# Matematičko modeliranje u fizičkoj oceanografiji

**Begić, Josip**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:703347

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-03-29**

*Repository / Repozitorij:*

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

zir.nsk.hr

dabar
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Josip Begić

# MATEMATIČKO MODELIRANJE U FIZIČKOJ OCEANOGRAFIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak
prof. dr. sc. Martin Lazar

Zagreb, Travanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

# Sadržaj

**Sadržaj** **iii**

**Uvod** **2**

**1 Izvod modela** **3**
1.1 Osnovne jednadžbe mehanike kontinuuma . . . . . 3
1.2 Boussinesqova aproksimacija . . . . . 4
1.3 Uvođenje koeficijenata turbulentnog trenja . . . . . 5
1.4 Dimenzionalna analiza . . . . . 8

**2 Rješavanje modela** **10**
2.1 Linearizacija, stacionarnost, x-invarijantnost . . . . . 10
2.2 Strujna funkcija i rubni uvjeti . . . . . 12
2.3 Rješenje jednadžbe za strujnu funkciju . . . . . 15
2.4 Rješenje jednadžbe za dužobalno strujanje . . . . . 17
2.5 Denivelacija i tlak . . . . . 18

**3 Rezultati** **20**
3.1 Rezultati . . . . . 20
3.2 Ovisnost o koeficijentima trenja . . . . . 28
3.3 Zaključak . . . . . 32

**Bibliografija** **33**

**A *Matlab* programi** **37**

# Uvod

Fizička oceanografija područje je znanosti koje proučava fizičke procese, ponajviše gibanja i fizikalna svojstva, većih vodenih površina poput mora i oceana. Od posebnog je interesa promatrati stalne morske struje koje utječu na cirkulaciju. Naime, na većoj vremenskoj skali turbulencije uzrokovane lokalnim silama (poput vjetra) nemaju utjecaj kao globalna gibanja uzrokovana unutarnjim svojstvima mora. Pod tim svojstvima misli se i na salinitet i temperaturu koji utječu na gustoću mora te gibanje uzrokovano njima zovemo termohalina cirkulacija. Ovaj rad bavi se upravo takvim gibanjima, uzrokovanim anomalijama u gustoći. Na gibanje veliki utjecaj ima i rotacija zemlje, odnosno Coriolisova sila kao njena posljedica, usred čijeg djelovanja dolazi do cirkulacije mora koju djelimo u dva tipa: ciklonalna cirkulacija u smjeru suprotnom od kazaljke na satu i anticiklonalna cirkulacija u smjeru kazaljke na satu. Primjer ciklonalne cirkulacije je površinska morska struja u Jadranskom moru.

Zadnjih godina eksperimentalno je otkriveno da se na dnu morskog bazena u određenim uvjetima pojavljuje cirkulacija suprotnog smjera od površinske, te se postavilo pitanje zašto dolazi do promjene. M. Orlić i M. Lazar u svom su radu [5] modelirali pridneno anticiklonalno strujanje u Jadranskom moru, koje su potvrdila i empirijska istraživanja. Ovaj rad nastavlja se na [5], te uzima u obzir da gustoća može varirati i po vertikalnoj komponenti. Također dopuštamo više tipova raspodjele gustoće: pridnenu gustu vodu, površinsku laku vodu, kao i njihovu kombinaciju. Analizira se i utjecaj koeficijenata trenja na pomicanje granice kod koje dolazi do promjene cirkulacije iz ciklonalnog tipa u anticiklonalni (ili obrnuto).

Rad je podijeljen u tri poglavlja: u prvom poglavlju analiziramo osnovne jednadžbe mehanike fluida koje uzrokuju gibanje, te ih nizom matematički i fizikalno opravdanih postupaka svodimo na sustav pogodniji za numeričko i analitičko rješavanje. U drugom poglavlju uvodimo rubne uvjete za ovaj problem, te izvodimo rješenje kojim opisujemo morska strujanja. Sustav se rješava uvođenjem strujne funkcije iz koje se mogu dobiti sve komponente vektora brzine. Iako se jednadžba (u dvije varijable) za strujnu funkciju ne može separirati, rješenje tražimo u separabilnom obliku uzimajući u obzir rubne uvjeete. Problem se na taj način svodi na običnu diferencijalnu jednadžbu u jednoj varijabli. U trećem poglavlju prikazani su i interpretirani dobiveni rezultati.

Ovim putem želim zahvaliti mentoru prof. dr. sc. Martinu Lazaru na velikom trudu i brojnim savjetima koji su mi olakšali pisanje rada.

# Poglavlje 1

# Izvod modela

## 1.1 Osnovne jednadžbe mehanike kontinuuma

Osnovne jednadžbe koje opisuju gibanje fluida su jednadžba kontinuiteta i Navier-Stokesova jednadžba koja se izvodi iz drugog Newtonovog zakona gibanja. Matematički sustav te dvije jednadžbe u trodimenzionalnome prostoru možemo zapisati kao

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \vec{F_{tr}} + \vec{F_v} \tag{1.1a}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \tag{1.1b}$$

pri čemu je $\vec{v} = (u, v, w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ funkcija brzine toka fluida, $\vec{\Omega} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kutna brzina zemlje, $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tlak, $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gustoća, $\vec{g} = (0, 0, -g)$ ubrzanje sile teže, a funkcija $\vec{F_{tr}} = (F_x, F_y, F_z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je sila trenja za koju pretpostavljamo da je oblika $\vec{F_{tr}} = \nu\Delta\vec{v} + \frac{1}{3}\nu\nabla(\operatorname{div} \vec{v})$, gdje je $\nu \in \mathbb{R}$ kinematička viskoznost. Funkcija $\vec{F_v} = (F_{v1}, F_{v2}, F_{v3}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ predstavlja vanjske sile koje utječu na fluid.

U jednadžbama se pojavljuje i izraz za materijalnu derivaciju, koju formalno zadajemo idućom definicijom:

**Definicija 1.1.1.** *Materijalna ili Lagrangeova derivacija skalarnog polja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, u oznaci $\frac{d\varphi}{dt}$ definira se kao*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\varphi,$$

*pri čemu je $\vec{v} = (u, v, w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ funkcija brzine.*

Materijalnu derivaciju vektorskog polja $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiramo po komponentama, pa je $\frac{dV}{dt} = (\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \frac{dv_3}{dt})$.

Jednadžba (1.1a) matematički je zapis drugog Newtonovog zakona: prvi član predstavlja akceleraciju, drugi član predstavlja silu uzrokovanu rotacijom Zemlje, dok su izrazi na desnoj strani jednadžbe sila tlaka, gravitacije i trenja. Vektor $\vec{\Omega}$ je oblika $\vec{\Omega} = (0, \Omega_0 \cos\varphi, \Omega_0 \sin\varphi)$, gdje $\Omega_0 \in \mathbb{R}$ približno iznosi $\Omega_0 \approx 7.2921 \times 10^{-5} s^{-1}$, a kut $\varphi$ određen je geografskom širinom. Također je za postavljanje samih jednadžbi prirodna pretpostavka da je fluid kontinuum (neprekidna supstanca) te da su sve funkcije derivabilne po prostornim i vremenskim koordinatama.

Jednadžba (1.1b) je jednadžba kontinuiteta, koja se izvodi iz fizikalnoga zakona očuvanja mase, a njen detaljni izvod može se pronaći u [1].

Označimo Coriolisove parametre s $f_*{:=}2\Omega_0 \cos\varphi$ i $f{:=}2\Omega_0 \sin\varphi$. Izvod modela koji ćemo rješavati započinjemo raspisom jednadžbe (1.1a), koju po komponentama zapisujemo kao:

$$\begin{cases} \text{x:} & \frac{du}{dt} + f_* w - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x + F_{v1} \\ \text{y:} & \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y + F_{v2} \\ \text{z:} & \frac{dw}{dt} - f_* u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z + F_{v3}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Cilj nam je primjenom niza fizikalno i matematički opravdanih aproksimacija pojednostavniti početni sustav i dovesti ga u oblik pogodan za numeričko i analitičko rješavanje.

## 1.2 Boussinesqova aproksimacija

Prvi korak u pojednostavljivanju zadanih jednadžbi je Boussinesqova aproksimacija. Pretpostavka je Boussinesqove aproksimacije da gustoća ne varira previše od neke konstantne vrijednosti, odnosno da je $\rho = \rho_0 + \delta, |\delta| << \rho_0$ te da vrijednost $\delta$ možemo zanemariti u izrazima koji ne sadrže gravitaciju. Ovaj koncept često se koristi u praksi, pri modeliranju atmosfere, oceana, katabatičkih vjetrova i sl., a njegovo matematičko opravdanje može se pronaći u [4]. Uvažimo li navedenu pretpostavku, jednadžbe za $x$ i $y$ komponentu izgledaju isto kao i u (1.2), ali s konstantnom gustoćom $\rho_0$ umjesto $\rho$. U jednadžbi po $z$ komponenti pojavljuje se izraz za težinu fluida $\rho g$, koja ovisi o dubini i ovdje ne možemo zanemariti faktor $\delta$, pa tu jednadžbu zato dodatno raspisujemo.

Pomnožimo li $z$ komponentu jednadžbe (1.2) sa članom $\frac{\rho}{\rho_0}$ dobivamo izraz

$$\frac{dw}{dt}\frac{\rho}{\rho_0} - f_* u\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\rho}{\rho_0} - g\frac{\rho}{\rho_0} + F_z\frac{\rho}{\rho_0} + F_{v3}\frac{\rho}{\rho_0},$$

na koji možemo primijeniti Boussinesqovu aproksimaciju u članovima koji ne sadrže kons-

tantu $g$. Time smo dobili sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} \text{x:} & \frac{du}{dt} + f_* w - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x + F_{v1} \\ \text{y:} & \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y + F_{v2} \\ \text{z:} & \frac{dw}{dt} - f_* u = -\frac{\rho g}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z + F_{v3}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Provjerimo još kako Boussinesqova aproksimacija utječe na relaciju (1.1b). Kako se nigdje ne pojavljuje gravitacijska konstanta $g$, varijablu $\rho$ možemo svugdje zamijeniti konstantom $\rho_0$. Time zanemarujemo cijeli izraz za materijalnu derivaciju, pa jednadžba poprima oblik:

$$\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{1.4}$$

Drugačije zapisano, dobivamo da je $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, što odgovara pretpostavci nestlačivoga fluida.

## 1.3 Uvođenje koeficijenata turbulentnog trenja

Idući korak u izvodu sustava je rastav funkcija pomoću operatora usrednjenja. Intuitivno, rastavljamo funkciju na dva dijela od kojih jedan predstavlja "usrednjeni" dio, odnosno stalni dio koji se sporo mijenja tokom vremena, dok drugi dio čine lokalne perturbacije koje je teže modelirati te ih u analizi većih oceanskih gibanja smijemo zanemariti.

Matematički, u našem modelu operator usrednjenja shvaćamo kao $\frac{1}{T}\int_t^{T+t} d\tilde{t}$, a označavamo ga s $\langle\rangle$. Za proizvoljne funkcije $\psi$ i $\phi$, koristeći rezultate matematičke analize o integralu i derivaciji, lako dobivamo da dani operator zadovoljava iduća svojstva :

i) $\langle \phi + \psi \rangle = \langle \phi \rangle + \langle \psi \rangle$

ii) $\langle a\phi \rangle = a\langle \phi \rangle$

iii) $\langle \langle \phi \rangle \psi \rangle = \langle \phi \rangle \langle \psi \rangle$

iv) $\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t}$, $\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle = \frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial x_i}$

v) $\langle \int \psi(x,t) dx dt \rangle = \int \langle \psi(x,t) \rangle dx dt$.

Rastavimo naše funkcije pomoću operatora usrednjenja:

$$u = \langle u \rangle + u'$$

$$v = \langle v \rangle + v'$$

$$w = \langle w \rangle + w'$$

$$p = \langle p \rangle + p'.$$

Iz definicije operatora jasno je da je za proizvoljnu funkciju $\psi$ usrednjeni dio perturbiranog dijela jednak nuli tj. $\langle \psi' \rangle = 0$. Primijetimo da iz toga lako slijedi jednakost

$$\langle uv \rangle = \langle u \rangle \langle v \rangle + \langle u'v' \rangle, \tag{1.5}$$

odnosno činjenica da usrednjeni dio produkta nije jednak produktu usrednjenih dijelova.

Uvedimo sada spomenuti rastav funkcija i pogledajmo $x$ komponentu u jednadžbi (1.3):

$$\frac{d}{dt}(\langle u \rangle + u') + f_*(\langle w \rangle + w') - f(\langle v \rangle + v') = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x}\right) + F_x + F_{v1}.$$

Sada "usrednjimo" cijelu jednadžbu, odnosno djelujemo na nju s operatorom $\langle\rangle$. Pogledajmo prvo dio koji se odnosi na $\langle \frac{d(\langle u \rangle + u')}{dt} \rangle$. Koristeći da je $\langle \frac{\partial u'}{\partial t} \rangle = 0$ i svojstva *iii*), *iv*) operatora usrednjenja dobivamo da je

$$\langle \frac{d}{dt}(\langle u \rangle + u') \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle u \rangle + \langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle u \rangle + \langle v \rangle \frac{\partial}{\partial y}\langle u \rangle + \langle w \rangle \frac{\partial}{\partial z}\langle u \rangle + \langle u' \frac{\partial}{\partial x}u' \rangle + \langle v' \frac{\partial}{\partial y}u' \rangle + \langle w' \frac{\partial}{\partial z}u' \rangle. \tag{1.6}$$

Izraz

$$\langle u' \frac{\partial}{\partial x}u' \rangle + \langle v' \frac{\partial}{\partial y}u' \rangle + \langle w' \frac{\partial}{\partial z}u' \rangle$$

raspišimo preko pravila za derivaciju produkta funkcija, koristeći pritom svojstva *i*) i *iv*) pa dobivamo

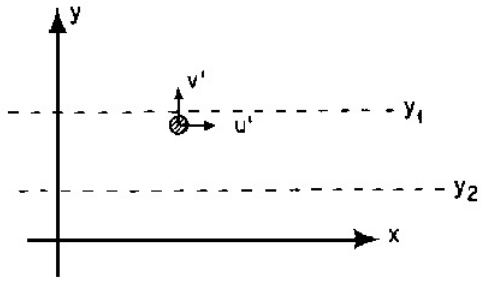
$$\frac{\partial}{\partial x}\langle u'u' \rangle + \frac{\partial}{\partial y}\langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z}\langle u'w' \rangle - \langle u'(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}) \rangle. \tag{1.7}$$

Lako se vidi da uvjet nestlačivosti fluida povlači nestlačivost usrednjenog i turbulentnog dijela, pa je posljednji izraz u relaciji (1.7) jednak nuli.

