Tenzorske algebre i primjene

Brozović, Bruna

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Bruna Brozović

TENZORSKE ALGEBRE I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc.
Dražen Adamović

Zagreb, studeni, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj obitelji, koja mi je pružila neizmjernu podršku i ljubav tijekom mog obrazovanja. Zahvaljujem se mom mentoru, prof. dr. sc. Draženu Adamoviću, čije su smjernice i strpljenje bili ključni za uspješno dovršavanje ovog rada. Hvala prijateljima i kolegama s PMF-a što su mi uljepšali studentsko doba i bili uz mene na ovom putu.

Sadržaj

Uvod

Tenzorske algebre i tenzorski produkt često se koriste kod istraživanja složenih struktura u raznim područjima poput fizike, statistike i strojnog učenja. Tenzorske algebre proširuju koncept vektorskog prostora na objekte s većim dimenzija i vezama višeg reda. Razvoj tenzorskih algebri započeo je u 19. stoljeću, uz značajne doprinose matematičara poput Riemanna i Grassmanna. Ovaj rad opisuje osnovne apekte tenzorskih algebri i tenzorskog produkta, zajedno s njihovom primjenom u matematici i ekonomiji.

U prvom poglavlju dan je pregled par osnovih algebarskih struktura kao što su prsteni, grupe i kategorije. Uz njih, definirani su i pojmovi funktora i modula te je objašnjeno i univerzalno svojstvo direktnog produkta i direktne sume.

U drugom poglavlju fokus je stavljen na definiranje tenzorskog produkta. Pogledajmo kako je definiran preko univerzalnog svojstva.

Neka je R komutativan prsten s 1, te $L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ R- modul svih n-multilinearnih preslikavanja $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$. Promatramo kategoriju čiji su objekti sva n-multilinearna preslikavanja.

Neka su

$$f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F \text{ i } g : E_1 \times \ldots \times E_n \to G$$

n-multilinearna preslikavanja. Morfizam $f \to g$ je homomorfizam $h : F \to G$ td. sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "h"] \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Slika 0.1: Dijagram tenzorskog produkta; slika iz [3]

Univerzalni objekt u ovoj kategoriji naziva se tenzorski produkt.

Dokazana je egzistencija tenzorskog produkta i raspisana su svojstva tenzorskog produkta, uključujući asocijativnost i univerzalno svojstvo.

U trećem poglavlju definirana je algebra. Svakako, definirana je tenzorska algebra, koju smo konstruirali na direktnoj sumi $\bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(E)$ i pojašnjeno je te raspisano univerzalno svojstvo tenzorske algebre.

Glavni rezultat ovog poglavlja je idući:

Teorem 0.0.1. *Neka je A asocijativna R algebra s jedinicom 1_A, te $f : E \to A$ R-linearno preslikavanje. Tada $\exists!\ h : T(E) \to A$ homomorfizam asocijativnih algebri s jedinicom takav da:*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & T(E) \arrow[dl, "h"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Slika 0.2: Dijagram

U predzadnjem poglavlju dan je kratak uvid u simetrične grupe i simetrične algebre, te je u zadnjem poglavlju obrađena primjena tenzorskih alebri u ekonomiji, koristeći Bayesov autoregresivan tenzorski model. Opisana je analiza faktora rizika i prednosti Bayesovog tenzorskog modela.

Izlaganja u poglavljima 1-4 u ovom diplomskom radu većinom prate neka poglavlja Langove knjige [3], dok su neki koncepti preuzeti iz [2]. Konzultirana je i skripta [5]. Poglavlje 5 prati koncepte iz članka [1].

Poglavlje 1

Osnovni objekti algebre

U ovom poglavlju dajemo kratak pregled osnovih algebarskih struktura poput modula, kategorija i funktora. Ovi pojmovi se javljaju kod tenzorskih produkata modula i tenzorskih algebri. Detaljnije o ovim temama može se naći u [5].

1.1 Grupe, prsteni, ideali i kategorije

Grupe i prsteni jedni su od osnovnih pojmova matematike i glavnih predstavnika algebarskih struktura. Mogu se naći u teoriji brojeva, analizi, algebri i mnogim drugim granama. Za početak, prisjetimo se njihovih definicija.

Definicija 1.1.1. *Neprazan skup $G = (G, \cdot)$, gdje je $\cdot : G \times G \to G$ binarna operacija, zove se* **grupa** *ako vrijede sljedeća svojstva (poznata kao aksiomi grupe):*

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x, y, z \in G$ *(asocijativnost),*
2. $(\exists e \in G) : e \cdot x = x \cdot e = x$, $\forall x \in G$ *(neutralni element),*
3. $(\forall x \in G)(\exists! x^{-1} \in G) : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ *(inverzni element).*

Važniji primjeri grupa su $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{R}, +)$.

Također, npr., ako označimo sa $\mathbb{R}^\times$ i $\mathbb{C}^\times$ skupove realnih brojeva bez nule, tada operacija množenja dobro definira grupe na tim skupovima, kao i na $\mathbb{R}_+$: $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$, $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ i $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Definicija 1.1.2. *Neprazan skup $R = (R, +, \cdot)$ zovemo* **prsten** *ukoliko za operacije zbrajanja $+ : R \times R \to R$ i množenja $\cdot : R \times R \to R$ vrijedi sljedeće:*

1. *$(R, +)$ je komutativna grupa, s neutralnim elementom $0 = 0_R$;*

2. *$(R, \cdot)$ je polugrupa, tj. množenje je asocijativno;*

3. *Vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju, tj.*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall x, y, z \in R,$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \forall x, y, z \in R.$$

Element $0 = 0_R$, neutralan u grupi $(R, +)$, zvat ćemo **nula prstena** *R.*

Napomena 1.1.3. *Ako postoji jedinični element, ili kraće jedinica, $1 = 1_R \in R$ takav da vrijedi $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall x \in R$, onda kažemo da je R* **prsten s jedinicom**.
Prsten R je **komutativan prsten** *ako vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in R$; inače govorimo o* **nekomutativnom prstenu**.

