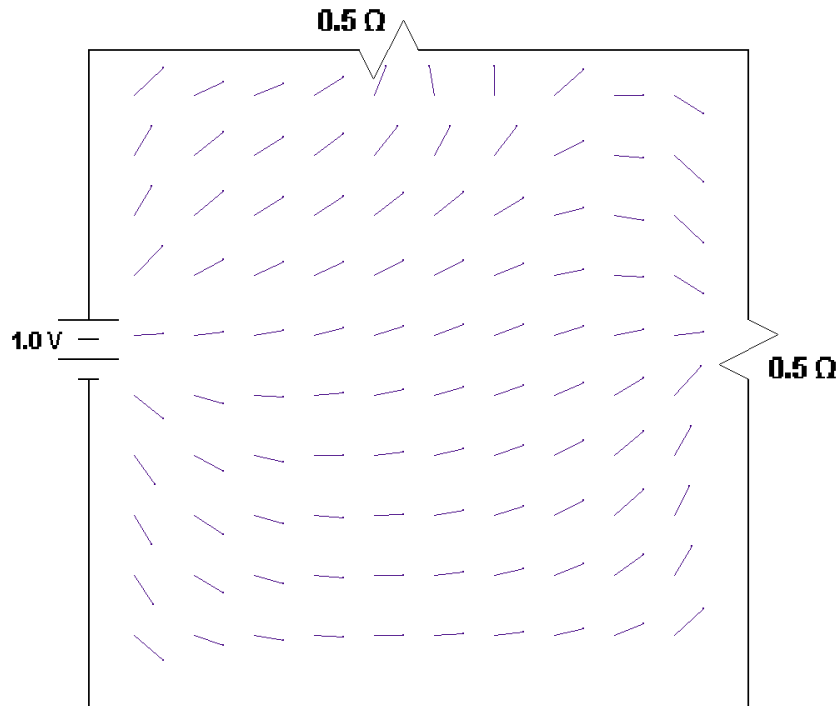
U radu [6], opisana je računalna simulacija strujnih krugova *Circuit Surveyor*, koja je napravljena specifično za prikaz Poyntingovog vektora u strujnim krugovima sastavljenim od žica, otpornika i baterija. U simulaciju se pomoću tekstualnih datoteka unesu podatci o položaju elemenata dvodimenzionalnog strujnog kruga, a dobivaju se grafički prikazi toka Poyntingovog vektora



Slika 4.12: Slika prikazuje strujni krug koji se simulira putem aplikacije *Circuit Surveyor*. Ovo je jedan od deset strujnih krugova koji su ugrađeni u aplikaciju.

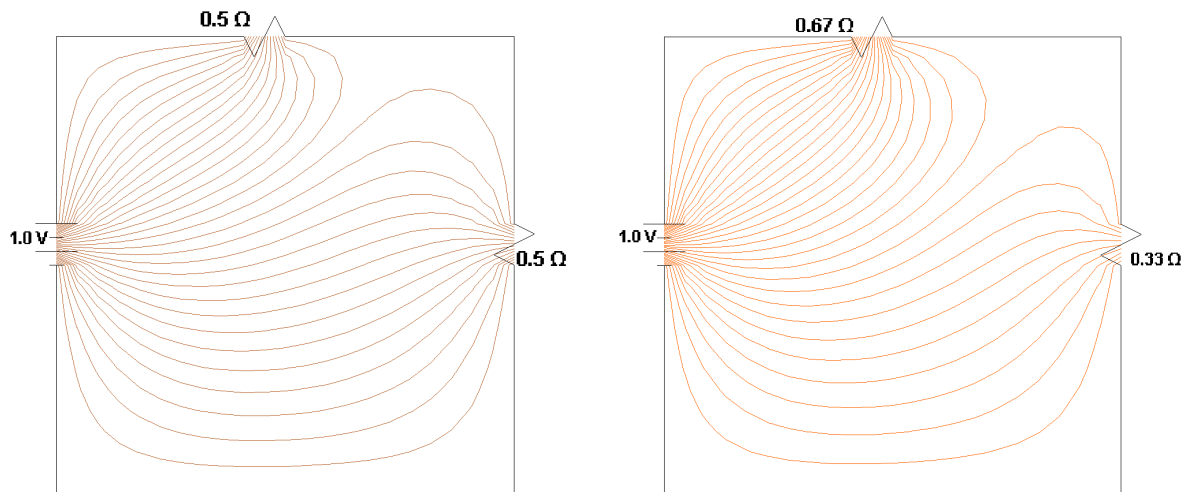
Dvodimenzionalni strujni krugovi koje aplikacija simulira nisu stvarno dvodimenzionalni, već se ispod i iznad simuliranog strujnog kruga nalazi beskonačni niz istih strujnih krugova. U tom slučaju naš strujni krug je beskonačno duga zavojnica, izvan koje je iznos magnetskog polja jednak nuli. Zbog toga se na simulaciji Poyntingov

