

Kvazikonformalna preslikavanja i primjene u holomorfnoj dinamici

Kraljević, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:196857>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-10**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Kraljević

KVAZIKONFORMALNA
PRESLIKAVANJA I PRIMJENE U
HOLOMORFNOJ DINAMICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Maja Resman

Zagreb, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Uvod	1
1 Osnove kompleksne analize	2
1.1 \mathbb{R}^2 diferencijabilne funkcije i holomorfnost	2
1.2 Holomorfne plohe i uniformizacijski teorem	4
2 Linearna kompleksna struktura	8
2.1 Linearna kompleksna struktura	8
2.2 Beltramijev koeficijent linearnog preslikavanja	14
2.3 Beltramijev koeficijent inverza i kompozicije linearnih operatora . . .	17
3 Skoro kompleksna struktura	19
3.1 Skoro kompleksna struktura	19
3.2 Skoro kompleksne strukture inducirane realno diferencijabilnim preslikavanjima	20
3.3 Invarijantne skoro kompleksne strukture	24
3.4 Simetrične skoro kompleksne strukture	27
4 Kvazikonformalna geometrija	29
4.1 Jednostavno zatvorene krivulje i Jordan-Schönfliesov teorem	29
4.2 Konformalni modul četverokuta	33
4.3 Definicija kvazikonformalnog preslikavanja	36
4.4 Analitička karakterizacija kvazikonformalnih preslikavanja	40
5 Teorem o Integrabilnosti	43
5.1 Kvazikonformalna preslikavanja i Beltrami forme na holomorfnim plohama	43
5.2 Teorem integrabilnosti	47
6 Lokalna dinamika analitičkih funkcija oko fiksne točke	49
6.1 Klasifikacija fiksnih točaka	49
6.2 Privlačne i odbojne fiksne točke: Koenigsove linearizacijske koordinate	50
6.3 Jako privlačne fiksne točke : Boettcherove normalizacijske koordinate	52
6.4 Racionalno neutralne fiksne točke	53
7 Primjena kvazikonformalnih preslikavanja	57
7.1 Normalizacija parabolične fiksne točke i Fatouove koordinate	57
7.2 Racionalno neutralne fiksne točke osim paraboličnih	70
Bibliografija	71

Uvod

Jedan od najučestalijih pristupa proučavanju općenitog dinamičkog sustava $f : S \rightarrow S$ je pronalazak homeomorfno prostora T i preslikavanja $g : T \rightarrow T$ tako da sustavi (S, f) i (T, g) budu topološki konjugirani, to jest da postoji homeomorfizam $h : S \rightarrow T$ takav da

$$h \circ f = g \circ h.$$

Topološki konjugirani sustavi imaju ista dinamička svojstva, a umijeće je upravo u pronalasku prostora T i preslikavanja g tako da konjugiranu dinamiku bude što jednostavnije odrediti.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ T & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

Preslikavanje g tada zovemo *topološka normalna forma* od f . Moguće je tražiti i dodatna svojstva na h , na primjer, *analitički difeomorfizam* ili $h \in C^k(S, T)$. Tada g nazivamo *analitičkom* ili *C^k normalnom formom*.

U kontekstu holomorfne dinamike imamo malo više strukture od samo topološke. Prostor S je *holomorfna ploha*, a f je *holomorfno* preslikavanje.

Sasvim je prirodno tada tražiti i od konjugacije h da poštuje tu glatku strukturu, to jest da i h i njegov inverz h^{-1} budu holomorfna preslikavanja. Takav h nazivamo *biholomorfizmom*.

Ideja je izaći iz svijeta holomorfnih funkcija kako bismo imali širi izbor za naše modele; promatrat ćemo takozvana *kvazikonformalna preslikavanja*. Da bismo definirali kvazikonformalna preslikavanja na plohama prvo definiramo takozvanu *linearnu kompleksnu strukturu* na tangencijalnim prostorima holomorfnih ploha.

U ovom radu ćemo primjeniti kvazikonformalna preslikavanja, koristeći takozvanu metodu *kvazikonformalne kirurgije*, da bismo konstruirali analitičku normalnu formu od funkcije sa *paraboličnom fiksnom točkom* na okolini te fiksne točke.

Slike 2-7, 10, 11, 21 i 22 su generirane u programskom jeziku Asymptote. Ostale slike su generirane u programskom jeziku Mathcha.

1 Osnove kompleksne analize

1.1 \mathbb{R}^2 diferencijabilne funkcije i holomorfnost

Neka je $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$, realno diferencijabilna na

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}.$$

Pritom (x, y) prirodno poistovjećujemo sa $z = x + iy$.

Kompleksnu diferencijabilnost funkcije f u točki z definiramo postojanjem limesa

$$\lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}. \quad (1.1)$$

Zbog neovisnosti o načinu prilaženja točki $z \in \Omega$ imamo za posljedicu da

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\mathbb{R} \ni w \rightarrow 0} \frac{f(z+iw) - f(z)}{iw} = -i \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(z).$$

Ukoliko zapišemo $f = u + iv$, gdje su $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = -i \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(z) \iff \begin{cases} u_x = v_y, \\ v_x = -u_y, \end{cases} \quad (1.2)$$

što su nama dobro poznati Cauchy-Riemannovi uvjeti. Sljedeći teorem nam kaže da su Cauchy-Riemannovi uvjeti i nužni za kompleksnu diferencijabilnost:

Teorem 1.1: Looman - Menchoff [9]

Neka je Ω otvoren podskup od \mathbb{C} i $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$. Tada je f holomorfna na Ω ako i samo ako f na Ω zadovoljava Cauchy Riemannove uvjete.

Za dokaz vidjeti [9, str. 43].

Znamo da diferencijal neprekidno derivabilne funkcije $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, možemo zapisati kao diferencijalnu 1-formu:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (1.3)$$

gdje je $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ baza dvodimenzionalnog realnog tangencijalnog prostora, a $\{dx, dy\}$ njezini dualni funkcionali.

Funkcija f sada više neće nužno biti holomorfna, odnosno neće ovisiti samo o z , već i o \bar{z} , antiholomorfnom dijelu.

Naime, uvodimo zamjenu varijabli $(x, y) \leftrightarrow (z, \bar{z})$ na \mathbb{R}^2 koja će nam biti prikladnija za rad u nastavku. Ulažemo \mathbb{R}^2 u realni 2-dimenzionalni potprostor od \mathbb{C}^2 ,

$$\mathbb{R}^2 \hookrightarrow W \subset \mathbb{C}^2,$$

gdje je

$$W := \{ (z, \bar{z}) \mid z \in \mathbb{C} \}.$$

Ovako definiran W je normirani realni vektorski potprostor od \mathbb{C}^2 te nasljeđuje sve operacije i normu od prostora \mathbb{C}^2 . Posebno, W ima bazu $\{(1, 1), (i, -i)\}$. Uočimo da su W i \mathbb{R}^2 prirodno izomorfni putem sljedećih izomorfizama:

$$\Phi : (x, y) \mapsto (x + iy, x - iy) \quad \text{i} \quad \Psi : (z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 - z_2}{2i} \right).$$

Stoga Φ daje jednu zamjenu varijabli sa \mathbb{R}^2 u njegovu izomorfnu kopiju W iste dimenzije. Neka je $F : \Phi(\Omega) \subset W \rightarrow \mathbb{C}$, dana s :

$$F := f \circ \Psi.$$

F je diferencijabilna na podskupu $\Phi(\Omega) \subset W$. Koristeći lančano pravilo i

$$\partial_{z_1} \Psi_1 = \frac{1}{2} = \partial_{z_2} \Psi_1, \quad \partial_{z_1} \Psi_2 = \frac{1}{2i} = -\partial_{z_2} \Psi_2,$$

računamo

$$\begin{aligned} \partial_{z_1} F &= \partial_{z_1} (f \circ \Psi) \\ &= (\partial_x f \circ \Psi) \cdot (\partial_{z_1} \Psi_1) + (\partial_y f \circ \Psi) \cdot (\partial_{z_1} \Psi_2) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \circ \Psi, \end{aligned}$$

odakle dobivamo

$$\partial_{z_1} F = \partial_{z_1} (f \circ \Psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \circ \Psi, \quad (1.4)$$

te analogno

$$\partial_{z_2} F = \partial_{z_2} (f \circ \Psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \circ \Psi. \quad (1.5)$$

Umjesto varijabli z_1 i z_2 koristimo z i \bar{z} kako bismo naglasili da deriviramo funkcije na domeni $W \subset \mathbb{C}^2$ koju smo prethodno definirali. Kraće (1.4) i (1.5) zapisujemo:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.6)$$

Primjetimo da je $\{\frac{\partial}{\partial x}|_p, \frac{\partial}{\partial y}|_p\}$ baza na $T_p \mathbb{R}^2$, dok je $\{\frac{\partial}{\partial z}|_{\Psi(p)}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}|_{\Psi(p)}\}$ baza na $T_{\Psi(p)} W$ koji je po $D\Psi_p$ prirodno izomorfan s $T_p \mathbb{R}^2$.

Cauchy-Riemannovi uvjeti se sada mogu kompaktnije zapisati :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0,$$

što se može interpretirati da je F funkcionalno neovisna o varijabli \bar{z} . U nastavku ćemo sa $\partial_z F$ i $\partial_{\bar{z}} F$ označavati $\frac{\partial F}{\partial z}$ i $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ redom. Sada (1.3) možemo zapisati u obliku 1-forme na sljedeći način:

$$DF = F_z dz + F_{\bar{z}} d\bar{z}. \quad (1.7)$$

1.2 Holomorfne plohe i uniformizacijski teorem

Za geometrijsku definiciju kvazikonformalnog preslikavanja će nam od iznimne važnosti biti sljedeći klasični teorem kompleksne analize. Za dokaz vidjeti [13, str. 224].

Teorem 1.2: Riemannov teorem o preslikavanju [13]

Neka je $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje i točka $z_0 \in \Omega$ proizvoljna točka. Tada postoji jedinstvena konformalna bijekcija (biholomorfizam)

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$$

takva da vrijedi:

$$F(z_0) = 0, \text{ i } F'(z_0) \in \mathbb{R}^+.$$

Bitno je primjetiti da gubimo jedinstvenost ukoliko ispuštimo *normalizaciju* $F(z_0) = 0$ i $F'(z_0) \in \mathbb{R}^+$. Naime, postoji 3-parametarska grupa $\mathcal{G}(\mathbb{D})$ konformalnih automorfizama jediničnog diska (realnih parametara). Grupa $\mathcal{G}(\mathbb{D})$ je podgrupa Möbiusovih transformacija koju čine transformacije $\phi_{c,\theta} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ oblika

$$\phi_{c,\theta}(z) := e^{i\theta} \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}, \quad (1.8)$$

za neke $c \in \mathbb{D}$ i $\theta \in [0, 2\pi)$, odnosno $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$. Za dokaz tvrdnje pogledati [8, str. 6.] Imamo dva (realna) stupnja slobode u odabiru realne i imaginarne koordinate kompleksnog broja c , praslike 0 po transformaciji ϕ , dok treći (realni) stupanj slobode odgovara rotaciji diska za kut θ .

Pokažimo sada da je Riemannovo preslikavanje, uz danu normalizaciju, jedinstveno. Neka su $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ i $G : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ dva biholomorfizma, tada je $f := G \circ F^{-1}$, $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ biholomorfizam diska, te je stoga oblika (1.8). Dakle postoje $c \in \mathbb{C}$ i $\theta \in [0, 2\pi)$ takvi da je $f = \phi_{c,\theta}$. Pretstavimo dodatno da F i G zadovoljavaju navedenu normalizaciju, to jest da je

$$F(z_0) = 0 = G(z_0) \quad \text{i} \quad r := F'(z_0) \in \mathbb{R}^+, \quad s := G'(z_0) \in \mathbb{R}^+.$$

Tada imamo da je

$$-e^{i\theta} c = f(0) = (G \circ F^{-1})(0) = G(F^{-1}(0)) = G(z_0) = 0 \implies c = 0,$$

odnosno $f(z) = e^{i\theta}z$. Nadalje, računamo

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= f'(0) = (G \circ F^{-1})'(0) = G'(F^{-1}(0)) \cdot (F^{-1})'(0) \\ &= G'(z_0) \frac{1}{F'(F^{-1}(0))} = \frac{G'(z_0)}{F'(z_0)} = \\ &= \frac{s}{r} \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Sada vidimo da je $e^{i\theta} = 1$, odnosno $\theta = 0$. Dakle, $(G \circ F^{-1})(z) = f(z) = z$, odakle slijedi da je $G = F$.

Za proučavanje dinamike holomorfnih funkcija $f : \Omega \rightarrow \Omega$ na jednostavno povezanom $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dovoljno je promatrati inducirano preslikavanje g na jediničnom disku \mathbb{D} , takvo da vrijedi sljedeći komutativni dijagram, gdje je F jedinstveni normalizirani biholomorfizam Ω i \mathbb{D} iz *Riemannovog teorema o preslikavanju*.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \Omega \\ \uparrow F^{-1} & & \downarrow F \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{g} & \mathbb{D} \end{array}$$

Holomorfnu dinamiku možemo proučavati u generalnijem okruženju. Kao što ćemo u nastavku vidjeti generalnije okruženje je i prirodnije za promatrati. Stoga uvodimo strukturu *holomorfne plohe* (engl. *Riemann surface*), za detaljniju obradu teme pogledati [5].

Definicija 1.3: Holomorfna ploha [5]

Holomorfna ploha je povezana jednodimenzionalna holomorfna kompleksna mnogostrukost \mathcal{S} , što znači da postoji atlas

$$\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C} \mid i \in I\},$$

gdje je I indeksna familija atlasa, ϕ_i homeomorfizam i V_i otvoren podskup od \mathbb{C} za svaki $i \in I$, $U_i \subset \mathcal{S}$ otvoren za svaki $i \in I$, $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} U_i$, za sve $i, j \in I$ takve da je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, su *prijelazi karata atlasa*

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

holomorfna preslikavanja.

Da je \mathcal{S} holomorfna kompleksna ploha znači da je snabdjevena atlasom karata koje su homeomorfne otvorenim podskupovima kompleksne ravnine, te su tranzicijska preslikavanja između dvije karte holomorfna.

Primjer 1.1. Riemannova sfera kao holomorfna ploha

Definiramo proširenu kompleksnu ravninu, $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, koja kao topološki prostor ima **topologiju jedotočkovne kompaktifikacije** definiranu sljedećim uvjetima:

- ako $\infty \notin U$, tada je U otvoren u $\hat{\mathbb{C}}$ ako i samo ako je otvoren u \mathbb{C} ,
- ako $\infty \in U$, tada je U otvoren u $\hat{\mathbb{C}}$ ako i samo ako mu je komplement kompaktan skup u \mathbb{C} .

Primjetimo da taj topološki prostor možemo poistovjetiti sa S^2 u \mathbb{R}^2 sa induciranom euklidskom topologijom iz \mathbb{R}^3 . Zato proširenu kompleksnu ravninu još i zovemo *Riemannova sfera*.

Sad zadajemo atlas kako bismo Riemannovoj sferi nametnuli strukturu holomorfne plohe. Neka je $\tau(z) = \frac{1}{z}$ preslikavanje inverzije. Rastavimo $\hat{\mathbb{C}}$ na dva otvorena skupa

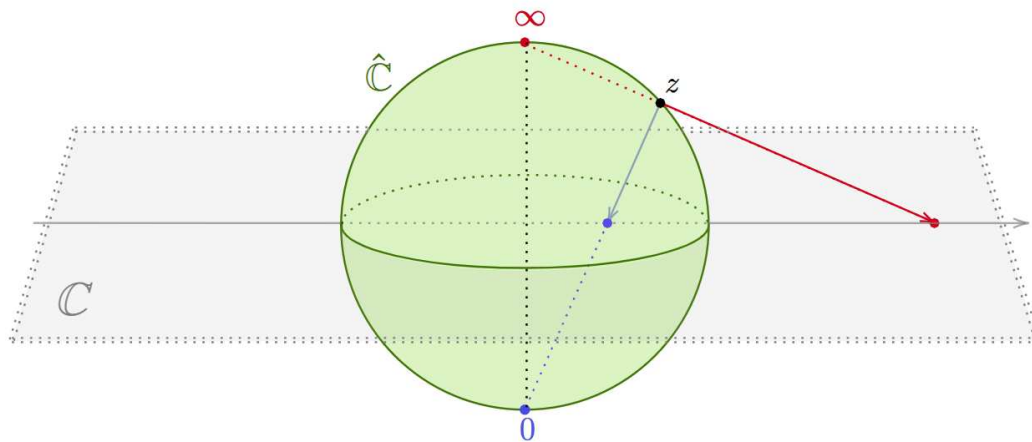
$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}).$$

Neka je atlas dan s dvije karte

$$\mathcal{A} = \{ \text{id}|_{\mathbb{C}}, \tau|_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}} \},$$

te uočimo da je $\tau : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dobro definiran holomorfni prijelaz s jedne karte na drugu. Na ovaj način možemo uvidjeti da je Riemannova sfera $\hat{\mathbb{C}}$ holomorfna ploha.

Objasnilo sad preciznije kako dolazimo do te dvije karte stereografskom projekcijom. Poistovijetimo ravninu $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ sa \mathbb{C} . Stereografskom projekcijom sa ishodištem u $N = (0, 0, 1)$ možemo identificirati točke u kompleksnoj ravнини \mathbb{C} sa točkama na jediničnoj sferi. Pri toj identifikaciji je prirodno poistovijetiti ∞ u $\hat{\mathbb{C}}$ sa točkom $(0, 0, 1)$ na sferi u \mathbb{R}^3 , na taj način dobivamo kartu u 0 . Kartu u ∞ dobivamo stereografskom projekcijom iz točke $S = (0, 0, -1)$ koja odgovara točki $0 \in \hat{\mathbb{C}}$.



Slika 1.: Prikaz točke $z \in \hat{\mathbb{C}}$ u karti u 0 (crvena) i u karti u ∞ (plava).

Sada ima smisla promotriti i pojam holomorfnosti u ∞ , za funkciju $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Holomorfnost u točki mnogostrukosti se gleda u pripadnim kartama. Dakle, u slučaju da $f(\infty) \neq \infty$, onda je f holomorfna u beskonačnosti ako je

$$\tilde{f}(z) := (f \circ \tau)(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

holomorfna u nuli. U slučaju da je $f(\infty) = \infty$ onda je f holomorfna u beskonačnosti ako je

$$\tilde{f}(z) := (\tau \circ f \circ \tau) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$$

holomorfna u nuli.

Osobito je važna činjenica da je postojanje kompleksne derivacije (1.1) na $\Omega \subset \mathbb{C}$ ekvivalentno sa postojanjem konvergentnog reda na svim diskovima $D(z_0, r) \subset \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n. \quad (1.9)$$

Dakle, funkcija f na Riemannovoj sferi je holomorfna u beskonačnosti i samo ako je analitična u beskonačnosti. To jest, ako postoji $M > 0$ takav da red

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad (1.10)$$

konvergira za $|z| > M$, odnosno na okolini $D(\infty, \frac{1}{M}) := \overline{D(0, M)}^c$.

Sljedeći teorem je generalizacija *Riemannovog Teorema o preslikavanju*, te nam govori o klasifikaciji jednostavno povezanih Riemannovih ploha. Teorem su dokazali Koebe i Poincaré, za dokaz pogledati [[5], str. 179].

Teorem 1.4: Uniformizacijski Teorem [5]

Svaka jednostavno povezana Riemannova ploha je biholomorfna točno jednoj od sljedeće tri Riemannove plohe:

- jediničnom otvorenom disku $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,
- kompleksnoj ravnini \mathbb{C} ,
- Riemannovoj sferi $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ukoliko nam prostor nije jednostavno povezan tada se klasifikacija radi pomoću univerzalnog prostora natkrivanja koji je 1–povezan i time biholomorfan jednom od ova tri modela, te tako prema prostoru natkrivanja razlikujemo sferne ($\hat{\mathbb{C}}$), euklidske (\mathbb{C}) ili hiperboličke plohe (\mathbb{D}). Pogledati [5].

2 Linearna kompleksna struktura

2.1 Linearna kompleksna struktura

Kompleksna ravnina \mathbb{C} je kao vektorski prostor nad \mathbb{R} izomorfan sa \mathbb{R}^2 kroz izomorfizam $z = x + iy \sim (x, y)$. Pri tom izomorfizmu je

$$(1, 0) \sim 1, \quad (0, 1) \sim i.$$

Matrični zapis operatora rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ u kanonskoj bazi \mathbb{R}^2 je

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

međutim, operator rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ je linearni automorfizam od \mathbb{C} , te ga možemo zadati kao $J(z) = iz$.

Odgovor na pitanje kada možemo na realnom vektorskom prostoru uspostaviti kompleksnu strukturu nam daje sljedeća definicija.

Definicija 2.1: Linearna kompleksna struktura [2]

Linearna kompleksna struktura na realnom vektorskom prostoru \mathcal{V} je linearni automorfizam $J : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ takav da

$$J \circ J = -\text{Id}_{\mathcal{V}}.$$

Primjetimo da je zadavanje linearne kompleksne strukture na realnom vektorskom prostoru ekvivalentno zadavanju skalarnog množenja s kompleksnim brojem koje taj prostor opskrbljuje strukturom kompleksnog vektorskog prostora. Naime, možemo definirati skalarno množenje na sljedeći način:

$$(x + iy) *_J v := x \cdot v + y \cdot J(v).$$

Ovako dobiveni kompleksni vektorski prostor označavamo sa V_J .

Obratno, ako nam je dan kompleksni vektorski prostor W , tada na njemu imamo definirano skalarno množenje $*$, te možemo definirati linearnu kompleksnu strukturu na W (kojeg gledamo kao realni vektorski prostor) sa

$$J(w) := i * w, \quad \forall w \in W.$$

Definicija 2.2: Standardna kompleksna struktura [2]

Operator rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ zovemo *standardnom kompleksnom strukturom* na \mathbb{R}^2 i označavamo ju sa J_0 .

Karakterizirajmo sada sve matrice koje su matrične reprezentacije linearnih kompleksnih struktura u kanonskoj bazi. Neka je $J \in \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ takav da je $J^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ a $[J] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ njegova matrična reprezentacija u kanonskoj bazi, tada je

$$[J]^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

Ako je $b = 0$ ili $c = 0$ tada imamo $a^2 = -1$ što nije moguće jer je $a \in \mathbb{R}$. Dakle $b \neq 0$ i $c \neq 0$ odakle dobivamo da je $d = -a$. Time je sljedeća propozicija dokazana.

Propozicija 2.3

Sve linearne kompleksne strukture na \mathbb{R}^2 imaju matričnu reprezentaciju oblika

$$[J] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \quad a^2 + bc = -1. \quad (2.1)$$

Posljednji uvjet možemo zapisati i kao $\det[J] = -a^2 - bc = 1$.

Ukoliko poistovjetimo \mathbb{R}^2 sa \mathbb{C} gore opisanim izomorfizmom imamo da je

$$J(x + iy) = (ax + by) + (cx - ay)i,$$

$$(s + it) *_J z = s \cdot z + t \cdot J(z).$$

Posebno je za standardnu kompleksnu strukturu J_0 :

$$J_0(x + iy) = -y + xi, \text{ to jest } J_0(z) = iz,$$

$$(s + it) *_J z = s \cdot z + t \cdot iz.$$

Dokažimo sad da linearnu kompleksnu strukturu možemo zadati i invertibilnim linearnim operatorom $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Naime, konjugiranjem standardne kompleksne strukture s proizvoljnim invertibilnim linearnim operatorom induciramo linearnu kompleksnu strukturu. Neka je $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ invertibilni linearni operator. Definirajmo $J_L := L^{-1} \circ J_0 \circ L$. Tada je

$$J_L \circ J_L = (L^{-1} \circ J_0 \circ L) \circ (L^{-1} \circ J_0 \circ L) = L^{-1} \circ J_0^2 \circ L = L^{-1} \circ (-I) \circ L = -I.$$

Kažemo da je linearna kompleksna struktura J_L inducirana s linearnim operatorom L .

S druge strane, neka je zadana linearna kompleksna struktura J na \mathbb{R}^2 s matricnom reprezentacijom $[J]$ oblika (2.1) za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$ takve da je $a^2 + bc = -1$. Tada linearno preslikavanje L koje u kanonskoj bazi ima matricnu reprezentaciju $[L] = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$[L] \cdot [J] = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [J_0] \cdot [L].$$

Kako je $b \neq 0$ imamo da je $\det L = -b \neq 0$, odakle vidimo da je L invertibilan linearan operator. Ovime smo pokazali da za proizvoljnu linearnu kompleksnu strukturu J postoji invertibilni linearni operator L takav da je $J = L^{-1} \circ J_0 \circ L$. Međutim, L nije jedinstven. Naime, lako se pokaže da za sve $p, q \in \mathbb{R}$ linearno preslikavanje sa matricnom reprezentacijom

$$[L] = \begin{bmatrix} pa + qc & pb - qa \\ p & q \end{bmatrix}$$

inducira linearnu kompleksnu strukturu J kad god je L invertibilno preslikavanje. Za $q = 0$ i proizvoljan $p \neq 0$ je $\det L = -p^2b$, stoga opisane matrice ne mogu sve predstavljati isti operator L .

Ipak, operator L koji inducira J je jedinstven do na standardno skalarno množenje s kompleksnim brojem. Kako bismo to dokazali potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 2.4

Ako linearni operator $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ komutira s J_0 , to jest ako $A \circ J_0 = J_0 \circ A$, tada postoje $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$A = x \cdot \text{Id} + y \cdot J_0.$$

Dokaz. Neka je matricna reprezentacija operatora A u kanonskoj bazi $[A] = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$[A][J_0] = [J_0][A] \iff \begin{bmatrix} -z & -w \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -x \\ w & -z \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = w, \\ z = -y, \end{cases}$$

odakle je

$$[A] = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

što znači da je operator $A = x \cdot \text{Id} + y \cdot J_0$. □

Ukoliko je $A \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, tada uvjet leme možemo zapisati u obliku $A(iz) = iA(z)$, a tvrdnja leme zapravo kaže da postoje $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je A operator koji djeluje kao množenje s kompleksnim brojem $x + yi$.