Primjećuje se da za svaki prsten R, i s jedinicom i bez nje, vrijedi da mu nula zadovoljava:

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \quad \forall x \in R.$$

To vrijedi zbog distributivnosti:

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Definicija 1.1.4. *Neka je R prsten. Skup $S \subset R$ je* ***potprsten*** *od R ako je $(S, +, \cdot)$ i sam prsten.*

Definicija 1.1.5. *Neka je R prsten. Podskup $I \subset R$ je* ***lijevi (tj. desni) ideal*** *u R ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

1. *I je potprsten od R;*

2. *$\forall r \in R$ i $\forall x \in I$ je $rx \in I$ (tj. $xr \in I$).*

Definicija 1.1.6. Kategorija *C sastoji se od klase objekata $Ob(C)$ tako da je za svaka dva objekta $A, B \in Ob(C)$ zadan skup $Mor(A, B)$, tj. skup* **morfizama** *iz A u B.*

Za svaka tri objekta $A, B, C \in Ob(C)$ imamo kompoziciju

$$Mor(B, C) \times Mor(A, B) \to Mor(A, C), \quad (g, f) \to g \circ f$$

koja zadovoljava aksiome:

1. *Skupovi* $Mor(A, B)$ *i* $Mor(A', B')$ *su disjunktni osim kad su jednaki* ($A = A', B = B'$).
2. *Za svaki objekt* A *u kategoriji* C *postoji morfizam* $1_A \in Mor(A, A)$ *takav da za sve objekte* B *vrijedi:*
$$f \circ 1_A = f, \quad 1_A \circ g = g \quad \forall f \in Mor(A, B), \forall g \in Mor(B, A)$$
3. *Kompozicija je asocijativna, to jest za sve* $f \in Mor(A, B)$, $g \in Mor(B, C)$, $h \in Mor(C, D)$ *vrijedi:*
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$AR(C)$ *oznaka je za kolekciju svih morfizama u kategoriji* C*. Simbolom* $f \in Ar(C)$ *označavamo da je* f *morfizam u kategoriji* C*, tj. da je* f *element nekog* $Mor(A, B)$*, gdje su* $A, B \in Ob(C)$*.* f *se obično označava i kao*
$$f : A \to B \quad ili \quad A \xrightarrow{f} B.$$

Definicija 1.1.7. *Morfizam* $f \in Mor(A, B)$ *naziva se* **izomorfizam** *(ili* **ekvivalencija***) ako postoji* $g \in Mor(B, A)$ *takav da je*
$$g \circ f = 1_A \in Mor(A, A), \; f \circ g = 1_B \in Mor(B, B).$$
To jest, ako je $g \circ f$ *identiteta na* $Mor(A, A)$ *i* $f \circ g$ *identiteta na* $Mor(B, B)$*.*

Primjer 1.1.8. $\mathcal{R}$ *je kategorija prstenova i homomorfizama prstenova.*

Definicija 1.1.9. *Neka je* A *objekt iz* C*. Morfizam iz* A *u* A *zove se* ***endomorfizam****.*
Skup endomorfizama od A *označavamo sa* $End(A)$*.*

Definicija 1.1.10. *Neka je* C *kategorija. Objekt* P *naziva se* **univerzalni objekt** *(ili inicijalni) ako za svaki objekt* A *iz kategorije* C *postoji jedinstven morfizam* $f \in Mor(P, A)$*,* $f : P \to A$*.*

Univerzalni objekti su (ako postoje) jedinstveno određeni do na izomorfizam.

1.2 Funktori

Definicija 1.2.1. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kategorije.* **Kovarijantni funktor** *s $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ je pravilo koje svakom objektu iz $Ob(\mathcal{A})$ pridružuje objekt $F(A)$ iz $Ob(\mathcal{B})$ i svakom morfizmu $f : A \to B$ pridružuje morfizam $F(f) : F(A) \to F(B)$ tako da:*

1. $\forall A \in Ob(\mathcal{A})$ *je* $F(1_A) = 1_B$.
2. *Ako su $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dva morfizma iz $\mathcal{A}$ tada je*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Funktor čuva kompoziciju i identitet.

1.3 Moduli

Podsjetnik: Grupa G takva da $\forall x, y \in G$ vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$ naziva se komutativna grupa. Abelova grupa drugi je naziv za komutativnu grupu.

Definicija 1.3.1. *Neka je R prsten.* **Lijevi modul nad R** *ili* $\mathbf{R-modul\ M}$ *je Abelova grupa $(M, +)$ zajedno s operacijom $R \times M \to M$, $(r, m) \to a.m$ takvom da:*
za sve $a, b \in A$ i sve $m, n \in M$ vrijedi:

$$(ab).m = a.(b.m), \quad 1.m = m$$

$$(a + b).m = a.m + b.m$$

$$a.(m + n) = a.m + a.n$$

Analogno se definira i desni modul.

Napomena 1.3.2. *Nas će zanimati samo lijevi R-moduli, stoga ćemo ih nadalje nazivati samo modulima.*

Definirat ćemo i slobodan modul, tj. onaj modul koji ima bazu, poznat i kao nulti modul, no za to nam je prvo potrebna definicija baze modula.
Neka je M modul nad prstenom R, te nek je S podskup od M. Kažemo da je S **baza** od M ako je S neprazan linearno nezavisan skup koji generira M.

Ako je S baza od M, tada vrijedi da je $M \neq \{0\}$ ako je $R \neq \{0\}$ i svaki element iz M ima jedinstveni prikaz kao linearna kombinacija elemenata iz S.

Definicija 1.3.3. *Modul M nad prstenom R takav da postoji skup (baza) $\{e_i\}_{i\in I}$ td. se svaki $m \in M$ može jednoznačno zapisati kao: $m = \sum\limits_{i\in I} r_i e_i$, gdje je $r_i \in R$ nazivamo* ***slobodan modul****.*

Definicija 1.3.4. *Neka je M R-modul.* **Podmodul** *N od M je podgrupa N Abelove grupe $(M, +)$ takva da je $RN \subset N$.*

Vrijedi da je N modul.

Definicija 1.3.5. *Neka su M i N moduli. $f : M \to N$ td. za sve $m, n \in M$, $a \in R$ vrijedi:*

$$f(m+n) = f(m) + f(n), \quad f(a.m) = a.f(m)$$

nazivamo ***homomorfizam modula****.*

Definicija 1.3.6. *Neka su E, F i G tri vektorska prostora, te neka je $\psi : E \times F \to G$ preslikavanje. ψ je* ***bilinearno*** *ako vrijedi:*

$$\psi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\psi(x_1, y) + \lambda\mu(x_2, y) \quad x_1, x_2 \in E, y \in F,$$

$$\psi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\psi(x, y_1) + \mu\psi(x, y_2) \quad x \in E, y_1, y_2 \in F,$$

gdje su $\lambda, \mu \in \Gamma$.

Dodatno, kada je $\Gamma = G$, tada je ψ bilinearna funkcija.

Definirajmo sada bilinearno preslikavanje modula na komutativnom prstenu.

Definicija 1.3.7. *Neka je R komutativan prsten. Neka su E, F moduli.* **Bilinearno** *preslikavanje $g : E \times E \to F$ je preslikavanje takvo da, za dani $x \in E$, preslikavanje $y \to g(x, y)$ je R-linearno i, za dano $y \in E$, je preslikavanje $x \to g(x, y)$ R-linearno.*

1.4 Univerzalno svojstvo direktne sume i produkta

Direktna suma i direktan produkt predstavljaju dva osnovna načina kako se mogu konstruirati novi moduli iz već ranije zadanih modula. U ovom odjeljku opisano je univerzalno svojstvo direktne sume i direktnog produkta nad modulima, što je od važnosti u teoriji tenzorske algebre i tenzorskog produkta.