vektor može računati samo u prostoru kojeg obuhvaća strujni krug, što dovodi do neispravnosti kakva je prikazana na slici 4.13 - ni električno ni magnetsko polje ne iščezavaju izvan prostora strujnog kruga pa bi Poyntingov vektor trebao bi postojati u cijelom prostoru. Također, zbog dvodimenzionalnosti problema, Poyntingov vektor nužno leži na ravnini koju opisuje strujni krug, u trodimenzionalnom slučaju to ne vrijedi.



Slika 4.13: Strelice na slici prikazuju smjer Poyntingovog vektora strujnog kruga sa slike 4.12.

U aplikaciji mogu se prikazati i silnice vektora - krivulje čije tangente pokazuju u smjeru vektora, u ovom slučaju silnice Poyntingovog vektora.

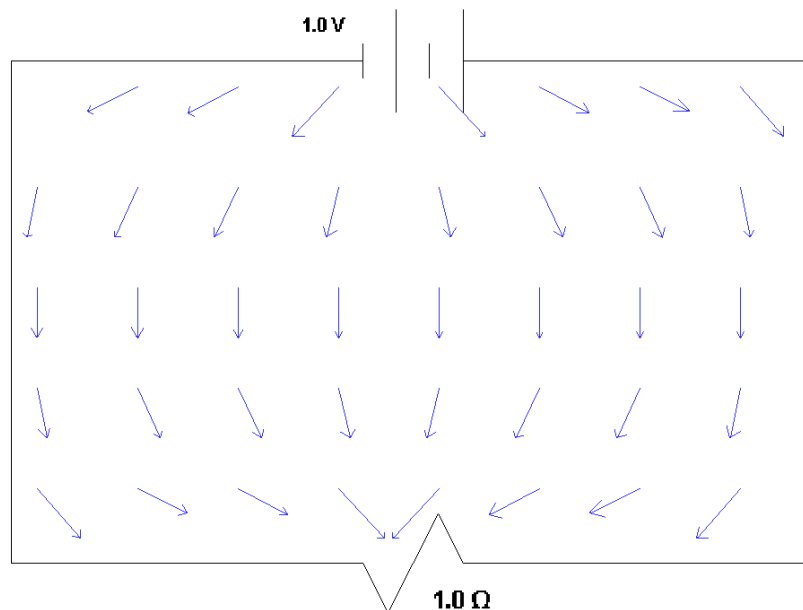


Slika 4.14: Lijeve slika prikazuje silnice Poyntingovog vektora u strujnom krugu koji sadrži dva jednaka otpornika otpora  $0,5 \Omega$ , a desna slika prikazuje silnice ako su otpornici otpora  $0,67 \Omega$  i  $0,33 \Omega$ .