Pogledajmo sada preostale članove u (1.7). Element fluida s brzinom fluktuacije $v'$ u smjeru $y$ nosi $x$-moment $\rho u'$ preko granice $y_1$. Zato izraz $\rho\langle u'v' \rangle$ predstavlja srednji tok perturbiranog dijela $x$-momenta kroz površinu $y_1$=*const*, što se može vidjeti na slici 1.1. Prema [2], taj tok ekvivalentan je Reynoldsovom naprezanju $\tau_{xy}$, a na sličan način pojavljuju se i naprezanja u drugim smjerovima:

$$\tau_{xx} = -\rho\langle u'u' \rangle, \qquad \tau_{yy} = -\rho\langle v'v' \rangle, \qquad \tau_{zz} = -\rho\langle w'w' \rangle$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho\langle u'v' \rangle, \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho\langle u'w' \rangle, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho\langle v'w' \rangle.$$




Slika 1.1: Srednji tok $x$-momenta preko granice $y_1$

Konceptualno, Reynoldsovo naprezanje ne predstavlja nikakav nov sadržaj, već se pojavljuje isključivo kao posljedica dekompozicije funkcija $u,\ v,\ w$ na usrednjeni i perturbirani dio.

Analogno kao i za jednadžbu po $x$ komponenti možemo raspisati sustav (1.3) i po ostale dvije i dobivamo:

$$\begin{cases} \text{x:} & \frac{d\langle u\rangle}{dt} + f_*\langle w\rangle - f\langle v\rangle = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right) + \langle F_x\rangle + \langle F_{v1}\rangle \\ \text{y:} & \frac{d\langle v\rangle}{dt} + f\langle u\rangle = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right) + \langle F_y\rangle + \langle F_{v2}\rangle \\ \text{z:} & \frac{d\langle w\rangle}{dt} - f_*\langle u\rangle = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial z} - \frac{\langle\rho g\rangle}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right) + \langle F_z\rangle + \langle F_{v3}\rangle. \end{cases} \tag{1.8}$$

Napravimo li dekompoziciju funkcija i u (1.4), dobivamo jednadžbu:

$$\rho_0\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial\langle w\rangle}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) = 0,$$

na koju isto kao i prije djelujemo s operatorom usrednjenja. Kako je $\langle u'\rangle = \langle v'\rangle = \langle w'\rangle = 0$, i koristeći svojstvo *iv*), dobivamo jednadžbu

$$\rho_0\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} + \frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y} + \frac{\partial\langle w\rangle}{\partial z}\right) = 0. \tag{1.9}$$

Jednadžbe su sada zadane samo u terminima $\langle u\rangle, \langle v\rangle, \langle w\rangle, \langle\rho\rangle$ i $\langle p\rangle$ i te izraze ćemo od sada radi jednostavnosti pisati kao $u, v, w, \rho$ i $p$, imajući u vidu njihovo stvarno značenje.

Preostaje odrediti kako specificirati Reynoldsovo naprezanje pa da sustav jednadžbi (1.3) bude zatvoren i rješiv. "Najgrublja" i najčešća metoda temelji se na pretpostavci da Reynoldsovo naprezanje linearno ovisi o prostornim derivacijama, pa imamo

$$\tau_{xx} = \rho_0 2A_H\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{yy} = \rho_0 2A_H\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{zz} = \rho_0 2A_V\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \rho_0 A_H \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \rho_0 A_V \frac{\partial u}{\partial z} + \rho_0 A_H \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \rho_0 A_V \frac{\partial v}{\partial z} + \rho_0 A_H \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Pritom su $A_H$ i $A_v$ parametri horizontalne, odnosno vertikalne turbulentne viskoznosti. Važno je napomenuti, kako je istaknuto u [2], da je ova pretpostavka najslabiji dio cijele teorije i nema apriorne potvrde da ovakav model Reynoldsovog naprezanja vrijedi. Međutim, u praksi ovakvo modeliranje daje dobre rezultate pa ga i ovdje koristimo. Napokon, dobili smo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + f_* w - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(A_H \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_H \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_V \frac{\partial u}{\partial z}) + F_x + F_{v1} \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(A_H \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_H \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_V \frac{\partial v}{\partial z}) + F_y + F_{v2} \\ \frac{dw}{dt} - f_* u = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho g}{\rho_0} + \frac{\partial}{\partial x}(A_H \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_H \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_V \frac{\partial w}{\partial z}) + F_z + F_{v3}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Prije nego krenemo rješavati sustav, preostaje nam napraviti dimenzionalnu analizu dobivenih funkcija. Naime, uzimamo li u obzir da gledamo velike morske površine, pojedine varijable nekoliko su redova veličine manje u odnosu na druge, pa ih nema potrebe koristiti u računu.

## 1.4 Dimenzionalna analiza

Za dimenzionalnu analizu uvodimo skalu za svaku pojedinu varijablu. Pritom se misli na konstantu koja ima dimenziju identičnu pripadnoj varijabli i njena numerička vrijednost reprezentira vrijednosti varijable. U Tablici 1.1 možemo vidjeti skalu za nama bitne varijable, kao i njihove uobičajene vrijednosti u području fizičke oceanografije.

| Varijabla | Skala | Mjerna jedinica | Red veličine u oceanografiji |
|---|---|---|---|
| $x, y$ | L | m | $\approx 10^4$ |
| $z$ | H | m | $\approx 10^2$ |
| $t$ | T | s | $\leq 1$ dan $\approx 9 \times 10^4$ |
| $u, v$ | U | m/s | $\approx 0.1$ |
| $w$ | W | m/s | $\approx 10^{-2}$ |

Tablica 1.1: Tipične vrijednosti varijabli u oceanografiji

Osnovne relacije koje očekujemo su

$$T \geq \frac{1}{\Omega} \text{ i } \frac{U}{L} \leq \Omega,$$

pri čemu se prva odnosi na vrijeme, a druga na brzinu. Relacije slijede iz [1], a osnovna pretpostava je da efekte rotacije uzimamo u obzir za vremensku skalu veću od 24 h. Za sada nije potrebno raditi razliku između horizontalnih varijabli, za koje pripadne dimenzije bazena označavamo s $L$, a pripadne brzine s $U$. U oceanografiji je vertikalna varijabla obično znatno manja od horizontalne, pa je označavamo s $H$, a pripadnu brzinu s $W$. U ovim oznakama, koristeći jednadžbu kontinuiteta, može se pokazati da mora vrijediti nejednakost

$$W << U,$$

pa je samim time i $\Omega W << \Omega U$. Zato će faktor $f_* w$ na jednadžbu po $x$ varijabli, u usporedbi s faktorom $fu$, imati slab utjecaj i možemo zanemariti. Slično u jednadžbi po $z$ varijabli zanemarujemo $f_* u$, obzirom da je puno manji od prvog faktora na lijevoj strani (ovdje koristimo činjenicu da se gradijent tlaka skalira kao i Coriolisovi parametri; detaljniji raspis može se pronaći u [1]). Primijetimo da smo time u cijelome sustavu zanemarili faktor $f_*$ i ovaj se postupak u literaturi naziva tradicionalna aproksimacija. Opisanim postupkom dobili smo sustav

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + -fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(A_H \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_H \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_V \frac{\partial u}{\partial z}) + F_x + F_{v1} \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(A_H \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_H \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_V \frac{\partial v}{\partial z}) + F_y + F_{v1} \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho g}{\rho_0} + \frac{\partial}{\partial x}(A_H \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_H \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_V \frac{\partial w}{\partial z}) + F_z + F_{v1}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Daljnje tehnike provodit ćemo na specifičnom slučaju kako bismo dobili sustav čije rješenje možemo eksplicitno izračunati.

# Poglavlje 2

# Rješavanje modela

## 2.1 Linearizacija, stacionarnost, x-invarijantnost

Naš model želimo primijeniti na izdužen bazen pravokutnoga oblika (kojim, primjerice, možemo aproskimirati Jadransko more), pa ćemo uz takav oblik moći uvesti dodatne pretpostavke koje će nam omogućiti izvod eksplicitnog rješenja problema. U ovome radu želimo modelirati gibanje fluida do kojega dolazi zbog promjena u gustoći (tzv. termohalina cirkulacija), a ne zbog utjecaja vanjskih sila, pa je funkcija $F_v$ jednaka nuli.

Os $x$ je položena u smjeru obale, $y$ okomito na obalu, a $z$ duž vertikale. Bazen aproksimiramo beskonačno izduženim kanalom pa možemo pretpostaviti $x$-invarijantnost sustava, koja kaže da promjene po $x$ osi možemo zanemariti. Naime, promjene se mogu dogoditi samo na rubovima, ali nas zanima cirkulacija u središnjem dijelu bazena, daleko od ruba. Zanemarimo li parcijalne derivacije po $x$ varijabli, sustav (1.11) poprima oblik:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} - fv = A_H\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_V\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + F_x \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} + fu = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y} + A_H\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_V\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + F_y \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} + fu = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\rho g}{\rho_0} + A_H\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_V\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + F_z \\ 0 = \rho_0\Big(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\Big). \end{cases}$$

Nadalje, zbog činjenice da vanjske sile ne djeluju na fluid, sustav je u ravnotežnom stanju i nema promjena po vremenu pa vrijedi $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$. Ovo stanje zovemo stacionarnim.

Kako bismo mogli izračunati analitičko rješenje, potrebno je još linearizirati sustav. Naime, iz dimenzionalne analize vidimo da su vrijednosti komponenata brzine $u, v, w$ manje od 1, pa će nelinearni dio jednadžbi (odnosno kvadrati funkcija) biti dovoljno mali da

ih možemo zanemariti u odnosu na ostatak jednadžbe. Time dobivamo sustav

$$\begin{cases} -fv = A_H \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_v \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ fu = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y} + A_H \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\rho g}{\rho_0} + A_H \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_v \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \tag{2.1}$$

U nastavku ćemo uvesti oznaku za anizotropni (eng. *anisotropic*) Laplaceov operator $\Delta_A$ definiran izrazom $\Delta_A \equiv A_H \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_v \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.Također je potrebno ograničiti model na hidrostatski slučaj, odnosno zanemariti izraze $A_H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ i $A_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ (tzv. hidrostatska aproksimacija). Time dobivamo sustav od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice

$$\begin{cases} -fv = \Delta_A u \\ fu = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \Delta_A v \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\rho g}{\rho_0} \\ 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, \end{cases} \tag{2.2}$$

čije ponašanje želimo ispitati u ovisnosti o gustoći $\rho = \rho_0 + \delta$ koja uzrokuje gibanje. Pritom je $\rho_0 \in \mathbb{R}$ konstantna gustoća, a $\delta$ anomalija gustoće zadana jednadžbom

$$\delta(y, z) = \left(1 + \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2H}(z + H)\right) - q\right). \tag{2.3}$$

Konstantom $q$ reguliramo oblik raspodjele gustoće. Uzmemo li $q = 0$ funkcija gustoće odgovara onome što očekujemo u Jadranskom moru: na rubovima je zbog dotoka slatke vode gustoća manja, dok je u centru bazena zbog niže temperature gustoća najveća. Varirajući $q$ dobivamo i druge profile gustoće, a ovom su radu korištene vrijednosti $q = 0,\ 1,\ 0.5$ , kojima opisujemo tip pridnene guste vode, površinske lake vode ili njihovu kombinaciju, respektivno.

Prije nego nastavimo s računom, odredimo rubne uvjete za ovaj konkretan problem. Na obali pretpostavljamo da je brzina jednaka nula, pa imamo Dirichletov (no slip) rubni uvjet:

$$u_{-b} = u_b = 0.$$

Kako fluid ne može teći preko fiksne granice, imamo i uvjete neprodiranja:

$$v_{-b} = v_b = 0, \quad w_{-H} = w_0 = 0.$$

Prema [1], na granici dva fluida (u našem slučaju oceana i atmosfere) rubni uvjeti su

$$\rho_0 A_H \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \tau_x, \qquad \rho_0 A_H \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \tau_y,$$

pri čemu su $\tau_x$ i $\tau_y$ komponente naprezanja vjetra. Ranije smo rekli da u ovom modelu ne gledamo utjecaj vanjskih sila na sustav, pa ovaj rubni uvjet zapravo znači da je smicanje jednako nuli. Na dnu bazena parametriziramo smicanje strujanja linearnom funkcijom koja ovisi o koeficijentu pridnenog trenja $k_v$:

$$A_v \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=-H} - k_v u_{-H} = 0, \qquad A_v \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Big|_{z=-H} - k_v v_{-H} = 0.$$

U nastavku želimo dobiveni sustav svesti na jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom i naći njeno eksplicitno rješenje.