Neka su G_i grupe, $i \in I$. Definiramo **direktan produkt** grupa kao

$$G = \prod_{i \in I} G_i.$$

Definirajmo strukturu grupe na G. Neka su $(x_i)_{i \in I}$ i $(y_i)_{i \in I}$ dva elementa iz G.
Definiramo njihov produkt kao $(x_i y_i)_{i \in I}$, te inverz za $(x_i)_{i \in I}$ kao $(x_i^{-1})_{i \in I}$. Tada je G grupa.

Neka je $\{A_i\}_{i \in I}$ familija Abelovih grupa. Definiramo **direktnu sumu** Abelovih grupa:

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

kao podskup direktnog produkta $\prod A_i$ koji se sastoji od svih familija $\{x_i\}_{i \in I}$, $x_i \in A_i$, takvih da je $x_i = 0$ za sve osim za konačan broj indeksa i.

Promatramo kategoriju R-modula i homomorfizama R-modula.

Direktan produkt modula

Neka je dana familija $\{M_i\}_{i\in I}$ R-modula. Tada je na direktnom produktu Abelovih grupa

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i) : \text{svi osim kon. mnogo } m_i = 0\}$$

dobro definirana struktura R-modula.

Označimo

$$M_p = \prod_{i\in I} M_i.$$

Uzmimo $(m_i)_{i\in I}$ iz M_p, te $r \in R$. Neka vrijedi $r(m_i) = (rm_i)$. Ovime je M_p R-modul. Dakle, M_p je direktan produkt u kategoriji R-modula.

Za $i \in I$ definiramo $p_i : \prod_{i\in I} M_i \to M_i$ kao projekciju na i-tom faktoru. p_i je homomorfizam.

Vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo, tj. dijagram 1.1 komutira, gdje je M R-modul:

$$\begin{tikzcd}
M_i & & M \arrow[ll, "f_i"'] \arrow[dl, "\exists! f"] \\
& \prod_{i\in I} M_i \arrow[ul, "p_i"] &
\end{tikzcd}$$

Slika 1.1: Univerzalno svojstvo - direktan produkt

Direktna suma modula

Neka je dana familija $\{M_i\}_{i\in I}$ R-modula. Tada je na direktnoj sumi Abelovih grupa

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i) : \text{svi osim kon. mnogo } m_i = 0\}$$

dobro definirana struktura R-modula.

Označimo

$$M_s = \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

Uzmimo $(m_i)_{i\in I}$ iz M_s, (familija elemenata td. su skoro svi x_i jednaki 0) i $r \in R$. Definiramo $r(m_i) = (rm_i)$. Ovime je M_s R-modul. Dakle, M_s je direktna suma u kategoriji R-modula.

Za svaki $j \in I$ definiramo preslikavanje $\lambda_j : M_j \to M_s$ takvo da je $\lambda_j(m)$ element čija je j-ta komponenta jednaka m, a sve ostale su jednake 0. λ_j je homomorfizam.

Vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo, tj. dijagram 1.2 komutira:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "\lambda_i"'] & & M \\
& \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "\exists! g"'] &
\end{tikzcd}$$

Slika 1.2: Univerzalno svojstvo - direktan produkt

Riječima je ovo svojstvo dano u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 1.4.1. *Neka je $\{g_i : M_i \to M\}$ familija homomorfizama u modul M. Tada postoji jedinstveni homomorfizam*

$$g : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$$

takav da je $g \circ \lambda_j = g_j$, za svaki $j \in I$.

Dokaz. Definiramo preslikavanje $g : \bigoplus_{i \in I} M_i \to M$:

$$g((m_i)_{i \in I}) = \sum_{j \in I} g_i(m_i).$$

Suma na desnoj strani je konačna, budući da su svi, osim konačno mnogo članova, jednaki nuli. Sada je g homomorfizam.
Imamo $g \circ \lambda_j(m) = g_j(m)$, za svaki $j \in I$ i svaki $m \in M_j$. Dakle, g je jedinstveno određen, te ima svojstvo komutativnosti. $\square$

Poglavlje 2

Tenzorski produkt

U ovom poglavlju bit će definicija te asocijativnost tenzorskog produkta. Tenzorski produkt predstavlja jedan od ključnih koncepata u linearnoj algebri, teoriji modula, teoriji kategorija te mnogim drugim granama matematike i fizike. Pored toga, koristi se čak i u kvantnoj mehanici.

2.1 Tenzorski produkt

Pretpostavljamo da se moduli, homomorfizmi, linearnost i multilinearnost odnose na neki prsten R.

Nakon što smo uveli definicije modula i slobodnog modula, možemo definirati i tenzorski produkt. Prije toga, recimo što je multilinearno preslikavanje.

Definicija 2.1.1. *Neka su $E_1, E_2, \dots, E_n$ i G vektorski prostori. Preslikavanje $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \to G$ zove se* ***n-multilinearno*** *ako za svaki $1 \leq i \leq n$ vrijedi:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) + \mu f(x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_n)$$

gdje su $x_i, y_i \in E_i$, $\lambda, \mu \in \Gamma$.

Ako je $G = \Gamma$, tada je f n-linearna funkcija.

Opišimo sada tenzorski produkt preko univerzalnog svojstva.

Neka je R komutativan prsten i $n \in \mathbb{N}$. Ako su E_1, E_2, ..., E_n, F R-moduli, tada sa $L^n(E_1, \dots, E_n; F)$ označavamo modul od n-multilinearnih preslikavanja

$$f : E_1 \times \dots \times E_n \to F.$$

Ako bi se multilinearna preslikavanja fiksnog skupa modula E_1, ..., E_n promatrala kao objekti kategorije, tj. ako su za

$$f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F \text{ i } g : E_1 \times \ldots \times E_n \to G$$

f i g multilinearna, definiramo da je morfizam $f \to g$ homomorfizam $h : F \to G$, što čini slijedeći dijagram 2.1 komutativnim:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, "h"] \\
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & G
\end{tikzcd}$$

Slika 2.1: Dijagram tenzorskog produkta; slika iz [3]

Univerzalni objekt u ovoj kategoriji naziva se **tenzorski produkt**.

2.2 Egzistencija

Dokažimo egzistenciju tenzorskog produkta.

Neka je M slobodan modul generiran skupom svih n-torki $(x_1, \ldots, x_n)$, td. $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$, generirane skupom $E_1 \times \ldots \times E_n$.