Sa lijeve slike u 4.14 vidljivo je kako u krugu s dva otpornika jednak broj silnica ulazi u oba otpornika, a u desnoj slici više silnica ulazi u otpornik s većim otporom. Izraz za snagu kod otpornika otpora  $R$  kojim prolazi struja  $I$  je

$$P = I^2 R. \quad (4.9)$$

Prema jednadžbi 4.9, na otpornik s većim otporom prenijet će se više energije nego na otpornik s manjim otporom. Ako su otpori jednaki, tada se prenosi ista količina energije.

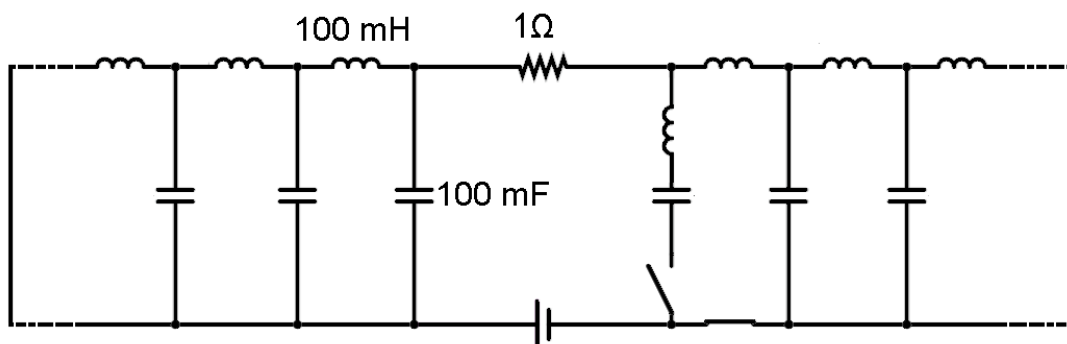


Slika 4.15: Simulacija jednostavnog strujnog kruga. Prikazan je smjer Poyntingovog vektora.

Na slici 4.15, simuliran je strujni krug sa slike 2.1. Zbog ograničenja simulacije, tok Poyntingovog vektora prikazan je samo unutar strujnog kruga, ali se dobro slaže sa kvalitativnim rezultatima sa slike 4.3.

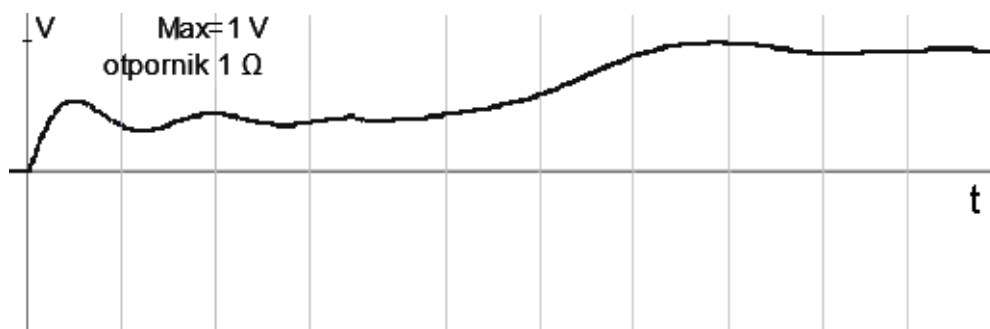
#### 4.3.2 Falstad Circuit Simulator

Pomoću Falstadove simulacije sa stranice [17] možemo simulirati strujni krug iz konceptualnog pitanja iz uvoda. Iako aplikacija ne simulira Poyntingov vektor, prijenos energije preko prostora možemo modelirati drugim strujnim elementima: beskonačnim nizom kondenzatora i zavojnica.