## 2.2 Strujna funkcija i rubni uvjeti

Prvo primijetimo, na osnovu treće jednadžbe sustava (2.2), da funkcija $\frac{\partial p}{\partial z}$ ovisi samo o gustoći i konstantama $\rho_0$ i $g$. Deriviramo li drugu jednadžbu sustava po $z$ varijabli, možemo eliminirati funkciju tlaka iz daljnjeg računa. Nadalje, uvjet nestlačivosti dopušta nam da uvedemo strujnu funkciju $\Psi(y, z)$ takvu da vrijedi $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ i $w = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$. Uz tako definiranu funkciju, dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$f\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta_A u \tag{2.4}$$

$$f\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \delta}{\partial y} - \Delta_A \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \tag{2.5}$$

Izraz na desnoj strani u (2.5) često će se pojavljivati u daljnjem računu, pa ga radi preglednosti zapisa označimo kao funkciju $G(y, z)$:

$$G(y, z) \equiv \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \delta(y, z)}{\partial y} - \Delta_A \frac{\partial^2 \Psi(y, z)}{\partial z^2}.$$

Sada na prvu jednadžbu djelujemo s operatorom $\frac{\partial}{\partial z}$, a na drugu s $\Delta_A$, što nam omogućuje eliminaciju varijable $u$ iz gornjeg sustava. Time dobivamo diferencijalnu jednadžbu šestog reda za funkciju $\Psi$:

$$f^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \Delta_A^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{g}{\rho_0}\Delta_A \frac{\partial \delta}{\partial y}. \tag{2.6}$$

Ovu jednadžbu možemo riješiti eksplicitno, ali prvo izrazimo rubne uvjete u terminima funkcije $\Psi$.

Iz definicije strujne funkcije lako slijede uvjeti

$$\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=0} = 0,$$

$$A_v\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=-H} - k_v\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\Big|_{z=-H} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\Big|_{y=-b} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\Big|_{y=b} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\Big|_{z=-H} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\Big|_{z=0} = 0.$$

Zadnja četiri uvjeta znače da je $\Psi_{\pm b} = const$, odnosno $\Psi_{-H} = \Psi_0 = const$. Za konstantu možemo uzeti nulu pa imamo

$$\Psi_b = \Psi_{-b} = 0, \qquad \Psi_{-H} = \Psi_0 = 0.$$

Slično iz uvjeta $(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2})\big|_{z=0} = 0$ dobivamo da je član $(\frac{\partial^4\Psi}{\partial y^2\partial z^2})\big|_{z=0}$ koji se pojavljuje u jednadžbi (2.5) na visini $z = 0$ jednak nuli. Iskoristimo li i uvjet za smicanje na granici mora i zraka, tj. $\frac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=0} = 0$, dobivamo da je rubni uvjet za $\frac{\partial^4\Psi}{\partial z^4}$ u točki $z = 0$ zadan funkcijom $\delta$:

$$(\frac{\partial^4\Psi}{\partial z^4})\big|_{z=0} = \frac{g}{\rho_0 A_v}\Big(\frac{\partial\delta}{\partial y}\Big)\big|_{z=0}. \tag{2.7}$$

Kako bismo iskoristili rubne uvjete za $u_{-b}$ i $u_b$, trebamo prvo izraziti dužobalno strujanje $u(y, z)$ preko strujne funkcije $\Psi(y, z)$. Djelujemo na jednadžbu (2.5) sa operatorom $\int_{-H}^{z} d\tilde{z}$ i iskoristimo relaciju $u_{-H} = \frac{1}{f}G(y, -H)$. Slijedi da je

$$u(y, z) = \frac{A_v}{k_v f}G(y, -H) + \frac{1}{f}\int_{-H}^{z} G(y, \tilde{z})d\tilde{z}. \tag{2.8}$$

Uvjete $u_b = u_{-b} = 0$ možemo sada zapisati kao

$$0 = u(\pm b, z) = \frac{A_v}{k_v f}G(\pm b, -H) + \frac{1}{f}\int_{-H}^{z} G(\pm b, \tilde{z})d\tilde{z}.$$

U funkciji $G(\pm b, z)$ pojavljuje se faktor $A_v\frac{\partial^4\Psi(\pm b,z)}{\partial z^4}$ koji je zbog rubnog uvjeta $\Psi_{\pm b} = 0$ jednak nuli. Također se pojavljuje izraz za promjenu gustoće po $y$ varijabli,

$$\frac{\partial\delta(y, z)}{\partial y} = -\frac{\pi}{b}\sin(\frac{\pi y}{b})(cos(\frac{\pi}{2H}(z + H)) - q),$$

koji je u $y = \pm b$ jednak nuli. Preostao je jedino član $\frac{\partial^4\Psi(\pm b,z)}{\partial y^2\partial z^2}$, pa pomnožimo li jednadžbu s $\frac{f}{A_H}$ dobivamo

$$0 = -\frac{A_v}{k_v}\frac{\partial^4\Psi(\pm b,-H)}{\partial y^2\partial z^2} - \int_{-H}^{z}\frac{\partial^4\Psi(\pm b,\tilde{z})}{\partial y^2\partial z^2}d\tilde{z}.$$

Funkcija pod integralom konstanta je po $y$ varijabli i integraciju vršimo po varijabli $z$, iz čega slijedi izraz

$$0 = -\frac{A_v}{k_v}\frac{\partial^4\Psi(\pm b,-H)}{\partial y^2\partial z^2} - \frac{\partial^3\Psi(\pm b,z)}{\partial y^2\partial z} + \frac{\partial\Psi^3(\pm b,-H)}{\partial y^2\partial z}.$$

Prva dva člana na desnoj strani iščezavaju na osnovu rubnog uvjeta $A_v(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2})\Big|_{z=-H} = k_v(\frac{\partial\Psi}{\partial z})\Big|_{z=-H}$ pa dobivamo vrijednost funkcije $\frac{\partial^3\Psi(y,z)}{\partial y^2\partial z}$ na rubu $y = \pm b$:

$$\frac{\partial^3\Psi(\pm b,z)}{\partial y^2\partial z} = 0.$$

Preostaje još odrediti rubni uvjet na dubini $z = -H$. Djelujmo operatorom $\frac{\partial}{\partial z}$ na (2.4), izraz $\frac{\partial u}{\partial z}$ koji se pojavljuje u članu na desnoj strani zapišimo pomoću (2.5) i funkcije $G(y,z)$, te potom sve pomnožimo s koeficijentom $A_v$. Time dobivamo novu jednadžbu

$$A_v f\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = A_v A_h\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial z} + \frac{A_v^2}{f}\frac{\partial^2 G(y,z)}{\partial z^2}.$$

od koje oduzimamo (2.4) pomnoženu s koeficijentom $k_v$ (pri čemu $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ opet zapisujemo preko funkcije $G(y,z)$). Dobivenu jednadžbu promatramo u točki $z = -H$:

$$\begin{aligned} A_v f(\frac{\partial^2\Psi(y,z)}{\partial z^2})\Big|_{-H} - k_v f(\frac{\partial\Psi(y,z)}{\partial z})\Big|_{-H} = A_H\frac{\partial^2}{\partial y^2}A_v(\frac{\partial u}{\partial z})\Big|_{-H} + \\ \frac{A_v^2}{f}\frac{\partial^2 G(y,-H)}{\partial z^2} - A_H k_v(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\Big|_{-H} - \frac{A_v k_v}{f}\frac{\partial G(y,-H)}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Prema rubnom uvjetu za funkciju $\Psi(y,z)$ u $-H$ lijeva strana je jednaka nuli, dok se na desnoj strani (koristeći linearnost derivacije) pojavljuje rubni uvjet $A_v(\frac{\partial u}{\partial z})\Big|_{z=-H} - k_v u_{-H} = 0$. Dobivena jednadžba predstavlja zadnji rubni uvjet zadan u terminima funkcije $G(y,z)$:

$$A_v\frac{\partial^2 G(y,z)}{\partial z^2}\Big|_{z=-H} - k_v\frac{\partial G(y,z)}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0.$$

Dobili smo 10 rubnih uvjeta, 4 po $y$ varijabli i 6 po $z$:

$$\begin{aligned}
\Psi_b = \Psi_{-b} &= 0 \\
\frac{\partial^3 \Psi(y,z)}{\partial y^2 \partial z}\Big|_{y=\pm b} &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=0} &= 0 \\
\Psi_{-H} = \Psi_0 &= 0 \\
A_\nu\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=-H} - k_\nu\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\Big|_{z=-H} &= 0 \\
\left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4}\right)\Big|_{z=0} &= \frac{g}{\rho_0 A_\nu}\frac{\partial \delta}{\partial y}\Big|_{z=0} \\
A_\nu\left(\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial^3 \delta}{\partial z^2 \partial y} - \Delta_A \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4}\right)\Big|_{z=-H} - k_\nu\left(\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial^2 \delta}{\partial z \partial y} - \Delta_A \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3}\right)\Big|_{z=-H} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Sada možemo izračunati eksplicitno rješenje diferencijalne jednadžbe (2.6).

## 2.3 Rješenje jednadžbe za strujnu funkciju

Rješenje rubne zadaće tražiti ćemo u separabilnom obliku, tj. pretpostaviti ćemo da je moguće rastaviti funkciju $\Psi$ na produkt dvije funkcije jedne varijable

$$\Psi(y,z) = Y(y)Z(z).$$

Primijetimo pritom da sustav (2.2) ne dopušta separaciju varijabli i svođenje problema na Sturm-Liouvilleovu zadaću, čije rješenje možemo pronaći u [3]. Ipak, za funkciju $Y$ odabrat ćemo oblik $Y(y) = \sin(\lambda y)$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanta odabrana tako da su zadovoljeni rubni uvjeti na obali $y = \pm b$. Iz prva dva uvjeta za $\Psi$ po $y$ varijabli dobivamo da je $\lambda = \frac{\pi}{b}$, a ovakvom konstrukcijom zadovoljeni su i preostali rubni uvjeti po $y$.

Uvrstimo sada funkciju $\Psi$ u jednadžbu (2.6) i grupirajmo faktore po derivacijama od $Z(z)$, pa dobivamo jednadžbu

$$\sin \lambda y\Big((f^2 + A_H^2\lambda^4)Z''(z) - 2A_H A_\nu \lambda^2 Z^{(IV)}(z) + A_\nu^2 Z^{(VI)}(z)\Big) = \frac{g}{\rho_0}\Delta_A \frac{\partial \delta}{\partial y}.$$

Podijelimo jednadžbu sa $\sin(\lambda y)$ i uvrstimo oblik funkcije $\delta$ kako bismo dobili diferencijalnu jednadžbu šestog reda za funkciju $Z(z)$. Uvedimo i pokrate za konstante koje će se često pojavljivati,

$$\mu = \frac{\pi}{2H},\ A_1 = f^2 + A_H^2\lambda^4,\ A_2 = \lambda^3 A_H + \mu^2 A_\nu \lambda,$$

i koristeći rubne uvjete za $\Psi$ po $z$ varijabli zapišimo dobiveni rubni problem za funkciju $Z(z)$:

$$\begin{cases} A_1 Z''(z) - 2A_H A_v \lambda^2 Z^{(IV)}(z) + A_v^2 Z^{(VI)}(z) = -\dfrac{g}{\rho_0} A_H \lambda^3 q + \dfrac{g}{\rho_0} A_2 \cos(\mu(z+H)) \\ Z''(0) = 0 \\ Z(0) = 0 \\ Z(-H) = 0 \\ A_v Z''(-H) - k_v Z'(-H) = 0 \\ Z^{(iv)}(0) = \dfrac{g\lambda q}{\rho_0 A_v} \\ A_v\Big( -\dfrac{g}{\rho_0}\lambda\mu^2 + A_H\lambda^2 Z^{(iv)}(-H) - A_v Z^{(vi)}(-H)\Big) - k_v\Big(A_H\lambda^2 Z^{(iii)}(-H) - A_v Z^{(v)}(-H)\Big) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Rješenje jednadžbe (2.11) tražimo tako da rastavimo funkciju $Z$ na partikularan i homogen dio

$$Z = Z^P + Z^H.$$

Može se provjeriti da je jedno partikularno rješenje dano funkcijom

$$Z^P = -\frac{g}{2\rho_0}\frac{A_H q \lambda^3}{A_1} z^2 - \frac{g}{\rho_0}\frac{A_2}{A}\cos(\mu(z+H)),$$

gdje je $A$ konstanta

$$A = (A_1\mu^2 + 2A_H A_v \lambda^2 \mu^4 + \mu^6 A_v^2).$$

Funkciju $Z^H$ tražimo rješavajući pripadnu karakterističnu jednadžbu

$$\omega^6 A_v^2 - 2A_H A_v \lambda^2 \omega^4 + (f^2 + A_H^2 \lambda^4) = 0.$$

Dobivamo da su njena rješenja

$$\omega_{1,2} = 0, \qquad \omega_{3,4} = \sqrt{\frac{A_H\lambda^2 \pm fi}{A_v}}, \qquad \omega_{5,6} = -\sqrt{\frac{A_H\lambda^2 \pm fi}{A_v}},$$

pa je homogeno rješenje jednadžbe oblika

$$Z^H = c_1 + c_2 z + c_3 e^{\omega_3 z} + c_4 e^{\omega_4 z} + c_5 e^{\omega_5 z} + c_6 e^{\omega_6 z},$$

pri čemu su $c_i, i = 1, \ldots, 6$ konstante koje dobivamo iz početnih uvjeta. Opći oblik funkcije $\Psi$ možemo zapisati kao

$$\Psi(y,z) = \sin\lambda y\Big(Z^P + c_1 + c_2 z + c_3 e^{\omega_3 z} + c_4 e^{\omega_4 z} + c_5 e^{\omega_5 z} + c_6 e^{\omega_6 z}\Big). \tag{2.12}$$

Uvrstimo rubne uvjete (2.10) u (2.12) i dobivamo sustav jednadžbi iz kojeg možemo odrediti konstante $c_1, \ldots, c_6$:

$$\sum_{i=3}^{6} c_i \omega_i^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{A_H \lambda^3 q}{A_1}$$

$$c_1 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 0$$

$$c_1 - H c_2 + \sum_{i=3}^{6} c_i e^{-\omega_i H} = \frac{g}{\rho_0} \frac{A_2}{A} + \frac{g}{2\rho_0} \frac{A_H \lambda^3 H^2}{A_1}$$

$$-k_v c_2 + \sum_{i=3}^{6} c_i \omega_i e^{-\omega_i H} (\omega_i A_v - k_v) = \frac{g}{\rho_0} \frac{A_v A_H q \lambda^3}{A_1} - \frac{g}{\rho_0} \frac{A_2 A_v \mu^2}{A} + k_v H \frac{g}{\rho_0} \frac{A_H q \lambda^3}{A_1}$$

$$\sum_{i=3}^{6} c_i \omega_i^4 = \frac{g q \lambda}{\rho_0 A_v}$$

$$\sum_{i=3}^{6} c_i e^{-\omega_i H} (A_H \lambda^2 \omega_i^4 - A_v \omega_i^6 - A_H \frac{k_v}{A_v} \lambda^2 \omega_i^3 + k_v \lambda \omega_i^5) = \mu^2 \frac{g}{\rho_0} (\frac{A_H \lambda^2 \mu^2 A_2}{A} - \lambda + \frac{A_2 \mu^4 A_v}{A}).$$

Ovaj sustav rješavan je u programskom paketu *Matlab* koristeći funkciju *mldivide* za rješavanje linearnog sustava oblika $Ax = b$. Zbog razlika u redovima veličina pojedinih elemenata matrice bilo ju je potrebno modificirati; detalji cijelog koda mogu se pronaći u Dodatku A.