Propozicija 2.5

Neka je J linearna kompleksna struktura, te neka su L i K dva invertibilna linearna operatora koja induciraju J . Tada postoji $c \in \mathbb{C}$ takav da je

$$L = c *_{J_0} K.$$

Dokaz. Neka su L i K dva invertibilna linearna operatora koji induciraju J . Imamo sljedeće ekvivalencije:

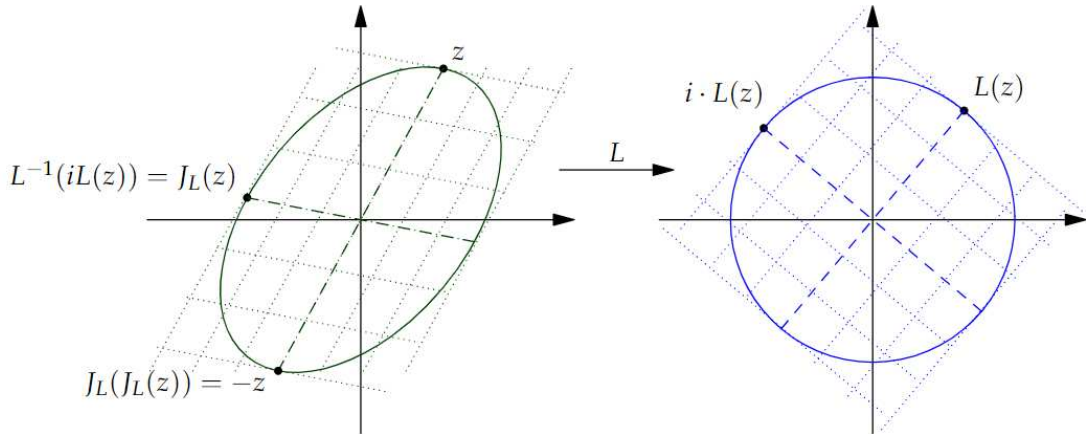
$$\begin{aligned} J_K = J_L &\iff K^{-1} \circ J_0 \circ K = L^{-1} \circ J_0 \circ L \\ &\iff (L \circ K^{-1}) \circ J_0 = J_0 \circ (L \circ K^{-1}) \\ &\iff \exists x, y \in \mathbb{R}, L \circ K^{-1} = x \cdot \text{id} + y \cdot J_0 \\ &\iff \exists x, y \in \mathbb{R}, L = x \cdot K + y \cdot J_0 \circ K \\ &\iff \exists x, y \in \mathbb{R}, L = (x + yi) *_{J_0} K \\ &\iff \exists c \in \mathbb{C}, L = c *_{J_0} K \end{aligned}$$

Pritom smo prethodnu lemu primijenili na operator $A = L \circ K^{-1}$. □

Predstavljanje linearne kompleksne strukture pomoću invertibilnog operatora L nam omogućuje geometrijski opis linearne kompleksne strukture. Neka je J_L linearna kompleksna struktura inducirana s L . Promotrimo matričnu reprezentaciju $[L] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi, te uočimo da je prasluka kružnice po operatoru L , skup $E = L^{-1}(\mathbb{S}^1)$, zapravo elipsa. Naime,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^1 &\iff (\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1 \\ &\iff (\alpha^2 + \gamma^2)x^2 + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)xy + (\beta^2 + \delta^2)y^2 = 1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

što je jednačba elipse.



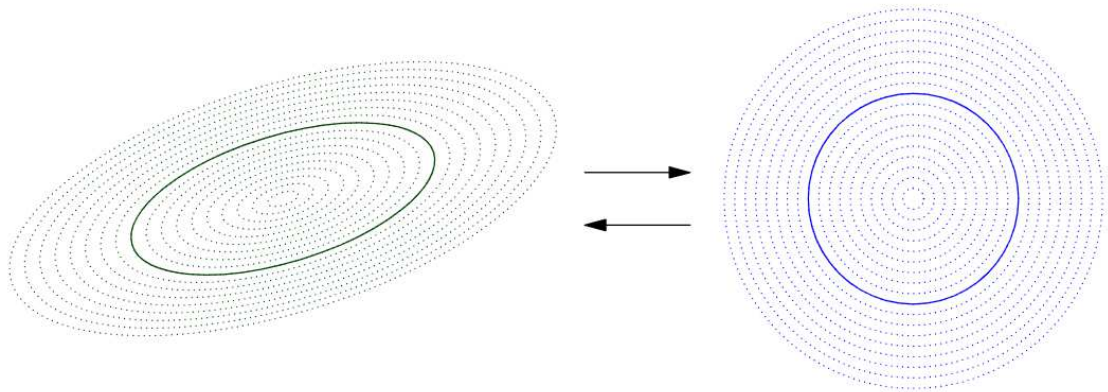
Slika 2: Geometrijski prikaz linearne kompleksne strukture J_L inducirane s invertibilnim linearnim preslikavanjem L , preko jedinične kružnice \mathbb{S}^1 i elipse E , njezine praslike po invertibilnom linearnom preslikavanju L .

Promjer elipse definira se kao bilo koja spojnica točke $z \in E$ i njezine antipodne točke na elipsi. Njemu *konjugirani promjer* definiramo kao promjer paralelan s tangentom na elipsu u točki z .

Budući da je L invertibilno linearno preslikavanje, ono šalje tangente na elipsu u tangente na kružnicu kao što je prikazano na slici 2. Zaista, presjek elipse E i tangente t na elipsu je jedinstvena točka T koja se preslikava u točku $T' = L(T)$, jedinstveni presjek kružnice $\mathbb{S}^1 = L(E)$ i pravca $t' = L(t)$, drugim riječima pravac t' je tangenta na jediničnu kružnicu. Također, L šalje i paralelne pravce u paralelne pravce. Stoga L šalje i konjugirane promjere elipse u konjugirane promjere kružnice. Svi konjugirani promjeri kružnice su međusobno okomiti promjeri, no isto ne vrijedi i za elipsu. Naime, jedini konjugirani promjeri na elipsi koju su međusobno okomiti su velika i mala os elipse.

Neka je $z \in E$, tada je $L(z) \in \mathbb{S}^1$. Sad je $iL(z)$ rotacija vektora $L(z)$ za kut $\frac{\pi}{2}$ u suprotnom smjeru kazaljke na satu. Posebno, $L(z)$ i $iL(z)$ leže na međusobno okomitim, te stoga, i konjugiranim promjerima kružnice. Po definiciji inducirane linearne kompleksne strukture je $J_L(z) = L^{-1}(iL(z))$, odakle vidimo da z i $J_L(z)$ leže na konjugiranim promjerima.

Uočimo da skaliranjem slike 2. možemo geometrijski odrediti $J(z)$ za proizvoljni $z \in \mathbb{R}^2$. Naime, točka z će ležati na točno jednoj elipsi koja je koncentrična s E (vidjeti sliku 3). Na toj elipsi možemo pronaći $J_L(z)$ na identičan način kao prije .



Slika 3: Prikaz djelovanja operatora L na familiji koncentričnih elipsi.

Dakle, pokazali smo da L , odnosno J_L , induciraju familiju koncentričnih elipsi u ishodištu. Obratno, pokažimo da J možemo zadati geometrijski preko familije koncentričnih elipsi centriranih u ishodištu. Odaberimo proizvoljnu elipsu u toj familiji. Za danu elipsu centriranu u ishodištu nađemo invertibilni linearni operator L koji je preslikava u \mathbb{S}^1 . Primjetimo da je L jedinstven do na postkomponiranje sa operatorom rotacije za neki kut, jer je slika elipse po L kružnica koja je invarijantna na rotaciju. Iz *propozicije 2.5* možemo zaključiti da je inducirana linearna kompleksna struktura J_L neovisna o izboru elipse u familiji koncentričnih i o izboru linearnog operatora koji tu elipsu ispravlja. Naime, koeficijent skaliranja elipse u koncentričnoj familiji određuje modul kompleksnog broja c iz *propozicije 2.5*, dok kut operatora rotacije s kojim postkomponiramo L određuje argument kompleksnog broja c . Stoga vrijedi sljedeća propozicija.

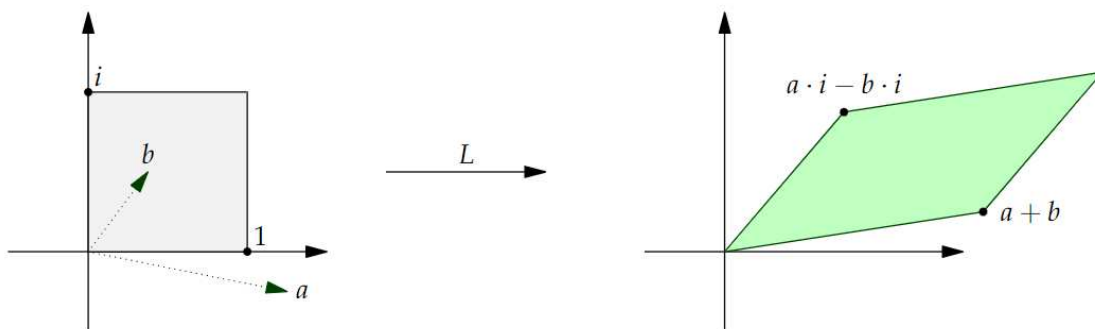
Propozicija 2.6

Svaka linearna kompleksna struktura J određuje jedinstvenu familiju koncentričnih elipsi centriranih u ishodištu. Tu familiju označavamo sa \mathcal{E}_J . Obratno, svaka familija koncentričnih elipsi \mathcal{E} , određuje jedinstvenu linearnu kompleksnu strukturu. Tu linearnu kompleksnu strukturu označavamo s $J_{\mathcal{E}}$.

2.2 Beltramijev koeficient linearnog preslikavanja

Promotrimo prvo linearno preslikavanje $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ prikazano u obliku

$$L(z) = az + b\bar{z}, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$



Slika 4: L šalje jedinični kvadrat u paralelogram razapet vektorima $a + b$ i $(a - b) \cdot i$.

Svaki linearni operator $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se može zapisati u obliku (2.3). Linearni operator L zapisan u kanonskoj bazi od \mathbb{R}^2 ima sljedeći oblik

$$\begin{bmatrix} \Re(a + b) & -\Im(a - b) \\ \Im(a + b) & \Re(a - b) \end{bmatrix}.$$

Odatle lako vidimo da je

$$\det L = \Re(a + b) \cdot \Re(a - b) - \Im(a + b) \cdot (-\Im(a - b)) = |a|^2 - |b|^2. \quad (2.4)$$

Definicija 2.7: [2]

Kažemo da invertibilno linearno preslikavanje $L(z) = az + b\bar{z}$

- čuva orijentaciju ako kanonsku bazu preslikava u pozitivno orijentiranu bazu ili, ekvivalentno, ukoliko je $|a| > |b|$, to jest $\det L > 0$,
- mijenja orijentaciju ako kanonsku bazu preslikava u negativno orijentiranu bazu ili, ekvivalentno, ukoliko je $|a| < |b|$, to jest $\det L < 0$.

Stavimo $\alpha := \arg(a)$ i $\beta := \arg(b)$.

Definicija 2.8: Beltramijev koeficient linearnog preslikavanja [2]

Beltramijev koeficient linearnog preslikavanja $L(z) = az + b\bar{z}$ koje čuva orijentaciju definiramo kao

$$\mu(L) := \frac{b}{a} = \left| \frac{b}{a} \right| e^{2i\theta},$$

gdje je $\theta := \arg(\mu(L))/2 = \frac{\beta - \alpha}{2}$.

Beltramijev koeficient linearnog preslikavanja $L(z) = az + b\bar{z}$ koje mijenja orijentaciju

definiramo kao Beltramijev koeficijent konjugiranog linearnog preslikavanja $\bar{L}(z) = \bar{b}z + \bar{a}\bar{z}$ koje čuva orijentaciju:

$$\mu(L) := \mu(\bar{L}) = \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \left|\frac{a}{b}\right| e^{2i\theta}.$$

Beltramijev koeficijent linearnog preslikavanja L definiramo različito u ovisnosti o tome da li L čuva ili mijenja orijentaciju jer nam je bitno da $|\mu(L)|$ bude ograničen. Primijetimo da je uz gornju definiciju $\mu(L) \in \mathbb{D}$ za sve invertibilne linearne operatore L .

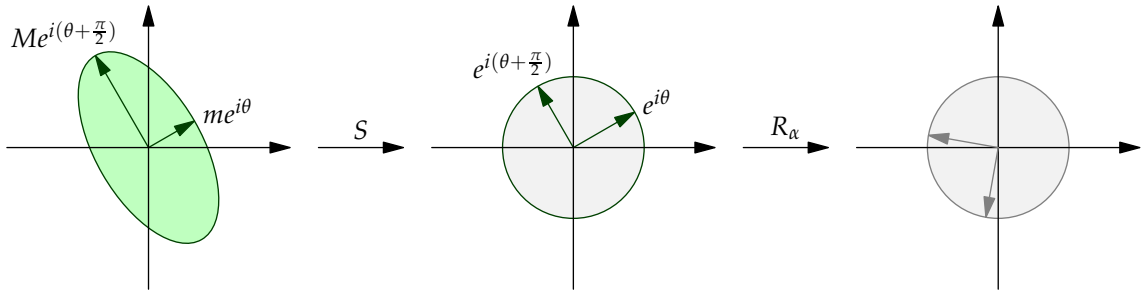
Pretpostavimo nadalje da je $L(z) = az + b\bar{z}$ linearno preslikavanje koje čuva orijentaciju, u protivnom promatramo konjugirano linearno preslikavanje \bar{L} . Uočimo da je L holomorfno linearno preslikavanje ako i samo ako je $\mu(L) = 0$. Naime:

$$\mu_L = 0 \iff b = 0 \iff L(z) = a \cdot z.$$

U nastavku dajemo geometrijsku interpretaciju Beltramijevog koeficijenta operatora L pomoću familije elipsi. Pokazali smo da je $E_L = L^{-1}(\mathbb{S}^1)$, prasluka jedinične kružnice, zapravo elipsa. Rastavimo L na kompoziciju dva linearna preslikavanja na sljedeći način:

$$L(z) = az + b\bar{z} = a \cdot \left(z + \frac{b}{a}\bar{z}\right) = e^{i\alpha} \cdot |a| \left(z + |\mu|e^{2i\theta}\bar{z}\right) = (R_\alpha \circ S)(z),$$

gdje je $R_\alpha(z) := e^{i\alpha} \cdot z$ i $S(z) := |a| \left(z + |\mu|e^{2i\theta}\bar{z}\right)$.



Slika 5: Rastav linearnog operatora L kao kompozicije rotacije R_α i linearnog operatora S .

Rotacija R_α preslikava \mathbb{S}^1 u \mathbb{S}^1 bez promjene radijusa, pa vrijedi:

$$S^{-1}(\mathbb{S}^1) = S^{-1}(R_\alpha^{-1}(\mathbb{S}^1)) = L^{-1}(\mathbb{S}^1) = E_L.$$

Lako se vidi da su $e^{i\theta}$ i $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ svojstveni vektori od $S(z) = |a| \left(z + |\mu|e^{2i\theta}\bar{z}\right)$. Naime,

$$\begin{aligned} S(e^{i\theta}) &= |a| \cdot \left(e^{i\theta} + |\mu|e^{2i\theta}e^{-i\theta}\right) = |a|(1 + |\mu|) \cdot e^{i\theta}, \\ S(e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}) &= |a| \cdot \left(e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} + |\mu|e^{2i\theta}e^{-i\theta-i\frac{\pi}{2}}\right) = |a|(1 - |\mu|) \cdot e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}. \end{aligned}$$

Budući da S preslikava elipsu E_L u jediničnu kružnicu \mathbb{S}^1 , svojstveni vektori preslikavanja S moraju ležati na velikoj i maloj poluosi elipse E_L . Kako je

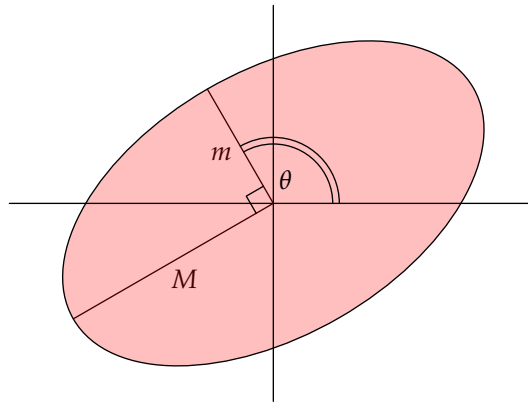
$$S\left(\frac{e^{i\theta}}{|a|(1+|\mu|)}\right) = e^{i\theta}, \quad \text{i} \quad S\left(\frac{e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{|a|(1-|\mu|)}\right) = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})},$$

vidimo da je velika poluos $M := \frac{1}{|a|(1-|\mu|)}$, a mala poluos $m := \frac{1}{|a|(1+|\mu|)}$, kao na slici 5.

Sad možemo definirati *dilataciju* elipse inducirane ovim linearnim preslikavanjem, koju zovemo i *dilatacijom od L* , kao omjer velike i male poluosi elipse:

$$K(E_L) = K(L) := \frac{M}{m} = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|} = \frac{|a|+|b|}{|a|-|b|} \in [1, \infty).$$

Također ćemo definirati *Beltramijev koeficijent elipse* kao Beltramijev koeficijent linearnog preslikavanja koje šalje tu elipsu u kružnicu. Neka je dana elipsa E s velikom poluosi M i malom poluosi m te kutnim odklonom male poluosi $\theta \in [0, \pi)$.



Slika 6: Elipsa E sa velikom poluosi M , malom poluosi m i kutnim odklonom male poluosi θ .

Tada je njezina dilatacija $K(E) = \frac{M}{m}$, dok je njezin Beltramijev koeficijent dan s

$$\mu(E) = \frac{M-m}{M+m} e^{2i\theta}. \quad (2.5)$$

Primijetimo da sve elipse iz familije elipsi koje su koncentrične s E imaju istu dilataciju i isti Beltramijev koeficijent. Naime, sve elipse u familiji koncentričnih elipsi su međusobno slične i sve imaju jednak kutni odklon od male poluosi.

2.3 Beltramijev koeficijent inverza i kompozicije linearnih operatora

1. Beltramijev koeficijent inverza linearnog preslikavanja

Kako L čuva orijentaciju, posebno je L invertibilan linearni operator. Odredimo Beltramijev koeficijent inverza L^{-1} linearnog preslikavanja $L(z) = az + b\bar{z}$. Neka je $w = L(z)$, tada je

$$\left\{ \begin{array}{l} w = az + b\bar{z} \\ \bar{w} = \bar{a}z + \bar{b}\bar{z} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \setminus \cdot \bar{a} \\ \setminus \cdot b \end{array} \implies \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}w = |a|^2z + \bar{a}b\bar{z} \\ b\bar{w} = \bar{a}b\bar{z} + |b|^2z \end{array} \right\} \implies z = \frac{\bar{a}w - b\bar{w}}{|a|^2 - |b|^2},$$

odakle imamo

$$L^{-1}(w) = \frac{\bar{a}w - b\bar{w}}{\det L},$$

$$\mu(L^{-1}) = -\frac{b}{\bar{a}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{\bar{a}} = -\mu(L) \cdot e^{2i\alpha}. \quad (2.6)$$

2. Beltramijev koeficijent kompozicije dvaju linearnih preslikavanja.

Zapišimo prvo kompoziciju linearnih preslikavanja u obliku (2.3),

$$L_1(z) = a_1z + b_1\bar{z} \text{ i } L_2(z) = a_2z + b_2\bar{z},$$

$$\begin{aligned} (L_1 \circ L_2)(z) &= a_1 \cdot (a_2z + b_2\bar{z}) + b_1 \cdot \overline{(a_2z + b_2\bar{z})} = \\ &= (a_1a_2 + b_1\bar{b}_2)z + (a_1b_2 + b_1\bar{a}_2)\bar{z}. \end{aligned}$$

Razlikujemo četiri slučaja, ovisno o tome da li L_1 i L_2 čuvaju ili mijenjaju orijentaciju. Označimo sa $\mu_1 := \mu(L_1)$.

Ako L_1 i L_2 oba čuvaju orijentaciju ili oba mijenjaju orijentaciju, tada i $L_1 \circ L_2$ čuva orijentaciju, stoga je

$$\mu(L_1 \circ L_2) = \frac{a_1b_2 + b_1\bar{a}_2}{a_1a_2 + b_1\bar{b}_2} = \begin{cases} \frac{b_2 + \mu_1\bar{a}_2}{a_2 + \mu_1\bar{b}_2}, & \text{ako } L_1 \text{ čuva orijentaciju,} \\ \frac{b_2\bar{\mu}_1 + \bar{a}_2}{a_2\bar{\mu}_1 + \bar{b}_2}, & \text{ako } L_1 \text{ mijenja orijentaciju.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Ako L_1 čuva (mijenja) i L_2 mijenja (čuva) orijentaciju, tada $L_1 \circ L_2$ mijenja orijentaciju, stoga je

$$\mu(L_1 \circ L_2) = \overline{\left(\frac{a_1a_2 + b_1\bar{b}_2}{a_1b_2 + b_1\bar{a}_2} \right)} = \begin{cases} \frac{\bar{a}_2 + \bar{\mu}_1b_2}{\bar{b}_2 + \bar{\mu}_1a_2}, & \text{ako } L_1 \text{ čuva orijentaciju,} \\ \frac{\bar{a}_2\bar{\mu}_1 + b_2}{\bar{b}_2\bar{\mu}_1 + a_2}, & \text{ako } L_1 \text{ mijenja orijentaciju.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Uočimo da je maksimalna dilatacija kompozicije dvaju linearnih preslikavanja umnožak dilatacija preslikavanja u kompoziciji

$$K(L_1 \circ L_2) \leq K(L_1) \cdot K(L_2).$$

Naime, ako sa M_i i m_i označimo veliku i malu poluos elipse E_{L_i} inducirane s linearnim preslikavanjem L_i , $i = 1, 2$, tada je maksimalna vrijednost velike poluosi elipse inducirane kompozicijom $L_1 \circ L_2$ upravo $M_1 \cdot M_2$ a minimalna vrijednost male poluosi $m_1 \cdot m_2$, odakle slijedi tražena nejednakost. Jednakost se postiže kada se kutni otkloni malih poluosi elipsi E_{L_1} i E_{L_2} podudaraju.

3 Skoro kompleksna struktura

Ovo poglavlje prati knjigu [2] "Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics".

3.1 Skoro kompleksna struktura

Vidjeli smo u poglavlju 2 da je svakoj linearnoj kompleksnoj strukturi J pridružena familija koncentričnih elipsi \mathcal{E}_J , odnosno jedna elipsa E definirana do na homotetiju. U prošlom poglavlju smo vidjeli da je svakoj elipsi E pridružen Beltramijev koeficijent μ , preko pripadnog linearnog preslikavanja L koje tu elipsu preslikava u jediničnu kružnicu. Prisjetimo se da je tada, prema analizi iz prethodnog poglavlja, $J = J_L$.

Neka je sada $\Omega \subset \mathbb{C}$, a njegov tangencijalni svežanj $T\Omega := \bigcup_{p \in \Omega} T_p\Omega$. Pritom svaki tangencijalni prostor u točki promatramo kao kopiju $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, kao vektorskog prostora nad \mathbb{R} .

Ako točka $p \in \Omega$ na svom tangencijalnom prostoru $T_p\Omega \sim \mathbb{C}$ ima definiranu familiju koncentričnih elipsi \mathcal{E}_p , tada tu familiju zovemo *infinitesimalnom* elipsom. Svaka elipsa E_p iz te familije definira jedinstvenu linearnu kompleksnu strukturu J_p na $T_p\Omega$, kako je opisano u poglavlju 2.

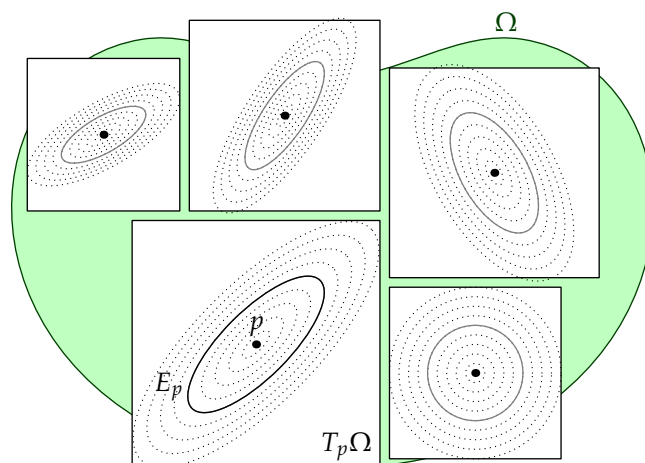
Definicija 3.1: Skoro kompleksna struktura [2]

Skoro kompleksna struktura σ na $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je izmjerivo polje infinitesimalnih elipsi \mathcal{E}_p definiranih u skoro svakoj^a točki p na Ω . Preciznije, za skoro kompleksnu strukturu postoji izmjerivo preslikavanje

$$\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{D}$$

definirano skoro svuda na Ω , pri čemu je, za skoro svaku točku $p \in \Omega$, $\mu(p)$ Beltramijev koeficijent (bilo koje) elipse $E_p \in \mathcal{E}_p$ u $T_p\Omega \sim \mathbb{C}$.

^ana skupu čiji je komplement u Ω Lebesgueove mjere nula



Slika 7: Prikaz skoro kompleksne strukture na Ω i istaknute elipse E_p u familiji koncentričnih elipsi \mathcal{E}_p na tangencijalnom prostoru $T_p\Omega$, $p \in \Omega$.

Time realni tangencijalni prostor $T_p\Omega \sim \mathbb{R}^2$ postaje vektorski prostor nad \mathbb{C} jer na $T_p\Omega$ imamo zadanu linearnu kompleksnu strukturu J_p , prema *poglavljju 2*. Definiramo dilataciju skoro kompleksne strukture σ kao:

$$K(\sigma) := \|K\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{p \in \Omega} K(p) \in [1, \infty], \text{ gdje je } K(p) := \frac{1 + |\mu(p)|}{1 - |\mu(p)|}.$$

Uočimo da svaka izmjeriva funkcija $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ definirana skoro svuda na Ω definira jedinstvenu skoro kompleksnu strukturu. Naprosto svakoj točki $p \in \Omega$ za koju je definiran $\mu(p) \in \mathbb{D}$ pridružimo infinitezimalnu elipsu sa Beltramijevim koeficijentom $\mu(p)$.

Kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru, $K(\sigma)$ može biti ∞ .

Primjer 3.1 (Skoro kompleksna struktura sa neograničenom dilatacijom). Neka je $\Omega = \mathbb{D}$ i neka je izmjeriva funkcija $\mu : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D}$ dana sa $\mu(z) = 1 - |z|$. Izmjeriva funkcija μ je dobro definirana skoro svugdje na \mathbb{D} (osim u ishodištu). Ako svakoj točki $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ pridružimo infinitezimalnu elipsu sa Beltramijevim koeficijentom $\mu(z)$, definirali smo skoro kompleksnu strukturu σ . Međutim,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mu(z) = 1 \implies \lim_{z \rightarrow 0} K(z) = \infty \implies K(\sigma) = \infty.$$

Primjer 3.2 (Standardna kompleksna struktura, $\mu_0 \equiv 0$). Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i izmjeriva funkcija $\mu_0 \equiv 0$ definirana na čitavom skupu Ω . Uočimo da je za sve $p \in \Omega$, $\mu_0(p) = 0$, te je na $T_p\Omega$ zadana familija koncentričnih kružnica, to jest infinitezimalna kružnica. Skoro kompleksnu strukturu zadanu sa $\mu_0 \equiv 0$ označavamo sa σ_0 i zovemo *standardna kompleksna struktura*.