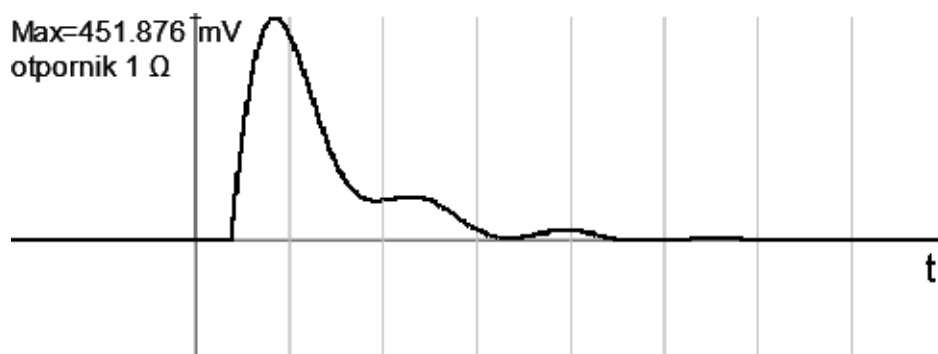
Slika 4.16: Simulacija strujnog kruga iz konceptualnog pitanja iz uvoda.

Kondenzatori simuliraju električnu interakciju između žica, a zavojnice simuliraju interakciju između žica putem magnetskih polja. Desna sklopka simulira sklopku kojom zatvaramo strujni krug, a lijeva sklopka simulira situaciju kada želimo prijenos energije ako desna sklopka nije zatvorena. U trenutku zatvaranja sklopke, kroz kondenzator koji je najbliži sklopki počine teći struja, sve dok se kondenzator ne nabije. Nakon što se taj kondenzator nabio, kroz njega više ne teče struja, ali počinje teći kroz druge kondenzatore sve dok svi ne budu nabijeni i struja može teći samo kroz žice. U simulaciji smo mjerili napon na otporniku, a koristili smo ukupno 24 kondenzatora i 24 zavojnica. Dobiveni su sljedeći rezultati:



Slika 4.17: Rezultati za napon na otporniku otpora  $R = 1 \Omega$ .

Na početku, na otporniku se javlja napon od otprilike 0.45 V. Nakon nekog vremena, javlja se napon od 1 V, što je i napon baterije. U slučaju da strujni krug nije zatvoren, dobivamo sljedeći graf:



Slika 4.18: Rezultati za napon na otporniku otpora  $R = 1 \Omega$  u slučaju da strujni krug nije zatvoren.

Na slici 4.18 vidimo kako se odmah na otporniku javlja napon od otprilike 0,45 V, a nakon nekog vremena se smanji na nulu, što znači da se energija prenijela preko praznog prostora i kada strujni krug nije bio zatvoren.

## 5 Zaključak

Sada se možemo vratiti na konceptualno pitanje zadano u uvodu. Žaruljici bi trebalo  $1 \text{ m}/c$  da se upali kada se spusti sklopka jer se energija prenosi preko prostora između žaruljice i baterije, a brzina prijenosa energije elektromagnetskim poljem jednaka je brzini svjetlosti  $c$ . Iako se veliki dio energije prenosi u prostoru blizu žica, dio energije se prenosi preko ostatka prostora, stoga u realnom slučaju možemo očekivati da će se žaruljica upaliti, ali sjaj žaruljice bit će manji od sjaja žaruljice nakon jedne sekunde, kada se informacija o električnom i magnetskom polju prenijela po cijeloj žici. Mnogi su kritičari videa [15] očekivali da, ako se energija uopće prenese preko prostora, napon na žaruljici biti zanemariv, reda veličine nepouzdanosti voltmetra. Također, vjerovali su da ako strujni krug nije zatvoren, da se žaruljica neće upaliti, a tako bi dobili informaciju o zatvorenosti strujnog kruga u manje vremena nego što svjetlosti treba da dođe do prekida u žici, što nije moguće. U videu [16] napravljen je strujni krug iz konceptualnog pitanja. Baterija se nalazila na udaljenosti od 1 m od žaruljice, a ukupna duljina žica je 40 m. Iako je duljina žica mnogo manja od duljine zadane u konceptualnom pitanju, u videu je korišten osciloskop koji može razlučiti što se događa na vremenskoj skali nanosekunda, tako da se može vidjeti točno kada će i koliko će se energije prenijeti na žaruljicu. Vrijeme koje je potrebno da signal koji se giba brzinom svjetlosti prođe 1 m je  $t \approx 3 \text{ ns}$ , a da prođe 20 m je  $t = 66 \text{ ns}$ . Dobiveno je da nakon nekoliko nanosekunda, na otporniku se javlja napon od 4 V, a tek se nakon pedesetak nanosekundi javlja puni napon izvora od 18 V, slično kao i na slici 4.17 iz simulacije. Također, ako nije zatvoren, opet se javlja napon na žaruljici, samo što se napon ne poveća do napona izvora, već pada na nulu nakon vremena potrebnog da informacija o prekidu strujnog kruga dođe do žarulje.