## 2.4 Rješenje jednadžbe za dužobalno strujanje

Izrazom (2.8) zadana je funkcija dužobalnog strujanja $u(y, z)$, koja ovisi o anomaliji gustoće $\delta$ i strujnoj funkciji $\Psi$:

$$u(y,z) = \frac{A_v}{kv} (\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \delta(y, -H)}{\partial y} - \Delta_A \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}) + \frac{1}{f} \int_{-H}^{z} \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \delta(y, \tilde{z})}{\partial y} - \Delta_A \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} d\tilde{z}. \tag{2.13}$$

Od interesa je promatrati kako se granica na kojoj je $u(y, z) = 0$ mijenja u ovisnosti o koeficijentima trenja $A_H,\ A_v,\ k_v$. Naime, iznad te granice javlja se ciklonalna (ili anticiklonalna) cirkulacija u fluidu, dok se ispod nje javlja obrnuta cirkulacija. Variranjem parametara trenja (npr. oslabimo li pridneno trenje $k_v$ jača anticiklonalna cirkulacija na dnu i granica $u(y, z) = 0$ se "podiže") možemo bolje modelirati morske bazene i strujanja u njima.

Uvrstimo li oblik funkcija $\delta$ i $\Psi$ u jednadžbu $u(y, z) = 0$ dobiva se jednadžba koju nije moguće riješiti eksplicitno, već je potrebno koristiti numeričke metode za traženje njenog

rješenja. U ovom radu korištena je funkcija *fsolve* u programskom jeziku *Matlab*, implementirana pomoću *Levenberg–Marquardt* algoritma. Rezultati za dužobalno strujanje prikazani su u idućem poglavlju, a detalji koda u Dodatku A.

## 2.5 Denivelacija i tlak

Cirkulacija do koje dolazi zbog promjena u gustoći uzrokuje denivelaciju vodene površine, odnosno promjenu u visini vodenog stupca, koju označavamo sa $\zeta$. Zanimljivo je promatrati kako se ona mijenja u ovisnosti o različitim parametrima i drugačijoj raspodjeli gustoće. Kako bismo dobili izraz za $\zeta$, integriramo prvo hidrostatsku komponentu sustava (2.2) po vertikali

$$p(y,\zeta) - p(y,z) = -\int_z^{\zeta} (\rho_0 + \delta(y,\tilde{z}))g d\tilde{z}. \tag{2.14}$$

Funkcija $p(y,z)$ nam je za sada nepoznata, pa da je uklonimo iz daljnjeg računa integriramo drugu jednadžbu sustava (2.2) (odnosno $y$ komponentu jednadžbe gibanja) po transverzali, od $-b$ do $y$:

$$p(y,z) - p(-b,z) = \int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta_A v - fu)d\tilde{y}.$$

Ove dvije jednadžbe sada zbrojimo i uzmimo u obzir da je u $p_\zeta$ tlak jednak atmosferskom tlaku $p_{atm}$. Prema [1], time zanemarujemo površinsku napetost vode, ali to svojsto ima značajan utjecaj samo u modelima manjih, lokalnih gibanja fluida , te ovakva aproksimacija nema utjecaj na morsko gibanje. Dobivamo novu jednadžbu

$$p_{\text{atm}} - p_{-b} = -\int_z^{\zeta} g(\rho_0 + \delta)d\tilde{z} + \int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta_A v - fu)d\tilde{y}.$$

Za točku $z$ uzimamo dno bazena, tj. $z = -H$, a vrijednost $p_{-b}$ zapišimo preko (2.14), iz čega slijedi izraz

$$\int_{-H}^{\zeta} g(\rho_0 + \delta)_{-b} d\tilde{z} = \int_{-H}^{\zeta} g(\rho_0 + \delta)d\tilde{z} - \int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta_A v - fu)_{-H} d\tilde{y}. \tag{2.15}$$

Nepoznati član u ovoj jednadžbi, $\int_{-H}^{\zeta}(\rho_0 + \delta)_{-b}$, izračunati ćemo koristeći zakon očuvanja mase, koji kaže da je masa sustava u svakom trenutku $t$ konstantna. U našem dvodimenzionalnom modelu tada vrijedi iduća formula:

$$\int_{-H}^{\zeta}\int_{-b}^{b} (\rho_0 + \delta)d\tilde{y}d\tilde{z} = \rho_0 H 2b,$$

pri čemu desna strana predstavlja masu neporemećenog bazena konstantne visine $H$, dok lijeva strana predstavlja masu bazena s anomalijom gustoće $\delta$ i visinom određenom denivelacijom $\zeta$. Navedenu jednakost iskoristiti ćemo u jednadžbi (2.15) nakon što je integriramo duž bazena. Time dolazimo do izraza

$$\int_{-b}^{b}\int_{-H}^{\zeta} g(\rho_0+\delta)_{-b}\, d\tilde{z}\, d\tilde{y} = \rho_0 H 2bg - \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta_A v - fu)_{-H}\, d\hat{y}\, d\tilde{y}.$$

Primijetimo da je podintegralna funkcija na lijevoj strani konstantna po $y$ varijabli, pa je integral po $\tilde{y}$ varijabli jednak $2b$. Zapišimo konačni oblik formule,

$$\int_{-H}^{\zeta} g(\rho_0+\delta)_{-b}\, d\tilde{z} = \rho_0 Hg - \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta_A v - fu)_{-H}\, d\hat{y}\, d\tilde{y},$$

koji ćemo uvrstiti u (2.15) i time dobivamo izraz za funkciju $\zeta$:

$$\int_{-H}^{\zeta} g(\rho_0+\delta)d\tilde{z} = \rho_0 Hg - \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta_A v - fu)_{-H} d\hat{y}\, d\tilde{y} + \int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta_A v - fu)_{-H} d\hat{y}. \quad (2.16)$$

Kako bismo numerički riješili jednadžbu, potrebno ju je zapisati u eksplicitnom obliku, stoga uvrstimo izraze za poznate funkcije $\delta$ i $v$:

$$\int_{-H}^{\zeta} g(\rho_0 + (1+\cos(\lambda y))(\cos(\mu(\tilde{z}+H)) - q))d\tilde{z} =$$
$$\rho_0 Hg + \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta\frac{\partial\Psi}{\partial z} fu)_{-H} d\tilde{y}dy - \int_{-b}^{y} \rho_0(\Delta\frac{\partial\Psi}{\partial z} + fu)_{-H} d\tilde{y}.$$

Jednostavnim računom iz navedene jednadžbe dobivamo

$$\rho_0\zeta + (1+cos(\lambda y))(\frac{1}{\mu}\sin(\mu(\zeta+H)) - q\zeta - qH) = \frac{1}{\lambda g}(-C_1\cos(\lambda y)), \quad (2.17)$$

pri čemu je $C_1$ pokrata za konstantu

$$C_1 = \rho_0\lambda^2 A_H Z'_{-H} - \rho_0 A_v Z'''_{-H} + \rho_0\frac{A_v g\lambda}{k_v\rho_0}(1-q) - \lambda^2\rho_0\frac{A_v A_H}{k_v}Z''_{-H} + \rho_0\frac{A_v^2}{k_v}Z^{(iv)}_{-H}.$$

Jednadžba (2.17) ne može se dodatno "srediti", u smislu da nije moguće naći eksplicitno rješenje za $\zeta$, već je, slično kao i u poglavlju 2.4, potrebno koristiti numeričke metode za rješavanje nelinearnih sustava kako bismo dobili rješenje. Opet je korištena funkcija *fsolve*, a dobiveni rezultati nalaze se u idućem poglavlju.

Jednom kada je izračunata $\zeta$, iz jednadžbe (2.14) lako se dobije i funkcija za tlak, a od posebnog će interesa biti gledati tlak na dnu, u točki $z = -H$. Detaljan kod za denivelaciju i tlak može se pronaći u Dodatku A.

# Poglavlje 3

# Rezultati

U ovom poglavlju prikazana su rješenja za strujnu funkciju $\Psi$, dužobalno strujanje $u$, pripadni profil gustoće $\delta$, denivelaciju vodene površine $\zeta$ i tlak na dnu $p_{-H}$ dobiveni za različite kombinacije parametara $A_H, A_v, k_v$ i $q$. Pritom su $A_H$ i $A_v$ koeficijenti horizontalne, odnosno vertikalne viskoznosti, a $k_v$ je koeficijent pridnenog trenja. Vrijednosti parametara predstavljaju realne veličine koje se pojavljuju u fizičkoj oceanografiji i odgovaraju vrijednostima u sjevernom Jadranu, a preuzete su iz literature poput [5] i [6].

## 3.1 Rezultati

Prvo želimo prikazati rezultate za različite tipove gustoće uz skup standardnih parametara: $A_H = 100$, $A_v = 0.01$, $k_v = 0.01$. Parametrom $q$ određujemo oblik raspodjele gustoće: pojavljuju se slučajevi površinske lake vode ($q = 1$), pridnene guste vode ($q = 0$), ili kombinacija ova dva tipa ($q = 0.5$).

Na slici 3.1 prikazani su rezultati u slučaju pridnene guste vode. Ovaj tip karakterizira veća gustoća pri dnu koja opada prema površini, gdje je konstantna. U skladu s time i tlak na dnu je najveći (u odnosu na sva 3 profila gustoće) i doseže vrijednost od oko $9.811 \times 10^5$ *bar*. Zbog djelovanja sile gradijenta tlaka dolazi do poprečne i vertikalne cirkulacije. Strujnom funkcijom $\Psi$ komponente brzine $v$ i $w$ u potpunosti su opisane (jer je strujna funkcija tangencijalna na brzinu) i na slici 3.1 (a) možemo vidjeti njihov tok u presjeku bazena: veća gustoća pri dnu uzrokuje i jače strujanje u tom području. Nadalje, model predviđa poniranje morske vode u središtu bazena i izviranje na istočnoj i zapadnoj obali, što odgovara kretanjima u Jadranskom moru. U kasnijim primjerima može se vidjeti kako se intenzitet cirkulacije mijenja s promjenom koeficijenata trenja $A_H$, $A_v$ i $k_v$. Dužobalno strujanje $u$ prikazano je na slici 3.1 (b). Na njoj vidimo nivo krivulje koje označavaju intenzitet protoka do kojeg dolazi zbog djelovanja Coriolisove sile. Negativan predznak označava strujanje "u papir", dok pozitivan označava strujanje u suprotnom smjeru. Vidimo da model predviđa

ciklonalnu (tip C) cirkulaciju - kretanje u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, tipično za gotova sva mora sjeverne hemisfere (kako je spomenuto u [5]). Na kraju spomenimo da je povećana gustoća rezultirala smanjenjem razine bazena te stoga vrijednosti funkcije $\zeta$ poprimaju isključivo negativne vrijednosti (slika 3.1 (d) ).