3.2 Skoro kompleksne strukture inducirane realno diferencijabilnim preslikavanjima

U ovom poglavljju ćemo razmatrati *realno diferencijabilna* preslikavanja $F : U \rightarrow V$, gdje su $U, V \subseteq \mathbb{C}$ prirodno izomorfni s $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ preko kompozicije izomorfizama:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Phi} W \xrightarrow{\pi} \mathbb{C},$$

te gdje su Φ i π dani sa

$$\Phi : (x, y) \mapsto (x + iy, x - iy), \quad \text{i} \quad \pi : (z, \bar{z}) \mapsto z,$$

kao što je objašnjeno u *poglavljju 1.1*. Pritom je 'projekcija' π izomorfizam s inverzom $\pi^{-1} : z \mapsto (z, \bar{z})$.

Pretpostavimo da V ima standardnu kompleksnu strukturu na svom tangencijalnom svežnju TV . Želimo pronaći uvjete na preslikavanje F pod kojima je moguće, pomoću F , inducirati neku skoro kompleksnu strukturu na skupu U .

Budući da skoro kompleksna struktura na U zapravo treba biti definirana na tangencijalnom svežnju TU nužno je tražiti da postoji linearni operator

$$D_z F : T_z U \rightarrow T_{F(z)} V, \text{ u skoro svakoj točki } z \in U.$$

Pritom domenu $T_z U$ i kodomenu $T_{F(z)} V$ linearnog operatora $D_z F$ poistovjećujemo sa \mathbb{C} , odnosno sa dvodimenzionalnim realnim vektorskim prostorom kroz kompoziciju $(\Phi \circ \pi)^{-1}$ opisanu gore. Sada možemo primjeniti diskusiju iz prethodnog poglavlja na linearni operator $L := D_z F$.

Kako bismo definirali Beltramijev koeficijent, to jest linearnu kompleksnu strukturu na $T_z U$ induciranu s $D_z F$ u skoro svakoj točki $z \in U$, zahtijevamo da je $D_z F$ regularan za skoro svaku točku $z \in \Omega$. Zapišimo $D_z F$ u obliku 1-forme kao u (1.7):

$$D_z F = \partial_z F(z) dz + \partial_{\bar{z}} F(z) d\bar{z}.$$

Ovisno o tome da li $D_z F$ čuva ili mijenja orijentaciju, Beltramijev koeficijent u z induciran s $D_z F$, kojeg označavamo sa $\mu_F(z)$, iznosi

$$\mu_F(z) = \begin{cases} \frac{\partial_{\bar{z}} F(z)}{\partial_z F(z)}, & \text{ako } D_z F \text{ čuva orijentaciju,} \\ \frac{\partial_z \bar{F}(z)}{\partial_{\bar{z}} \bar{F}(z)}, & \text{ako } D_z F \text{ mijenja orijentaciju.} \end{cases}$$

Ukoliko dodatno zahtijevamo da $D_z F$ čuva orijentaciju (tamo gdje je definiran), Beltramijev koeficijent $\mu_F : U \rightarrow \mathbb{D}$ je dan sa formulom:

$$\mu_F = \frac{\partial_{\bar{z}} F}{\partial_z F}. \quad (3.1)$$

Ako $D_z F$ mijenja orijentaciju u skoro svakoj točki $z \in U$, tada je

$$\mu_F = \frac{\partial_z \bar{F}}{\partial_{\bar{z}} \bar{F}}. \quad (3.2)$$

Dodatno, promatramo samo preslikavanja F čiji diferencijali u skoro svakoj točki čuva (mijenja) orijentaciju.

Naposlijetku, ako želimo definirati skoro kompleksnu strukturu na U , onda nam Beltramijev koeficijent $\mu_F : U \rightarrow \mathbb{D}$ treba biti izmjeriva funkcija na U . Stoga zahtijevamo da je pridruživanje $z \mapsto D_z F$ izmjerivo. Naime tada su parcijalne derivacije $\partial_z F$ i $\partial_{\bar{z}} F$, kao koordinatne funkcije izmjerivog pridruživanja $z \mapsto D_z F$, izmjerive funkcije sa U u \mathbb{C} . Odavde je μ_F izmjeriva kao omjer izmjerivih funkcija.

Definirajmo sada precizno najopćeniti prostor realno diferencijabilnih funkcija koje nam induciraju skoro kompleksne strukture.

Definicija 3.2: [2]

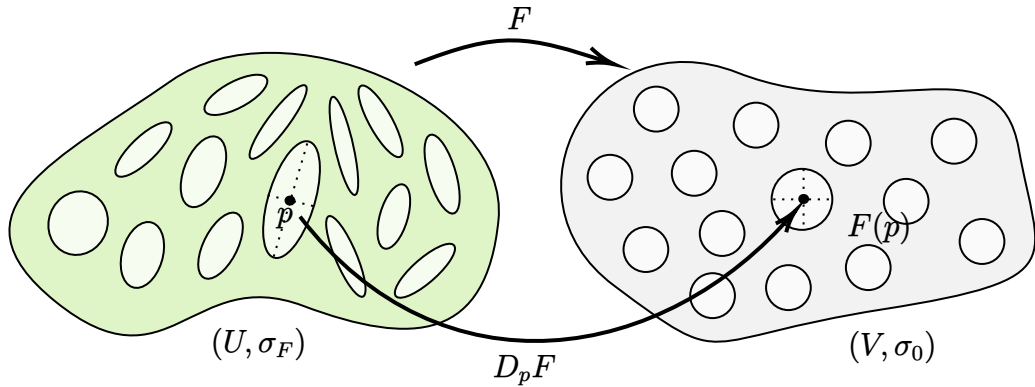
Za $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ definiramo klasu $D^+(U, V)$ kao skup svih neprekidnih funkcija $F : U \rightarrow V$ koje zadovoljavaju sljedeće:

1. F je *realno diferencijabilna* skoro svuda
2. F ima skoro svuda, regularni diferencijal $D_z F : T_z U \rightarrow T_{F(z)} V$,
3. $D_z F$ čuva *orijentaciju* tamo gdje je $D_z F$ definiran i regularan,
4. $z \mapsto D_z F$ je izmjerivo preslikavanje .

Klasu $D^-(U, V)$ definiramo analogno, uz promjenu da $D_z F$ *mijenja orijentaciju*.

Pretpostavimo da je $F \in C^1(U, V)$ i da je diferencijal $D_z F : T_z U \rightarrow T_{F(z)} V$ regularan u svakoj točki $z \in U$. Ako je $\det D_z F > 0$ za neki $z \in U$, tada iz neprekidnosti preslikavanja $z \mapsto \det D_z F$ i $\det D_z F \neq 0, \forall z \in U$, imamo da je $\det D_z F > 0$ za sve $z \in U$.

Neka je nadalje $F \in D^+(U, V)$ ili $F \in D^-(U, V)$. Tada izmjerivom funkcijom μ_F , koja je dana formulom (3.1), odnosno (3.2), zadajemo skoro kompleksnu strukturu σ_F , koju zovemo *povlak* standardne kompleksne strukture σ_0 po funkciji F . Ekvivalentno, kažemo da je μ_F povlak od $\mu_0 \equiv 0$ po F .



Slika 8: skoro kompleksna struktura σ_F na U dobivena kao povlak standardne kompleksne strukture σ_0 na V po funkciji F . Istaknuta elipsa na U sa središtem u p reprezentira infinitezimalnu elipsu u p , to jest familiju koncentričnih elipsi na $T_p U$.

Povlake po $F \in D^+(U, V)$ označavamo sa

$$\mu_F = F^* \mu_0, \quad \text{odnosno} \quad \sigma_F = F^* \sigma_0,$$

dok povlake po $F \in D^-(U, V)$ označavamo sa

$$\mu_F = F^{\otimes} \mu_0, \quad \text{odnosno} \quad \sigma_F = F^{\otimes} \sigma_0.$$

Standardna kompleksna struktura σ_0 je, između ostalog, posebna po tome što je definirana na čitavom skupu. Ukoliko želimo odrediti povlak skoro kompleksne strukture σ koja nije nužno definirana na čitavom V , već skoro svuda na V , potrebno je uvesti dodatnu pretpostavku na F . Zahtijevamo da F bude *apsolutno neprekidna s obzirom na Lebesgueovu mjeru* λ , to jest, da je praslika skupa mjere nula po F skup mjere nula. Označimo sa

$$D_0^+(U, V) := \{ F \in D^+(U, V) \mid \forall E \subset V, \lambda(E) = 0 \Rightarrow \lambda(F^{-1}(E)) = 0 \}.$$

Prostor $D_0^-(U, V)$ definiramo analogno.

Neka je σ skoro kompleksna struktura na V , a \mathcal{E}_q infinitezimalna elipsa definirana na $T_q V$ za skoro svaki $q \in V$. Neka je $F \in D_0^+(U, V)$, tada je $\mathcal{E}_z = (D_z F)^{-1}(\mathcal{E}_{F(z)})$ dobro definirana za skoro svaki $p = F^{-1}(z) \in U$ zbog apsolutne neprekidnosti preslikavanja F (s obzirom na Lebesgueovu mjeru). Ovime smo pokazali da je $F^* \sigma$ dobro definirana skoro kompleksna struktura na U .

Neka je μ Beltramijev koeficijent na V . Kada kažemo da sljedeći dijagram komutira

$$(U, \tilde{\mu}) \xrightarrow{F} (V, \mu),$$

podrazumijevamo da je $\tilde{\mu} = F^* \mu$, to jest, da je $\tilde{\mu}$ povlak od μ po F na U .

Primjer 3.3. Neka su $F \in D_0^+(U, V)$, $G \in D_0^+(V, W)$ te promotrimo standardnu kompleksnu strukturu na W danu sa $\mu_0 \equiv 0$. Po definiciji je $\mu_G = G^* \mu_0$, dok je

$$\mu_{G \circ F} = (G \circ F)^* \mu_0 = F^*(G^* \mu_0) = F^* \mu_G.$$

Stoga možemo pisati:

$$(U, \mu_{G \circ F}) \xrightarrow{F} (V, \mu_G) \xrightarrow{G} (W, \mu_0).$$

Sljedeća propozicija nam daje formulu kako računati povlak Beltramijevog koeficijenta u danoj točki.

Propozicija 3.3: [2]

Neka su $U, V \subset \mathbb{C}$ i neka je μ Beltramijev koeficijent na V .

Za $F \in D_0^+(U, V)$ je povlak od μ po F dan sa:

$$F^* \mu(z) = \frac{\partial_z F(z) + \mu(F(z)) \cdot \overline{\partial_z F(z)}}{\partial_z F(z) + \mu(F(z)) \cdot \overline{\partial_z F(z)}}, \text{ za skoro svaki } z \in U. \quad (3.3)$$

Za $F \in D_0^-(U, V)$, je povlak od μ po F dan sa:

$$F^* \mu(z) = \frac{\overline{\partial_z F(z)} + \overline{\mu(F(z))} \cdot \partial_{\bar{z}} F(z)}{\partial_{\bar{z}} F(z) + \mu(F(z)) \cdot \partial_z F(z)}, \text{ za skoro svaki } z \in U. \quad (3.4)$$

Dokaz. Po prethodnoj analizi, zadavanje Beltramijevog koeficijenta μ na V je ekvivalentno zadavanju skoro kompleksne strukture na TV .

Označimo sa L_1 pridruženo linearno preslikavanje koje čuva orijentaciju i koje šalje infinitezimalnu elipsu $\mathcal{E}_{F(z)}$ u infinitezimalnu kružnicu, tada je Beltramijev koeficijent tog linearnog preslikavanja upravo $\mu_1 = \mu(F(z))$.

Označimo diferencijal od F u točki z sa $L_2 := D_z F$. Neka je $L_2(z) = a_2 z + b_2 \bar{z}$. Tada su koeficijenti a_2 i b_2 tog linearnog preslikavanja redom $\partial_z F(z)$ i $\partial_{\bar{z}} F(z)$. Sada primjenjujemo formule za Beltramijev koeficijent kompozicije dvaju linearnih preslikavanja.

Ako je $F \in D^+(U, V)$, tada $L_2 = D_z F$ čuva orijentaciju, pa primjenom formule (2.7) za slučaj kad L_1 čuva orijentaciju dobivamo traženi rezultat.

Ako je $F \in D^-(U, V)$ tada $L_2 = D_z F$ mijenja orijentaciju, primjenom formule (2.8) za slučaj kad L_1 čuva orijentaciju dobivamo traženi rezultat. \square

Promotrimo specijalni slučaj kada je f holomorfna funkcija na U takva da $f'(z) \neq 0$ za sve $z \in U$. Tada je, po Cauchy-Riemannovim uvjetima, $\partial_{\bar{z}} f = 0$, i imamo da je:

$$f^* \mu(z) = \mu(f(z)) \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}. \quad (3.5)$$

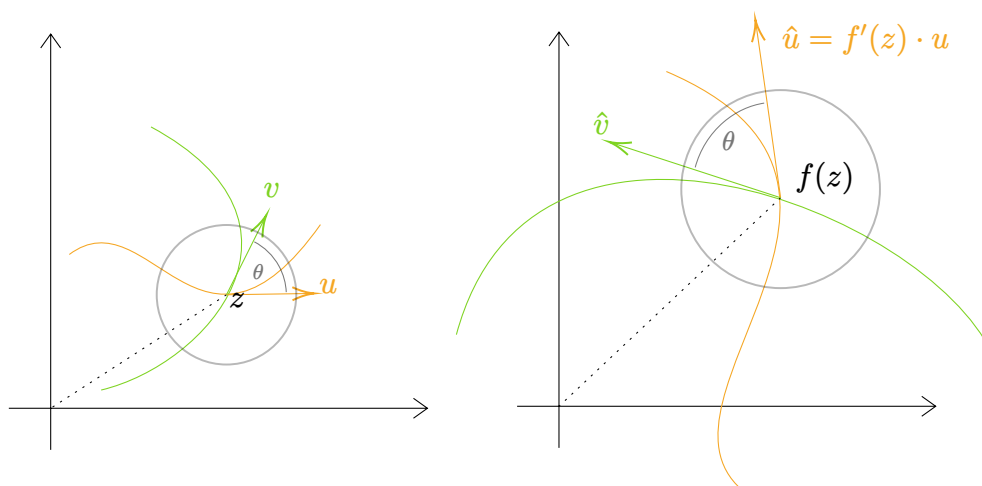
Primijetimo da je $|f^* \mu(z)| = |\mu(f(z))|$, što znači da se dilatacija infinitezimalne elipse u $f(z)$ pri povlaku sa holomorfnom funkcijom f nije promijenila.

3.3 Invarijantne skoro kompleksne strukture

Standardna kompleksna struktura nam je praktična za proučavanje holomorfnih preslikavanja. Naime, za holomorfnu funkciju $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ znamo da njezin diferencijal u točki z djeluje kao množenje s kompleksnim brojem $f'(z)$.

$$Df_z(w) = \frac{df}{dz}(z) \cdot w = f'(z) \cdot w.$$

Ukoliko diferencijal holomorfnе funkcije nije singularan na otvorenom skupu U , to jest, $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$, kažemo da je f *konformalno* preslikavanje na U .



Slika 9: lokalno djelovanje konformalne funkcije f oko točke z .

Propozicija 3.4

Neka su $u, v \in T_z U$ a $\hat{u}, \hat{v} \in T_{f(z)} V$ njihove slike pod diferencijalom $D_z f$, tada, za f konformalno, vrijedi

$$\angle(u, v) = \angle(\hat{u}, \hat{v}), \quad \text{i} \quad \frac{|\hat{u}|}{|\hat{v}|} = \frac{|u|}{|v|}.$$

Dokaz. Neka su $u, v \in T_z U \sim \mathbb{C}$ vektori. Neka je $\theta := \angle(u, v)$ i $\hat{\theta} = \angle(\hat{u}, \hat{v})$, tada je $\frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|} e^{i\theta}$. Kako je f konformalna u z imamo da je $\lambda := f'(z) \neq 0$ i da je

$$\frac{\hat{u}}{\hat{v}} = \frac{\lambda \hat{u}}{\lambda \hat{v}} = \frac{u}{v}.$$

Promatranjem modula i argumenta omjera u predhodnoj jednakosti dolazimo do traženog zaključka. \square

Lokalno, konformalno preslikavanje djeluje kao množenje kompleksnim brojem koji svojim modulom skalira, a svojim argumentom zakreće infinitezimalnu kružnicu centriranu u toj točki (vidjeti sliku 9).

Propozicija 3.5

Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ domena i $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfnog preslikavanje, tada je h skoro svuda konformalno preslikavanje.

Dokaz. Označimo skup kritičnih vrijednosti preslikavanja h , odnosno nultočaka preslikavanja h' , sa

$$\text{Crit}(h) := \mathcal{N}(h') = \{ c \in U \mid h'(c) = 0 \}.$$

Kako je h holomorfnog preslikavanje to je i $h' : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfnog preslikavanje i svaka nultočka mu je izolirana. Budući da svaki skup u \mathbb{C} može imati najviše

prebrojivo mnogo izoliranih točaka, a svaki prebrojiv skup je Lebesgueove mjere nula, zaključujemo da je skup nultočaka Lebesgueove mjere nula. Kako je $\text{Crit}(h) = \mathcal{N}(h')$ zaključujemo da je skup kritičnih vrijednosti preslikavanja h skup mjere nula, dakle h je skoro svuda konformalno preslikavanje. \square

Koristeći jezik kvazikonformalne geometrije, rekli bismo da je standardna kompleksna struktura σ_0 *invarijantna* s obzirom na holomorfna preslikavanja, to jest, vrijedi $\sigma_0 = f^*\sigma_0$ za holomorfnu funkciju f . Naime, po *propoziciji 3.5* je holomorfna funkcija skoro svuda konformalna, a iz *propozicije 3.4* vidimo da je praslika infinitezimalne kružnice po konformalnom preslikavanju ponovno infinitezimalna kružnica. Općenitije, možemo definirati:

Definicija 3.6: [2]

Neka je $U \subset \mathbb{C}$ otvoren i $F \in D_0^+(U, U)$. Za skoro kompleksnu strukturu σ na U s Beltramijevim koeficijentom μ kažemo da je F -invarijantna ukoliko je, za skoro svaki $z \in U$,

$$\mu(z) = F^*\mu(z).$$

Tada pišemo $\sigma = F^*\sigma$.

Primjer 3.4. Neka su $F \in D_0^+(V, V)$, $G \in D_0^+(U, U)$ i $f \in D_0^+(U, V)$ takve da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{G} & U \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{F} & V \end{array}$$

Tada, povlakom po f , svaka F -invarijantna skoro kompleksna struktura σ na V sa Beltramijevim koeficijentom μ inducira G -invarijantnu skoro kompleksnu strukturu $f^*\sigma$ na U sa Beltramijevim koeficijentom $f^*\mu$. Naime, vrijede sljedeće jednakosti:

$$G^*(f^*\mu) = (f \circ G)^*\mu = (F \circ f)^*\mu = f^*(F^*\mu) = f^*\mu.$$

3.4 Simetrične skoro kompleksne strukture

Neka je μ Beltramijev koeficijent skoro kompleksne strukture definirane na \mathbb{C} . Htjeli bismo definirati što to znači da je struktura *simetrična* s obzirom na realnu os \mathbb{R} ili s obzirom na jediničnu kružnicu \mathbb{S}^1 .

Preslikavanja koja opisuju ove simetrije su

- *refleksija* $c(z) = \bar{z}$ za \mathbb{R} i,
- *inverzija* $\tau(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ za \mathbb{S}^1 .

Preslikavanja c i τ su antiholomorfna, te stoga mijenjaju orijentaciju. Naime, za antiholomorfnu funkciju g je $\partial_z g(z) = 0$, ukoliko je $\partial_{\bar{z}} g(z) \neq 0$ imamo da je $|\partial_{\bar{z}} g(z)| > 0 = |\partial_z g(z)|$, $z \in \mathbb{C}$, odakle vidimo da g mijenja orijentaciju. Posebno,

$$\partial_z c \equiv 1, \quad \text{i} \quad \partial_{\bar{z}} \tau(z) = -\frac{1}{\bar{z}^2} \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Za antiholomorfno preslikavanje g imamo $\partial_z g(z) = 0$ ili, ekvivalentno, $\partial_{\bar{z}} \bar{g}(z) = 0$, stoga je povlak Beltramijevog koeficijenta μ po g :

$$g^* \mu(z) = \overline{\mu(g(z))} \cdot \frac{\partial_z \bar{g}(z)}{\partial_{\bar{z}} \bar{g}(z)}, \quad \text{za skoro svaki } z \in \mathbb{C}.$$

Primjer 3.5. Odredimo povlake Beltramijevog koeficijenta μ po c i τ . Kako su oba preslikavanja antiholomorfna, vrijedi:

$$c^* \mu(z) = \overline{\mu(c(z))} \cdot \frac{\partial_z \bar{c}(z)}{\partial_{\bar{z}} \bar{c}(z)} = \overline{\mu(\bar{z})}, \quad \text{i} \quad \tau^* \mu(z) = \overline{\mu(\tau(z))} \cdot \frac{\partial_z \bar{\tau}(z)}{\partial_{\bar{z}} \bar{\tau}(z)} = \overline{\mu\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \cdot \frac{z^2}{\bar{z}^2}.$$

Definicija 3.7: [2]

Neka je μ Beltramijev koeficijent skoro kompleksne strukture σ definirane na \mathbb{C} . Kažemo da je μ *simetričan s obzirom na \mathbb{R}* ako

$$\mu(z) = \overline{\mu(\bar{z})}, \quad \text{za skoro svaki } z \in \mathbb{C},$$

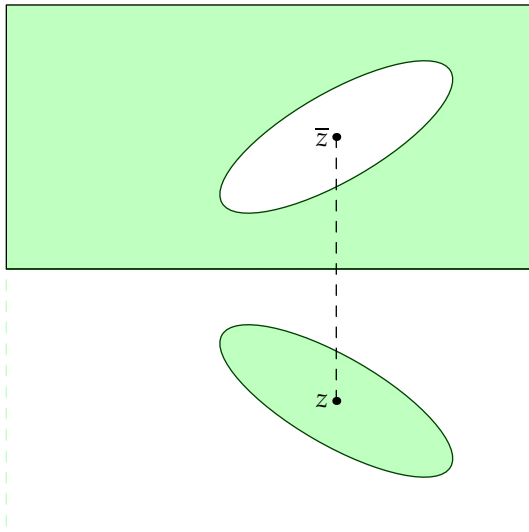
ili, ekvivalentno, ako $c^* \mu = \mu$.

Kažemo da je μ *simetričan s obzirom na \mathbb{S}^1* ako

$$\mu(z) = \overline{\mu\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \cdot \frac{z^2}{\bar{z}^2} = \overline{\mu(1/\bar{z})} \cdot e^{4i \cdot \arg(z)}, \quad \text{za skoro svaki } z \in \mathbb{C},$$

ili, ekvivalentno, ako $\tau^* \mu = \mu$.

Često želimo proširiti Beltramijev koeficijent sa danog podskupa $\Omega \subset \mathbb{C}$ na što veći skup $\tilde{\Omega}$. U slučaju da nam je Ω *gornja poluravnina* $\mathcal{H}^+ := \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0 \}$ ili *jedinični disk* $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$, Beltramijev koeficijent možemo proširiti na čitav \mathbb{C} korištenjem refleksije s obzirom na \mathbb{R} ili inverzije s obzirom na \mathbb{S}^1 .

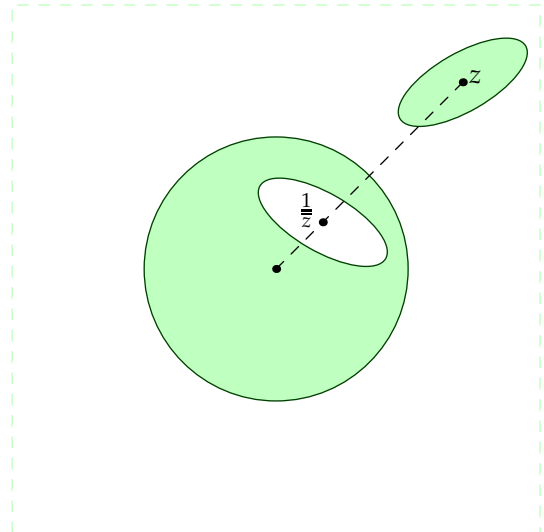


Slika 10: Beltramijev koeficijent simetričan s obzirom na \mathbb{R}

Ako je μ Beltramijev koeficijent definiran na \mathcal{H}^+ , tada sa:

$$\tilde{\mu}(z) := \begin{cases} \mu(z) & \text{ako } \text{Im}(z) > 0, \\ 0 & \text{ako } \text{Im}(z) = 0, \\ c^* \mu(z) & \text{ako } \text{Im}(z) < 0, \end{cases}$$

definiramo proširenje Beltramijevog koeficijenta μ na čitav \mathbb{C} koje je *simetrično s obzirom na \mathbb{R}* .



Slika 11: Beltramijev koeficijent simetričan s obzirom na \mathbb{S}^1

Ako je μ Beltramijev koeficijent definiran na \mathbb{D} , tada sa:

$$\tilde{\mu}(z) := \begin{cases} \mu(z) & \text{ako } |z| < 1, \\ 0 & \text{ako } |z| = 1, \\ \tau^* \mu(z) & \text{ako } |z| > 1, \end{cases}$$

definiramo proširenje Beltramijevog koeficijenta μ na čitav \mathbb{C} koje je *simetrično s obzirom na \mathbb{S}^1* .

4 Kvazikonformalna geometrija

U ovom poglavlju ćemo geometrijski definirati pojam kvazikonformalnog preslikavanja koje opisuje distorziju danog područja. Za to će nam biti potrebni pojmovi *jednostavne zatvorene krivulje* i *Jordanove domene* te *konformalni modul* Jordanove domene sa istaknutom četvorkom rubnih točaka.