Neka je N podmodul generiran elementima tipa:

$$(x_1, \ldots, x_i + x_i^{'}, \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x_i^{'}, \ldots, x_n)$$

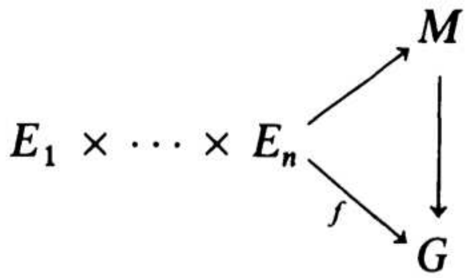
$$(x_1, \ldots, ax_i, \ldots, x_n) - a(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall x_i \in E_i, x_i^{'} \in E_i, a \in \mathbb{R}.$$

Slijedi da je $E_1 \times\ E_2 \times \ldots \times E_n \to M$ kanonska injekcija iz zadanog skupa u modul generiran njime. Kompozicijom ovog preslikavanja sa kanonskim $M \to M/N$ dobivamo preslikavanje:

$$\varphi : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \to M/N.$$

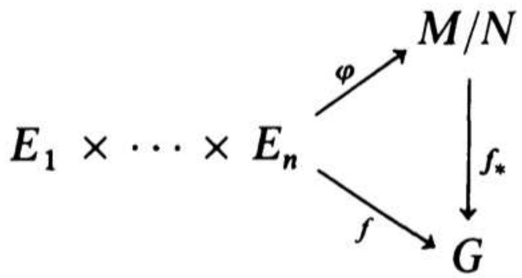
Tvrdimo da je φ multilinearno preslikavanje i tenzorski produkt.

Multilinearnost slijedi iz načina na koji smo definirali preslikavanje φ.
Neka je $f : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \to G$ multilinearno preslikavanje. Po definiciji, sa slobodnim modulum generiranim s $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ imamo inducirano linearno preslikavanje $M \to G$, čime je dijagram 2.2 komutativan.



Slika 2.2: Dijagram; slika iz [3]

Budući da je f multilinearno preslikavanje, inducirano preslikavanje $M \to G$ poprima vrijednost 0 na N. Zbog univerzalnog svojstva modula, dobivamo homomorfizam $f_* : M/N \to G$, čime je i 2.3 komutativan.



Slika 2.3: Dijagram; slika iz [3]

Znajući da slika od φ generira M/N, slijedi da je inducirano preslikavanje f_* jedinstveno. Time je dokazana tvrdnja.

Uvedimo oznake za modul M/N:

$$E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_n, \quad \text{tj. } \bigotimes_{i=1}^{n} E_i$$

Na ovaj način konstruirali smo tenzorski produkt u klasi izomorfizama tenzorskog produkta, te ćemo upravo njega zvati **tenzorski produkt** od $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Ako je $x_i \in E_i$, pišemo:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n = x_1 \otimes_R x_2 \otimes_R \cdots \otimes_R x_n$$

Tada, za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_1 \otimes \cdots \otimes ax_i \otimes \cdots \otimes x_n = a(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$
$$x_1 \otimes \cdots \otimes (x_i + x_i') \otimes \cdots \otimes x_n = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) + (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i' \otimes \cdots \otimes x_n),$$

gdje su $x_i \in E_i$ i $a \in R$.

Također, ako imamo dva faktora, npr. $E \otimes F$, tada se svaki element od $E \otimes F$ može zapisati kao suma u terminima $x \otimes y$, gdje su $x \in E$ i $y \in F$.

To vrijedi jer x i y generiraju $E \otimes F$, a za svaki $a \in R$ je $a(x \otimes y) = ax \otimes y$.

2.3 Asocijativnost tenzorskog produkta

U ovom odjeljku dokazat ćemo asocijativnost tenzorskog produkta.

Propozicija 2.3.1. *Neka su E_1, E_2 i E_3 R-moduli. Tada postoji izomorfizam*

$$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

takav da

$$(x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z)$$

za sve $x \in E_1$, $y \in E_2$ i $z \in E_3$.

Dokaz. Budući da elementi $x \otimes y$ razapinju $E_1 \otimes E_2$ te $(x \otimes y) \otimes z$ razapinju tenzorski produkt $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$, ako postoji gornji izomorfizam, onda je on i jedinstven.

Dokažimo egzistenciju.

Za svaki $x \in E_1$ dobro je definirano bilinearno preslikavanje

$$\lambda_x : E_2 \times E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3,$$

takvo da $\lambda_x(y, z) = (x \otimes y) \otimes z$.
Stoga iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta dobivamo linearno preslikavanje

$$\overline{\lambda_x} : E_2 \otimes E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3.$$

Slično dobivamo i bilinearno preslikavanje oblika

$$E_1 \times (E_2 \otimes E_3) \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$$

takvo da

$$(x, \alpha) \to \overline{\lambda_x}(\alpha); \quad x \in E, 1, \alpha \in E_2 \otimes E_3,$$

pa dobivamo i linearno preslikavanje

$$E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3.$$

To preslikavanje je izomorfizam. □

Propozicija 2.3 se može generalizirati na sljedeći način. Dokaz ispuštamo i može se naći u [3].

Propozicija 2.3.2. *Neka su $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Neka su E_i, $i = 1, 2, \dots, p + q$, R-moduli. Tada postoji izomorfizam*

$$(E_1 \otimes \cdots \otimes E_p) \otimes (E_{p+1} \otimes \cdots \otimes E_{p+q}) \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_{p+q}$$

takav da

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \to x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q},$$

za sve $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, \dots, p + q$.

Definiramo $T^r(E) = \bigotimes_{i=1}^{r} E = \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{r \text{ puta}}$.
Iz propozicije 2.3.2 slijedi da za $T^r(E)$ i $T^s(E)$ postoji izomorfizam

$$T^r(E) \otimes T^s(E) \to T^{r+s}(E)$$

takav da

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) \to (x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s)$$

za sve $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \in T^r(E)$ i $(y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) \in T^s(E)$.

Poglavlje 3

Tenzorske algebre

Tenzorska algebra je ključni koncept u algebarskoj teoriji za proučavanje struktura koje proizlaze iz tenzorskog produkta. Ona predstavlja način kombiniranja modula kako bi se stvorili novi objekti s određenim algebarskim osobinama. U ovom poglavlju bit će obrađena njena definicija te osnovna svojstva.

Kao i tenzorski produkt, tenzorska algebra ima značajnu ulogu u raznim granama matematike, poput diferencijalne geometrije i teorije modula. Kroz analizu tenzorske algebre, možemo dublje razumjeti kako se složeni matematički objekti mogu graditi iz jednostavnijih komponenti.