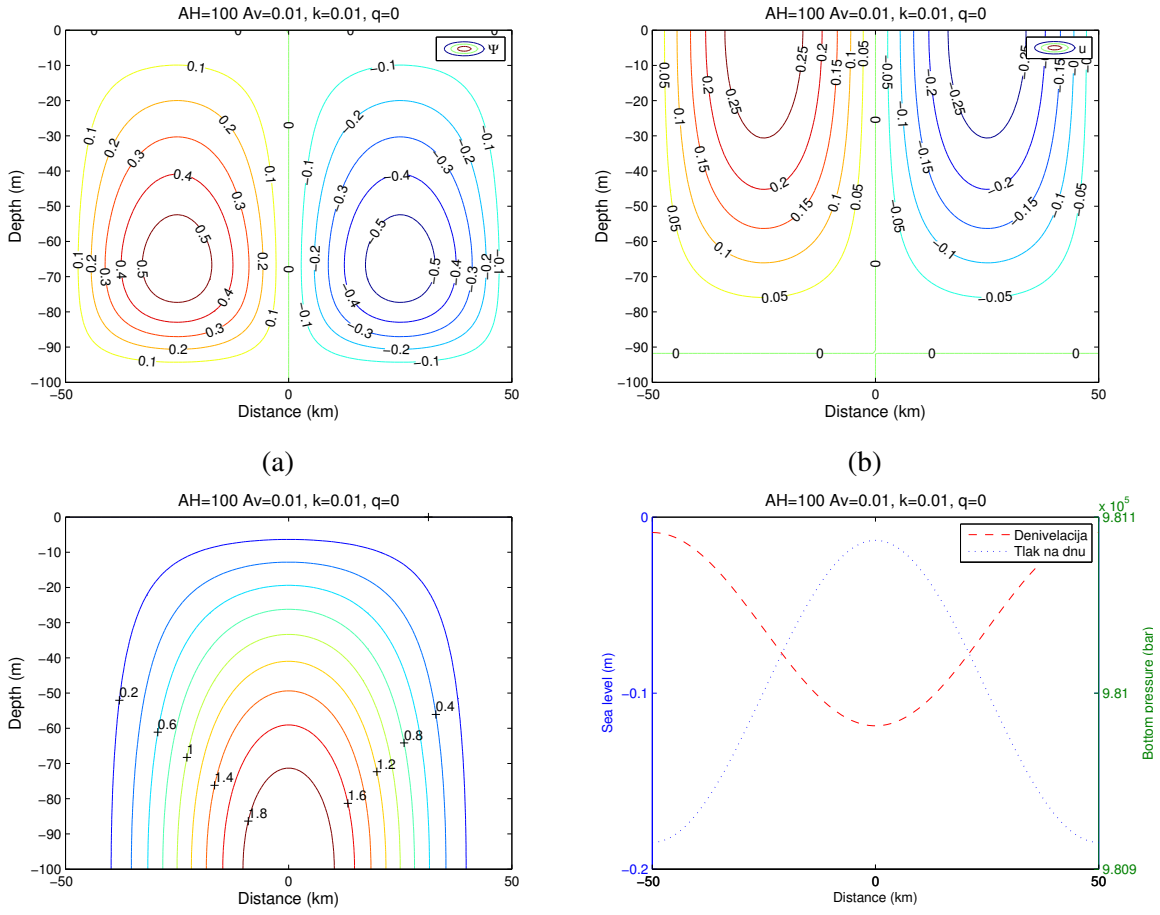
Model površinske lake vode, odnosno slučaj kada je $q = 1$, prikazan je na slici 3.2. Činjenica da je anomalija gustoće $\delta$ negativna (što se vidi na slici 3.2 (c)) bitno utječe na cirkulaciju fluida. Naime, pogledamo li graf pridnenog tlaka pod (d), vidimo da on ima najmanju vrijednost u središtu bazena $y = 0$, pa zaključujemo da je i gustoća u tom dijelu najmanja. Iz tog razloga u fluidu dolazi do obrnute cirkulacije (u odnosu na prethodni slučaj) - voda tone na područjima veće gustoće (sada je to rub bazena), a izvire na područjima manje (u središtu). Pogledamo li strujnu funkciju na slici 3.2 (a), vidimo da je i njena cirkulacija u suprotnom smjeru u odnosu na prošli slučaj: desno od pravca $y = 0$ vrijednosti funkcije $\Psi$ su negativne, dok su lijevo pozitivne, što upravo odgovara toku fluida iz područja veće gustoće u područja manje gustoće. U skladu sa navedenim, i dužobalno strujanje ima anticiklonalni smjer cirkulacije (tip A), a razina na kojoj je $u = 0$ se povećala. Ipak, strujanje nije dovoljno jako da bi očekivali pojavljivanje ciklonalne cirkulacije ispod razine $u = 0$. Primijetimo da je u ovom slučaju visina stupca mora pozitivna, kao što se vidi na slici 3.2 (d). Drugim riječima, zbog smanjenja u gustoći dolazi do uzdizanje morske površine. Ovakav model raspodjele gustoće i kretanja fluida nije tipičan za Jadransko more, ali se na primjer pojavljuje već u susjednom Jonskom moru.

Nakon analize slučajeva pridnene guste vode i površinske lake vode, jasnije je i što očekivati od modela koji kombinira ova dva tipa, odnosno kojeg karakterizira profil gustoće određen parametrom $q = 0.5$. Grafove pripadnih gibanja može se vidjeti na slici 3.3. Raspodjelom gustoće kao na slici 3.3 (c) doći će do veće promjene u kretanju strujnica funkcije $\Psi$, odnosno komponenata brzine $v$ i $w$. To je posljedica pomicanja granice na kojoj je $\rho = \rho_0$, koja je u prethodnim slučajevima bila ili na dnu ili na vrhu bazena. Naime, na toj granici dolazi do promjene u cirkulaciji, pa gibanje fluida iznad te granice mijenja smjer u odnosu na isti položaj ispod te granice. Konkretno, za bilo koju fiksnu točku $y$ vrijednosti funkcije $\Psi$ mijenjaju predznak na granici $\rho = \rho_0$, odnosno dolazi do promjene smjera brzina $v$ i $w$. Pridneni tlak je opet najveći u središnjem dijelu bazena, a može se i uočiti da manja gustoća na površini utječe na iznos tlaka na dnu, pa je on slabiji nego u slučaju $q = 0$. Možda najmanje očekivani rezultat je da tok dužobalnog strujanja ostaje isti kao i u slučaju $q = 0$, samo slabijeg intenziteta, a primijećujemo da je i razina na kojoj je $u = 0$ približno jednaka. Naime, anticiklonalna cirkulacija koja se pojavljuje kod manje gustoće u površinskom sloju vode, kako smo vidjeli u prošlom slučaju za ($q = 1$), ovdje nema dovoljan intenzitet osim da "oslabi" ciklonalnu cirkulaciju uzrokovanu većom gustoćom u pridnenom sloju.

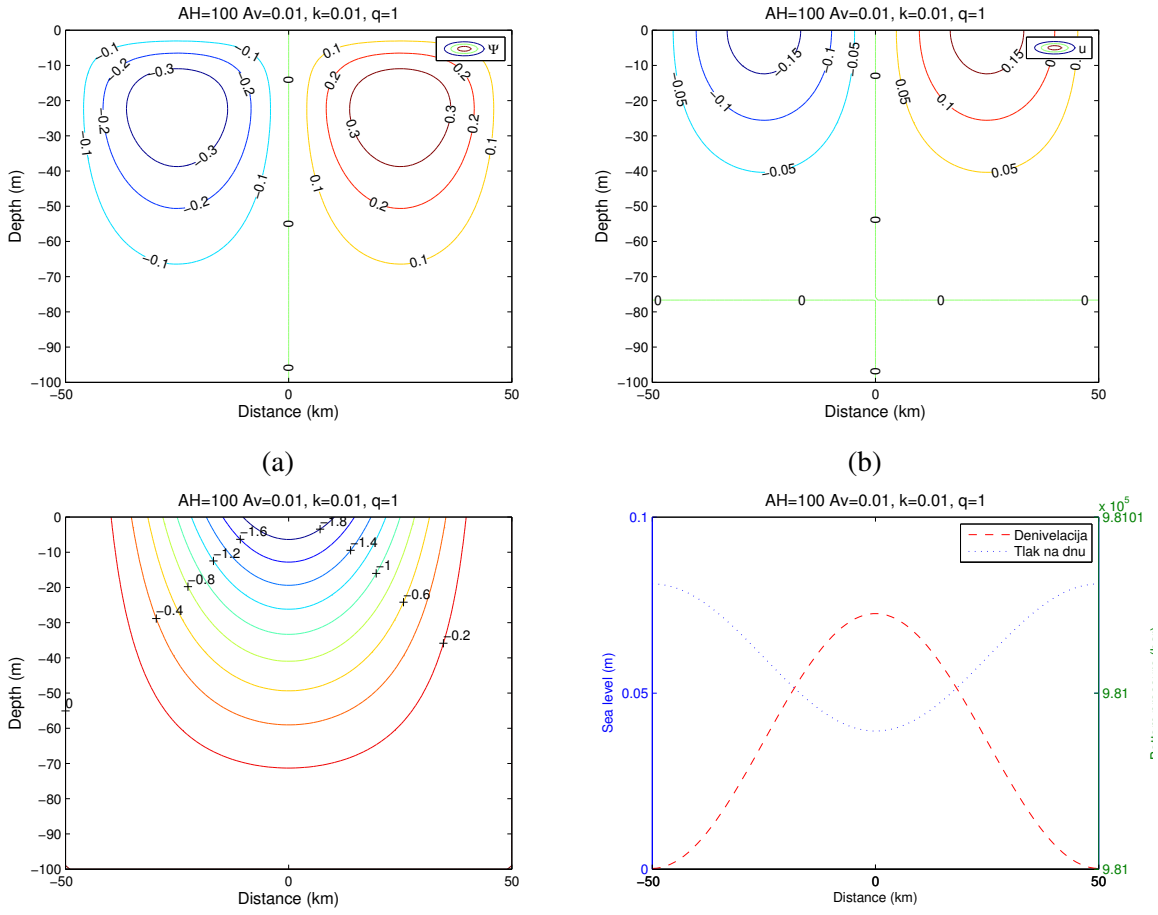
Zanimljivo je naš model primijeniti na znatno dublji bazen, kada je $H = 1000$ m, uz profil gustoće određen s $q = 0$. Očekujemo smjer kretanja komponenata brzine kao i u pr-

vom slučaju, što i potvrđuju rezultati koje vidimo na slici 3.4. Primjećujemo kako funkcija tlaka poprima vrijednosti za cijeli red veličine veće od prethodnih slučajeva, da se stupac vodene površine sada smanjio za 1 m u centru bazena, te da su vrijednosti funkcija $\Psi$ i $u$ znatno veće nego u ranijim slučajevima. Ipak, najinteresantnija je posljedica pojavljivanje anticiklonalne cirkulacije pri dnu bazena. Naime, granica na kojoj je $u = 0$ nalazi se puno više nego u prethodnim slučajevima (ovo gledamo u apsolutnom smislu, razlika dna bazena i granice je oko 160 m), pa zbog slabijeg djelovanja koeficijenata pridnenog trenja ispod te granice dolazi do razvijanja anticiklonalnog strujanja. Interesantno je pogledati i strujnu funkciju $\Psi$, čije se vrijednosti zbog veće pridnene gustoće puno brže mjenjaju u nižim slojevima bazena i djeluju puno jače nego na površini.

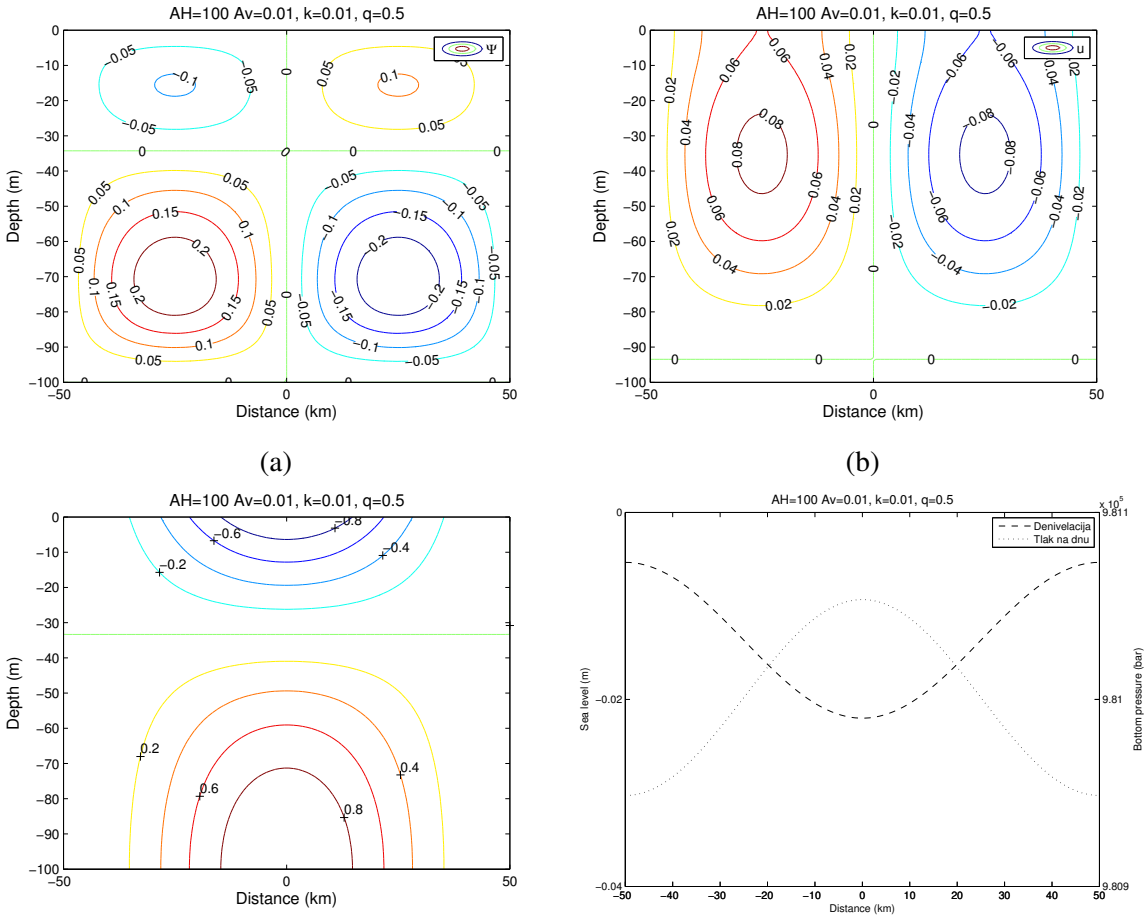
Na kraju pogledajmo što se događa pri većoj promjeni nekog parametra trenja. Za fizikalnu interpretaciju najjednostavnije je pogledati slučaj kada je $k_v$ nekoliko redova veličine slabiji u odnosu na onaj do sada uzeti, $k_v = 0.01$, odnosno kada je pridneno trenje znatno slabije nego u sadašnjim slučajevima. Intuitivno očekujemo da tada, zbog manjeg otpora na dnu, jača anticiklonalno strujanje, a time raste i visina na kojoj je $u = 0$. Uzmemo li $k_v$ reda veličine $10^{-4}$, koji je još uvijek karakterističan za Jadransko more i nalazimo ga na primjer u [6], na slici 3.4 (b) možemo vidjeti kako model predviđa pojavljivanje anticiklonalne cirkulacije na dnu bazena. Iznos cirkulacije nije prevelik, ali bitno je primijetiti da se ona pojavljuje, te je uz variranje i preostalih koeficijenata trenja moguće da ona i jača. To nas motivira da promatramo kako se granica na kojoj je $u = 0$, to jest na kojoj dolazi do promjene cirkulacije iz ciklonalne u anticiklonalnu (tip C/A) ili obrnuto (tip A/C), mijenja u ovisnosti o različitim veličinama koeficijenata trenja.