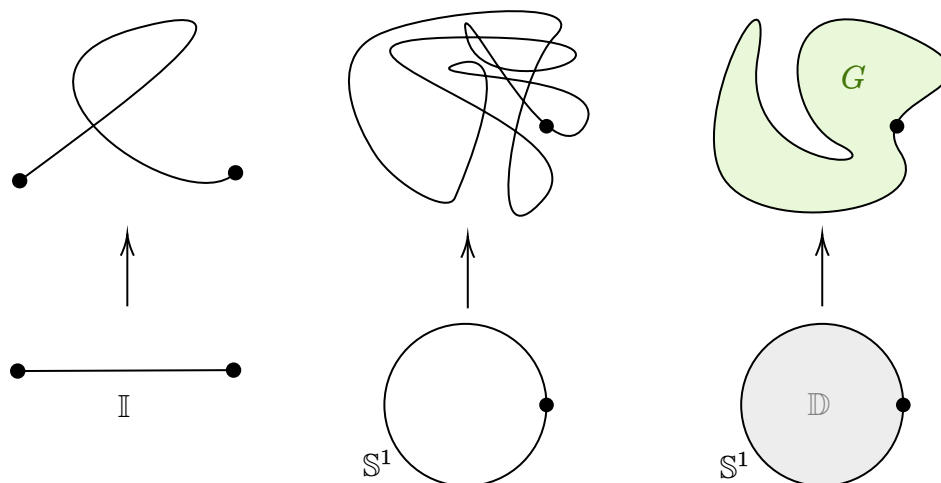
4.1 Jednostavno zatvorene krivulje i Jordan-Schönfliesov teorem

Prisjetimo se elementarnih definicija krivulja, vidjeti [11] za detalje i dokaze.

Krivulja Γ u kompleksnoj ravnini je skup $\gamma(\mathbb{I})$, slika neprekidne funkcije $\gamma : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{C}$ sa intervala $\mathbb{I} := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ koju zovemo *parametrizacija* krivulje Γ . Za krivulju kažemo da je *zatvorena* ako je $\gamma(0) = \gamma(1)$. U tom slučaju ju možemo reparametrizirati kao sliku jedinične kružnice po neprekidnoj funkciji $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$.

Krivulja Γ je *jednostavna* ako je restrikcija neke njene parametrizacije γ na poluotvoreni interval $[0, 1)$ injektivna. Ako je γ' neka druga parametrizacija jednostavne krivulje Γ , lako vidimo da je $\gamma'|_{[0,1)}$ injekcija jer je $\tau := \gamma \circ \gamma' : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ kao reparametrizacija, nužno bijekcija.

Jordanova krivulja je jednostavna zatvorena krivulja, to jest zatvorena krivulja bez samopresijecanja.



Slika 12: Prikaz krivulje, zatvorene krivulje i jednostavno zatvorene krivulje, zajedno s njihovim parametrizacijama sa intervala odnosno jedinične kružnice.

Jordanov teorem nam kaže da svaka jednostavna zatvorena krivulja dijeli ravninu na unutrašnjost, dio ravnine omeđen krivuljom, i vanjštinu, neomeđeni dio ravnine. Međutim, puno jaču tvrdnju nam daje sljedeći teorem čiji se dokaz može pronaći u [3].

Teorem 4.1: Jordan-Schönfliesov teorem [3]

Jednostavna zatvorena krivulja Γ u kompleksnoj ravnini \mathbb{C} dijeli ravninu \mathbb{C} u dvije regije. Štoviše, postoji homeomorfizam $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pod kojim se jedinična kružnica \mathbb{S}^1 preslikava u Jordanovu krivulju Γ .

Na slici 12, najdesnija figura prikazuje restrikciju homeomorfizma h na zatvoreni jedinični disk \mathbb{D} . Homeomorfizam iz Jordan-Schönfliesovog teorema nije jedinstven. Znamo da je disk \mathbb{D} domena, to jest jednostavno povezan otvoren podskup kompleksne ravnine. Dodatno, \mathbb{D} je omeđena domena, stoga je i slika diska $G := h(\mathbb{D})$ jednostavno povezan otvoren skup omeđen sa $\Gamma = h(\mathbb{S}^1)$, to jest G je omeđena domena.

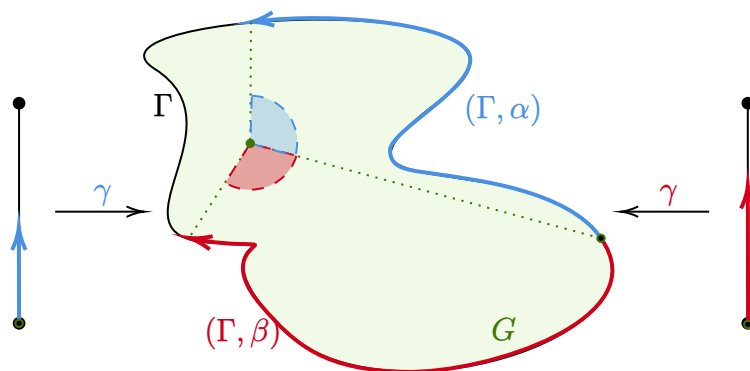
Definicija 4.2: [3]

Jordanova domena je jednostavno povezan otvoren skup omeđen sa Jordanovom krivuljom.

Definirajmo precizno sada *orijentaciju* Jordanove krivulje Γ s obzirom na Jordanovu domenu G kojoj je ona rub, to jest $\Gamma = \partial G$.

Neka su γ i γ' dvije parametrizacije Jordanove krivulje Γ . Kažemo da su γ i γ' *ekvivalentne* ako je $\gamma^{-1} \circ \gamma'$ strogo rastuća funkcija. Lako se dokaže da je ovo zaista relacija ekvivalencije. Kako su γ i γ' neprekidne i injektivne, kompozicija $\gamma^{-1} \circ \gamma' : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ može biti ili strogo rastuća ili strogo padajuća, stoga se parametrizacije Jordanove krivulje Γ po ovoj relaciji ekvivalencije dijele u dvije klase α i β koje zovemo orijentacije od Γ . Dakle, zadati *orijentiranu* Jordanovu krivulju zapravo znači zadati jednu parametrizaciju od Γ i time zadati jednu od dvije moguće orijentacije, koja je reprezentirana tom parametrizacijom.

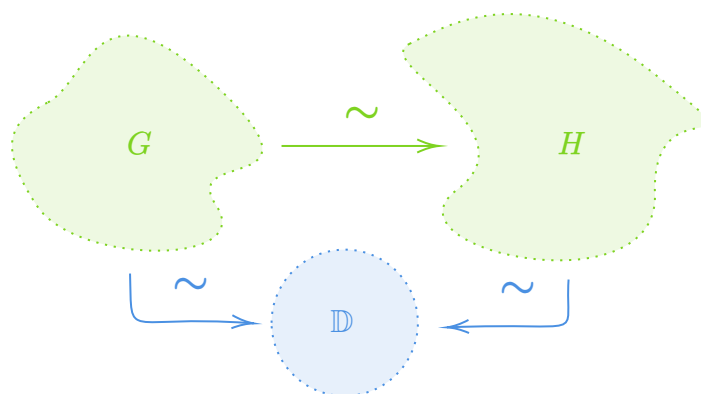
Neka je Γ Jordanova krivulja i G Jordanova domena takva da je $\partial G = \Gamma$. Možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da G sadrži ishodište. U protivnom, odaberemo $c \in G$ i promatramo translaciju domene G za $-c$.



Slika 13: Prikaz Jordanove krivulje Γ sa pozitivnom orijentacijom (plavo) i negativnom orijentacijom (crveno) s obzirom na Jordanovu domenu G .

Neka je $\gamma : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{C}$ parametrizacija od Γ koja reprezentira orijentaciju α . Kako $t \in [0, 1]$ raste od 0 do 1, svaka se neprekidna grana od $\arg \gamma(t)$ u odnosu na ishodište promijeni ili za 2π ili za -2π . U prvom slučaju kažemo da je orijentacija α *pozitivna*, a u drugom *negativna*, s obzirom na G .

Primjetimo da nam *Riemannov teorem o preslikavanju (teorem 1.2)* daje postojanje konformalne bijekcije sa svake Jordanove domene u disk, i time su sve Jordanove domene konformalno ekvivalentne.



Slika 14: Konformalna ekvivalencija Jordanovih domena

Sljedeći važan teorem nam daje karakterizaciju Jordanovih domena, za dokaz vidjeti [11, str. 24.].

Teorem 4.3: Carathéodory [11]

Neka je G ograničena domena i neka je $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ konformalna surjektivna. Tada je ∂G Jordanova krivulja ako i samo ako f ima neprekidno injektivno proširenje na $\overline{\mathbb{D}}$.

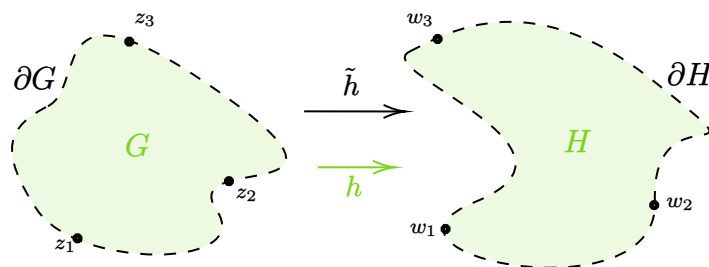
Kao korolar Carathéodorijevog teorema imamo sljedeću propoziciju koja je dokazana u [11, str 25.].

Propozicija 4.4: [11]

Neka su G i H Jordanove domene i neka su trojke $z_1, z_2, z_3 \in \partial G$, $w_1, w_2, w_3 \in \partial H$ koje su izabrane u skladu s pozitivnom orijentacijom ∂G i ∂H s obzirom na G i H redom. Tada postoji jedinstvena konformalna bijekcija $h : G \rightarrow H$ čije neprekidno proširenje $\tilde{h} : \overline{G} \rightarrow \overline{H}$ zadovoljava

$$\tilde{h}(z_i) = w_i, \text{ za } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Prisjetimo se da imamo 3 realna stupnja slobode pri izboru konformalne bijekcije u Riemannovom teoremu o preslikavanju. Stoga imamo i 3 realna stupnja slobode pri izboru konformalne bijekcije između dvije Jordanove domene G i H . Naime, neka je G Jordanova domena i neka je $F : \mathbb{D} \rightarrow G$ konformalna bijekcija, tada po Carathéodoryevom teoremu F ima neprekidno injektivno proširenje na $\overline{\mathbb{D}}$. Neka je $z \in \partial G$. Tada postoji jedinstven $\theta \in [0, 2\pi)$ takav da je $F(e^{i\theta}) = z$. Dakle, iako je rubna točka z kompleksan broj, ona je preko $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ jedinstveno određena realnim brojem θ .



Slika 15: prikaz konformalne bijekcije $h : G \rightarrow H$ čije neprekidno proširenje $\tilde{h} : \overline{G} \rightarrow \overline{H}$ preslikava rubnu točku z_i u $w_i, i = 1, 2, 3$.

Prije sljedeće definicije, napomenimo da homeomorfizam $h : \overline{G} \rightarrow \overline{H}$ između zatvarača Jordanovih domena G i H nužno slika rub Jordanove domene G u rub Jordanove domene H . Naime, $h(\partial G) = \partial h(G)$ je Jordanova krivulja koja je rub Jordanove domene $h(G)$. Ako $h(\partial G) \neq \partial H$, tada je $h(\overline{G}) \subsetneq \overline{H}$, odakle vidimo da h ne može biti homeomorfizam.

Definicija 4.5: [7]

Neka su G i H Jordanove domene i neka je $h : \overline{G} \rightarrow \overline{H}$ homeomorfizam. Kažemo da h čuva orijentaciju ruba Jordanove domene G , ako pozitivno (negativno) orijentiranu Jordanovu krivulju ∂G s obzirom na G preslikava u pozitivno (negativno) orijentiranu Jordanovu krivulju ∂H s obzirom na H .

Pokažimo da je definicija dobra, to jest da ne ovisi o reprezentantu pozitivne (negativne) parametrizacije ruba Jordanove domene G . Neka su $\gamma : \mathbb{I} \rightarrow \partial G$ i $\gamma' : \mathbb{I} \rightarrow \partial G$ dvije parametrizacije Jordanove krivulje ∂G koje su iste orijentacije. Pretpostavimo nadalje, bez smanjenja općenitosti, da je ta orijentacija pozitivna. Pretpostavimo da je $h \circ \gamma : \mathbb{I} \rightarrow \partial H$ pozitivna parametrizacija Jordanove krivulje ∂H , pokažimo da je i $h \circ \gamma' : \mathbb{I} \rightarrow \partial H$ pozitivna parametrizacija Jordanove krivulje ∂H . Budući da su γ i γ' iste orijentacije, znamo da je $\gamma^{-1} \circ \gamma' : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ strogo rastuća funkcija. Iz jednakosti

$$(h \circ \gamma)^{-1} \circ (h \circ \gamma') = \gamma^{-1} \circ h^{-1} \circ h \circ \gamma' = \gamma^{-1} \circ \gamma',$$

vidimo da je $(h \circ \gamma)^{-1} \circ (h \circ \gamma') : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ također strogo rastuća funkcija. Stoga su parametrizacije $h \circ \gamma'$ i $h \circ \gamma$ iste, pozitivne, orijentacije.

Primijetimo da \tilde{h} iz *propozicije 4.4* čuva orijentaciju ruba ∂G , to jest pozitivno orijentiran rub ∂G slika u pozitivno orijentiran rub $\tilde{h}(\partial G) = \partial H$.

Definicija 4.6: [7]

Neka su $U, V \subseteq \mathbb{C}$ otvoreni skupovi. Kažemo da homeomorfizam $h : U \rightarrow V$ čuva orijentaciju ako čuva orijentaciju ruba ∂G za svaku Jordanovu domenu G , čiji je zatvarač \overline{G} sadržan u U .

Kažemo da je Jordanova domena $G \subset U$ *kompaktno sadržana* u $U \subset \mathbb{C}$, ako joj je zatvarač \overline{G} sadržan u U . Posebno \overline{G} je kao ograničen i zatvoren skup također kompaktan u U .

Ukoliko je $U \subset \mathbb{C}$ domena, nije potrebno provjeriti čuva li homeomorfizam $h : U \rightarrow V$ orijentaciju ruba ∂G za svaku Jordanovu domenu G kompaktno sadržanu u U . Sljedeći teorem nećemo dokazivati, a dokaz možete pogledati u [10, str. 197]:

Teorem 4.7: Teorem o orijentaciji [7]

Neka je $U \subset \mathbb{C}$ domena i $V \subset \mathbb{C}$ otvoren skup. Neka je $h : U \rightarrow V$ homeomorfizam. Ako postoji Jordanova domena G koja je kompaktno sadržana u U takva da h čuva orijentaciju ruba ∂G , tada h čuva orijentaciju.

4.2 Konformalni modul četverokuta

Definicija 4.8: [2]

Četverokut $Q = Q(a, b, c, d)$ je Jordanova domena Q sa uređenom četvorkom istaknutih rubnih točaka (a, b, c, d) , koje su uređene u skladu s pozitivnom orijentacijom od ∂Q .

Homeomorfizmom četverokuta $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ na četverokut $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ nazivamo homeomorfizam $h : \overline{Q} \rightarrow \overline{Q}'$ koji preslikava rubne točke z_i u $w_i = h(z_i)$. Ako je restrikcija $h|_Q$ dodatno konformalna bijekcija, tada kažemo da je h *konformalna bijekcija* sa $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ na $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Primijetimo da općenito nije moguće preslikati dani četverokut konformalnom bijekcijom u drugi proizvoljni četverokut, jer po *propoziciji 4.4* slika triju rubnih točaka jedinstveno određuje konformalnu bijekciju. Svi četverokuti su stoga podijeljeni u nekoliko konformalnih klasa ekvivalencije.

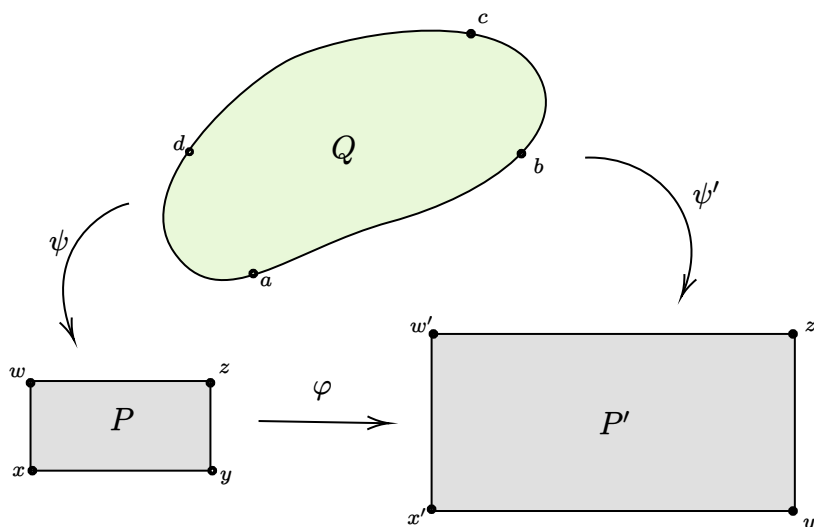
Definicija 4.9: [2]

Pravokutnik je četverokut $P(x, y, z, w)$ kojemu su spojnice istanutih točaka segmenti i koji ima pravi kut pri svakoj istaknutoj rubnoj točki.

Neka je $Q(a, b, c, d)$ četverokut i neka su

$$\psi : Q(a, b, c, d) \rightarrow P(x, y, z, w) \text{ i } \psi' : Q(a, b, c, d) \rightarrow P'(x', y', z', w')$$

dvije različite konformalne bijekcije sa Q na pravokutnike P i P' .



Slika 4²: Četverokut $Q(a, b, c, d)$ i konformalne bijekcije ψ i ψ' koje taj četverokut preslikavaju u pravokutnike $P(x, y, z, w)$ i $P'(x', y', z', w')$ redom.

Tada je

$$\varphi = \psi' \circ \psi^{-1} : P(x, y, z, w) \rightarrow P'(x', y', z', w'),$$

konformalna bijekcija između dva pravokutnika. Translacijom domene i kodomene možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su središta pravokutnika P i P' u ishodištu. Rotacijom domene i kodomene, što odgovara množenju kompleksnim brojem jedinične duljine, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su stranice pravokutnika P i P' paralelne sa osima koordinatnog sustava.

Pokažimo sada da dva pravokutnika između kojih postoji konformalna bijekcija imaju iste omjere stranica, to jest da je omjer stranica invarijanta konformalne ekvivalencije pravokutnika.

Svaku konformalnu bijekciju $\varphi : P \rightarrow P'$ možemo proširiti do konformalne bijekcije $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ na sljedeći način. Označimo sa $X = z - y$, $Y = w - x$ i sa $X' = z' - y'$, $Y' = w' - x'$.

Prvo definiramo popločavanje kompleksne ravnine \mathbb{C} :

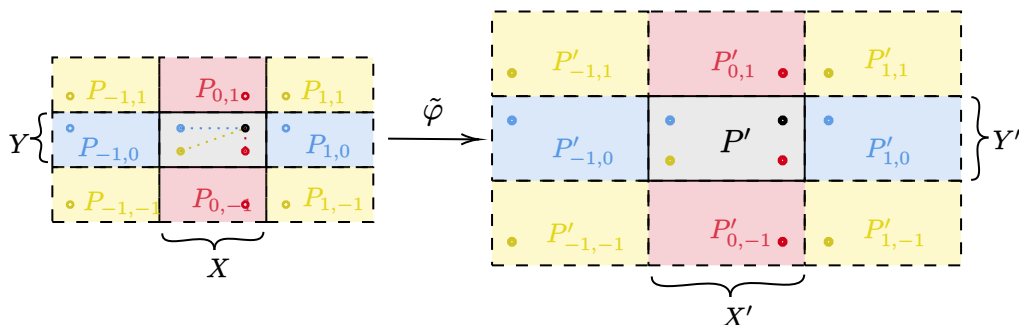
$$\mathbb{C} = \bigsqcup_{k, l \in \mathbb{Z}} P_{k, l}, \quad \text{gdje je} \quad P_{k, l} := P + k \cdot X + l \cdot Y.$$

Zatim definiramo $\tilde{\varphi}$ na $P_{k,l}, k, l \in \mathbb{Z}$ sa:

$$\tilde{\varphi}(s) := \begin{cases} \varphi(s - kX - lY) + kX' + lY', & k, l \equiv 0 \pmod{2}, \\ \varphi(\overline{s - kX - lY}) + kX' + lY', & k \equiv 0 \pmod{2}, l \equiv 1 \pmod{2}, \\ \varphi(\overline{kX + lY - s}) + kX' + lY', & k \equiv 1 \pmod{2}, l \equiv 0 \pmod{2}, \\ \varphi(kX + lY - s) + kX' + lY', & k, l \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Ovako konstruirano preslikavanje $\tilde{\varphi}$ je očito bijekcija sa \mathbb{C} u \mathbb{C} .

Preslikavanje $\tilde{\varphi}$ je konformalno na svakoj zajedničkoj stranici dva susjedna pravokutnika. Naime, unija dva susjedna pravokutna je zrcalno simetričan skup s obzirom na njihovu zajedničku stranicu. Po konstrukciji se vrijednosti preslikavanja $\tilde{\varphi}$ u susjednim pravokutnicima podudaraju na njihovoj zajedničkoj stranici. Koristeći *Schwartzov princip refleksije* (vidjeti [13, str. 57.]) možemo zaključiti da je $\tilde{\varphi}$ konformalna na njihovoj zajedničkoj stranici. Stoga je φ konformalna na čitavoj kompleksnoj ravnini.



Slika 17: prikaz popločavanja kompleksne ravnine i konformalnog bijektivnog proširenja $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Time dobivamo konformalni automorfizam $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ koji, po [8, *Korolar 1.6*], mora biti oblika $\tilde{\varphi}(s) = \lambda \cdot s + c$, za neke $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $c \in \mathbb{C}$. Posebno je

$$\frac{|Y'|}{|X'|} = \frac{|z' - y'|}{|y' - x'|} = \frac{|\varphi(z) - \varphi(y)|}{|\varphi(y) - \varphi(x)|} = \frac{|\lambda z + c - \lambda y - c|}{|\lambda y + c - \lambda x - c|} = \frac{|\lambda|}{|\lambda|} \cdot \frac{|z - y|}{|y - x|} = \frac{|Y|}{|X|}.$$

Stoga ima smisla definirati:

Definicija 4.10: Konformalni modul [2]

Neka je $Q(a, b, c, d)$ četverokut i $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{C}$ konformalna bijekcija koja preslikava $Q(a, b, c, d)$ u pravokutnik s vrhovima $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)$. Tada je *konformalni modul* četverokuta $Q(a, b, c, d)$ definiran kao

$$\text{mod } Q(a, b, c, d) := \frac{|\varphi(a) - \varphi(b)|}{|\varphi(b) - \varphi(c)|}.$$

Konformalni modul je dobro definiran jer ne ovisi o izboru pravokutnika. Možemo reći da je konformalni modul reprezentiran jednim pravokutnim iz klase konformalno ekvivalentnih pravokutnika. Naime, pokazali smo da su svi pravokutnici u istoj konformalnoj klasi međusobno slični, to jest omjer duljina stranica im je isti.

Propozicija 4.11: [2]

Četverokuti Q i Q' su konformalno ekvivalentni ako i samo ako imaju isti konformalni modul.

Dokaz. (\implies) Neka su $Q(a, b, c, d)$ i $Q'(a', b', c', d')$ dva konformalno ekvivalentna četverokuta i neka je $f : Q(a, b, c, d) \rightarrow Q'(a', b', c', d')$ konformalna bijekcija između njih. Neka je $\psi : Q(a, b, c, d) \rightarrow P(x, y, z, w)$ konformalna bijekcija koja šalje četverokut $Q(a, b, c, d)$ u pravokutnik $P(x, y, z, w)$, tada je $\psi' := f^{-1} \circ \psi$ konformalna bijekcija koja šalje četverokut $Q'(a', b', c', d')$ u pravokutnik $P(x, y, z, w)$. Po definiciji konformalnog modula imamo da je :

$$\text{mod } Q(a, b, c, d) = \frac{|\psi(a) - \psi(b)|}{|\psi(b) - \psi(c)|} = \frac{|x - y|}{|y - z|} = \frac{|\psi'(a) - \psi'(b)|}{|\psi'(b) - \psi'(c)|} = \text{mod } Q'(a', b', c', d').$$

(\impliedby) Neka su $Q(a, b, c, d)$ i $Q'(a', b', c', d')$ dva četverokuta koja imaju isti konformalni modul, a ψ i ψ' konformalne bijekcije koje šalju četverokute $Q(a, b, c, d)$ i $Q'(a', b', c', d')$ u pravokutnike $P(s, t, u, v)$ i $P'(s', t', u', v')$, tim redom. Tada su pravokutnici $P(s, t, u, v)$ i $P'(s', t', u', v')$ međusobno slični. Neka su $c := \frac{s+u}{2}$ i $c' := \frac{s'+u'}{2}$ središta pravokutnika P i P' redom. Definirajmo $\theta := \arg(s - c)$ i $\theta' := \arg(s' - c')$, te neka je $k := \frac{|t'-s'|}{|t-s|}$ koeficijent sličnosti između pravokutnika P' i P . Tada linearno preslikavanje

$$f(z) = k \cdot e^{i(\theta' - \theta)} \cdot (z - c) + c'$$

preslikava pravokutnik $P(s, t, u, v)$ u pravokutnik $P'(s', t', u', v')$. Naime, potrebno je prvo translirati pravokutnik P za kompleksni broj $-c$ tako da mu je središte u ishodištu, zatim rotirati ga za kut $\theta' - \theta$ tako da mu je dulja stranica paralelna sa duljom stranicom pravokutnika P' , zatim ga skalirati za koeficijent k tako da bude sukladan sa P' i naposljetku, translirati ga za c' tako da se podudara s pravokutnikom P' . Sada je preslikavanje $\varphi := \psi'^{-1} \circ f \circ \psi$ konformalna bijekcija iz Q u Q' , odakle su Q i Q' konformalno ekvivalentni. \square

4.3 Definicija kvazikonformalnog preslikavanja

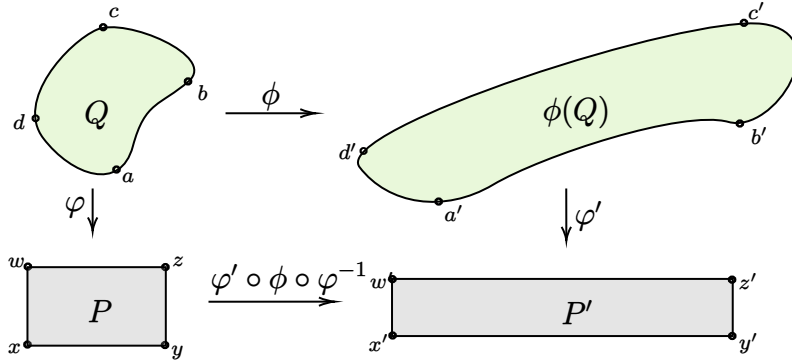
Neka su U i V domene u \mathbb{C} i neka je $\phi : U \rightarrow V$ homeomorfizam koji čuva orijentaciju, vidjeti *definiciju 4.6*. Ako je četverokut $Q(a, b, c, d)$ kompaktno sadržan u U tada je $\phi(Q)(\phi(a), \phi(b), \phi(c), \phi(d))$ također četverokut koji je kompaktno sadržan u V .