3.1 Algebra

Neka je A komutativan prsten s jedinicom, a neka je $\mathcal{R} = (\mathcal{R}, +, \cdot)$ neki (ne nužno komutativan) prsten koji je ujedno i A-modul. Kažemo da je $\mathcal{R}$ **algebra** nad A ili $\mathbf{A} - \mathbf{algebra}$.

Napomena 3.1.1. *Jedna od bitnijih podjela algebri je ovisno o komutativnosti, dakle na komutativne i nekomutativne, gdje je algebra $\mathcal{R} = (\mathcal{R}, +, \cdot)$ komutativna algebra ovisno o komutativnosti operacije "$\cdot$".*

*Druga relevantna podjela je, kad je R i polje, na konačnodimenzionalne i beskonačno dimenzionalne algebre. (Prsten R je tijelo ako je svaki ne-nul element iz R invertibilan, tj. $R^{\times} = R \backslash \{0\}$. Komutativno tijelo nazivamo **polje**.)*

Treća podjela je na asocijativne i neasocijativne algebre.

3.2 Tenzorske algebre modula

Neka je R komutativan prsten s jedinicom kao i do sada, te neka je E R-modul.
Za svaki $r \geq 0$:

$$T^r(E) = \bigotimes_{i=1}^{r} E = \underbrace{E \otimes E \otimes \cdots \otimes E}_{r \text{ puta}},$$

$T^0(E) = R$ i $T^1(E) = E$.

Ako je $f : E \to F$ linearno preslikavanje, tada je

$$T^r(f) = T(f, f, ..., f).$$

Pokazat ćemo da je $T(E)$ zadana sa:

$$T(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(E)$$

algebra, definirajući strukturu prstena i algebre.
(Da bi $T(E)$ bila algebra nad R, mora biti prsten koji je ujedno i R-modul.)

Budući da je E R-modul, vrijedi da je i tenzorski produkt $T^r(E)$ R-modul. Direktna suma R-modula je i sama R-modul. Time je $T(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(E)$ R-modul.

Koristeći izomorfizam:

$$T^r(E) \otimes T^s(E) \to T^{r+s}(E),$$

definiramo množenje takvo da

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) \in T^{r+s}(E),$$

za $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \in T^r(E)$ i $(y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) \in T^s(E)$.

Proširimo ovo preslikavanje po linearnosti. Neka su:

$$z = \sum_{r=0}^{\infty} z_r, \quad z_r \in T^r(E), \quad z \in T(E)$$

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} w_s, \quad w_s \in T^s(E), \quad w \in T(E).$$

Definiramo množenje ovih općih elemenata sa sljedećim bilinearnim preslikavanjem:

$$z \cdot w = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} z_r \cdot w_s \tag{3.1}$$

to jest $(z, w) \to z \cdot w$.

Propozicija 3.2.1. *R-modul $T(E)$ zajedno s množenjem (3.1) ima strukturu asocijativne algebre s jedinicom.*

Dokaz. Pokažimo da je tako definirano množenje zaista asocijativno.
Neka su z i w dani kao prije, te neka je

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} u_p, \quad u_p \in T^p(E), \quad u \in T(E).$$

Iz asocijativnosti tenzorskog produkta (vidi 2.3) vrijedi:

$$(z \cdot w) \cdot u = \sum_{r=s=p=0}^{\infty} (z_r \cdot w_s) \cdot u_p = \sum_{r=s=p=0}^{\infty} z_r \cdot (w_s \cdot u_p) = z \cdot (w \cdot u).$$

Ovime je pokazana asocijativnost.
Distributivnost prema zbrajanju se također vidi po svojstvima tenzorskog produkta.

Pokažimo da $T(E)$ ima jedinicu. Jedinica je $1 \in T^0(E)$, znamo da je $T^0(E) = R$. Zaista:

$$1 \cdot (x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \cdot 1 = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_r), \quad \forall (x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \in T^r(E), \ \forall r \geq 0.$$

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \quad z \in T(E).$$

Ovim smo pokazali da $T(E)$ ima strukturu asocijativne algebre s jedinicom. □

Algebru $T(E)$ nazivamo **tenzorska algebra** od E nad R.

Generalno, tenzorska algebra nije komutativna.

Napomena 3.2.2. *Ako je E n-dimenzionalan vektorski prostor, tada $T(E)$ možemo interpretirati kao nekomutativnu polinomijalnu algebru u n varijabli.*

Napomena 3.2.3. *Neprazan skup G sa asocijativnom kompozicijom i jedinicom naziva se monoid.*

Definicija 3.2.4. *Neka je A algebra, te neka je G komutativan monoid.*
Direktna suma

$$A = \bigoplus_{n \in G} A_n,$$

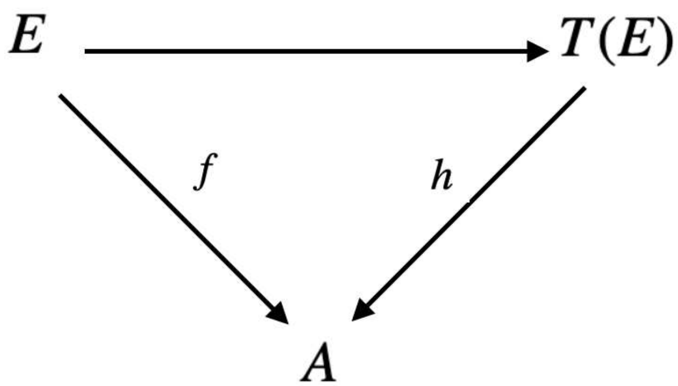
takva da vrijedi

$$A_r \cdot A_s \subset A_{r+s},$$

gdje je A_n skup svih elemenata istog stupnja n, naziva se **G *graduirana algebra***.

3.3 Univerzalno svojstvo tenzorske algebre

Teorem 3.3.1. *Neka je A asocijativna R algebra s jedinicom 1_A, te $f : E \to A$ R-linearno preslikavanje. Tada $\exists!\ h : T(E) \to A$ homomorfizam asocijativnih algebri s jedinicom takav da:*



Slika 3.1: Dijagram

Dokaz. Homomorfizam $h : T(E) \to A$, ako postoji, nužno je jedinstven zbog toga što je tenzorska algebra generirana s E i jedinicom. Konstruirajmo homomorfizam h.

Za svaki $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ postoji jedinstveno linearno preslikavanje $h^{(r)} : T^r(E) \to A$ takvo da:

$$h^{(r)}(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \cdots \cdot f(x_r).$$

Iskorištena je multilinearnost preslikavanja $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \to f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \cdots \cdot f(x_r)$. Neka je $h^{(0)} : R \to A$ td.:

$$h^{(0)}(r) = r1_A.$$

Neka je $h : T(E) \to A$ td.:

$$h = \sum_{r=0}^{\infty} h^{(r)}.$$

Tada za $z = \sum_{r=0}^{\infty} z^r$ vrijedi:

$$h(z) = \sum_{r=0}^{\infty} h^{(r)}(z^r).$$

Sada, budući da $z \in T(E)$ ima konačno ne-nula komponenti z^r, preslikavanje h dobro je definirano.