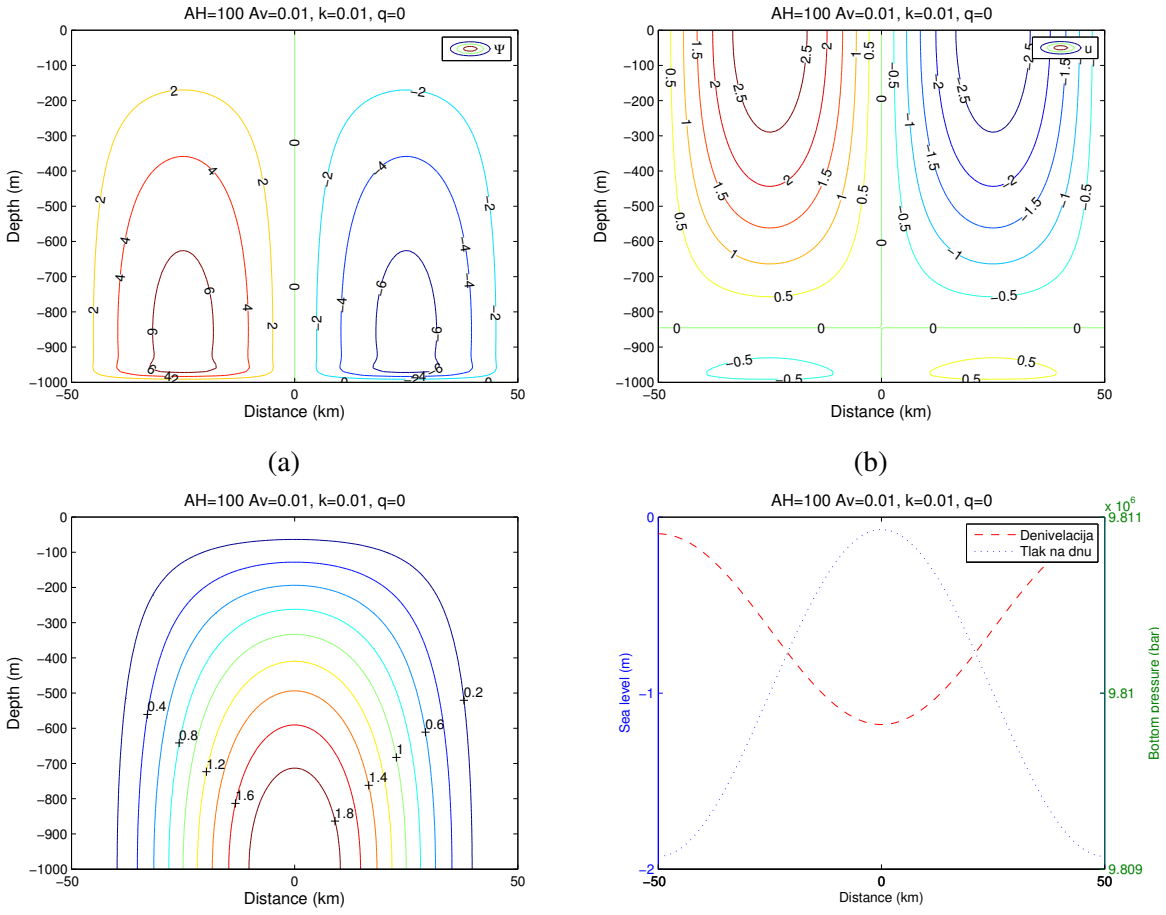

Slika 3.1: Grafički prikaz rješenja za (a) strujnu funkciju, (b) dužobalno strujanje, (c) anomaliju gustoće, (d) denivelaciju i tlak na dnu. Za koeficijente trenja uzet je referentan skup vrijednosti, $A_H = 100$, $A_v = 0.01$, $k_v = 0.01$ i profil gustoće određen s $q = 0$



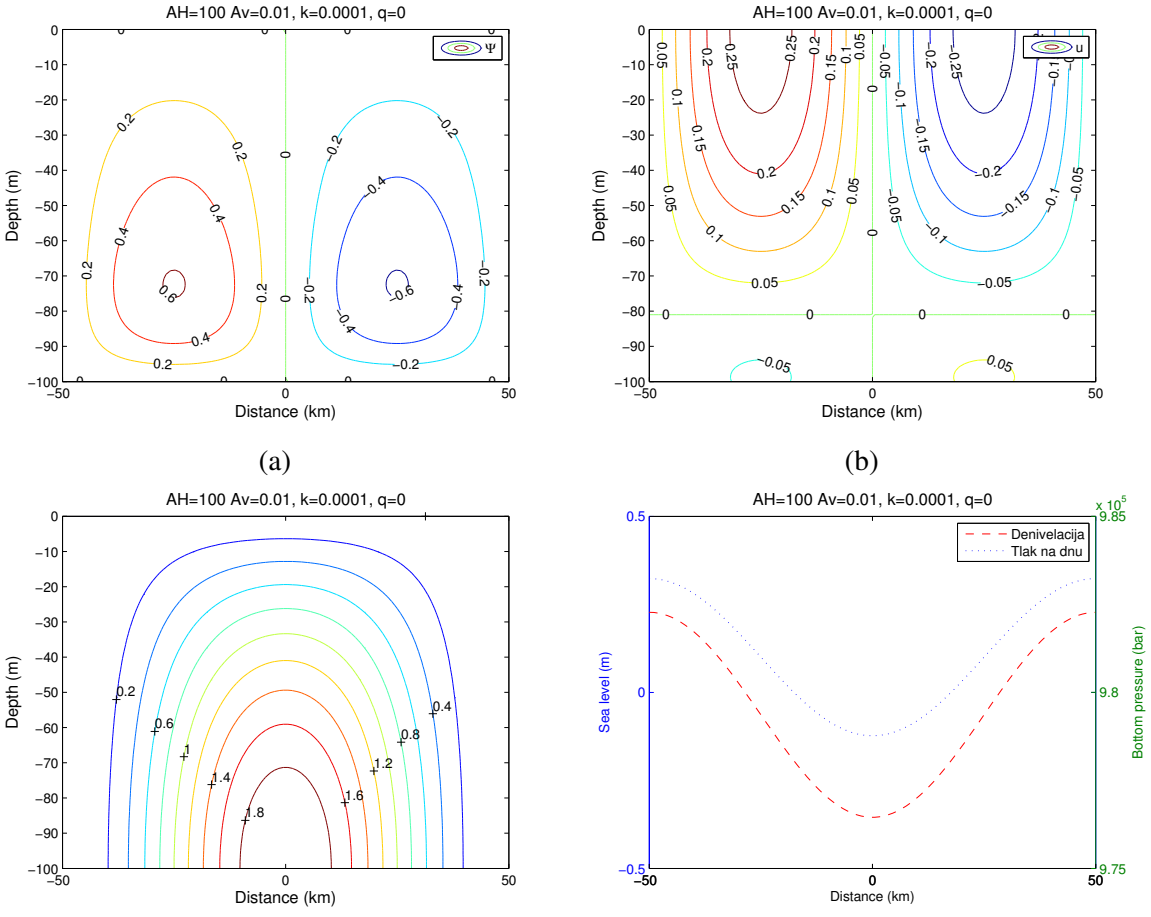

Slika 3.2: Grafički prikaz rješenja za (a) strujnu funkciju, (b) dužobalno strujanje, (c) anomaliju gustoće, (d) denivelaciju i tlak na dnu, uz koeficijente trenja kao i na slici 3.1 i profil gustoće određen s $q = 1$




Slika 3.3: Grafički prikaz rješenja za (a) strujnu funkciju, (b) dužobalno strujanje, (c) anomaliju gustoće, (d) denivelaciju i tlak na dnu, uz koeficijente trenja kao i na slici 3.1 i profil gustoće određen s $q = 0.5$




Slika 3.4: Grafički prikaz rješenja za (a) strujnu funkciju, (b) dužobalno strujanje, (c) anomaliju gustoće, (d) denivelaciju i tlak na dnu, uz koeficijente trenja i profil gustoće kao i na slici 3.1 i dubinu $H = 1000$ m




Slika 3.5: Rezultati za slabiji koeficijent pridnenog trenja $k_v = 10^{-4}$ i profil gustoće određen s $q = 0$

## 3.2 Ovisnost o koeficijentima trenja

U ovoj sekciji analiziramo kako koeficijenti trenja utječu na pomicanje granice na kojoj je $u = 0$, odnosno na kojoj dolazi do promjene tipa cirkulacije. Obzirom na oblik funkcije za dužobalno strujanje, jednadžbu

$$u(y, z) = 0$$

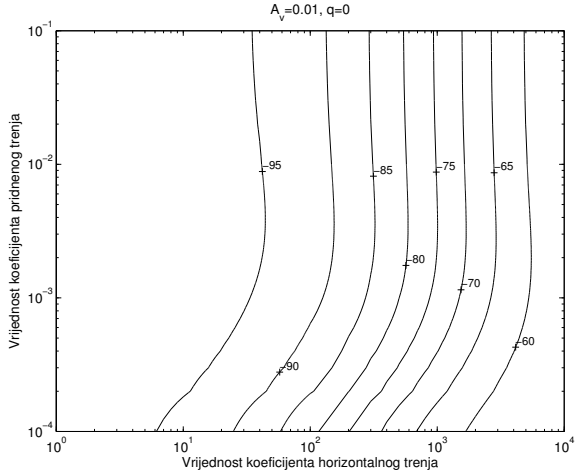
nije bilo moguće riješiti eksplicitno, već je korištena funkcija *fsolve* u programskom paketu *Matlab*. Funkcija je implementirana pomoću *Levenberg–Marquardt* algoritma (**LMA**), koji je namijenjen rješavanju nelinearnih jednadžbi. Algoritam se bazira na metodama gradijentnog spusta i Gauss-Newtonovog algoritma, i iterativnim postupkom pokušava pronaći rješenje jednadžbe $u(y, z) = 0$. Detaljni opis algoritma može se pronaći u [7]. Uzet je *Matlabov* unaprijed zadani prag zaustavljanja algoritma kada je vrijednost dovoljno blizu nultočke, a to je $10^{-6}$. Za inicijalnu točku uzeta je visina $z = -50$ m.

Pokazalo se da metoda loše funkcionira za parametre trenja $k_v$ i $A_v$ reda veličine manje od $10^{-4}$ i $A_H$ reda veličine iznad $10^4$, pa je zato uzeto $A_H \in [1, 10^4]$ i $A_v,\ k_v \in [10^{-4}, 1]$. Ovakvi parametri odgovaraju onima korištenim u [6]. Grafovi su nacrtani tako da je u svakome trenutku jedan parametar uzet iz referentnog skupa vrijednosti i fiksiran, dok druga dva variraju u spomenutim intervalima.

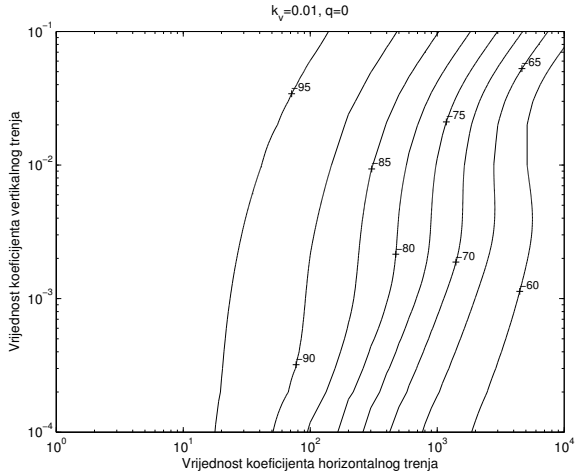
Na slici 3.6 vidimo kako se razina na kojoj je $u = 0$ pomiče u slučaju pridnene guste vode. Pod (a) možemo primijetiti da visina uglavnom ovisi o koeficijentu horizontalnog trenja $A_H$; iznad točke $k_v \approx 10^{-3}$ nivo krivulje su okomite i neovisne o jačini pridnenog trenja. Ipak, zanimljivo je primijetiti slučaj kada je pridneno trenje reda veličine manjeg od $10^{-3}$; tada kao rezultat smanjenja pridnenog trenja dolazi do jače pridnene cirkulacije i podizanja razine $u = 0$. Na slici 3.6 (b) vidimo odnos između koeficijenata horizontalnog i vertikalnog trenja, i bitno je uočiti da visina granice na kojoj je $u = 0$ ne odstupa značajnije od one kada pridneno trenje zamijenimo vertikalnim: u oba slučaja najveća razina je oko $-95$ m, a najmanja oko $-60$ m. Za fiksnu vrijednost $A_H$ lako primijećujemo, što se vidi na 3.6 (c), da variranje vrijednosti koeficijenata $A_v$ i $k_v$ nema većeg utjecaja na razinu na kojoj je $u = 0$: vrijednosti se kreću od oko $-80$ m do oko $-95$ m. Također, primijećujemo da istovremeno smanjenje koeficijenata $k_v$ i $A_v$ dovodi do jačanja cirkulacije u pridnenom sloju, kao što je i očekivano.

Kako smo već mogli primijetiti u prošloj sekciji, za slučaj površinske lake vode ($q = 1$) granica na kojoj je $u = 0$ viša je nego u slučaju $q = 0$. To potvrđuju i rezultati na slici 3.7, pa tako gornja granica doseže čak $-45$ m na slici (a) ili $-40$ m na slici (b). Uočavamo i da je ovaj slučaj obuhvaća veći interval - granica se spušta do $-95$ m i diže do $-40$ m.