Definicija 4.12: [2]

Neka su U i V domene u \mathbb{C} i neka je $\phi : U \rightarrow V$ homeomorfizam koji čuva orijentaciju i $Q = Q(a, b, c, d)$ četverokut kompaktno sadržan u U . Tada omjer modula slike četverokuta i modula četverokuta označavamo s

$$\tilde{K}_\phi(Q) := \frac{\text{mod } \phi(Q)}{\text{mod } Q},$$

i zovemo *dilatacija od Q pod homeomorfizmom ϕ* .



Slika 18: Prikaz četverokuta Q i njegove slike $\phi(Q)$ zajedno sa pravokutnicima koji reprezentiraju njihove konformalne klase.

Primjetimo da je dilatacija od Q pod homeomorfizmom ϕ zapravo dvoomjer koji mjeri promjenu konformalnog modula četverokuta Q pod homeomorfizmom ϕ . Naime, na slici 18 imamo prikaz konformalnih bijekcija $\varphi : Q \rightarrow P$ i $\varphi' : \phi(Q) \rightarrow P'$. Po definiciji je

$$\text{mod } Q = \frac{|y - x|}{|z - y|}, \quad \text{i} \quad \text{mod } \phi(Q) = \frac{|y' - x'|}{|z' - y'|},$$

odakle je dilatacija $\tilde{K}_\phi(Q)$ po svojoj definiciji

$$\tilde{K}_\phi(Q) = \frac{\text{mod } \phi(Q)}{\text{mod } Q} = \frac{|y' - x'|}{|z' - y'|} \cdot \frac{|y - x|}{|z - y|} = \frac{|y' - x'| \cdot |z - y|}{|z' - y'| \cdot |y - x|}.$$

Definicija 4.13: [2]

Neka su U i V domene u \mathbb{C} . *Maksimalnu dilataciju* homeomorfizma $\phi : U \rightarrow V$ koji čuva orijentaciju definiramo kao

$$\tilde{K}_\phi := \sup_{Q \subset U} \frac{\text{mod } \phi(Q)}{\text{mod } Q} \in [1, \infty], \quad (4.1)$$

gdje su Q četverokuti kompaktno sadržani u U .

Primijetimo da u gornjoj definiciji supremum uzimamo zapravo po svim Jordanovim domenama Q koje su kompaktno sadržane u U te po skupu svih uređenih četvorki rubnih točaka u ∂Q koje su izabrane u skladu s pozitivnom orijentacijom od ∂Q .

Objasnimo sada zašto je maksimalna dilatacija homeomorfizmom koji čuva orijentaciju uvijek veća ili jednaka 1. Neka je $k := \tilde{K}_\phi(Q)$ dilatacija četverokuta $Q(a, b, c, d)$ pod ϕ . Promotrimo četverokut $Q(b, c, d, a)$ sa ciklički promijenjenim redoslijedom vrhova, tada je

$$\text{mod } Q(b, c, d, a) = \frac{1}{\text{mod } Q(a, b, c, d)},$$

odakle slijedi da je $\frac{1}{k}$ dilatacija četverokuta $Q(b, c, d, a)$ pod ϕ . Kako su oba četverokuta uključena u supremum (4.1), zaključujemo da je $\tilde{K}_\phi \geq \max\{k, \frac{1}{k}\} \geq 1$.

Definicija 4.14: Geometrijska definicija K -kvazikonformalnog preslikavanja

Neka su U i V domene u \mathbb{C} i neka je dan $K \geq 1$. Kažemo da je $\phi : U \rightarrow V$ K -kvazikonformalno preslikavanje ako je ϕ homeomorfizam koji čuva orijentaciju te je $\tilde{K}_\phi \leq K$.

Kažemo da je homeomorfizam ϕ koji čuva orijentaciju kvazikonformalno preslikavanje ako postoji $K \geq 1$ takav da je ϕ K -kvazikonformalno preslikavanje.

Primijetimo da je po definiciji svako K -kvazikonformalno preslikavanje ujedno i L -kvazikonformalno, za svaki $L \geq K$. Najmanji takav K je upravo \tilde{K}_ϕ .

Navedimo par svojstava koji slijede iz geometrijske definicije K -kvazikonformalnog preslikavanja.

Propozicija 4.15: [1]

Neka su U i V domene u \mathbb{C} i neka je $\phi : U \rightarrow V$ K -kvazikonformalno preslikavanje. Tada vrijedi sljedeće:

1. $\phi^{-1} : V \rightarrow U$ je K -kvazikonformalno preslikavanje;
2. Ako je ψ L -kvazikonformalno preslikavanje tada je $\psi \circ \phi$ KL -kvazikonformalno preslikavanje.
3. Predkompozicija (postkompozicija) ϕ sa konformalnim preslikavanjem je ponovno K -kvazikonformalno preslikavanje;

Dokaz.

1. Neka je Q_2 četverokut koji je kompaktno sadržan u V i neka je $Q_1 = \phi^{-1}(Q_2)$. Kako je ϕ K -kvazikonformalno preslikavanje imamo da je $\frac{1}{K} \leq \frac{\text{mod } \phi(Q_1)}{\text{mod } Q_1} \leq K$, tada je

$$\frac{\text{mod } \phi^{-1}(Q_2)}{\text{mod } Q_2} = \frac{\text{mod } Q_1}{\text{mod } \phi(Q_1)} \leq K.$$

Stoga je i ϕ^{-1} K -kvazikonformalno preslikavanje.

2. Neka je Q proizvoljan četverokut, kompaktno sadržan u U . Tada je

$$\text{mod}(\psi \circ \phi)(Q) = \text{mod} \psi(\phi(Q)) \leq L \cdot \text{mod} \phi(Q) \leq L \cdot K \cdot \text{mod} Q,$$

pritom smo u prvoj nejednakosti iskoristili da je ψ L -kvazikonformalno preslikavanje a u drugoj da je ϕ K -kvazikonformalno preslikavanje.

3. Kako su sva konformalna preslikavanja očito 1-kvazikonformalna, ova tvrdnja slijedi direktno iz prethodne tvrdnje za $L = 1$.

□

Imamo vrlo koristan rezultat koji se često koristi u primjenama, te koji ćemo mi iskoristiti u primjeni (kvazikonformalnoj kirurgiji) u *poglavljju 6*. Za dokaz upućujemo čitatelja da pogleda [1, str. 16]

Lema 4.16: Weylova Lema [1]

Neka su U i V domene u \mathbb{C} . Tada je $\phi : U \rightarrow V$ 1-kvazikonformalno preslikavanje ako i samo ako je ϕ konformalno preslikavanje.

Zanimljiva činjenica koju ćemo koristiti je da su određeni skupovi uklonjivi u pogledu kvazikonformalnosti, preciznije imamo sljedeću definiciju:

Definicija 4.17: Kvazikonformalna uklonjivost [2]

Zatvoreni skup $X \subset U$ je *kvazikonformalno uklonjiv* na skupu $U \subset \mathbb{C}$, ako za svaki homeomorfizam definiran na U koji je kvazikonformalan na $U \setminus X$ vrijedi da je i kvazikonformalan na čitavom U .

Ustvrditi da je određeni zatvoreni skup X kvazikonformalno uklonjiv nije lagan zadatak. Od potrebe će nam biti sljedeći rezultat o kvazikonformalnoj uklonjivosti čiji dokaz možete vidjeti u [6, prop. 4.2.7 i prop. 4.9.9].

Propozicija 4.18: [2]

Neka je Λ *kvaziluk* (slika ravnog segmenta ili pravca pod kvazikonformalnim preslikavanjem) i neka je $\phi : U \rightarrow V$ homeomorfizam između dvije domene $U, V \subset \mathbb{C}$. Ako je ϕ K -kvazikonformalno preslikavanje na $U \setminus \Lambda$, tada je ϕ K -kvazikonformalno preslikavanje na U . To jest, Λ je kvazikonformalno uklonjiv na skupu U . Posebno, točke, pravci i glatki lukovi su kvazikonformalno uklonjivi.

Kao posljedicu, možemo konstruirati globalna kvazikonformalna preslikavanja tako što lijepimo različita kvazikonformalna preslikavanja duž kvazikonformalno uklonjivih skupova.

4.4 Analitička karakterizacija kvazikonformalnih preslikavanja

Postoje dvije alternativne, analitičke definicije kvazikonformalnih preslikavanja. Jedan moderniji (ne nužno intuitivniji) pristup je koristeći *distribucijske derivacije*, a drugi koristeći *apsolutnu neprekidnost na pravcima*. Radi jednostavnosti u ovom radu nećemo uvoditi spomenute definicije, ali oba pristupa možete vidjeti u [2, poglavlje 1.3].

U ovom radu ćemo navesti analitičku karakterizaciju kvazikonformalnih preslikavanja koja su neprekidno realno diferencijabilna. Preciznije, ispitujemo vezu između \mathcal{C}^1 kvazikonformalnih preslikavanja sa U u V , U i V domene u \mathbb{C} , i klase $D_0^+(U, V)$ koju smo definirali u poglavlju 2. Pokazat ćemo sljedeću propoziciju:

Propozicija 4.19

Neka su U i V domene u \mathbb{C} . Svako kvazikonformalno preslikavanje $\phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ je također element $D_0^+(U, V)$, time je za proizvoljni Beltramijev koeficijent μ na V povlak $\phi^*\mu$ dobro definiran Beltramijev koeficijent na U .

Dokaz propozicije će sljediti iz lema 4.21, 4.22 i 4.23.

Vidjeli smo da lokalno u točki z , ϕ djeluje kao linearni operator $D_z\phi = \partial_z\phi(z)dz + \partial_{\bar{z}}\phi(z)d\bar{z}$ te je stoga, po formuli (2.4) za determinantu, Jacobian dan s:

$$\text{Jac}(\phi) = \det D_z\phi = |\partial_z\phi|^2 - |\partial_{\bar{z}}\phi|^2.$$

Za dokaz sljedećeg teorema, kojeg ćemo koristiti nadalje, vidjeti [1, str. 22].

Teorem 4.20: [1]

Neka su U i V domene u \mathbb{C} . Ako je $\phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ kvazikonformalno preslikavanje, tada je ϕ apsolutno neprekidna s obzirom na Lebesgueovu mjeru, to jest, preslikava skupove mjere nula u skupove mjere nula. Štoviše, za svaki izmjeriv skup $A \subset U$ vrijedi:

$$\lambda(\phi(A)) = \int_A \text{Jac}(\phi)d\lambda,$$

gdje je λ Lebesgueova mjera.

Lema 4.21

Neka su U i V domene u \mathbb{C} i neka je $\phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ kvazikonformalno preslikavanje. Tada je diferencijal $D_z\phi$ je regularan skoro svuda na U .

Dokaz. Pretpostavimo da $D_z\phi$ nije regularan na nekom skupu $A \subseteq U$ pozitivne mjere. Tada je $\text{Jac}(\phi|_A) \equiv 0$ te je, po prethodnom teoremu, $\lambda(\phi(A)) = 0$. Međutim, po svojstvu (1) iz propozicije 4.15 znamo da je i $\phi^{-1} : V \rightarrow U$ kvazikonformalno preslikavanje. Posebno ϕ^{-1} preslikava skupove mjere nula u skupove mjere nula. Stoga je $A = \phi^{-1}(\phi(A))$ skup mjere nula kao slika skupa $\phi(A)$ koji je mjere nula, što je kontradikcija sa početnom pretpostavkom da je A pozitivne mjere. \square

Lema 4.22

Neka su $U, V \subseteq \mathbb{C}$ otvoreni i neka je $\phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$. Tada je pridruživanje $p \mapsto D_p\phi$ izmjerivo.

Dokaz. Za to je dovoljno pokazati da su preslikavanja $\partial_z\phi : z \mapsto \partial_z\phi(z)$ i $\partial_{\bar{z}}\phi : z \mapsto \partial_{\bar{z}}\phi(z)$ izmjeriva na U . Kako je $\phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$, to su parcijalne derivacije $\partial_z\phi, \partial_{\bar{z}}\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ neprekidne na U . Promatramo Borelovu σ -algebru na topološkom prostoru \mathbb{C} koja je generirana otvorenim skupovima u \mathbb{C} . Stoga je dovoljno provjeriti da je praslika proizvoljnog otvorenog skupa (element generatora Borelove σ -algebre) izmjeriva. Za svaki otvoren podskup $O \subset \mathbb{C}$, su i praslike $(\partial_z\phi)^{-1}(O)$, $(\partial_{\bar{z}}\phi)^{-1}(O)$ otvoreni, posebno i izmjerivi, skupovi. \square

Lema 4.23

Neka su $U, V \subseteq \mathbb{C}$ otvoreni i $\phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ homeomorfizam koji čuva orijentaciju. Tada diferencijal $D_z\phi$ čuva orijentaciju (kao linearno preslikavanje) u svakoj točki gdje je $D_z\phi$ regularan.

Dokaz. Neka je $D_z\phi = \partial_z\phi(z)dz + \partial_{\bar{z}}\phi(z)d\bar{z}$. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoji točka z tako da $D_z\phi$ mijenja orijentaciju. Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je $z = 0$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da na disku oko nule radiusa 2ϵ , ϕ ima razvoj

$$\phi(z) = D_0\phi(z) + O(z), \quad z \in K(0, 2\epsilon). \quad (4.2)$$

Neka je $P = P(\epsilon, i\epsilon, -\epsilon, -i\epsilon)$ pravokutnik sadržan u $K(0, 2\epsilon)$. Po pretpostavci $D_0\phi$ mijenja orijentaciju, to jest $\det D_0\phi < 0$. Kako ϕ čuva orijentaciju, vidimo da su četverokuti $\phi(Q)$ i $D_0\phi(Q)$ obrnuto orijentirani.

S druge strane, zbog linearnosti diferencijala je kut između vektora $D_0\phi(\epsilon)$ i $D_0\phi(i\epsilon)$ konstantan za svaki $\epsilon > 0$. Neka je

$$\theta := \angle(D_0\phi(\epsilon), D_0\phi(i\epsilon)),$$

gdje je $\theta < 0$ je $D_0\phi$ mijenja orijentaciju. Za dovoljno mali $\epsilon > 0$ se utjecaj člana $O(\epsilon)$ u (4.2) dovoljno smanji, pa gornja nejednakost povlači

$$\angle(\phi(\epsilon), \phi(i\epsilon)) \leq \theta/2 < 0.$$

Za taj ϵ vidimo da su četverokuti $D_0\phi(Q)$ i $\phi(Q)$ jednako orijentirani. Pretpostavka da je $\det D_0\phi < 0$ nas je dovela do kontradikcije, stoga možemo zaključiti da $D_p\phi$ čuva orijentaciju kao linearno preslikavanje u svakoj točki gdje je $D_p\phi$ regularan. \square

Sljedeća propozicija, koju nećemo dokazivati, daje analitičku karakterizaciju za \mathcal{C}^1 kvazikonformalna preslikavanja ϕ na U pomoću Beltramijevog koeficijenta $\mu_\phi = \phi^*\mu_0$. Primjetimo da je povlak Beltramijevog koeficijenta dobro definiran jer smo upravo dokazali *propoziciju 4.19*, da svako \mathcal{C}^1 kvazikonformalno preslikavanje sa U u V pripada klasi $D_0^+(U, V)$. Dokaz sljedeće propozicije može se naći u [1, poglavlje II.B].

Propozicija 4.24: Alternativna definicija kvazikonformalnih preslikavanja [1]

Neka su $U, V \subset \mathbb{C}$ domene i neka je $\phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ homeomorfizam koji čuva orijentaciju. Tada je ϕ K -kvazikonformalno preslikavanje ako i samo ako je

$$|\mu_\phi| = \frac{|\partial_{\bar{z}}\phi|}{|\partial_z\phi|} \leq \frac{K-1}{K+1} \quad \text{na } U.$$

Posebno, ako je ϕ kvazikonformalno preslikavanje, tada je jasno da je $|\mu_\phi| < 1$. Naime, po *lemi 4.23*, $D_p\phi$ čuva orijentaciju za svaki $p \in U$, pa je Beltramijev koeficijent μ_ϕ , kao Beltramijev koeficijent linearnog operatora $D_p\phi$ koji čuva orijentaciju, dobro definiran i po modulu manji od 1.

Uočimo da nam μ_ϕ mjeri dilataciju infinitezimalne elipse u danoj točki na domeni, pa je time ova analitička definicija kvazikonformalnih preslikavanja operativnija, dok je geometrijska definicija globalna i zahtijeva provjeravanje svih četverokuta koji su kompaktno sadržani u domeni.

Vrlo važno svojstvo K -kvazikonformalnih preslikavanja koje ćemo koristiti u primjeni je da su ona uniformno $\frac{1}{K}$ -Holder neprekidna na kompaktima. Dokaz sljedećeg teorema se može naći u [1, str. 33], a mi ga nećemo dokazivati u ovom radu.

Teorem 4.25: Uniformni Hölder uvjet [1]

Neka su U i V domene u \mathbb{C} . Neka je $\phi : U \rightarrow V$ K -kvazikonformalno preslikavanje na U . Tada ϕ zadovoljava lokalno uniformni Hölderov uvjet, to jest, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tako da za svaki kompakt $F \subset U$ vrijedi:

$$|\phi(z_1) - \phi(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|^{\frac{1}{K}}, \quad z_1, z_2 \in F.$$

5 Teorem o Integrabilnosti

5.1 Kvazikonformalna preslikavanja i Beltrami forme na holomorfnim ploham

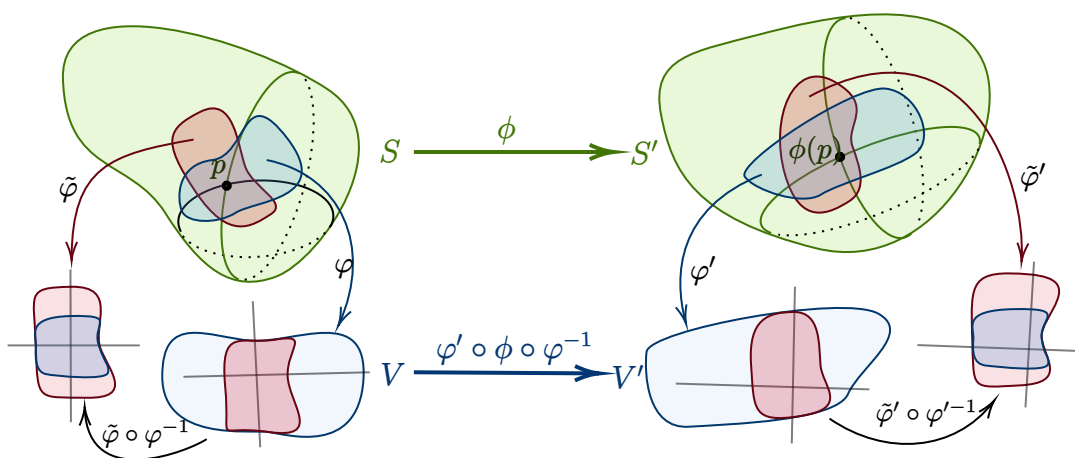
Do sada smo definirali kvazikonformalna preslikavanja, Beltramijeve koeficijente i povlake Beltramijevih koeficijenata na otvorenim podskupovima od \mathbb{C} . Međutim, dani pojmovi se mogu generalizirati na holomorfne plohe, specijalno, na Riemannovu sferu.

Definicija 5.1: K -kvazikonformalna preslikavanja na holomorfnim ploham [2]

Neka su S i S' holomorfne plohe i neka je $\phi : S \rightarrow S'$ homeomorfizam. Neka je $p \in S$ proizvoljna točka i $U_p \subset S$ otvorena okolina točke p , te neka je $U'_{\phi(p)} \subset S'$ otvorena okolina točke $\phi(p)$. Označimo redom karte na S i S' sa $\varphi : U_p \rightarrow V$, i $\varphi' : U'_{\phi(p)} \rightarrow V'$. Kažemo da je preslikavanje ϕ je K -kvazikonformalno ako je, za sve $p \in S$ i za sve parove karata $(\varphi, U_p), (\varphi', U'_{\phi(p)})$ preslikavanje

$$\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_p) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \varphi'(U'_{\phi(p)}) \subseteq \mathbb{C},$$

K -kvazikonformalno.



Slika 19: prikaz preslikavanja $\phi : S \rightarrow S'$ kao preslikavanje između karte na S i karte na S'

Pokažimo dobru definiranoost, to jest da definicija ne ovisi o izboru karti. Za proizvoljnu točku $p \in S$ odaberimo proizvoljnu kartu $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ na okolini \tilde{U} od p i za $\phi(p) \in S'$ odaberimo proizvoljnu kartu $\tilde{\varphi}' : \tilde{U}' \rightarrow \tilde{V}'$ na okolini \tilde{U}' od $\phi(p)$. Možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je $\phi(\tilde{U}) = \tilde{U}'$ jer je ϕ homeomorfizam, pa i otvoreno i neprekidno preslikavanje.

Budući da su prijelazi između karti $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ i $\tilde{\varphi}' \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U' \cap \tilde{U}') \rightarrow \tilde{\varphi}'(U' \cap \tilde{U}')$ biholomorfna preslikavanja po svojstvu (3) iz propozicije

4.15 imamo da je

$$\tilde{\varphi}' \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\tilde{\varphi}' \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^{-1}$$

K -kvazikonformalno ako i samo ako je preslikavanje $\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1}$ K -kvazikonformalno.

Sada ćemo vidjeti kako generalizirati Beltramijeve koeficijente sa otvorenih podskupova od \mathbb{C} u *Beltramijeve forme* na holomorfnim plohama. Kako bismo to napravili, potrebno je uvesti pojam $(-1, 1)$ diferencijalne forme. Vidjeli smo u *poglavljju 1* da linearni operator $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ možemo zapisati u obliku $L(z) = az + b\bar{z}$. Neka je S holomorfná ploha i neka su $a, b : S \rightarrow \mathbb{C}$ funkcije, diferencijalnu 1-formu

$$\omega(p) = a(p)dz + b(p)d\bar{z}$$

koristimo ukoliko želimo zadati linearni operator na tangencijalnom prostoru $T_p S$ u proizvoljnoj točki p na holomorfnj plohi S . Kažemo da je forma oblika $a(p)dz$, $(1, 0)$ forma, a forma oblika $b(p)d\bar{z}$, $(0, 1)$ forma. Motivirani definicijom Beltramijevog koeficijenta linearnog preslikavanja (*definicija 2.8*), definiramo $(-1, 1)$ formu kao omjer $(0, 1)$ forme i $(1, 0)$ forme. Diferencijalna $(-1, 1)$ forma, na tangencijalnom prostoru $T_p S$, $p \in S$, ima oblik

$$f(p) \frac{d\bar{z}}{dz},$$

gdje je $f : S \rightarrow \mathbb{C}$.

Definicija 5.2: Beltramijeva forma [2]

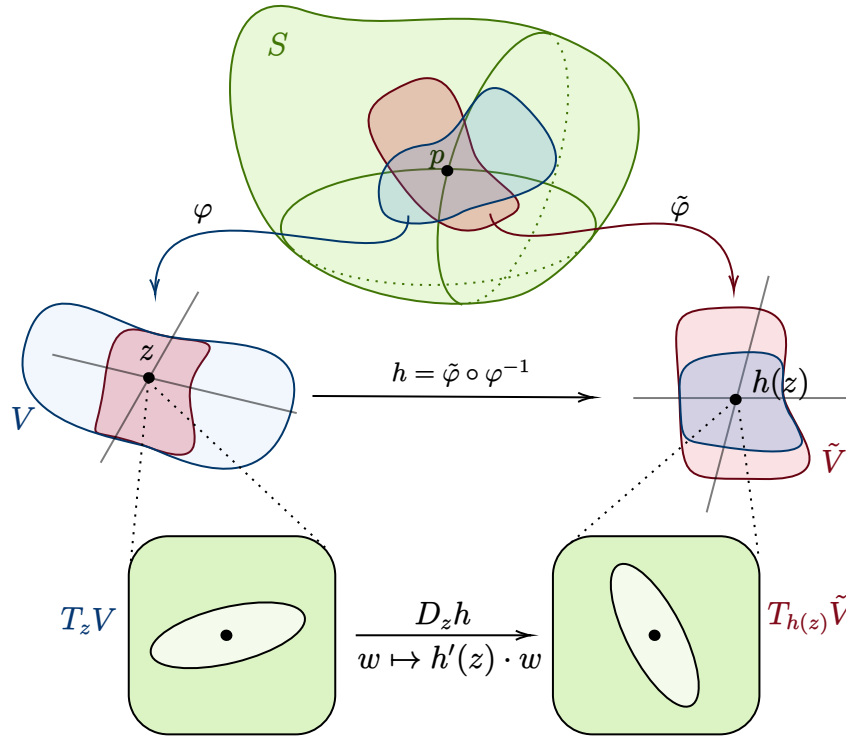
Beltramijeva forma μ na holomorfnj plohi S je $(-1, 1)$ diferencijalna forma na S , takva da za skoro svaku točku $p \in S$ i svaku kartu $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ na otvorenoj okolini U od p u S , postoji Beltramijev koeficijent $\mu_\varphi : V \rightarrow \mathbb{D}$ takav da je

$$\mu|_U = \varphi^* \left(\mu_\varphi \frac{d\bar{z}}{dz} \right) = (\mu_\varphi \circ \varphi) \cdot \frac{\partial_{\bar{z}} \varphi}{\partial_z \varphi},$$

te za proizvoljnu drugu kartu $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{C}$ na otvorenoj okolini \tilde{U} od p u S vrijedi uvijek kompatibilnosti, to jest:

$$\mu_\varphi = h^* \mu_{\tilde{\varphi}}, \tag{5.1}$$

gdje je $h := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ biholomorfná funkcija prijelaza sa $\varphi(U \cap \tilde{U})$ u $\tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$.



Slika 20: Prikaz kompatibilnosti Beltramijeve forme u različitim kartama plohe.

Kako je h biholomorfna uvjet (5.1) se po formuli (3.5) iz *poglavlja 3* može zapisati u sljedećem obliku:

$$\mu_\varphi(z) = \mu_{\tilde{\varphi}}(h(z)) \cdot \frac{\overline{h'(z)}}{h'(z)}, \quad z := \varphi(p). \quad (5.2)$$

Iz prethodne jednadžbe vidimo da je $|\mu_\varphi(z)| = |\mu_{\tilde{\varphi}}(h(z))|$, odakle je dobro definirana sljedeća veličina

$$\|\mu\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{p \in S} |\mu_\varphi(\varphi(p))|,$$

gdje je $\varphi : U_p \rightarrow V$ proizvoljna karta sa okoline $U_p \subset S$ na otvoreni podskup $V \subset \mathbb{C}$. Naime, pokazali smo gore da je $\|\mu\|_\infty$ je neovisna o izboru karte φ oko neke točke $p \in S$.