Preslikavanje h po konstrukciji je homomorfizam asocijativnih algebri što vidimo iz:

$$h((x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r)(y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_s)) = h(x_1 \otimes \cdots \otimes y_s)$$

Ovo vrijedi jer, kad primijenimo h na tenzorski produkt $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_s)$, dobivamo preslikavanje u

$$f(x_1) \cdot \cdots \cdot f(x_r) \cdot f(y_1) \cdot \cdots \cdot f(y_s).$$

To je isto kao i

$$h(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r)h(y_1 \otimes \cdots \otimes y_s).$$

Dakle, h čuva operaciju množenja. □

Poglavlje 4

Simetrične algebre

U ovom poglavlju konstruiramo simetričnu algebru $S(E)$ kao kvocijent tenzorske algebre $T(E)$ po dvostranom idealu. Prvo navodimo osnovne pojmove o grupi permutacija, a zatim koristeći njeno djelovanje na tenzorsku algebru dobivamo dvostrani ideal $M(E)$ takav da je $S(E) = T(E)/M(E)$.

4.1 Simetrična grupa

Neka je $S \neq 0$ neki skup. Neka je

$$Perm(S) = \{f : S \to S \mid f \text{ je bijekcija}\}.$$

Budući da je f bijekcija, slijedi da joj postoji i inverz koji je bijekcija, $f^{-1} : S \to S$.

Za dvije funkcije $f, g : S \to S$ definirana je njihova kompozicija $g \circ f : S \to S$.
Za tri funkcije $f, g, h : S \to S$ vrijedi asocijativnost kompozicije:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Za funkciju identiteta $id : S \to S$ takva da $id(x) = x, \quad x \in S$, vrijedi

$$id \circ f = f \circ id = f,$$

za bilo koji f.

Dakle, $(Perm(S), \circ)$ je grupa.
Ova grupa zove se **simetrična grupa** ili **grupa permutacija** skupa S.

U slučaju kada je S konačan, možemo pretpostaviti da je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, bez smanjenja općenitosti. Tada se permutacije od f zapisuju u obliku:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

Grupe permutacija kada je skup S konačan s n elemenata označavamo sa S_n.

4.2 Kvocijentna algebra

Graduiranu algebru definirali smo u prethodnom poglavlju, opišimo sada i graduirani ideal.

Neka je A graduirana algebra te I ideal takav da je $I \subseteq A$. Ideal I zovemo **graduirani ideal** ako se može zapisati kao direktna suma oblika:

$$I = \bigoplus_{r=0}^{\infty} I^r,$$

gdje je I^r podmodul svakoga A^r, te vrijedi

$$A^r \cdot I^s \subseteq I^{r+s}, \quad I^r \cdot A^s \subseteq I^{r+s}.$$

Prije konstrukcije simetrične algebre, promotrimo osnovnu konstrukciju kvocijente algebre. Kvocijentna algebra A/I je algebra koja se sastoji od klasa ekvivalencija oblika $a + I = \{a + i : i \in I\}$, za $a \in A$, gdje je A algebra i I ideal.

Neka je $A = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A^r$ graduirana algebra i neka je I ideal. Tada je A/I asocijativna algebra. Ako je I graduirani ideal, $I = \bigoplus_{r=0}^{\infty} I^r$, tada je A/I je graduirana algebra.

4.3 Simetrična algebra

Definicija 4.3.1. *Kažemo da je r-multilinearno preslikavanje $f : E^{(r)} \to F$, $r \geq 2$, **simetrično** ako vrijedi*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(r)}),$$

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_r) \in E^{(r)}, \quad \forall \sigma \in S_r.$$

Označimo sada sa S_n simetričnu grupu od n elemenata, koja djeluje na skupu prirodnih brojeva $(1, 2, \ldots, n)$. Neka je za $r \geq 2$ $M^r(E)$ podmodul od $T^r(E)$ generiran elementima tipa

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r - x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(r)}, \quad \forall x_i \in E, \forall \sigma \in S_r,$$

te neka je $M^0(E) = M^1(E) = 0$.

Neka je

$$M(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} M^r(E)$$

Za početak, pokažimo da je $M(E)$ graduirani ideal.

Iz poglavlja o tenzorskoj algebri znamo da množenjem elementa iz $T^r(E)$ i elementa iz $T^s(E)$ dobivamo rezultat u $T^{r+s}(E)$.

Neka su

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \in T^r(E) \text{ i } (y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_s - y_{\sigma(1)} \otimes y_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(s)}) \in M^s(E).$$

Vrijedi:

$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_s - y_{\sigma(1)} \otimes y_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(s)}) =$
$x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s - x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(s)} \in M^{r+s}(E)$

Dakle, $T^r(E) \otimes M^s(E) \to M^{r+s}(E)$.

Neka su sad

$$(y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_r - y_{\sigma(1)} \otimes y_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(r)}) \in M^r(E) \text{ i } (x_1 \otimes \cdots \otimes x_s) \in T^s(E).$$

Vrijedi:

$(y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_r - y_{\sigma(1)} \otimes y_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(r)}) \otimes (x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_s) =$
$y_1 \otimes \cdots \otimes y_r \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_s - y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(s)} \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \in M^{r+s}(E)$

Dakle, $M^r(E) \otimes T^s(E) \to M^{r+s}(E)$.

Sada vrijedi da je $M^r(E)$ podmodul od $T^r(E)$ te je $T^r(E) \otimes M^s(E) \subset M^{r+s}(E)$ i $M^r(E) \otimes T^s(E) \subset M^{r+s}(E)$. Stoga je $M(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} M^r(E)$ dvostrani graduirani ideal.

Neka je
$$S^r(E) = T^r(E)/M^r(E),$$
te
$$S(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r(E).$$

Propozicija 4.3.2. *Neka je $M(E)$ dvostrani ideal u tenzorskoj algebri $T(E)$ konstruiran gore. Kvocijentna algebra $S(E) = T(E)/M(E)$ je komutativna asocijativna algebra s jedinicom.*

Dokaz. Budući da je $T^r(E)$ R-modul i $M^r(E)$ podmodul, vrijedi da je $S^r(E)$ R-modul. $S(E)$ je direktna suma R-modula, pa je $S(E)$ R-modul.

Množenje u $S(E)$ proizlazi iz množenja u $T(E)$, faktorizirano sa $M(E)$. Želimo dokazati da ono ostaje asocijativno i distributivno.