Iz dobivenih rezultata možemo zaključiti da naš model rješava sve probleme koji su iskazani u poglavlju 2, jer kaže da se energija prenosi elektromagnetskim poljima, ne elektronima. Model daje i ispravne rezultate u usporedbi s eksperimentom.

Model koji smo razvili koristi Maxwellove jednačbe. Iako se Maxwellove jednačbe u nastavi predmeta Fizika u srednjoj školi ne koriste direktno, u mnogim primjerima koriste se njihovi rezultati, a spominju se Ampereov i Faradayev zakon, stoga smatram da bi se navedeni model mogao koristiti, samo preoblikovan da bude u skladu sa ostalim gradivom koje se izlaže.

Prema kurikulumu iz nastavnog predmeta Fizika [19], u nastavi ni osnovne ni srednje škole ne spominje se tko prenosi energiju u strujnom krugu. U nastavi fizike u osnovnoj školi tek se uvode novi pojmovi poput električnog i magnetskog polja, električnog otpora, napona i drugih, tako da ne bi bilo prikladno uvođenje novih matematičkih i fizikalnih pojmova.

U nastavi fizike u srednjoj školi, elektromagnetski valovi obrađuju se u četvrtom razredu, pa mislim da bi se nakon obrade te teme moglo raspravljati o prijenosu energije u strujnom krugu, jer su tada obrađeni svi koncepti koji su potrebni za korištenje modela i uvođenje novog pojma - Poyntingovog vektora. Za opće programe mogao bi se uvesti Poyntingov vektor i u analizi strujnog kruga uz pomoć nastavnika naći Poyntingov vektor u prostoru oko nekog jednostavnog strujnog kruga. Za prirodoslovno-matematičke programe, idealno bi bilo napraviti interaktivni izvod u kojem učenici sami postepeno dolaze do raspodjele naboja, električnog i magnetskog polja oko vodiča te određuju smjer Poyntingovog vektora pomoću pravila desne ruke. Kao pomoć u vizualizaciji Poyntingovog vektora, mogla bi se koristiti simulacija *Circuit Surveyor* ili druge slične simulacije. Na kraju sata, postavio bih konceptualno pitanje iz uvoda ovog rada, ali bez ponuđenih odgovora, jer bi bilo prelakno eliminirati pogrešne odgovore. Zahtijevao bih da učenici napišu približni red veličine vremena nakon kojeg misle da će se žaruljica upaliti, uz kratko objašnjenje.

Premda bi se pojam Poyntingovog vektora mogao uvesti tek u četvrtom razredu srednjih škola, o nabojima i njihovoj ulozi u strujnom krugu moglo bi se raspravljati i ranije. Po mom mišljenju, prilikom prijelaza iz osnovnih koncepata elektriciteta u obradu strujnih krugova nedostaje upravo taj prijelazni dio u kojemu bi se učenicima objasnilo da naboji imaju vrlo važnu ulogu u strujnim krugovima, ali da je računski vrlo teško dobiti bilo kakav koristan rezultat i zato uvodimo makroskopske veličine, kao što su struja ili napon. Kasnije bi se mogla ponoviti i produbiti rasprava o ulozi naboja u strujnim krugovima tako da učenici pokušaju pronaći raspodjelu naboja koja uzrokuje električno polje unutar vodiča, što bi kasnije bilo korisno za traženje Poyntingovog vektora oko strujnog kruga.