Definicija 5.3: Skoro kompleksna struktura na holomorfnoj plohi

Skoro kompleksna struktura σ na holomorfnoj plohi S je izmjerivo polje infinitezimalnih elipsi \mathcal{E}_p definiranih u skoro svakoj točki p na S , to jest izmjerivo polje familija koncentričnih elipsi na tangencijalnom svežnju TS .

Kao i u *definiciji 3.1*, Beltramijeva forma μ za koju je $\|\mu\|_\infty < 1$ definira jedinstvenu skoro kompleksnu strukturu σ na S . Objasniti ćemo u nastavku kako je Beltramijevom formom μ određeno izmjerivo polje koncentričnih elipsi na TS po kartama. Time

je određena jedinstvena skoro kompleksna struktura na S . Uz oznake kao na *Slici 20*, vidimo da Beltramijev koeficijent $\mu_\varphi(z)$ definira infinezimalnu elipsu \mathcal{E}_z u z na $V = \varphi(U_p)$. Na slici je prikazana elipsa $E \in \mathcal{E}_z$, reprezentant familije koncentričnih elipsi \mathcal{E}_z na tangencijalnom prostoru T_zV , i elipsa \tilde{E} na $T_{h(z)}\tilde{V}$ koja je njezina slika pod $D_z h$.

Sad ćemo pokazati da je Beltramijev koeficijent elipse \tilde{E} upravo $\mu_{\tilde{\varphi}}(h(z))$. Označimo s μ_E Beltramijev koeficijent elipse E i s $\mu_{\tilde{E}}$ Beltramijev koeficijent elipse \tilde{E} . Imamo da je $\mu_E = \mu_\varphi(z)$, a želimo dokazati da je $\mu_{\tilde{E}} = \mu_{\tilde{\varphi}}(h(z))$.

Prijelaz karata $h = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ je biholomorfizam između V i \tilde{V} , stoga $D_z h : T_zV \rightarrow T_{h(z)}\tilde{V}$ djeluje kao množenje s kompleksnim brojem $h'(z)$. Dakle, $D_z h$ skalira elipsu E_z za $|h'(z)|$ i zakreće je za $\arg h'(z)$. Stoga su, po formuli (2.5), Beltramijevi koeficijenti te dvije elipse su po modulu jednaki

$$|\mu_E| = |\mu_{\tilde{E}}|.$$

Ako mala poluos elipse E ima kutni otklon θ , tada mala poluos elipse \tilde{E} ima kutni otklon $\tilde{\theta} = \theta + \arg h'(z)$. Po definiciji Beltramijevog koeficijenta elipse \tilde{E} imamo:

$$\mu_{\tilde{E}} = |\mu_{\tilde{E}}| \cdot e^{2i\tilde{\theta}} = |\mu_E| \cdot e^{2i(\theta + \arg h'(z))} = \mu_E \cdot e^{2i \arg h'(z)} = \mu_\varphi(z) \cdot \left(\frac{\overline{h'(z)}}{h'(z)} \right)^{-1}.$$

Dakle, elipsa \tilde{E} reprezentira infinezimalnu elipsu s Beltramijevim koeficijentom $\mu_{\tilde{\varphi}}(h(z))$.

Sljedeća definicija je analogon definicije povlaka Beltramijevog koeficijenta na \mathbb{C} iz *poglavljja 3*, ali za holomorfne plohe.

Definicija 5.4: Povlak Beltramijeve forme po kvazikonformalnom preslikavanju na holomorfnim ploham

Neka su S i S' dvije holomorfne plohe i neka je $\phi : S \rightarrow S'$ kvazikonformalno preslikavanje. Neka je $p \in S$ proizvoljna točka i $U_p \subset S$ otvorena okolina točke p , te neka je $U'_{\phi(p)} \subset S'$ otvorena okolina točke $\phi(p)$. Označimo redom karte na S i S' s $\varphi : U_p \rightarrow V$, i $\varphi' : U'_{\phi(p)} \rightarrow V'$.

Neka je μ' Beltramijeva forma na S' . *Povlakom* od μ' po ϕ u oznaci $\phi^* \mu'$, nazivamo Beltramijevu formu na S definiranu s:

$$(\phi^* \mu')_\varphi := (\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1})^* \mu'_{\varphi'},$$

u svim točkama $p \in S$ i za sve parove karata $(\varphi, U_p), (\varphi', U'_{\phi(p)})$ od S i S' , tim redom.

Pokažimo da je ovako definiran povlak dobro definirana Beltramijeva forma na S , to jest da je neovisna o izboru karata na S i S' , te da vrijedi usklađenost po kartama na S' iz *definicije 5.2* Beltramijeve forme na S' . Za točku $p \in S$ odaberimo neku drugu kartu $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ na okolini \tilde{U} od p i za $\phi(p) \in S'$ odaberimo neku drugu kartu

$\tilde{\varphi}' : \tilde{U}' \rightarrow \tilde{V}'$ na okolini \tilde{U}' od $\phi(p)$. Neka su $h := \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ i $h' := \varphi' \circ \tilde{\varphi}'^{-1}$ holomorfne funkcije prijelaza karata ploha S i S' . Imamo sljedeći dijagram među kartama.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{V}, (\phi^* \mu')_{\tilde{\varphi}}) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}' \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1}} & (\tilde{V}', \mu'_{\tilde{\varphi}'}) \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ (V, (\phi^* \mu')_{\varphi}) & \xrightarrow{\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1}} & (V', \mu'_{\varphi'}) \end{array}$$

Naime,

$$\begin{aligned} (\phi^* \mu')_{\tilde{\varphi}} &= (\tilde{\varphi}' \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^* \mu'_{\tilde{\varphi}'} = (\tilde{\varphi}' \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^* ((h')^* \mu'_{\varphi'}) = \\ &= (h' \circ \tilde{\varphi}' \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^* \mu'_{\varphi'} = (\varphi' \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1})^* \mu'_{\varphi'} = \\ &= (\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1} \circ h)^* \mu'_{\varphi'} = h^* ((\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1})^* \mu'_{\varphi'}) \\ &= h^* (\phi^* \mu')_{\varphi}. \end{aligned}$$

5.2 Teorem integrabilnosti

Neka su U i V domene u \mathbb{C} . Vidjeli smo u *propoziciji 4.19* da kvazikonformalni homeomorfizam $\phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$ inducira skoro kompleksnu strukturu σ_{ϕ} na U koja je ograničene dilatacije, ili, ekvivalentno, inducira Beltramijev koeficijent $\mu_{\phi} = \frac{\partial_{\bar{z}} \phi}{\partial_z \phi}$ definiran skoro svuda, koji zadovoljava $\|\mu_{\phi}\|_{\infty} < 1$.

Teorem integrabilnosti ispod odgovara na obratno pitanje: ako nam je dan Beltramijev koeficijent μ na domeni U , pod kojim uvjetima možemo pronaći kvazikonformalno preslikavanje $\phi : U \rightarrow V$ (posebno, $\phi \in D_0^+(U, V)$), $V \subseteq \mathbb{C}$, takvo da

$$\partial_{\bar{z}} \phi(z) = \mu(z) \partial_z \phi(z) \quad (5.3)$$

vrijedi za skoro sve $z \in U$? Za takvo preslikavanje ϕ kažemo da *integrira* μ , te se stoga zove *integrirajuće preslikavanje*. Jednadžba (5.3.) zove se *Beltramijeva jednadžba*. Navedimo sad bez dokaza *Teorem o Integrabilnosti* kojeg su dokazali, Morrey, Bojarski,

Ahlfors i Bers. Dokaz se može pronaći u [2, teorem 1.27]. Prvo iskažimo lokalnu verziju teorema.

Teorem 5.5: Teorem integrabilnosti - lokalna verzija [2]

Neka je $U \subset \mathbb{C}$ otvoren skup koji je ili konformalno ekvivalentan jediničnom disku \mathbb{D} ili $U = \mathbb{C}$. Neka je σ skoro kompleksna struktura na U koja odgovara Beltramijevom koeficijentu μ . Ako esencijalni supremum od $|\mu|$ na U zadovoljava

$$\|\mu\|_{\infty} = k < 1,$$

tada je μ *integrabilna*. Preciznije, postoji K -kvazikonformalno preslikavanje $\phi :$

$U \rightarrow \mathbb{D}$ (ili \mathbb{C}), za $K = \frac{1+k}{1-k}$, koje rješava Beltramijevu jednadžbu:

$$\mu(z) = \frac{\partial_{\bar{z}}\phi(z)}{\partial_z\phi(z)},$$

za skoro sve $z \in U$. Štoviše, ϕ je jedinstven do na post-kompoziciju sa automorfizmima od \mathbb{D} (ili \mathbb{C}).

U jeziku povlaka, rekli bismo da postoji kvazikonformalno preslikavanje ϕ takvo da $\mu = \phi^*\mu_0$ skoro svuda.

Iskazan ovako, Teorem integrabilnosti možemo primijeniti na podskupovima kompleksne ravnine. Međutim, često se susrećemo sa preslikavanjima na Riemannovoj sferi i zanima nas globalna skoro kompleksna struktura na $\hat{\mathbb{C}}$. Iskažimo globalnu verziju Teorema integrabilnosti.

Teorem 5.6: Teorem integrabilnosti - globalna verzija [2]

Neka je S jednostavno povezana Riemannova ploha koja je konformalno ekvivalentna Riemannovoj sferi $\hat{\mathbb{C}}$ i neka je σ skoro kompleksna struktura na S sa izmjerivom Beltramijevom formom μ . Ako esencijalni supremum od $|\mu|$ na S zadovoljava

$$\|\mu\|_\infty = k < 1,$$

tada je μ integrabilna. Preciznije, postoji K -kvazikonformalno preslikavanje $\phi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, za $K = \frac{1+k}{1-k}$, takvo da

$$\mu = \phi^*\mu_0.$$

Štoviše, ϕ je jedinstven do na post-kompoziciju sa automorfizmima od $\hat{\mathbb{C}}$.

Kao što se može vidjeti u [2, *teorem 1.28*], globalni teorem integrabilnosti slijedi iz lokalnog. Naime, potrebno je primijeniti lokalni teorem integrabilnosti na svakoj karti plohe S da bismo dobili integrirajuće preslikavanje na svakoj karti i zatim konstruirati globalno integrirajuće preslikavanje na S koje se u svakoj karti podudara sa integrirajućim preslikavanjem na toj karti.

U slučaju globalnog Teorema integrabilnosti, ϕ je jedinstven do na post-kompoziciju sa automorfizmima od $\hat{\mathbb{C}}$, to jest nekonstantnim Möbiusovim transformacijama koje su jedinstveno određene zadavanjem vrijednosti u tri različite točke. Stoga možemo zadati dodatni *normalizacijski* uvjet na ϕ tako da, uz dani uvjet, integrirajuće preslikavanje bude jedinstveno. Na primjer, ako su s_1, s_2 i s_3 različite točke na S , tada će ϕ biti jedinstveno integrirajuće preslikavanje uz normalizaciju $\phi(s_1) = 0$, $\phi(s_2) = 1$ i $\phi(s_3) = \infty$.

6 Lokalna dinamika analitičkih funkcija oko fiksne točke

U ovom poglavlju istražujemo lokalnu dinamiku holomorfne preslikavanja $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ na nekoj okolini fiksne točke. Tražimo postojanje koordinatnog sustava u fiksnim točkama, takvog da preslikavanje u tom koordinatnom sustavu bude što jednostavnije (npr. ako je moguće linearno). Taj proces zove se *normalizacija*, i dobivamo lokalne *normalne forme*.

6.1 Klasifikacija fiksnih točaka

Neka je z_0 fiksna točka analitičke funkcije f , to jest, $f(z_0) = z_0$. Broj $\lambda = f'(z_0)$ zovemo *multiplikator* funkcije f u točki z_0 .

Definicija 6.1: [2]

Klasificiramo fiksnu točku z_0 prema *multiplikatoru* $\lambda = f'(z_0)$ na sljedeći način:

- Jako privlačna, *engl. superattracting*, ako je $\lambda = 0$,
- Privlačna, *engl. attracting*, ako je $0 < |\lambda| < 1$,
- Odbojna, *engl. repelling*, ako je $|\lambda| > 1$,
- Neutralna, ako je $|\lambda| = 1$.

Razlikujemo dvije vrste neutralnih fiksnih točaka:

- Racionalno neutralna, ako $\exists n \in \mathbb{N}, \lambda^n = 1$,
- Iracionalno neutralna, ili ako $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda^n \neq 1$.

Specijalno, kažemo da je racionalno neutralna fiksna točka *parabolična* ako je $\lambda = 1$.

Kako je f analitička u z_0 , postoji okolina U točke z_0 tako da f ima razvoj u Taylorov red na U , preciznije, f ima oblik:

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + a_p(z - z_0)^p + \dots, \quad z \in U,$$

gdje je $p \geq 2$ i $a_p \neq 0$ prvi ne-nul koeficijent.

Definicija 6.2: [2]

Kažemo da je $f : U \rightarrow U$ *konformalno konjugirana* preslikavanju $g : V \rightarrow V$, $U, V \subseteq \mathbb{C}$ ako postoji konformalno preslikavanje $\varphi : U \rightarrow V$ takvo da je $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$,

to jest, ako vrijedi

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z)). \quad (6.1)$$

Jednadžbu (6.1) zovemo *Schröderovom jednadžbom*.

Preslikavanja f i g se mogu smatrati kao ista preslikavanja koja prikazujemo u različitim koordinatnim sustavima. Definicija povlači da su f^n i g^n konformalno konjugirana za sve $n \in \mathbb{N}$,

$$g^n = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}.$$

Također su i f^{-1} i g^{-1} konformalno konjugirani, kad god su inverzi dobro definirani,

$$g^{-1} = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}.$$

Pokazat ćemo da analitičku funkciju na okolini fiksne točke možemo konformalno konjugirati lokalno oko fiksne točke sa linearnim preslikavanjem $g(\zeta) = \lambda\zeta$ u slučaju $|\lambda| \neq 0, 1$ i sa $g(\zeta) = a\zeta^p$ u slučaju $\lambda = 0$.

U slučaju *racionalno neutralnih* fiksnih točaka ćemo pokazati postojanje konjugacije sa jednostavnom konačnom formom u domeni koja ima fiksnu točku z_0 na rubu. Naime, konjugacija neće biti konformalna na punom disku oko fiksne točke, već na preklapajućim otvorenim sektorima sa vrhom u fiksnoj točki.

U slučaju *iracionalno neutralnih* fiksnih točaka je analiza znatno kompliciranija te ju stoga nećemo obrađivati u ovom radu.

6.2 Privlačne i odbojne fiksne točke: Koenigsove linearizacijske koordinate

Dajemo prvo opis dinamike (ponašanja iteracija) na okolini fiksne točke. Pretpostavimo da je z_0 *privlačna* fiksna točka za f koja je analitička na nekom disku D oko z_0 .

$$|f(z) - z_0| = |\lambda(z - z_0) + a_p(z - z_0)^p + \dots| \leq |\lambda| \cdot |z - z_0| + |\mathcal{O}((z - z_0)^p)|, \quad z \in D, p \geq 2.$$

Kako je $|\lambda| < 1$ postoji $\epsilon > 0$ takav da je $\rho := |\lambda| + \epsilon < 1$. Za dani $\epsilon > 0$ postoji okolina U od z_0 takva da vrijedi nejednakost:

$$|\mathcal{O}((z - z_0)^p)| \leq \epsilon \cdot |z - z_0|, \quad \forall z \in U.$$

Imamo da je $|f(z) - z_0| \leq (|\lambda| + \epsilon) \cdot |z - z_0| = \rho \cdot |z - z_0|$, no tada induktivno slijedi da je

$$|f^n(z) - z_0| \leq \rho^n \cdot |z - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{uniformno na } U.$$

Stoga, iteracije f^n konvergiranju uniformno k fiksnoj točki z_0 na okolini U . Dakle, dinamika je privlačna u fiksnu točku za sve točke na nekoj otvorenoj okolini fiksne točke.

Definicija 6.3: [2]

Privlačni bazen $\mathcal{A}_f(z_0)$ privlačne fiksne točke z_0 funkcije $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ je skup

$$\mathcal{A}_f(z_0) := \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \right\}$$

Povezana komponenta koja sadrži z_0 zove se *neposredni privlačni bazen* od z_0 i označava se sa $\mathcal{A}_f^*(z_0)$.

U našem slučaju imamo da je

$$\mathcal{A}_f(z_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U),$$

primijetimo da je to otvoreni skup oko z_0 , kao unija otvorenih skupova oko z_0 , te da sadrži U .

Sljedeći teorem o linearizaciji je dokazao G. Koenings 1884. godine, a dokaz možete pogledati u [4, str. 31].

Teorem 6.4: Koenigsova linearizacija [2]

Pretpostavimo da $f : U \rightarrow U$ ima privlačnu fiksnu točku $z_0 \in U$, sa *multiplikatorom* λ takvim da je $0 < |\lambda| < 1$. Tada postoji otvorena okolina V oko 0 i konformalna bijekcija $\zeta = \varphi(z)$ sa okoline U od z_0 u okolinu V od 0 koja konjugira $f(z)$ sa linearnom funkcijom $g(\zeta) = \lambda\zeta$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ V & \xrightarrow{\lambda \cdot} & V \end{array}$$

Konjugacija φ je jedinstvena, do na homotetiju.

U ovom slučaju jednadžba (6.1) koju zadovoljava konformalna konjugacija φ sada postaje takozvana *jednadžba linearizacije*

$$\varphi(f(z)) = \lambda \cdot \varphi(z). \quad (6.2)$$

Primjetimo da iteriranjem dobivamo $\varphi(f^m(z)) = \lambda^m \varphi(z)$, $z \in U$. Po formuli (6.2) možemo analitički proširiti φ na čitav bazen privlačnosti. Neka je $z \in \mathcal{A}_f(z_0)$, tada postoji najmanji $m \in \mathbb{N}$ takav da $f^m(z) \in U$. Definiramo

$$\tilde{\varphi}(z) := \frac{\varphi(f^m(z))}{\lambda^m}.$$

Proširenje $\tilde{\varphi}$ je dobro definirano holomorfnu preslikavanje, podudara se na U s φ , te zadovoljava jednadžbu (6.2). Tako dobivamo sljedeći korolar Koenigsovog teorema.

Korolar 6.5: Globalna linearizacija na bazenu privlačnosti [2]

Neka je z_0 privlačna fiksna točka analitičkog preslikavanja f sa multiplikatorom $\lambda \neq 0$. Tada postoji holomorfno preslikavanje $\tilde{\varphi} : \mathcal{A}_f(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$, takvo da dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_f(z_0) & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}_f(z_0) \\ \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

komutira i tako da je $\tilde{\varphi}$ na nekoj okolini od z_0 konformalna bijekcija na okolinu od 0. Štoviše, $\tilde{\varphi}$ je jedinstveno do na množenje s konstantom.

Egzistencija konjugirajućeg preslikavanja za odbojnu fiksnu točku slijedi direktno iz privlačnog slučaja. Neka je

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \mathcal{O}((z - z_0)^2), \text{ za } |\lambda| > 1.$$

Tada inverzno preslikavanje $f^{-1}(w) = z_0 + \frac{1}{\lambda}(w - z_0) + \mathcal{O}((w - z_0)^2)$, ima privlačnu fiksnu točku u z_0 s multiplikatorom $\frac{1}{\lambda}$. Po *teoremu 6.4* postoji preslikavanje φ koje konjugira $f^{-1}(w)$ sa $g(\zeta) = \frac{1}{\lambda} \cdot \zeta$. Dakle,

$$\varphi(f^{-1}(w)) = \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi(w) \implies \lambda \cdot \varphi(z) = \varphi(f(z)).$$

6.3 Jako privlačne fiksne točke : Boettcherove normalizacijske koordinate

Ako je z_0 jako privlačna fiksna točka, postoji okolina U točke z_0 na kojoj f ima razvoj

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots, \quad z \in U, \quad a_p \neq 0, \quad p \geq 2.$$

Postojanje konformalne konjugacije u okolini jako privlačne fiksne točke je prvi dokazao L. E. Boettcher, za dokaz pogledati [4, str. 33].

Teorem 6.6: Boettcherova normalizacija [2]

Pretpostavimo da $f : U \rightarrow U$ ima jako privlačnu fiksnu točku u z_0 . Tada postoji okolina V oko 0 konformalna bijekcija φ sa okoline U od z_0 u okolinu V od 0 koja konjugira $f(z)$ sa $g(\zeta) = \zeta^p$:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ V & \xrightarrow{(\cdot)^p} & V \end{array}$$

U ovom slučaju je funkcijska jednadžba koju zadovoljava Boettcherova konformalna konjugacija

$$\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p, \quad z \in U.$$

6.4 Racionalno neutralne fiksne točke

Racionalno neutralne fiksne točke holomorfnog preslikavanja $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ imaju multiplikator λ koji je n -ti korijen iz jedinice, za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, postoji prirodan broj $m \leq n$, relativno prost sa n , tako da je $\lambda = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$. Tada na nekoj okolini U oko z_0 f ima sljedeći razvoj:

$$f(z) = z_0 + e^{2\pi i \frac{m}{n}}(z - z_0) + a_p \cdot (z - z_0)^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2}), \quad a_p \neq 0, \quad p \geq 1.$$

Napomena 1

Radi jednostavnijeg zapisa možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti da je $z_0 = 0$ *racionalno neutralna fiksna točka*. Naime, ako konjugiramo f sa translacijom $\tau_{z_0} : z \mapsto z - z_0$ dobivamo na okolini nule:

$$\begin{aligned} \tau_{z_0} \circ f \circ \tau_{z_0}^{-1}(z) &= f(z + z_0) - z_0 = \\ &= e^{2\pi i \frac{m}{n}} z + a_p \cdot z^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2}). \end{aligned}$$

Stoga pišemo $f(z) = \lambda z + a_p \cdot z^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2})$, $z \sim 0$, gdje je $\lambda = e^{\frac{2\pi i m}{n}}$. Ako iteriramo funkciju f dobivamo:

$$\begin{aligned} f^2(z) &= \lambda f(z) + a_p f(z)^{p+1} + \mathcal{O}(f(z)^{p+2}) = \\ &= \lambda^2 z + (\lambda a_p + a_p \lambda^{p+1}) \cdot z^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2}). \end{aligned}$$

Primijetimo da je stupanj koeficijenta λ uz z porastao za 1. Budući da je $\lambda^n = 1$, iteriranjem funkcije f n puta dobivamo:

$$f^n(z) = z + a z^{\tilde{p}+1} + \mathcal{O}(z^{\tilde{p}+2}), \quad \text{za neki } \tilde{p} \geq p, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (6.3)$$

Zato u nastavku istražujemo lokalnu dinamiku oko 0 za $g(z) := f^n(z)$, koji odgovara slučaju da je $\lambda = 1$ (takozvani *parabolični slučaj*).

Napomena 2

Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $a = 1$, to jest da je

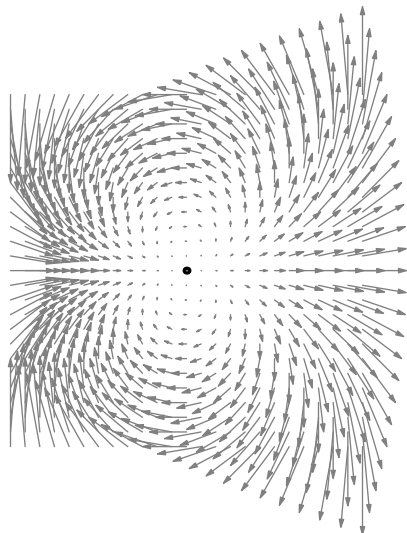
$$g(z) = z + z^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2}), \quad z \sim 0.$$

Naime, neka je $c \in \mathbb{C}$ takav da $c^p = a$. Tada konjugacijom g sa $\varphi(z) = cz$ dobivamo:

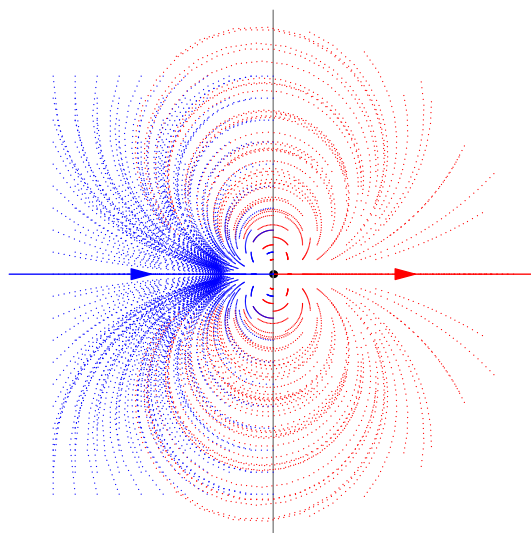
$$(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1})(z) = c \cdot g\left(\frac{z}{c}\right) = c \cdot \frac{z}{c} + c \cdot a \left(\frac{z}{c}\right)^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2}) = z + z^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2}).$$

Kažemo da je broj $p + 1$ *multiplicitet* parabolične fiksne točke preslikavanja g .

Primjer 6.1. Promotrimo $g(z) = z + z^2$ na kvadratu $\mathbb{K}_\epsilon = \{ z = k + li \mid k, l \in (-\epsilon, \epsilon) \}$. Ako svakoj točki z na toj okolini pridružimo vektor sa vrhom u $z + z^2$ možemo vidjeti na slici 21 kako g deformira lokalni kvadrat oko parabolične fiksne točke.



Slika 21: Slika kvadrata \mathbb{K}_ϵ po preslikavanju g za $\epsilon = 0.25$.



Slika 22: Prikaz orbita točaka u kvadratu \mathbb{K}_ϵ za $\epsilon = 0.15$.

Na slici 22 su prikazane orbite točaka pod višestrukom iteracijom funkcije $z \mapsto z + z^2$. Crvenom (plavom) su označene početne točke na desnoj (lijevoj) poluravnini u kvadratu \mathbb{K}_ϵ . Vidimo da parabolična fiksna točka ima jedan odbojan i jedan privlačan smjer, te da neke od crvenih točaka iz odbojne desne poluravnine kroz iteracije završavaju na lijevoj poluravnini i bivaju privučene paraboličnom fiksnom točkom 0.

Definicija 6.7: Privlačne i odbojne laticе [8]

Neka je f holomorfnа funkcija na nekoj okolini U ishodišta sa fiksnom točkom u ishodištu, takva da je $f'(0) \neq 0$ ^a. Otvoreni skup $\mathcal{P} \subset U$ je *privlačna latica* (engl. *attracting petal*) za f u fiksnoj točki 0 ako:

- $f(\overline{\mathcal{P}}) \subset \mathcal{P} \cup \{0\}$,
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(\overline{\mathcal{P}}) = \{0\}$.