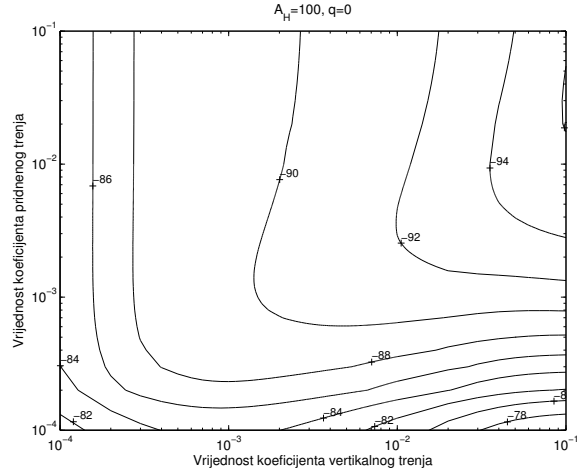
Posljednji slučaj, 3.8, kombinacija je dva gore navedena i odgovara zapažanjima koja smo primijetili ranije - pridnena gusta voda prevladava nad površinskom lakom, pa su i rezultati sličniji slučaju $q = 0$.




(a)

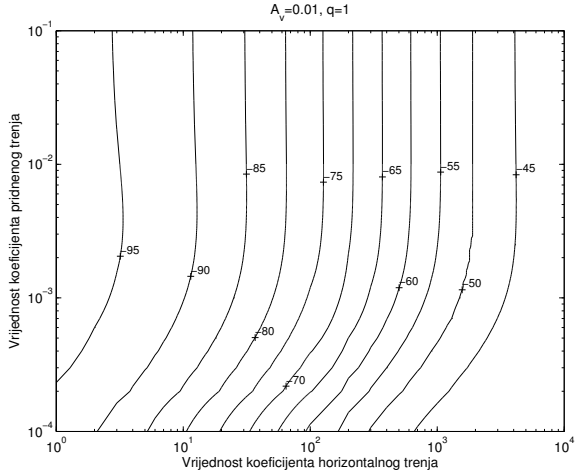



(b)

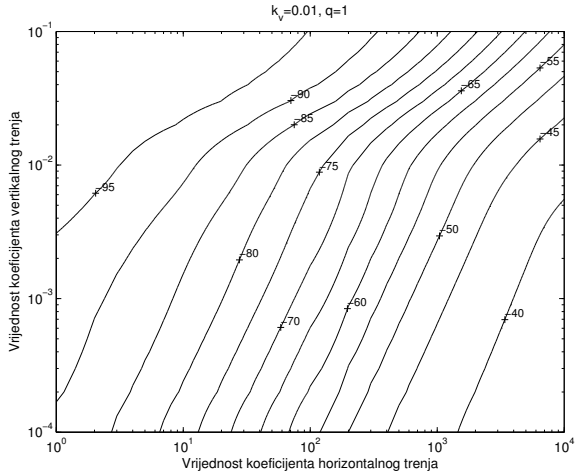



(c)

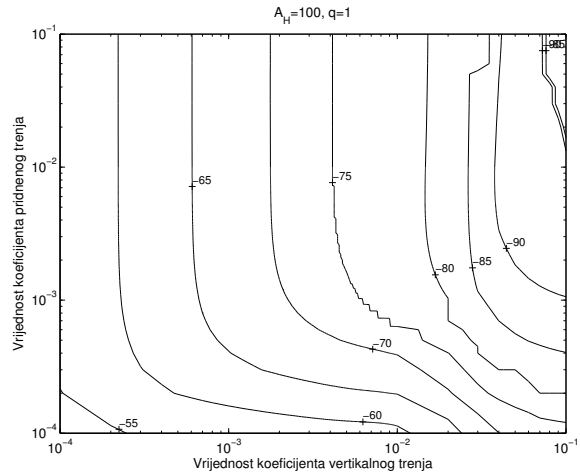
Slika 3.6: Ovisnost visine na kojoj je $u = 0$ o koeficijentima trenja za (a) fiksirani koeficijent $A_v = 0.01$, (b) fiksirani koeficijent $k_v = 0.01$, (c) fiksirani koeficijent $A_H = 100$ i profil gustoće $q = 0$




(a)

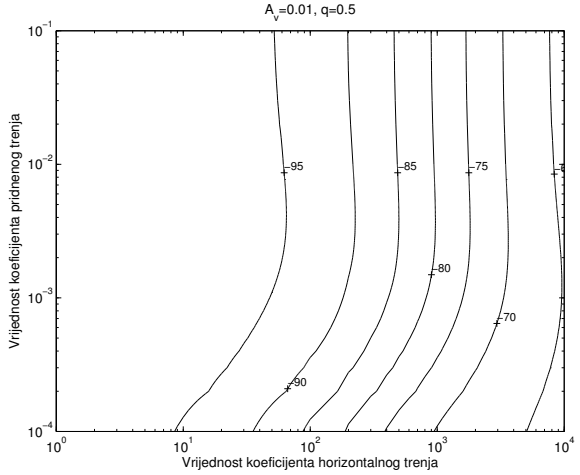



(b)

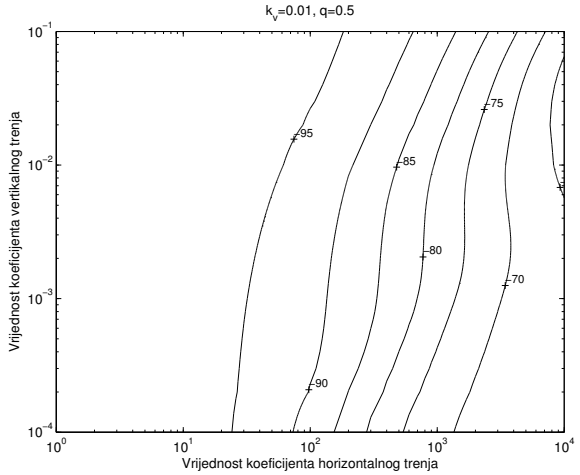



(c)

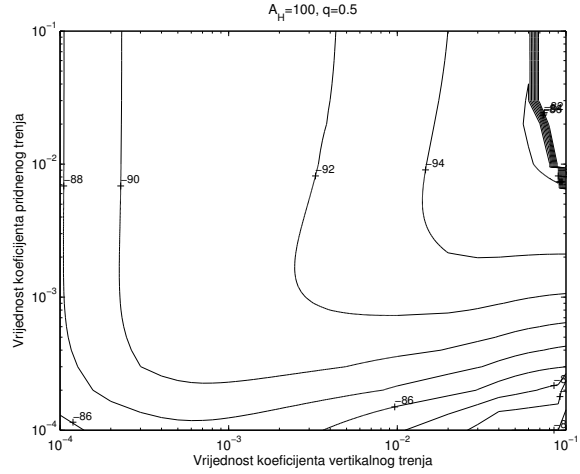
Slika 3.7: Ovisnost visine na kojoj je $u = 0$ o koeficijentima trenja za (a) fiksirani koeficijent $A_v = 0.01$, (b) fiksirani koeficijent $k_v = 0.01$, (c) fiksirani koeficijent $A_H = 100$ i profil gustoće $q = 1$




(a)




(b)




(c)

Slika 3.8: Ovisnost visine na kojoj je $u = 0$ o koeficijentima trenja za (a) fiksirani koeficijent $A_v = 0.01$, (b) fiksirani koeficijent $k_v = 0.01$, (c) fiksirani koeficijent $A_H = 100$ i profil gustoće $q = 0.5$

## 3.3 Zaključak

Dani rezultati pokazuju da anomalija gustoće $\delta$ ima znatan utjecaj na cirkulaciju u moru: direktno zbog njenog utjecaja dolazi do cirkulacije u vertikalnom presjeku bazena (komponente brzine $v$ i $w$), dok kao posljedica utjecaja Coriolisove sile dolazi i do dužobalnog strujanja. Ovisno o profilu gustoće, cirkulacija može biti ciklonalna (slučaj pridnene guste vode) ili anticiklonalna (slučaj površinske lake vode). Varirajući parametar $q$ možemo dobiti kombinaciju ova dva tipa te u tom slučaju cirkulacija ovisi o tome ima li anomalija gustoće veći utjecaj na površini ili na dnu. U ovom radu uzeta je vrijednost $q = 0.5$, a takvim izborom parametra dobiva se model sa većim utjecajem pridnene guste vode pa je i pripadna cirkulacija fluida ciklonalnog tipa (kao u slučaju za parametar $q = 0$).

Varirajući koeficijente trenja možemo uočiti pojavu suprotne cirkulacije u pridnenom sloju, pojave koja je tek nedavno eksperimentalno otkrivena. Za standardni skup parametara ovu pojavu ne možemo uočiti, ali poveća li se dubina bazena (slučaj $H = 1000$, slika 3.4), ili smanji koeficijent pridnenog trenja (slučaj $k_v = 10^{-4}$, slika 3.5), dolazi do primjetnog anticiklonalnog (ili ciklonalnog) strujanja u pridnenom sloju.

Varirajući skup parametara kroz nekoliko redova veličine, primijećujemo kako se mijenja visina na kojoj je $u = 0$ u ovisnosti o koeficijentima trenja. Uočavamo da za fiksni parametar horizontalnog trenja $A_H = 100$ ne dolazi do veće promjene u pridnenoj cirkulaciji, neovisno o izboru koeficijenata $k_v$ i $A_v$ (granica se podiže najviše do 82 m u slučaju kada je $q = 0$). Nasuprot tomu, fiksiramo li koeficijente trenja $k_v$ ili $A_v$, može se uočiti slučajeve za koje se razina $u = 0$ podigla do oko 60 m.

Dobiveni rezultati opravdavaju separabilan oblik funkcije $\Psi$, kakav smo uzeli u drugom poglavlju, kao i model Reynoldsovog naprezanja koje smo uveli u prvom. Slučaj kojem je pridonano najviše pažnje, onaj profila gustoće pridnene guste vode ($q = 0$), odgovara modelu Jadranskog mora, i autor ovog rada nada se da će dobiveni rezultati pomoći u daljenjem proučavanju i boljem shvaćanju istog.

# Bibliografija


[1] Cushman-Roissin, B., Beckers, J. M., *Introduction to Geohphysical Fluid Dynamics*, 2010.

[2] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, New York, 1987.

[3] Boyce, W. E., DiPrima, C.R., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, New York, 2001.

[4] Radyadour Kh. Zeytounian, 2003: Joseph Boussinesq and his approximation:a contemporary view.*C.R. Mecanique*, **331**, 575-586.

[5] Lazar, M., Orlić, M., 2009: Cyclonic versus Anticyclonic Circulation in Lakes and Inland Seas. *Journal of Physical oceanography*, **39**, 2247 – 2263.

[6] Lazar, M., et al., 2006: Analytical modelling of wintertime coastal jets in the Adriatic Sea. *Cont. Shelf Res.*, **27**,275-285.

[7] Press, H. W., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numericla Recipies in C*, United States of America, 1992.

# Sažetak

U ovom radu modeliramo termohalinu cirkulaciju u morskim bazenima, odnosno cirkulaciju do koje dolazi zbog promjene u salinitetu i temperaturi mora, to jest njegovoj gustoći. Naime, fluid ponire u područjima veće gustoće, a izvire u područjima manje, pa faktori poput dotoka slatke vode ili promjene u temperaturi utječu na njegovo gibanje. Uslijed djelovanja stalne Coriolisove sile, u bazenu dolazi i do javljanja dužobalnog strujanja koje se ovisno o smjeru kretanja dijeli u dva tipa - ciklonalnu cirkulaciju i anticiklonalnu. Cirkulacija se pojavljuje u površinskim slojevima i slabi bliže dnu. Ovisno o koeficijentima lateralnog, vertikalnog i horizontalnog trenja, na dnu se može pojaviti cirkulacija u suprotnom smjeru od površinske. U ovom radu nastojimo predvidjeti opisana kretanja morskih struja, te proučavamo njihovu ovisnost o koeficijentima trenja.

Rad je podijeljen u tri veće cjeline: počevši od diferencijalnih jednadžbi koja opisuju gibanje fluida, u prvom poglavlju opisani su fizički i matematički opravdani postupci kojima model pojednostavljujemo na oblik prihvatljiv za analitičko ili numeričko rješavanje. U drugom poglavlju iz dobivenih diferencijalnih jednadžbi računa se eksplicitno rješenje za komponente gibanja u vertikalnom presjeku, kao i komponentu dužobalnog strujanja. Također se numeričkim metodama računa visina vodenog stupca i tlak na dnu bazena. U trećem poglavlju prikazana su i fizikalno opisana grafička rješenja prethodno izračunatih funkcija, te je promatran utjecaj koeficijenata trenja na pojavu suprotnog tipa cirkulacije u pridnenom sloju.

# Summary

In this thesis a thermohalic circulation model is being introduced, modelling the flow of water in sea basins as a result of variations of salinity and sea temperature, which in turn lead to variations in water density. The fluid sinks in the areas of increased density and rises in the areas of decreased density, causing factors such as fresh water intake, or a change in temperature to affect its flow. As a result of the continuous action of the Coriolis force, alongshore current also develops in the basin. This current belongs to one of two possible types based on its direction - cyclonic or anticyclonic. The circulation appears in the sufrace layers closest to the surface and weakens as the bottom is approached. Depending on lateral, vertical and horizontal friction coefficients, a current opposite the one at the surface can emerge near the bottom of the basin. In this thesis an attempt is made to predict the described sea current flow, while also studying its dependance on various friction coefficients.

The thesis is split into three major parts: starting from differential equations describing the fluid movement, in the first chapter various methods which enable the simplification of the model to a form suitable for analytic or numeric solving are introduced. Furthermore, the physical interpretation, as well as the mathematical justification for these methods is also presented. In the second chapter, an explicit solution is calculated from the obtained differential equations for the current components in the vertical cross section, as well as the alongshore current component. Also, the sea level and the bottom pressure were numerically calculated. In the third chapter, the calculated results are presented through various graphs and their physical interpretation is also given. Finally, the effect of friction coefficients on the appearance of the opposite type of circulation at the basin bottom was also discussed.