Koristeći izomorfizam:
$$S^r(E) \otimes S^s(E) \to S^{r+s}(E),$$
definiramo množenje koje uzima
$$((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) + M^r(E)) \in S^r(E) \text{ i } ((y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) + M^s(E)) \in S^s(E)$$
te ih preslikava u
$$((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_s)) + M^{r+s}(E)) \in S^{r+s}(E).$$

Proširimo ovo preslikavanje po linearnosti. Neka su:
$$a = \sum_{r=0}^{\infty} a_r = \sum_{r=0}^{\infty}((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) + M^r(E)), \quad a_r \in S^r(E), \quad a \in S(E)$$
$$b = \sum_{s=0}^{\infty} b_s = \sum_{s=0}^{\infty}((y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) + M^s(E)), \quad b_s \in S^s(E), \quad b \in S(E).$$

Množenje ovih elemenata dano je sljedećim bilinearnim preslikavanjem, $(a, b) \to a \cdot b$:

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_r \cdot b_s \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} ((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) + M^r(E)) \cdot ((y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) + M^s(E)) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} ((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) + M^{r+s}(E)).
\end{aligned}
$$

Pokažimo da je tako definirano množenje zaista asocijativno.

Neka su a i b dani kao prije, te neka je

$$
c = \sum_{p=0}^{\infty} c_p = \sum_{p=0}^{\infty} ((z_1 \otimes \cdots \otimes z_p) + M^p(E)),
$$

$$
c_p \in S^p(E), \quad c \in S(E).
$$

Iz asocijativnosti tenzorskog produkta (vidi 2.3) možemo regrupirati članove i imamo:

$$
\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot c &= \sum_{r=s=p=0}^{\infty} (a_r \cdot b_s) \cdot c_p \\
&= \sum_{r=s=p=0}^{\infty} ((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) + M^{r+s}(E)) \cdot ((z_1 \otimes \cdots \otimes z_p) + M^p(E)) \\
&= \sum_{r=s=p=0}^{\infty} (((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) \otimes (z_1 \otimes \cdots \otimes z_p)) + M^{r+s+p}(E)) \\
&= \sum_{r=s=p=0}^{\infty} ((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) + M^r(E)) \cdot ((y_1 \otimes \cdots \otimes y_s) \otimes (z_1 \otimes \cdots \otimes z_p) + M^{s+p}(E)) \\
&= \sum_{r=s=p=0}^{\infty} a_r \cdot (b_s \cdot c_p) \\
&= a \cdot (b \cdot c).
\end{aligned}
$$

Ovime je pokazana asocijativnost.

Zbog svojstva $M(E)$ koje osigurava da permutacije komponenata u elementima algebre $T(E)$ ne mijenjaju njihovu ekvivalentnost, algebra $S(E)$ je komutativna. Vrijedi:

$$
x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in S(E).
$$

Pokažimo da $S(E)$ ima jedinicu.

Jedinica je $1 \in S^0(E)$ jer je $S^0(E) = T^0(E) = R$, zaista:

$$1 \cdot z = z \cdot 1 = z, \quad z = ((x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) + M^r(E)) \in S^r(E),$$

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad x \in S(E).$$

Dakle, kvocijentna algebra $S(E)$ je komutativna, asocijativna i ima jedinicu. □

Algebru $S(E)$ nazivamo **simetrična algebra** od E.

Napomena 4.3.3. *Ako je E n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K, tada se može pokazati da je simetrična algebra $T(E)$ izomorfna algebri polinoma $K[x_1, .., x_n]$ nad komutativnim varijablama $x_1, ..., x_n$.*

Poglavlje 5

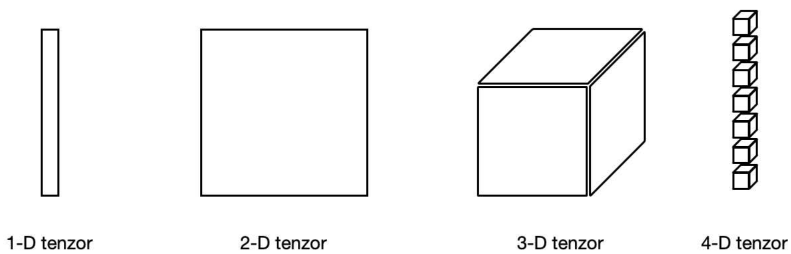
Primjena tenzorske algebre u ekonomiji

Posljednjih godina povećala se dostupnost tenzorskih podataka u znanosti, pa tako i u ekonomiji. Time su se istaknula ograničenja tradicionalnih statističkih modela koji zanemaruju višedimenzionalnu strukturu i ovisnost podataka. Za razliku od tih dosadašnjih modela i istraživanja koja se uglavnom fokusiraju na presjeke podataka ili modele sa skalarima, novi pristup koji ćemo opisati u ovom poglavlju koristi tenzorsku regresiju kako bi svladao kompleksne podatke.

U ovom poglavlju slijedimo članak [1].

5.1 Uvod u primjenu i analiza faktora rizika

Tenzor reda n u m-dimenzionalnom prostoru možemo smatrati matematičkim objektom koji ima m^n komponenti, te poštuje određena pravila transformacije.



Slika 5.1: Tenzori

Spomenimo podjelu faktora rizika u dvije glavne kategorije:

1. **Faktori u području dospijeća** (zajednički za sve zemlje):
   Ovi faktori predstavljaju rizike koji utječu na sve zemlje podjednako, poput globalne inflacije i promjene referentnih kamatnih stopa velikih centralnih banaka, npr. ECB.

2. **Faktori u području zemlje** (zajednički za sva dospijeća):
   Ovi faktori predstavljaju specifične rizike svake zemlje, kao što su promjene u monetarnoj i fiskalnoj politici, promjena deviznog tečaja i rast/pad bruto domaćeg proizvoda (BDP).

Promatrat ćemo modeliranje logaritamskih povrata. Logaritamski povrati ključni su u analizi financijskog tržišta jer omogućavaju lakšu i precizniju procjenu promjena cijena dionica kroz vrijeme. Formula za log-povrat dana je sa:

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}),$$

gdje je r_t log-povrat u trenu t, a P_t cijena dionice u trenu t.

Faktori rizika poput političkih promjena i globalnih događanja izravno utječu na logaritamske povrate dionica. Na primjer, povećanje inflacije ili gospodarska nesigurnost mogu smanjiti povjerenje investitora, što može uzrokovati pad cijena dionica, a time i negativne log povrate. S druge strane, rast gospodarstva može povećati povjerenje investitora, pa će cijena dionica rasti i log povrat će biti pozitivan. Važno je uključiti i ove faktore u modele jer se uzimaju u obzir ne samo povijesni podaci o log-povratima, već i čimbenici koji utječu na tržište. Za to je koristan idući model.

5.2 Bayesov autoregresivni tenzorski model

Bayesov autoregresivni tenzorski model omogućava bolju analizu međuzavisnosti (ekonomskih) varijabli. Temeljni koncept ovog modela je istovremena procjena kretanja različitih vremenskih nizova.