Glavni problem kod podučavanja elektriciteta i magnetizma je to što su učenicima neintuitivni. Učenici na početku školovanja nemaju više od osnovnog iskustva sa strujom i magnetima, a fraze koje se koriste u svakodnevnom životu za opisivanje učinka struje, primjerice „struja se troši”, „baterija se ispraznila” i slične uzrokuju još

veće miskonceptije koje se pokušavaju ispraviti tijekom čitavog školovanja. Mislim da bi se u nastavi fizike trebalo puno više vremena posvetiti konceptualnom razumijevanju, a ne samo rješavanju računskih zadataka. Strujni krugovi su izuzetno korisni u tu svrhu, jer spajaju mnogo osnovnih koncepata u jednom primjeru, pa bi se njihovim korištenjem lakše mogle prepoznati i ispraviti konceptualne poteškoće.



## Popis literature

- [1] Rainer Müller , "A semiquantitative treatment of surface charges in DC circuits", American Journal of Physics 80, 782-788 (2012)
- [2] Igal Galili and Elisabetta Goihbarg , "Energy transfer in electrical circuits: A qualitative account", American Journal of Physics 73, 141-144 (2005)
- [3] Manoj K. Harbola , "Energy flow from a battery to other circuit elements: Role of surface charges", American Journal of Physics 78, 1203-1206 (2010)
- [4] Basil S. Davis and Lev Kaplan , "Poynting vector flow in a circular circuit", American Journal of Physics 79, 1155-1162 (2011)
- [5] Sefton, Ian M. "Understanding Electricity and Circuits: What the Text Books Don't Tell You." (2002).
- [6] Noah A. Morris and Daniel F. Styer , "Visualizing Poynting vector energy flow in electric circuits", American Journal of Physics 80, 552-554 (2012)
- [7] Assis, Andre & Rodrigues, Waldyr & Mania, A.. (1999). The Electric Field Outside a Stationary Resistive Wire Carrying a Constant Current. Foundations of Physics - FOUND PHYS. 29. 729-753.
- [8] Griffiths, David J. Introduction to Electrodynamics. 4th ed. Pearson Education Inc., 2013.
- [9] Chabay, Ruth, and Bruce Sherwood. A unified treatment of electrostatics and circuits. 1999.
- [10] Young, H. and Freedman, R., 2012. "University Physics", 13th ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co.
- [11] Serway, Raymond A., and John W. Jewett. "Physics for Scientists and Engineers", Thomson Brooks/Cole, 2004.
- [12] Video demonstracijskog pokusa strujnog kruga s kondenzatorom [https://www.youtube.com/watch?v=gSoBPVpU\\_8g](https://www.youtube.com/watch?v=gSoBPVpU_8g)

- [13] Slika pravila desne ruke, José Fernando, 2008. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Manoderecha.svg>
- [14] Slika koaksijalnog kabla, 2008. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coaxial\\_cable\\_cutaway.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coaxial_cable_cutaway.svg)
- [15] The Big Misconception About Electricity, dr Derek Muller, 2021., <https://www.youtube.com/watch?v=bHIhgxav9LY>
- [16] How Electricity Actually Works, dr Derek Muller, 2022., [https://www.youtube.com/watch?v=oI\\_X2cMHNe0](https://www.youtube.com/watch?v=oI_X2cMHNe0)
- [17] Falstadova simulacija strujnih krugova <https://www.falstad.com/circuit/>
- [18] Chabay, Ruth, and Bruce Sherwood. Matter and Interactions, Fourth edition, John Wiley & Sons, 2020.
- [19] Kurikulum nastavnog predmeta Fizika za osnovne škole i gimnazije, Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske, 2019.
- [20] Rosser, W. G. V. , Magnitudes of Surface Charge Distributions Associated with Electric Current Flow, American Journal of Physics 38, 1970.