Otvoreni skup $\mathcal{P}' \subset f(U)$ je *odbojna latica* (engl. *repelling petal*) za f u fiksnoj točki 0 ako je \mathcal{P}' privlačna latica za $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow U$.

^a $f'(0) \neq 0$ osigurava da je f lokalni biholomorfizam u 0, pa po potrebi smanjimo okolinu U tako da f bude biholomorfizam na U

Pokazat ćemo da je dinamika parabolične fiksne točke u obliku latica cvijeta, gdje

se izmjenjuju privlačne i odbojne latice, te da svaka latica ima *tangencijalni smjer* privlačenja odnosno odbijanja trajektorija sa početnom točkom u toj latici.

Definicija 6.8: Tangencijalni smjerovi [8]

Za kompleksni broj \mathbf{v} kažemo da je *privlačni tangencijalni smjer* za dinamiku parabolične fiksne točke funkcije

$$f(z) = z + z^{p+1} + O(z^{p+2}), \quad z \sim 0,$$

ako je $\mathbf{v}^p = -1$, i kažemo da je *odbojni tangencijalni smjer* ako je $\mathbf{v}^p = 1$.

Ukoliko je koeficijent ispred z^{p+1} kompleksan broj $a \neq 1$ tada se tangencijalni smjerovi zakreću ovisno o argumentu kompleksnog broja a .

Sljedeći teorem su zasebno dokazali Leau, Fatou i Julia. Za precizan dokaz pogledati [8, str. 112].

Teorem 6.9: Teorem o "paraboličnom cvijetu" [8]

Pretpostavimo da f holomorfna u 0 ima paraboličnu fiksnu točku u ishodištu multipliciteta $p + 1$.

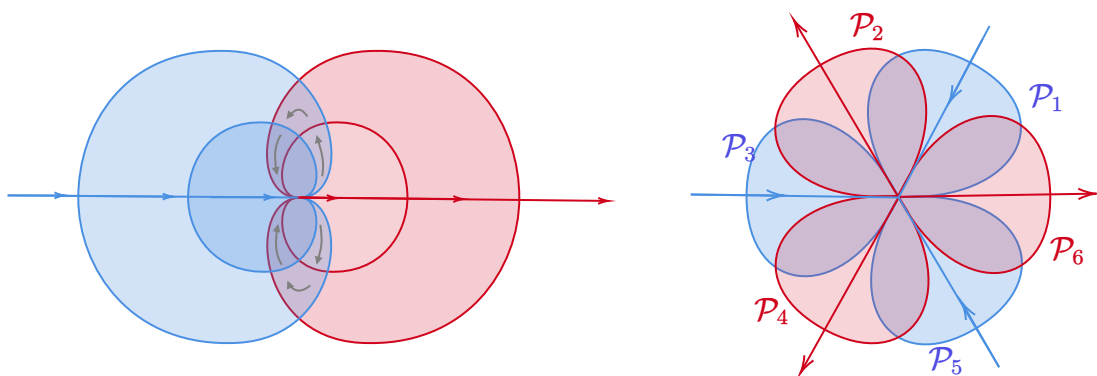
Tada postoje $2p$ otvorenih latica $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_{2p}$ u ishodištu, koje su ciklički numerirane, tako da su latice s neparnim indeksima privlačne a latice s parnim indeksima odbojne, te su postavljene oko ekvidistantnih redom odbojnih i privlačnih tangencijalnih smjerova $(\pm 1)^{\frac{1}{p}}$.

Svaka latica \mathcal{P}_k ima neprazan presjek samo sa svojim susjedima \mathcal{P}_{k-1} i \mathcal{P}_{k+1} , a disjunktna je sa ostalim laticama.

Dodatno, latice mogu biti odabrane tako da unija

$$\bigcup_{k=1}^{2p} \mathcal{P}_k \cup \{0\}$$

pokriva otvorenu okolinu oko ishodišta.



Slika 23: Prikaz latica za parabolične fiksne točke multipliciteta $p + 1 = 2$ (lijevo) i $p + 1 = 4$ (desno).

U skladu s gornjom definicijom *privlačnog (odbojnog) tangencijalnog smjera* vidimo da je svakoj latici \mathcal{P}_k pridružen centralni tangencijalni privlačni (odbojni) smjer $\mathbf{v}_k = (-1)^k e^{\frac{i\pi k}{p}}$, $k \in \{1, 2, \dots, 2p\}$. Za svaku točku iz privlačne laticе iteracije pod f konvergiraju u paraboličnu točku duž pripadnog privlačnog smjera, a za svaku točku iz odbojne laticе iteracije pod f^{-1} konvergiraju u paraboličnu točku duž pripadnog odbojnog smjera.

7 Primjena kvazikonformalnih preslikavanja

7.1 Normalizacija parabolične fiksne točke i Fatouove koordinate

Iako općenito f nije konjugirana linearnom dijelu niti konačnoj normalnoj formi u punoj okolini svoje parabolične fiksne točke, pokazuje se da je neka vrsta analitičke normalizacije unutar svake od latica ipak moguća. Naime, unutar svake laticе analitički konjugiramo funkciju sa 1–tokom analitičkog polja. Na svakoj latici nalazimo normalizacijsku (takozvanu *Fatouovu*) koordinatu u kojoj je f konjugirana translaciji za 1, za koju se lako vidi da je 1–tok konstantnog polja $1 \frac{d}{dz}$, analitičkog u 0. Time smo f također uložili u polje po laticama.

Teorem 7.1: Teorem analitičke normalizacije parabolične fiksne točke [8]

Za svaku laticu \mathcal{P} oko parabolične fiksne točke funkcije f postoji jedno i, do na kompoziciju s translacijom, jedinstveno konformalno ulaganje

$$\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C},$$

koja zadovoljava *Abelovu funkcijsku jednadžbu*:

$$\alpha(f(z)) = 1 + \alpha(z), \quad \forall z \in \mathcal{P} \cap f^{-1}(\mathcal{P}).$$

Linearizacijsku koordinatu $\alpha(z)$ zovemo *Fatouovom koordinatom* u latici \mathcal{P} .

Primijetimo da je Fatouova koordinata zamjena varijabli u kojoj se tok 'izravnava', to jest trajektorije od f postaju translacije za 1.

Dokaz. Uz već postojeće pretpostavke opisane u *napomeni 1* ($z_0 = 0$) i *napomeni 2* ($a = 1$) u *poglavlju 6*, funkcija $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se za neki dovoljno mali $\epsilon > 0$ na otvorenom disku $D_0(\epsilon)$ oko ishodišta može zapisati u obliku:

$$f(z) = z + z^p + \mathcal{O}(z^{p+1}).$$

Dokaz ćemo rastaviti na dva slučaja: **1.** $p = 1$ i **2.** $p > 1$. Pratimo skicu dokaza iz [4, poglavlje II.5.] koja koristi kvazikonformalna preslikavanja, te članak [12].

1. slučaj : $p = 1$

Na otvorenoj okolini $D_0(\epsilon)$ oko ishodišta, za neki dovoljno mali $\epsilon > 0$, za $p = 1$ funkcija f ima oblik:

$$f(z) = z + z^2 + \mathcal{O}(z^3).$$

Konjugiranjem funkcije f sa inverzijom $\tau(z) = -\frac{1}{z}$, koja preslikava disk oko nule radijusa ϵ u disk oko beskonačnosti radiusa $\frac{1}{\epsilon}$ (vidjeti *sliku 24*), možemo definirati $g : D_\infty\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sa $g := \tau \circ f \circ \tau^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} D_0(\epsilon) & \xleftarrow{\tau^{-1}} & D_\infty\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\tau} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Budući da su po konstrukciji f i g konformalno konjugirani, a f holomorfnu u nuli, i g mora biti holomorfnu u beskonačnosti. Stoga na okolini $D_\infty\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$, g ima razvoj:

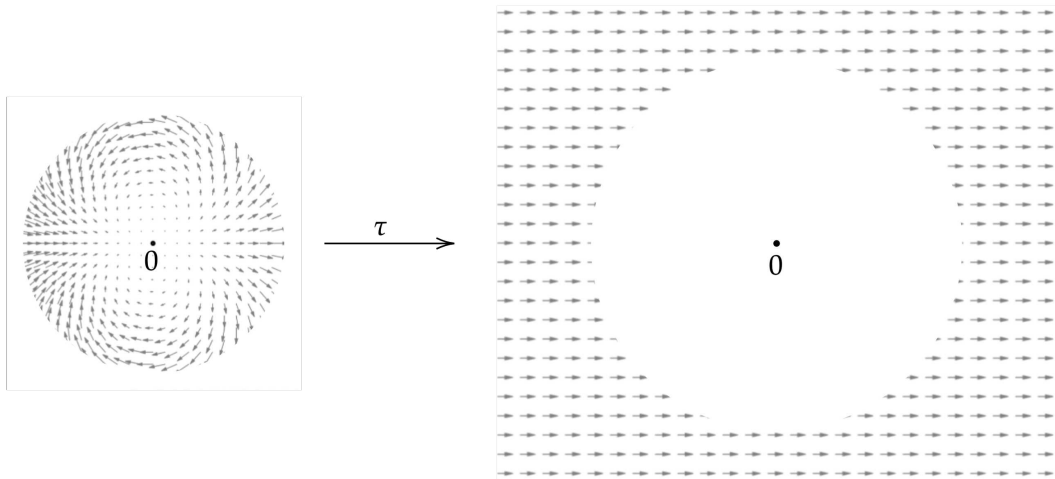
$$g(z) := (\tau \circ f \circ \tau^{-1})(z) = -f\left(-\frac{1}{z}\right)^{-1} = -\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)^{-1}, \quad z \in D_\infty\left(\frac{1}{\epsilon}\right),$$

odakle dobivamo da je

$$g(z) = z + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D_\infty\left(\frac{1}{\epsilon}\right). \quad (7.1)$$

Slično se, derivacijom kompozicije, dobiva:

$$g'(z) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \in D_\infty\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$



Slika 24: Prikaz djelovanja preslikavanja τ na disk oko nule radijusa ϵ . U domeni je prikazano lokalno djelovanje funkcije f (kao na *slici 21*) dok je u kodomeni prikazano približno djelovanje funkcije g kao translacije za 1.

Primjetimo u formuli (7.1) da smo konjugiranjem s konformalnim preslikavanjem τ funkciju f prebacili u skoro translaciju za 1. Dokazat ćemo sad, metodom kvazi-konformalne kirurgije, postojanje konformalne konjugacije φ koja konjugira g baš sa translacijom $G(z) = z + 1$.

Za proizvoljni $A \in \mathbb{R}^+$ definirajmo $V_A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > A \}$. Neka je $L_A := \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) = A \}$ vertikalni pravac koji je rub skupa V_A . Tada je $g(L_A)$ glatka krivulja koja je aproksimacija translacije pravca L_A za 1. Preziznije, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji dovoljno veliki $A > 0$ takav da vrijede sljedeće nejednakosti

$$|g(z) - (z + 1)| \leq \varepsilon, \quad \text{i} \quad |g'(z) - 1| \leq \varepsilon, \quad z \in V_A. \quad (7.2)$$

Štoviše, g je asimptotska translaciji kad $\Im(z) \rightarrow \pm\infty$ na L_A . Naime, neka je $z = A + iy \in L_A$, tada je

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |g(z) - (z + 1)| \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{O} \left(\left| \frac{1}{A + iy} \right| \right) = 0.$$

Primjetimo i da je gornji limes uniforman kad $\Im(z) \rightarrow \pm\infty$ na čitavom V_A .

Neka je $\mathcal{S} := \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(\zeta) \leq 1 \}$ vertikalna traka u kompleksnoj ravnini koju ćemo zvati ζ -ravnina. Neka je \mathcal{T}_A vertikalna traka ograničena s L_A i $g(L_A)$ u originalnoj ravnini koju nadalje zovemo z -ravnina.

Lema 7.2: [4]

Za g kao gore i dani $A > 0$, difeomorfizam $h_A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_A$ definiran formulom

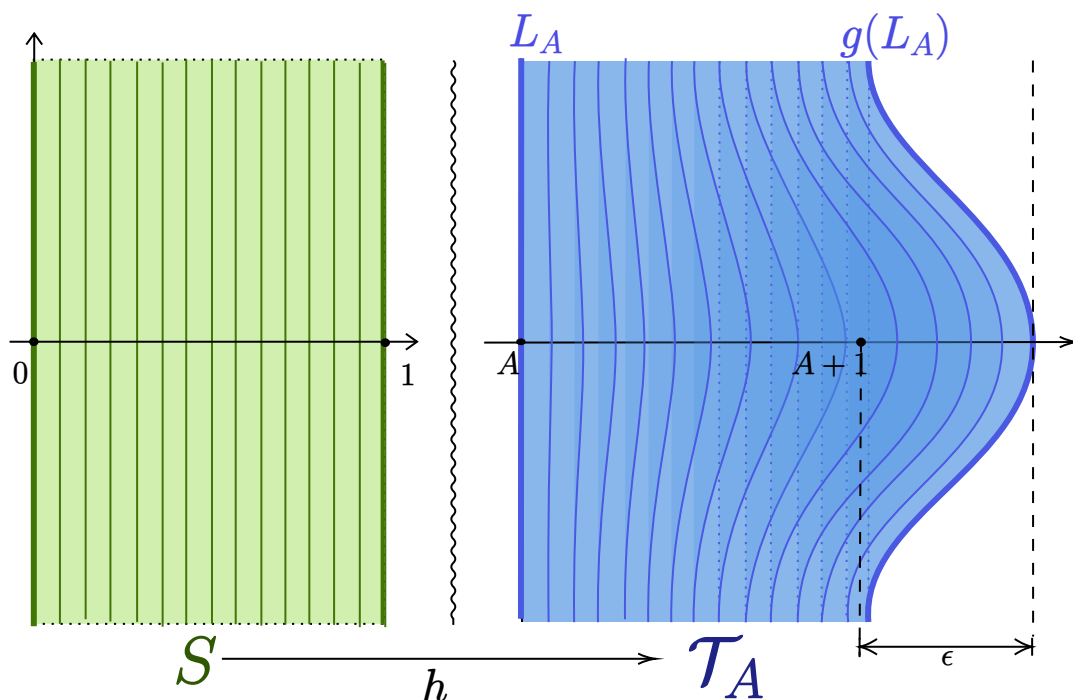
$$h_A(\xi + i\eta) := (1 - \xi) \cdot (A + i\eta) + \xi \cdot g(A + i\eta),$$

je kvazikonformalno preslikavanje za koje vrijedi:

$$h_A(i\eta) = A + i\eta, \quad \text{i} \quad h_A(1 + i\eta) = g(A + i\eta).$$

Dokaz. Neka je $\zeta = \xi + i\eta \in \mathcal{S}$, dakle $\xi \in [0, 1]$ i $\eta \in \mathbb{R}$.

Ovako definirano preslikavanje $h_A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_A$ je očito (realni) difeomorfizam, $h_A \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}, \mathcal{T}_A)$.



Slika 25 : Prikaz difeomorfizma $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_A$.

Za $\zeta = \xi + i\eta \in \text{Int}(\mathcal{S})$ računamo

$$\frac{\partial h_A}{\partial \xi}(\zeta) = g(A + i\eta) - (A + i\eta), \quad \text{i} \quad \frac{\partial h_A}{\partial \eta}(\zeta) = i(1 - \xi) + i\xi g'(A + i\eta).$$

Kako bismo dokazali da je h kvazikonformalno preslikavanje, potrebno je po *propoziciji 4.23* dokazati da h_A čuva orijentaciju i pronaći $K \in [1, \infty)$ takav da je $|\mu_{h_A}| \leq \frac{K-1}{K+1}$. Imamo da za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji dovoljno veliki $A > 0$ u definiciji h_A takav da je:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h_A}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \right| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\partial h_A}{\partial \xi}(\zeta) + i \frac{\partial h_A}{\partial \eta}(\zeta) \right| \\ &= \frac{1}{2} |g(A + i\eta) - (A + i\eta) - (1 - \xi) - \xi g'(A + i\eta)| \\ &= \frac{1}{2} |g(A + i\eta) - (A + i\eta + 1) - \xi(g'(A + i\eta) - 1)| \\ &\leq \frac{1}{2} |g(A + i\eta) - (A + i\eta + 1)| + \frac{\xi}{2} |(g'(A + i\eta) - 1)| \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{\xi}{2} \varepsilon \leq \varepsilon, \quad \zeta \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

S druge strane želimo ograditi $|\partial_{\zeta} h_A(\zeta)|$ odozdo, zato koristimo sljedeći oblik nejednakosti trokuta:

$$\left| \frac{\partial h_A}{\partial \zeta}(\zeta) \right| \geq 1 - \left| \frac{\partial h_A}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) - 1 \right|, \quad \zeta \in \mathcal{S}, \quad (7.3)$$

stoga računamo:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial h_A}{\partial \zeta}(\zeta) - 1 \right| &= \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_A}{\partial \xi}(\zeta) - i \frac{\partial h_A}{\partial \eta}(\zeta) \right) - 1 \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} (g(A + i\eta) - (A + i\eta) + (1 - \xi) + \xi g'(A + i\eta)) - 1 \right| \\
&= \frac{1}{2} |g(A + i\eta) - (A + i\eta + 1) + \xi(g'(A + i\eta) - 1)| \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{\xi}{2}\varepsilon \leq \varepsilon, \quad \zeta \in \mathcal{S}.
\end{aligned}$$

Prethodna nejednakost i (7.3) daju

$$\left| \frac{\partial h_A}{\partial \zeta}(\zeta) \right| \geq 1 - \varepsilon, \quad \zeta \in \mathcal{S}.$$

Stoga vrijedi sljedeća nejednakost:

$$|\mu_{h_A}(\zeta)| = \frac{|\partial_{\bar{\zeta}} h_A(\zeta)|}{|\partial_{\zeta} h_A(\zeta)|} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Da bismo dokazali da h_A čuva orijentaciju dovoljno je, po *lemi 4.22*, vidjeti da $D_{\zeta} h_A$ čuva orijentaciju kao linearno preslikavanje, odnosno da je $\text{Jac}(h_A) > 0$ na \mathcal{S} . Računamo:

$$\text{Jac}(h_A)(\zeta) = \left| \frac{\partial h_A}{\partial \zeta}(\zeta) \right|^2 - \left| \frac{\partial h_A}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \right|^2 \geq (1 - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 = 1 - 2\varepsilon > 0, \quad \text{za } \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Posebno, za $\varepsilon = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, imamo da h_A čuva orijentaciju i da je $|\mu_{h_A}| \leq \frac{1}{3}$, odakle po *propoziciji 4.24* vidimo da je h_A 2-kvazikonformalno preslikavanje na \mathcal{S} . □

Uočimo da je ovako definirano preslikavanje h_A moguće neprekidno proširiti na cijelu poluravninu $\{ \Re(\zeta) > 0 \}$. Definirajmo preslikavanje \tilde{h}_A na $\mathcal{S} \cup (\mathcal{S} + 1)$ na sljedeći način

$$\tilde{h}_A(\zeta) := \begin{cases} h_A(\zeta) & \text{ako } \zeta \in \mathcal{S}, \\ g(h_A(\zeta - 1)) & \text{ako } \zeta \in \mathcal{S} + 1. \end{cases}$$

Preslikavanje \tilde{h}_A je neprekidno na $\text{Int } \mathcal{S} \cup \text{Int } (\mathcal{S} + 1)$. Pokažimo koristeći neprekidnost preslikavanja g da je ovako definirano preslikavanje \tilde{h} neprekidno i na $\mathcal{S} \cap (\mathcal{S} + 1) = \{ 1 + i\eta \mid \eta \in \mathbb{R} \} = \{ \Re(\zeta) = 1 \}$:

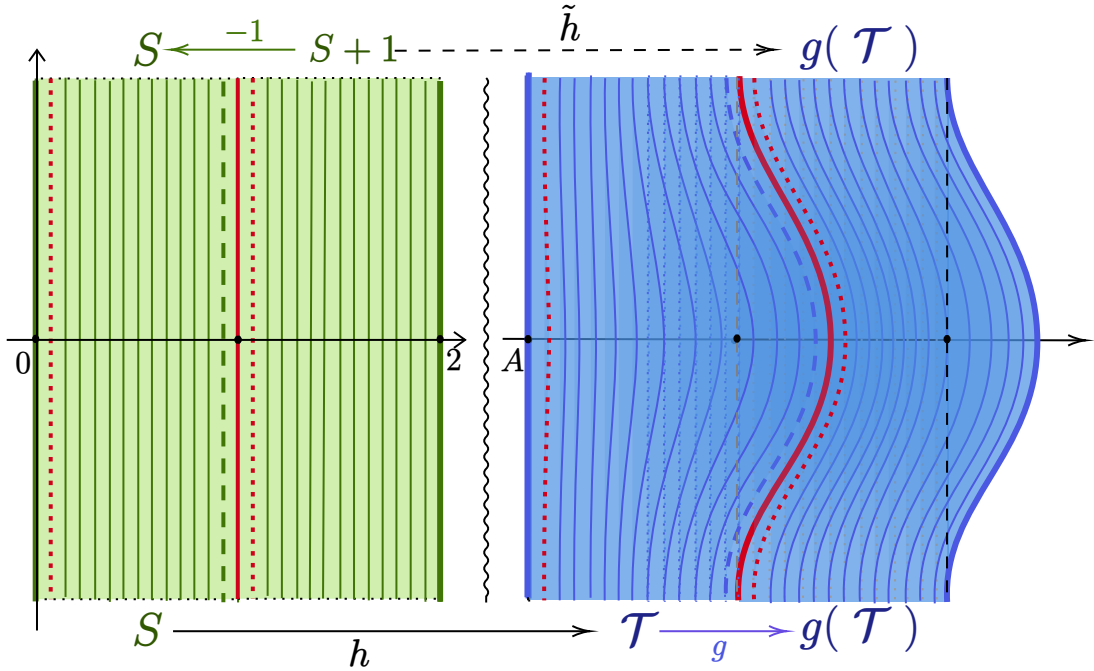
$$\lim_{\xi \searrow 1} \tilde{h}_A(\xi + i\eta) = \lim_{\xi \searrow 1} g(h_A(\xi + i\eta - 1)) = g(\lim_{\xi \searrow 1} h_A(\xi + i\eta - 1)) = g(h_A(i\eta)) = g(A + i\eta).$$

$$\lim_{\xi \nearrow 1} \tilde{h}_A(\xi + i\eta) = \lim_{\xi \nearrow 1} h_A(\xi + i\eta) = h_A(1 + i\eta) = g(A + i\eta).$$

Dakle \tilde{h}_A zadovoljava:

$$\lim_{\xi \searrow 1} \tilde{h}_A(\xi + i\eta) = g(A + i\eta) = \lim_{\xi \nearrow 1} \tilde{h}_A(\xi + i\eta), \quad (7.4)$$

to jest, po lemi o lijepljenju, \tilde{h}_A je dobro definirano neprekidno preslikavanje na $\mathcal{S} \cup (\mathcal{S} + 1)$.



Slika 26 : proširenje kvazikonformalnog preslikavanja h na $\mathcal{S} + 1$.

Lema 7.3: [4]

Neka je $U := \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid \Re(\zeta) > 0 \}$ desna poluravnina u ζ -ravnini. Difeomorfizam $h_A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}_A$ definiran u lemi 7.2 možemo proširiti do kvazikonformalnog preslikavanja $\tilde{h}_A : U \rightarrow V$ koje zadovoljava

$$\tilde{h}_A(\zeta + 1) = g(\tilde{h}_A(\zeta)), \quad \zeta \in U. \quad (7.5)$$

Dokaz. Desnu poluravninu U možemo prikazati kao uniju prebrojivo mnogo translacija trake \mathcal{S} . Naime,

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathcal{S} + k),$$

odnosno, za svaki $\zeta \in U$ postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\zeta - k \in \mathcal{S}$. Sada definiramo:

$$\tilde{h}_A(\zeta) := g^k(h_A(\zeta - k))$$

Provjerimo da za dani $\zeta \in U$ zaista vrijedi formula (7.5),

$$\tilde{h}_A(\zeta + 1) = g^{k+1}(h_A(\zeta + 1 - k - 1)) = g(g^k(h_A(\zeta - k))) = g(\tilde{h}_A(\zeta)).$$

Pokazali smo u (7.4) da je \tilde{h}_A neprekidno preslikavanje na $\mathcal{S} \cup (\mathcal{S} + 1)$. Kako je g^k neprekidna za svaki $k \in \mathbb{N}$, po formuli (7.5) se neprekidnost preslikavanja h_A na pravcu $\{\Re(\zeta) = 1\}$ prenosi u neprekidnost preslikavanja \tilde{h}_A na pravcu $\{\Re(\zeta) = k\}$. Dakle, \tilde{h}_A je neprekidna funkcija na U .

Preslikavanje \tilde{h} je dodatno kvazikonformalno na $\text{Int}(\mathcal{S} + k)$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Naime, za $\zeta \in \text{Int}(\mathcal{S} + 1)$ imamo

$$\begin{aligned} |\mu_{\tilde{h}_A}(\zeta)| &= \frac{|\partial_{\zeta} \tilde{h}_A(\zeta)|}{|\partial_{\zeta} \tilde{h}_A(\zeta)|} = \frac{|\partial_{\zeta}(g \circ h_A)(\zeta - 1)|}{|\partial_{\zeta}(g \circ h_A)(\zeta - 1)|} \\ &= \frac{|g'(h_A(\zeta - 1)) \cdot \partial_{\zeta} h_A(\zeta - 1)|}{|g'(h_A(\zeta - 1)) \cdot \partial_{\zeta} h_A(\zeta - 1)|} = |\mu_{h_A}(\zeta - 1)| \leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Induktivno dobivamo da za $\zeta \in \text{Int}(\mathcal{S} + k)$ vrijedi $|\mu_{\tilde{h}_A}(\zeta)| = |\mu_{h_A}(\zeta - k)| \leq \frac{1}{3}$. Uočimo da je restrikcija $\tilde{h}_A|_{\mathcal{S}+k} : (\mathcal{S} + k) \rightarrow \tilde{h}_A(\mathcal{S} + k)$ homeomorfizam koji čuva orijentaciju jer je po definiciji $\tilde{h}_A|_{\mathcal{S}+k} = g^k \circ h_A$ kompozicija homeomorfizama koji čuvaju orijentaciju. Stoga je, po *propoziciji 4.24*, $\tilde{h}_A|_{\mathcal{S}+k}$ 2–kvazikonformalno preslikavanje.