U ovom pristupu, pri procjeni parametara modela koristi se priorna distribucija koja odražava prethodnu distribuciju parametara, dok se u kombinaciji s podacima iz uzorka generira posteriorna distribucija.

Napomenimo da se u ovom radu fokusiramo na standardni Bayesov ART model koji koristi homogeni tenzorski prikaz, td. svi podaci dijele istodimenzionalnu strukturu.

Autoregresivni tenzorski model reda p, ART(p) dan je sa:

$$y_{i,t} = A_{i,0} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k \in S_y} A_{i,k,j} y_{k,t-j} + \sum_{m \in S_x} B_{i,m} x_{m,t} + \epsilon_{i,t}, \tag{5.1}$$

$$\epsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_i^2).$$

U ovom modelu imamo sljedeće varijable:

- y_t predstavlja tenzor endogenih varijabli (npr. logaritamski povrat),
- x_t tenzor kovarijati (npr. faktori rizika poput inflacije),
- $\epsilon_{i,t}$ je šum (smetnja).

Zatim, imamo skupove indeksa: S_y i S_x nizovi cijelih brojeva, te parametre gdje je $A_{i,0}$ konstantan, $A_{i,k,j}$ su koeficijenti koji određuju utjecaj prošlih vrijednosti varijabli na trenutne i $B_{i,m}$ su koeficijenti koji povezuju egzogene varijable s endogenim varijablama.

Za autoregresivni tenzorski model reda p potrebno je p prošlih vrijednosti kako bi se generirala predikcija za trenutnu vrijednost na temelju zadanog modela. Stoga, zadani su i inicijalni uvjeti $y_{-p+1} \ldots, y_0 \in \mathbb{R}^{I_1 \times \cdots \times I_N}$, gdje je $i = (i_1, \ldots, i_N) \in S_y$.

Ovi inicijalni uvjeti omogućuju modelu da uzme u obzir povijesne podatke i preciznije procijeni promjene kroz vrijeme. Konkretno, dane vrijednosti predstavljaju povijesne vrijednosti kamatnih stopa prije trenutka $t = 1$.

ART model dan u (5.1) proširuje se u Bayesov ART model dodatnim pretpostavkama o distribuciji koeficijenata $A_{i,k,j}$ i $B_{i,m}$.

5.3 Prednosti Bayesovog autoregresivnog tenzorskog modela

Bayesov AR tenzorski model nudi značajnu fleksibilnost i preciznost u odnosu na klasične ekonometrijske metode, poput npr. ARMA (Autoregressive Moving Average) modela. ARMA(p, q) (Autoregressive Moving Average) dan je sa:

$$y_t = \phi_0 + \sum_{i=0}^{p} \phi_i y_{t-i} + \epsilon_t - \sum_{j=0}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}, \tag{5.2}$$

gdje su ϕ_i koeficijenti autoregresivne komponente reda p, θ_j koeficijenti pomaknutog prosjeka reda q, a $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_i^2)$ šum.

Detaljnije o ARMA modelima može se naći u [4].

Recimo da bismo htjeli modelirati buduće logaritamske povrate. ARMA modelom analizirali bismo samo prethodne razine logaritamskih povrata, dok bismo Bayesovim AR tenzorskim modelom uzeli u obzir i druge čimbenike poput inflacije ili promjena u tržišnim politikama i sl.

Bayesov AR tenzorski model modelira višedimenzionalne podatke i njihove međusobne interakcije. On koristi parametre u tenzorima umjesto skalarnih parametara. Uz to, uključuje utjecaj egzogenih varijabli i uvodi varijabilnost kroz priorne i posteriorne distribucije parametara. Ovaj pristup omogućuje bolju procjenu parametara, osobito u situacijama s malim uzorcima podataka, što je česta pojava u financijama.

Dakle, Bayesov AR tenzorski model predstavlja snažan alat za analizu i prognozu u financijskim sustavima. Buduća primjena tenzorskih modela mogla bi poboljšati financijsku analizu, posebno u segmentima poput predviđanja tržišnih kretanja i procjene utjecaja ekonomskih politika na cijene dionica i druge financijske instrumente.

Bibliografija

[1] Billio, M., R. Casarin, M, Iacopini i S. Kaufmann: *Bayesian Dynamic Tensor Regression*. Journal of Business and Economic Statistics, 2023. https://www.ecb.europa.eu/press/conferences/shared/pdf/20230612_forecasting_techniques/Billio.pdf, (pristupljeno: 1.10.2024.).

[2] Greub, W.: *Multilinear Algebra, 2nd Edition*. Springer-Verlag, 1978.

[3] Lang, S.: *Algebra, Revised Third Edition*. Springer, 2002.

[4] Tsay, R. S.: *Analysis of Financial Time Series, Third Edition*. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[5] Širola, B.: *Algebarske strukture*. 2017. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg_prof/predavanja/ASpred.pdf.

Sažetak

Glavni cilj ovog rada bio je prikazati osnovnu teorijsku pozadinu tenzorske algebe. Uz opisan tenzorski produkt i osnovne objekte algebre, konstruirana je tenzorska algebra

$$T(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(E)$$

i dokazano je njeno univerzalno svojstvo, točnije da dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & T(E) \arrow[dl, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Slika 5.2: Dijagram

Konstruirana je i kvocijentna algebra $S(E) = T(E)/M(E)$, poznata kao i simetrična algebra. Za kraj je dan kratak pregled primjene tenzora u ekonomiji kroz Bayesov autoregresivni tenzorski model.

Summary

The main goal of this thesis was to present the fundamental theoretical background of tensor algebra. Alongside a description of the tensor product and basic algebraic objects, the tensor algebra

$$T(E) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(E)$$

is constructed, and its universal property is proven, specifically that the diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & T(E) \arrow[dl, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Slika 5.3: Diagram

Additionally, the quotient algebra $S(E) = T(E)/M(E)$, also known as the symmetric algebra, is constructed. Finally, a short overview of tensor applications in economy is provided, with a focus on the Bayesian autoregressive tensor model.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu, 17. ožujka 2000. Završila sam osnovnu školu 2014. te sam nakon toga upisala XV. Gimnaziju koju sam završila 2018. Te godine upisala sam preddiplomski studij inžinjerske matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2022., kada sam dobila i Rektorovu nagradu za svoje sudjelovanje i doprinos u projektu RADDAR. Zatim sam upisala diplomski studij Financijska i poslovna matematika. Radila sam kao stručnjak anotacije u Photomath-u od lipnja 2023. do srpnja 2024. Od rujna 2024. krenula sam raditi kao student u Privrednoj Banci Zagreb u sektoru Tržišnog rizika.