Uočimo da je za $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{h}_A(\{\Re(\zeta) = k\}) = g(\tilde{h}_A(\{\Re(\zeta) = k - 1\})) = \dots = g^k(h_A(\{\Re(\zeta) = 0\})) = g^k(L_A),$$

te da je $\tilde{h}_A(\mathcal{S} + k)$ skup u z -ravnini omeđen s lijeva sa krivuljom $g^k(L_A)$ a s desna sa krivuljom $g^{k+1}(L_A)$. Sada imamo da je \tilde{h}_A bijekcija jer je $\tilde{h}_A|_{\mathcal{S}+k}$ bijekcija za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ i jer je

$$\tilde{h}_A(\mathcal{S} + k - 1) \cap \tilde{h}_A(\mathcal{S} + k) = g^k(L_A) = \tilde{h}_A(\{\Re(\zeta) = k\}) = \tilde{h}_A((\mathcal{S} + k - 1) \cap (\mathcal{S} + k)).$$

Inverz od \tilde{h}_A ćemo definirati po dijelovima, znamo da je za $z \in \tilde{h}_A(\mathcal{S} + k)$, $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\tilde{h}_A|_{\mathcal{S}+k}^{-1}(z) = h_A^{-1}(g^{-k}(z)) + k,$$

gdje je $g^{-k} = \underbrace{g^{-1} \circ \dots \circ g^{-1}}_k$.

Neka je $z \in g^k(L_A) = \tilde{h}_A(\mathcal{S} + k - 1) \cap \tilde{h}_A(\mathcal{S} + k)$, $k \in \mathbb{N}$. Stavimo $w := g^{-k+1}(z) \in g(L_A)$, imamo sljedeći niz implikacija:

$$g^{-1}(w) \in L_A \implies h_A^{-1}(g^{-1}(w)) \in \{\Re(\zeta) = 0\} \implies h_A^{-1}(g^{-1}(w)) + 1 \in \{\Re(\zeta) = 1\}.$$

Po konstrukciji preslikavanja h_A iz *leme 7.3* je

$$h_A(h_A^{-1}(g^{-1}(w)) + 1) = g(h_A(h_A^{-1}(g^{-1}(w)))) = w$$

odakle imamo jednakost $h_A^{-1}(w) = h_A^{-1}(g^{-1}(w)) + 1$. Računamo:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_A|_{S+k-1}^{-1}(z) &= h_A^{-1}(g^{-k+1}(z)) + k - 1 \\ &= h_A^{-1}(w) + k - 1 \\ &= h_A^{-1}(g^{-1}(w)) + k \\ &= h_A^{-1}(g^{-k}(z)) + k = \tilde{h}_A|_{S+k}^{-1}(z).\end{aligned}$$

Kako su inverzi homeomorfizama $\tilde{h}_A|_{S+k}$ neprekidni, po lemi o lijepljenju, možemo zaključiti i da je inverz $\tilde{h}_A^{-1} : V_A \rightarrow U$, koji je za $z \in \tilde{h}_A(S+k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ dan s:

$$\tilde{h}_A^{-1}(z) := h_A^{-1}(g^{-k}(z)) + k,$$

dobro definirana neprekidna funkcija. Dakle, \tilde{h}_A je homeomorfizam. Kako je skup $\cup_{k \in \mathbb{N}} \{\Re(\zeta) = k\}$ unija prebrojivo mnogo pravaca, on je posebno i kvazikonformalno uklonjiv. Po *propoziciji 4.18* zaključujemo da je $\tilde{h}_A : U \rightarrow V$ 2–kvazikonformalno preslikavanje, te da je Beltrami koeficijent $\mu_{\tilde{h}_A}$ definiran skoro svuda na U (svuda osim u pravcima $\{\Re(\zeta) = k\}$, za $k \in \mathbb{N}$). \square

Fiksirajmo sada odabrani $A > 0$. Radi jednostavnijeg zapisa ćemo ispustiti znak \sim i indeks A te ćemo proširenje \tilde{h}_A u nastavku označavati samo s h .

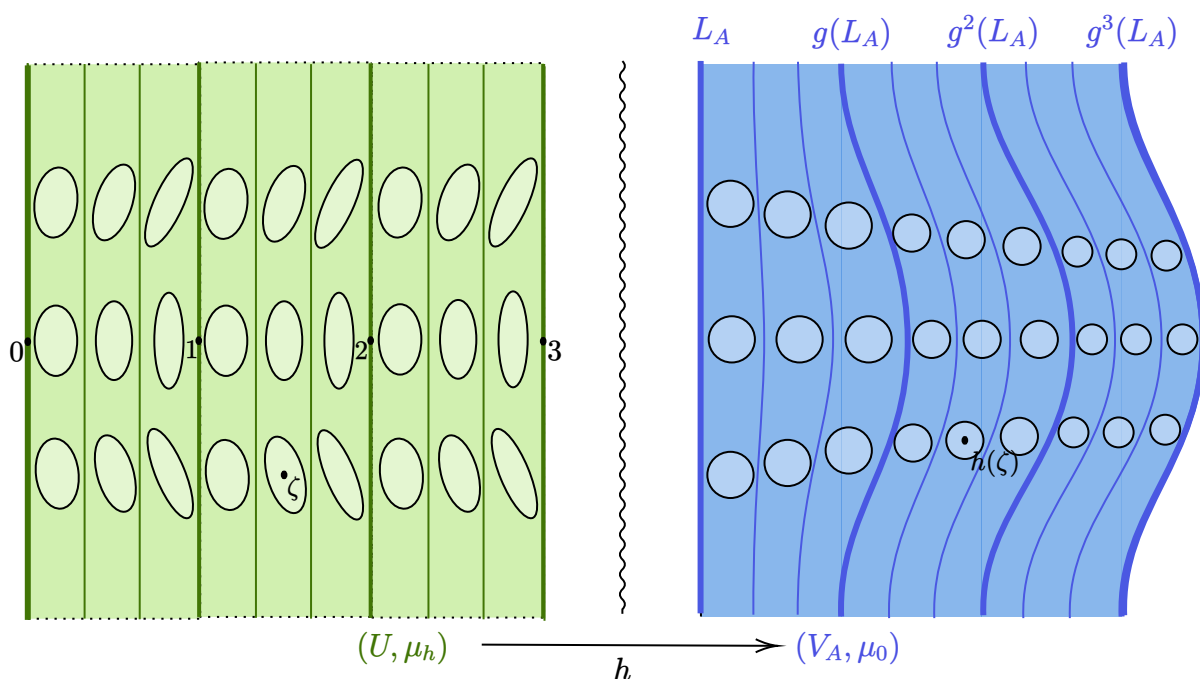
Istaknimo sljedeću bitnu lemu koju smo već dokazali u *lemi 7.3* ali ćemo pokazati i alternativan dokaz.

Lema 7.4: [4]

Neka je μ_h Beltramijev koeficijent na U induciran povlakom μ_0 po preslikavanju $h : U \rightarrow V_A$. Tada je μ_h invarijantan na translaciju za 1, to jest

$$\mu_h(\zeta + 1) = \mu_h(\zeta), \quad \zeta \in U.$$

Dokaz. Neka je $G(\zeta) = \zeta + 1$ translacija za 1 u ζ –ravnini. Označimo sa μ_0 Beltramijev koeficijent standardne kompleksne strukture na poluravnini V_A u z –ravnini. Po definiciji je $\mu_h = h^* \mu_0$.



Slika 27: Prikaz standardnog Beltramijevog koeficijenta μ_0 na V_A i Beltramijevog koeficijenta μ_h na U induciran povlakom po kvazikonformalnom preslikavanju h . Prikazana elipsa u $\zeta \in U$ je predstavnik familije koncentričnih elipsi s Beltramijevim koeficijentom $\mu_h(\zeta)$.

Na $g(V_A)$ zadamo standardnu kompleksnu strukturu sa Beltramijevim koeficijentom $\mu_0 \equiv 0$. Tada je $\mu_0 = g^* \mu_0$, jer je g holomorfna. Kvazikonformalno preslikavanje h po svojoj konstrukciji na U zadovoljava jednadžbu $h \circ G = g \circ h$, stoga sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc}
 (U, \mu_h) & \xrightarrow{h} & (V, \mu_0) \\
 \downarrow G & & \downarrow g \\
 (U+1, \mu_h) & \xrightarrow{h} & (g(V), \mu_0)
 \end{array}$$

Očito je $\mu_h = h^* \mu_0$ Beltramijev koeficijent na $G(U) = U+1$ induciran povlakom μ_0 po kvazikonformalnom preslikavanju h na skupu $g(V_A)$. Vrijedi:

$$G^* \mu_h = G^*(h^* \mu_0) = (h \circ G)^* \mu_0 = (g \circ h)^* \mu_0 = h^*(g^* \mu_0) = h^* \mu_0 = \mu_h,$$

dakle, μ_h je zaista invariantan na translaciju G . □

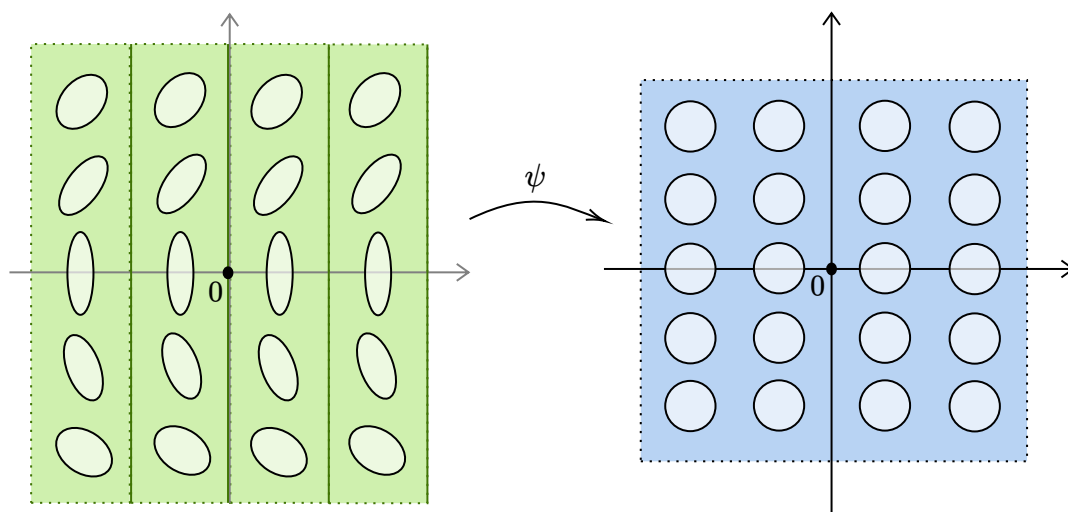
Sad možemo iskoristiti invarijantnost na translaciju da Beltramijev koeficijent μ_h proširimo u Beltramijev koeficijent μ na čitavoj ζ -ravnini formulom $\mu(\zeta) := \mu_h(\zeta \pmod{1})$.

Tada je μ definiran skoro svuda na \mathbb{C} , koju gledamo kao kartu Riemannove sfere. Dakle, μ možemo gledati kao Beltrami formu na $\hat{\mathbb{C}}$, koja nije definirana u ∞ , ali je definirana skoro svuda na $\hat{\mathbb{C}}$.

Pokazali smo da je $|\mu| \leq \frac{1}{3} < 1$. Sada smo u uvjetima *teorema o integrabilnosti*, (*teorem 5.6*), stoga postoji 2–kvazikonformalno preslikavanje $\psi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ koje rješava Beltramijevu jednadžbu:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} = \mu \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \zeta},$$

takvo da ψ fiksira točke 0, 1 i ∞ .



Slika 28: Integrirajuće 2–kvazikonformalno preslikavanje ψ takvo da je $\mu = \psi^* \mu_0$

Definirajmo preslikavanje $\tilde{\psi} := \psi \circ G \circ \psi^{-1}$. Tada imamo sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{array}{ccc} (U, \mu_h) & \xrightarrow{h} & (V_A, \mu_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\hat{\mathbb{C}}, \mu) & \xrightarrow{\psi} & (\hat{\mathbb{C}}, \mu_0) \\ G \downarrow & & \downarrow \tilde{\psi} \\ (\hat{\mathbb{C}}, \mu) & \xrightarrow{\psi} & (\hat{\mathbb{C}}, \mu_0). \end{array}$$

Kako je μ invarijantan na funkciju translacije $G(\zeta) = \zeta + 1$, to je i μ_0 invarijantan na $\tilde{\psi}$. Drugim riječima, $\tilde{\psi}$ je konformalna na $\hat{\mathbb{C}}$, pa je specijalno Möbiusova transformacija na $\hat{\mathbb{C}}$. Kako $\tilde{\psi}$ fiksira ∞ i šalje 0 u 1, zaključujemo da mora biti oblika $\tilde{\psi}(z) = c \cdot z + 1$ za neki $c \in \mathbb{C}$. Dakle, ψ zadovoljava funkcijsku jednadžbu :

$$\psi(\zeta + 1) = c \cdot \psi(\zeta) + 1, \quad \zeta \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Kako je $h : U \rightarrow V_A$ kvazikonformalno preslikavanje to je i $h^{-1} : V_A \rightarrow U$ kvazikonformalno preslikavanje po *svojstvu (1)* iz *propozicije 4.15*. Kako bismo kasnije

u lemi 7.5 mogli iskorisiti teorem 4.24 (*uniformni Hölder uvjet*) na otvorenoj okolini ∞ , potrebno je proširiti kvazikonformalno preslikavanje h^{-1} do preslikavanja $H : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ na sljedeći način:

$$H(z) := \begin{cases} h^{-1}(z), & z \in V_A, \\ z - A, & z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus V_A. \end{cases}$$

Budući da je H na $\hat{\mathbb{C}} \setminus V_A$ translacija, H je posebno konformalno preslikavanje na $\hat{\mathbb{C}} \setminus V_A$. Kako je h^{-1} 2–kvazikonformalno na V to je i H 2–kvazikonformalno preslikavanje na $\hat{\mathbb{C}} \setminus L_A$. H je očito neprekidna bijekcija sa neprekidnim inverzom

$$H^{-1}(\zeta) = \begin{cases} h(\zeta), & \zeta \in U, \\ \zeta + A, & \zeta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus U, \end{cases}$$

te je stoga homeomorfizam. Kako je L_A , kao pravac, kvazikonformalno uklonjiv, homeomorfizam H je po *propoziciji 4.18* 2–kvazikonformalno preslikavanje na $\hat{\mathbb{C}}$. Sada definiramo

$$\varphi(z) := (\psi \circ H)(z) = \begin{cases} (\psi \circ h^{-1})(z), & z \in V_A, \\ \psi(z - A), & z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus V_A. \end{cases}$$

Iz komutativnog dijagrama vidimo da je standardna kompleksna struktura na V_A invarijantna s obzirom na φ . Stoga je φ holomorfna na V_A i zadovoljava:

$$\varphi \circ g = \psi \circ h^{-1} \circ g = \psi \circ G \circ h^{-1} = c \cdot (\psi \circ h^{-1}) + 1 = c \cdot \varphi + 1.$$

Pokažimo sad još da je $c = 1$. Pretpostavimo da je $c \neq 1$. Tada možemo zapisati:

$$\begin{aligned} \varphi(g^n(z)) &= c \cdot \varphi(g^{n-1}(z)) + 1 = c^2 \cdot \varphi(g^{n-2}(z)) + c + 1 = \dots = \\ &= c^n \varphi(z) + c^{n-1} + \dots + c + 1 \\ &= c^n \varphi(z) + \frac{c^n - 1}{c - 1}, \quad z \in V_A. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Budući da $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \infty$, $z \in V_A$ i da $\varphi(\infty) = \infty$ zbog neprekidnosti holomorfno preslikavanja φ imamo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(g^n(z)) = \infty$, $z \in V_A$. Iz prethodne jednakosti i (7.6) zaključujemo da je $|c| > 1$ i da je

$$|\varphi(g^n(z))| \sim |c|^n, \quad \text{za svaki } z \in V_A. \tag{7.7}$$

Lema 7.5: [4]

Postoje $\epsilon > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi:

$$|\varphi(w)| \leq M \cdot |w|^2, \quad w \in D_\infty\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Dokaz. Preslikavanje φ je 2-kvazikonformalno na Riemannovoj sferi u ∞ , kako je $\varphi(\infty) = \infty$ promotrimo $\phi := \tau \circ \varphi \circ \tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, prikaz preslikavanja φ u karti oko beskonačnosti. Tada je $\phi(z) = 1/\varphi(1/z)$ 2-kvazikonformalno preslikavanje i njegov inverz ϕ^{-1} je također 2-kvazikonformalno preslikavanje. Koristeći *teorem 4.24* i činjenicu da je $\phi^{-1}(0) = 0$, dobivamo da 2-kvazikonformalno preslikavanje ϕ^{-1} zadovoljava lokalno uniformni Hölderov uvjet, to jest, postoje $\epsilon > 0$ i $C > 0$ takvi da vrijedi:

$$|\phi^{-1}(z)| \leq C \cdot |z|^{\frac{1}{2}},$$

za sve $z \in D_0(\epsilon)$. Ili, ekvivalentno:

$$\begin{aligned} |z| &\leq C \cdot |\phi(z)|^{\frac{1}{2}} \\ \iff |\phi(z)| &\geq \frac{1}{C^2} \cdot |z|^2 \\ \iff \left| \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} \right| &\geq \frac{1}{C^2} \cdot |z|^2 \\ \iff \left| \varphi\left(\frac{1}{z}\right) \right| &\leq C^2 \cdot \left| \frac{1}{z} \right|^2, \end{aligned}$$

za sve $z \in D_0(\epsilon)$. Ako označimo sa $w = \frac{1}{z}$ i sa $M = C^2$ tada imamo da je $|\varphi(w)| \leq M \cdot |w|^2$, za sve $w \in D_\infty\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$. □

Neka je $z \in V_A$ proizvoljan i fiksiran. Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = \infty$, po *lemi 7.5* za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|\varphi(g^n(z))| \leq M \cdot |g^n(z)|^2 \sim n^2, \quad n \rightarrow \infty$$

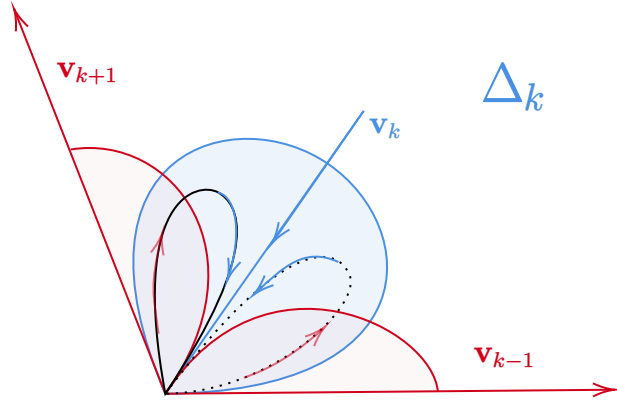
što je u kontradikciji sa (7.7) jer $|c|^n$ raste brže od n^2 kad $n \rightarrow \infty$. Dakle, početna pretpostavka da je $c \neq 1$ je kriva. Stoga je $c = 1$ i konformalno preslikavanje φ na domeni V zadovoljava Abelovu funkcijsku jednakost:

$$\varphi(g(z)) = \varphi(z) + 1.$$

2. slučaj : $p > 1$

Po *Teoremu o paraboličnom cvijetu* znamo da imamo ukupno $2p$ latica. Laticu \mathcal{P}_k ćemo smjestiti u sektor Δ_k definiran kao

$$\Delta_k := \left\{ r e^{i\left(\theta + \frac{k\pi}{p}\right)} \mid r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \left(-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right) \right\}, \quad k \in 1, 2, \dots, 2p.$$



Slika 29: Prikaz dinamike unutar privlačne latice u sektoru Δ_k za neparan k .

Definirajmo

$$\mathbb{R}_{(-1)^k} := \begin{cases} \mathbb{R}^+, & \text{za } k \text{ paran,} \\ \mathbb{R}^-, & \text{za } k \text{ neparan.} \end{cases} \quad (7.8)$$

Preslikavanje $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definirano s $\phi(z) := z^p$ restringiramo na Δ_k i dobivamo preslikavanje $\phi|_{\Delta_k} : \Delta_k \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{(-1)^k}$ koje je biholomorfnno. Sada možemo definirati inverz

$$\psi_k := \phi|_{\Delta_k}^{-1},$$

koji je odgovarajuća grana (kojoj je slika taj sektor) inverza funkcije ϕ . Ako konjugiramo preslikavanje $f(z) = z + z^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2})$ sa $\phi|_{\Delta_k}$ dobivamo:

$$F_k := \phi|_{\Delta_k} \circ f \circ \psi_k,$$

koje je definirano na punoj okolini ishodišta D_0 . Neka je $z \in D_0$ i $w = \psi_k(z) \in \Delta_k$, tada je $w^p = z$ i

$$\begin{aligned} F_k(z) &= (f(w))^p = \left(w + w^{p+1} + \mathcal{O}(w^{p+2})\right)^p = w^p \cdot \left(1 + z + \mathcal{O}\left(z^{1+\frac{1}{p}}\right)\right)^p = \\ &= z \cdot \left(1 + pz + \mathcal{O}\left(z^{1+\frac{1}{p}}\right)\right) = z + pz^2 + \mathcal{O}\left(z^{2+\frac{1}{p}}\right). \end{aligned}$$

Sada, kao u 1. slučaju, renormaliziramo s zamijenom varijabli $\tau(z) = -\frac{1}{z}$ i dobivamo

$$g_k(z) := (\tau \circ F_k \circ \tau^{-1})(z) = z + 1 + \mathcal{O}\left(|z|^{-\frac{1}{p}}\right).$$

Ostatak dokaza nastavljamo kao u 1. slučaju. Pronalazimo dovoljno veliki $A > 0$ i konformalno preslikavanje φ na $V_A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > A \}$ takvo da vrijedi

$$\varphi(g_k(z)) = \varphi(z) + 1.$$

□

7.2 Racionalno neutralne fiksne točke osim paraboličnih

Konačno pretpostavimo da je $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ i da je $\lambda \neq 1$ n -ti korijen iz jedinice za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada $\exists m \in \mathbb{N}$ relativno prost s n takav da je $\lambda = e^{\frac{2\pi im}{n}}$.

Pokazali smo da je tada

$$f^n(z) = z + az^{p+1} + \mathcal{O}(z^{p+2}),$$

odnosno da f^n spada u 1. ili 2. slučaj. Neka su $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{2p}$ latice preslikavanja f^n . Pretpostavimo da je k neparan, to jest da je latica \mathcal{P}_k privlačna. Tada za $z \in \mathcal{P}_k$ vrijedi

$$f^{nr}(z) \in \mathcal{P}_k, \forall r \in \mathbb{N}, \quad \text{i} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f^{nr}(z) = 0$$

Posebno vrijedi da

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f^{nr}(f(z)) = \lim_{r \rightarrow \infty} f^{nr+1}(z) = 0.$$

Stoga $f(z)$ također pripada nekoj privlačnoj latici, kako je $f(z) = e^{\frac{2\pi im}{n}} z + \mathcal{O}(z^2)$ zaključujemo da je $f(z) \in \mathcal{P}_{k+2m}$.

Induktivno imamo da je $f^r(z) \in \mathcal{P}_{k+2m \cdot r}$, a posebno $f^n(z) \in \mathcal{P}_{k+2m \cdot n}$. Odakle vidimo da je

$$2m \cdot n \equiv 0 \pmod{2p} \implies n|p.$$

Broj latica je stoga višekratnik od n .

Bibliografija

- [1] L. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, American Mathematical Society, 2006.
- [2] B. Branner i N. Fagella, *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*, CUP, 2014.
- [3] S. S. Cairns, *An Elementary Proof of the Jordan-Schönflies Theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society **2** (1951), br. 6, 860 – 867, <https://doi.org/10.2307/2031698>.
- [4] L. Carleson i T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1995.
- [5] H. Farkas i I. Kra, *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1992.
- [6] J. H. Hubbard, *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology and Dynamics*, sv. 1, Matrix Editions, 2006.
- [7] O. Lehto i K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, 1973.
- [8] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable, Third Edition*, Cambridge University Press, 2006.
- [9] R. Narasimhan i Y. Nievergelt, *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser Basel, 2001.
- [10] M. A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge University Press, 1961.
- [11] C. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, 1992.
- [12] M. Shishikura, *Bifurcation of Parabolic fixed points*, The Mandelbrot Set, Theme and Variations (2000), 325–364, <https://doi.org/10.1017/CB09780511569159.018>.
- [13] E. M. Stein i R. Shakarachi, *Complex Analysis, Princeton Lectures in Analysis*, sv. II, Princeton University Press, 2003.

Sažetak

U ovom radu dajemo geometrijsku definiciju kvazikonformalnog preslikavanja. Za to su nam potrebni osnovni teoremi kompleksne analize i topologije. Kako bismo opisali djelovanje kvazikonformalnog preslikavanja na domeni, uvodimo pojam skoro kompleksne strukture na toj domeni. Navodimo i analitičku karakterizaciju kvazikonformalnih preslikavanja koristeći pojam Beltramijevog koeficijenta. Sve pojmove zatim generaliziramo na holomorfne plohe te navodimo fundamentalni teorem kvazikonformalne geometrije, *teorem integrabilnosti*.

Naposlijetku, pokazujemo primjenu kvazikonformalnih preslikavanja u holomorfnoj dinamici. Koristimo metodu kvazikonformalne kirurgije da bismo konstruirali sektorijalnu analitičku normalnu formu holomorfne funkcije sa paraboličnom fiksnom točkom, na okolini te fiksne točke.

Summary

In this thesis we present the geometric definition of a quasiconformal map. For this we need fundamental theorems of complex analysis and topology. In order to describe the action of quasiconformal maps on domains, we introduce the concept of an almost complex structure on that domain. We give an analytic characterisation of quasiconformal maps using the Beltrami coefficient. All definitions are then generalized onto Riemann surfaces and we state the fundamental theorem of quasiconformal geometry, the *integrability theorem*.

In the end, we show an application of quasiconformal maps in holomorphic dynamics. Using the method of quasiconformal surgery we construct a sectorially analytic normal form of a holomorphic function with a parabolic fixed point, on a neighborhood of that fixed point.

Životopis

Rođen sam 4. siječnja 2001. godine u Mostaru, Bosni i Hercegovini. Osnovnoškolsko obrazovanje sam započeo u *Nova International Schools* u Skopju, zatim sam se sa obitelji preselio u Sarajevo gdje sam završio osnovnu školu *Katolički Školski Centar*. Tijekom osnovne škole sam se bavio sa slikanjem i crtanjem te sam trenirao Judo. Nakon završetka osnovne škole upisujem *XV. gimnaziju* u Zagrebu. Tijekom srednje škole sam sudjelovao na državnim i međunarodnim natjecanjima iz matematike i fizike.

Prijediplomski sveučilišni studij, Matematika, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu upisujem 2019. godine i završavam 2022. godine, nakon čega upisjem sveučilišni diplomski studij Teorijska matematika na istom fakultetu. U međuvremenu, 2021. godine upisujem prijediplomski sveučilišni studij, Slikarstvo, na Akademiji likovnih umjetnosti u Zagrebu.

Tijekom studija sam bio demonstrator iz kolegija Matematička analiza i Euklidski prostori. Također sam sudjelovao u radu udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"