# Životopis

Rođen sam 04.04.1990. u Zagrebu, gdje sam 1997. godine upisao Osnovnu školu Voltino. Nakon završetka, 2005. godine upisao sam V. gimnaziju u Zagrebu te po završetku iste, 2009. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija 2012. godine, na istom fakultetu upisao sam diplomski studij Primijenjene matematike.

# Dodatak A

# *Matlab* programi

U nastavku se nalazi kod programa napisanih u programskom paketu *Matlab*. U funkciji *stream.m* računaju se koeficijenti $c_1, \ldots, c_6$ i strujna funkcija $\Psi$, funkcija *velocity.m* računa dužobalno strujanje $u(y, z)$ i točku $z_0$ na kojoj je $u = 0$ (pomoću funkcije *fsolve*). U funkciji *zeta.m* možemo vidjeti kod za računanje denivelacije $\zeta$, čije rezultate koristimo u istoj funkciji za računanje tlaka na dnu. Funkcija *density.m* računa anomaliju gustoće $\delta$. Funkcija *main.m* koristi sve upravo navedene i grafički prikazuje dobivene rezultate. Zadnja funkcija, *var_friction.m* računa ovisnost visine na kojoj je $u = 0$ o parametrima trenja, te grafički prikazuje rezultate. Radi preglednosti zapisa, u ovom dodatku priložena je verzija u kojoj se računaju neke za sam program nepotrebne varijable (poput strujne funkcije $\Psi$). Zbog velike složenosti, pri pozivu funkcije korisno je izbaciti računanje svih varijabli koje nisu neophodne za dobivanje rješenja.

Funkcija *main.m*

```
function[]=main()

H=100; b=50000;
Av=1e-2;
AH=100;
kv=1e-2;
q=0;
g=9.81;
ro0=1e3;
n=100;

[c,w,psi,y,z]=stream(H,b,AH,Av,kv,q,g,ro0,n);

figure(1)
[C,h]=contour(y/1000,z,psi');
clabel(C,h);
xlabel('Distance (km)','FontSize',12),ylabel('Depth (m)','FontSize',12);
title(['AH=', num2str(AH), ' Av=',num2str(Av),', k=',num2str(kv), ', q='
    , num2str(q)],'FontSize',12);
legend('\Psi')

poc=-50;
[u]=velocity(H,b,AH,Av,kv,q,g,ro0,c,w,n,poc);
figure(2)
[C,h]=contour(y/1000,z,u);
clabel(C,h);
xlabel('Distance (km)','FontSize',12),ylabel('Depth (m)','FontSize',12);
title(['AH=', num2str(AH), ' Av=',num2str(Av),', k=',num2str(kv) ', q=',
     num2str(q)],'FontSize',12);
legend('u')

rho=density(H,b,q,g,ro0,n);
figure(3)
C=contour(y/1000,z,rho,'-');
clabel(C)
xlabel('Distance (km)','FontSize',12),ylabel('Depth (m)','FontSize',12);
title(['AH=', num2str(AH), ' Av=',num2str(Av),', k=',num2str(kv), ', q='
    , num2str(q)],'FontSize',12);

[ZETA,tlak,y]=zeta(H,b,AH,Av,kv,q,g,ro0,c,w,n);
ZETA=real(ZETA);
tlak=real(tlak);
figure(4)
[AX,H1,H2]=plotyy(y/1000,ZETA,y/1000,tlak);
```

```
xlabel('Distance (km)');
title(['AH=', num2str(AH), ' Av=',num2str(Av),', k=',num2str(kv), ', q='
    , num2str(q)],'FontSize',12);
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Sea level (m)')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Bottom pressure (bar)')
set(H1,'LineStyle','--','Color','red')
set(H2,'LineStyle',':','Color','blue')
legend('Denivelacija','Tlak na dnu')

end
```

Funkcija *stream.m*

```
function[c,w,Psi,y,z]=stream(H,b,AH,Av,kv,q,g,ro0,n)


lam=pi/b;
OMEGA_0=7.2921e-05;
f=2*OMEGA_0*cos(pi/4);
mu=pi/(2*H);

A1 = f^2 + (AH^2)*(lam^4);
A2 = (lam^3) *(AH) + (mu^2)*(Av)*lam;
A  = (A1)*(mu^2) + 2*AH*Av*(lam^2)*(mu^4) + (mu^6)*Av^2;

w=zeros(6,1);
c=zeros(6,1);
M=zeros(6,6);
d=zeros(6,1);

w(1)=0;
w(2)=0;
w(3)=sqrt( (AH * lam^2 + f*i) / Av );
w(4)=conj(w(3));
w(5)=-w(3);
w(6)=-w(4);

for j=3:6
    M(1,j)=w(j)^2;
    M(3,j)=exp(-w(j)*H);
    M(4,j)=w(j)*exp(-w(j)*H)*(w(j)*Av-kv);
    M(5,j)=w(j)^4;
    M(6,j)=AH*Av*lam^2*exp(-H*w(j))*(w(j)^4)-Av^2*(w(j)^6)*exp(-H*w(j))-
        kv*AH*lam^2*w(j)^3*exp(-H*w(j))+kv*Av*(w(j)^5)*exp(-H*w(j));
end

M(2,:)=1;
M(2,2)=0;
M(3,1)=1;
M(3,2)=-H;
M(4,2)=-kv;

for j=1:6
    M(j,5)=M(j,5)/(exp(-w(5)*H));
    M(j,6)=M(j,6)/(exp(-w(6)*H));
end
```

```
d(1)= (g*AH*lam^3*q)/(ro0*A1);
d(3)= (g*A2)/(ro0*A)+(g*q*AH*lam^3*H^2)/(2*ro0*A1);
d(4)= (g*Av*AH*q*lam^3)/(ro0*A1)-(g*A2*Av*mu^2)/(ro0*A)+(kv*H*g*AH*q*lam
    ^3)/(ro0*A1);
d(5)= (g*q*lam)/(ro0*Av);
d(6)= (AH*Av*lam^2*g*A2*mu^4)/(ro0*A)+(Av^2*g*A2*mu^6)/(ro0*A)-(g*Av*mu
    ^2*lam)/ro0;

c=M\d;
c(5)=c(5)/(exp(-w(5)*H));
c(6)=c(6)/(exp(-w(6)*H));


y = linspace(-b,b,n);
z = linspace(-H,0,n);

Z=(-(g*AH*q*(lam^3)*z.^2)/(2*ro0*A1))-((g *A2 *cos(mu*(z+H)))/(ro0*A))+c
    (1)+c(2)*z+c(3)*exp(w(3)*z)+c(4)*exp(w(4)*z)+c(5)*exp(w(5)*z)+c(6)*
    exp(w(6)*z);
Y= sin(lam*y);

Psi=Y'*Z;


end
```

Funkcija *velocity.m*

```
function[vel,z0]=velocity(H,b,AH,Av,kv,q,g,ro0,c,w,n,poc)

lam=pi/b;
OMEGA_0=7.2921e-05;
f=2*OMEGA_0*cos(pi/4);
mu=pi/(2*H);

A1 = f^2+(AH^2)*(lam^4);
A2 = (lam^3)*(AH)+(mu^2)*(Av)*lam;
A  = (A1)*(mu^2)+2*AH*Av*(lam^2)*(mu^4)+(mu^6)*Av^2;

ZH=@(z) c(1)+c(2)*z+c(3)*exp(w(3)*z)+c(4)*exp(w(4)*z)+c(5)*exp(w(5)*z)+c
    (6)*exp(w(6)*z);
ZH1der=@(z) c(2)+ c(3)*w(3)*exp(w(3)*z)+c(4)*w(4)*exp(w(4)*z)+c(5)*w(5)*
    exp(w(5)*z)+c(6)*w(6)*exp(w(6)*z);
ZH2der=@(z) c(3)*(w(3)^2)*exp(w(3)*z)+c(4)*(w(4)^2)*exp(w(4)*z)+c(5)*(w
    (5)^2)*exp(w(5)*z)+c(6)*(w(6)^2)*exp(w(6)*z);
ZH3der=@(z) c(3)*(w(3)^3)*exp(w(3)*z)+c(4)*(w(4)^3)*exp(w(4)*z)+c(5)*(w
    (5)^3)*exp(w(5)*z)+c(6)*(w(6)^3)*exp(w(6)*z);
ZH4der=@(z) c(3)*(w(3)^4)*exp(w(3)*z)+c(4)*(w(4)^4)*exp(w(4)*z)+c(5)*(w
    (5)^4)*exp(w(5)*z)+c(6)*(w(6)^4)*exp(w(6)*z);

Zp1der=@(z) -(g*AH*q*(lam^3)*z)/(ro0*A1)+(g*A2*mu*sin(mu*(z+H)))/(ro0*A)
    ;
Zp2der=@(z) -(g*AH*q*(lam^3))/(ro0*A1)+(g*A2*(mu^2)*cos(mu*(z+H)))/(ro0*
    A);
Zp3der=@(z) - (g*A2*(mu^3)*sin(mu*(z+H)))/(ro0*A);
Zp4der=@(z) - (g*A2*(mu^4)*cos(mu*(z+H)))/(ro0*A);
Zp5der=@(z) + (g*A2*(mu^5)*sin(mu*(z+H)))/(ro0*A);
Zp6der=@(z) + (g*A2*(mu^6)*cos(mu*(z+H)))/(ro0*A);

Z1der=@(z) ZH1der(z)+Zp1der(z);
Z2der=@(z) ZH2der(z)+Zp2der(z);
Z3der=@(z) ZH3der(z)+Zp3der(z);
Z4der=@(z) ZH4der(z)+Zp4der(z);

G=@(y,z) -(g/ro0)*lam*sin(lam*y)*(cos(mu*(z+H))-q)+AH*(lam^2)*sin(lam*y)
    *(Z2der(z))-Av*sin(lam*y)*(Z4der(z));
u=@(y,z) (Av/(kv*f))*G(y,-H)-(g/(ro0*f))*lam*sin(lam*y)*((1/mu)*sin(mu*(
    z+H))-q*z-q*H )+AH*(f^-1)*lam*lam*sin(lam*y)*(Z1der(z)-Z1der(-H))-Av
    *(f^-1)*sin(lam*y)*(Z3der(z)-Z3der(-H));

y=linspace(-b,b, n);
z=linspace(-H,0, n);
```

```
vel=zeros(n,n);

for t=1:n
        vel(t,:)=u(y,z(t));
end

G_0=@(z) -(g/ro0)*lam*(cos(mu*(z+H))-q)+AH*(lam^2)*(Z2der(z))-Av*(Z4der(
    z));
u_0=@(z) (Av/(kv*f))*G_0(-H)-(g/(ro0*f))*lam*((1/mu)*sin(mu*(z+H))-q*z-q
    *H )+AH*(f^-1)*lam*lam*(Z1der(z)-Z1der(-H))-Av*(f^-1)*(Z3der(z)-
    Z3der(-H));

OPTIONS = optimset('Algorithm','Levenberg-Marquardt')
[z0,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(u_0,poc,OPTIONS)   ;


end
```

Funkcija *zeta.m*

```
function[denvl,bottom_press,y]=zeta(H,b,AH,Av,kv,q,g,ro0,c,w,n)

lam=pi/b;
OMEGA_0=7.2921e-05;
f=2*OMEGA_0*cos(pi/4);
mu=pi/(2*H);

A1 = f^2+(AH^2)*(lam^4);
A2 = (lam^3)*(AH)+(mu^2)*(Av)*lam;
A  = (A1)*(mu^2)+2*AH*Av*(lam^2)*(mu^4)+(mu^6)*Av^2;

ZH=@(z) c(1)+c(2)*z+c(3)*exp(w(3)*z)+c(4)*exp(w(4)*z)+c(5)*exp(w(5)*z)+c
    (6)*exp(w(6)*z);
ZH1der=@(z) c(2)+ c(3)*w(3)*exp(w(3)*z)+c(4)*w(4)*exp(w(4)*z)+c(5)*w(5)*
    exp(w(5)*z)+c(6)*w(6)*exp(w(6)*z);
ZH2der=@(z) c(3)*(w(3)^2)*exp(w(3)*z)+c(4)*(w(4)^2)*exp(w(4)*z)+c(5)*(w
    (5)^2)*exp(w(5)*z)+c(6)*(w(6)^2)*exp(w(6)*z);
ZH3der=@(z) c(3)*(w(3)^3)*exp(w(3)*z)+c(4)*(w(4)^3)*exp(w(4)*z)+c(5)*(w
    (5)^3)*exp(w(5)*z)+c(6)*(w(6)^3)*exp(w(6)*z);
ZH4der=@(z) c(3)*(w(3)^4)*exp(w(3)*z)+c(4)*(w(4)^4)*exp(w(4)*z)+c(5)*(w
    (5)^4)*exp(w(5)*z)+c(6)*(w(6)^4)*exp(w(6)*z);

Zp1der=@(z) -(g*AH*q*(lam^3)*z)/(ro0*A1)+(g*A2*mu*sin(mu*(z+H)))/(ro0*A)
    ;
Zp2der=@(z) -(g*AH*q*(lam^3))/(ro0*A1)+(g*A2*(mu^2)*cos(mu*(z+H)))/(ro0*
    A);
Zp3der=@(z) - (g*A2*(mu^3)*sin(mu*(z+H)))/(ro0*A);
Zp4der=@(z) - (g*A2*(mu^4)*cos(mu*(z+H)))/(ro0*A);
Zp5der=@(z) + (g*A2*(mu^5)*sin(mu*(z+H)))/(ro0*A);
Zp6der=@(z) + (g*A2*(mu^6)*cos(mu*(z+H)))/(ro0*A);

Z1der=@(z) ZH1der(z)+Zp1der(z);
Z2der=@(z) ZH2der(z)+Zp2der(z);
Z3der=@(z) ZH3der(z)+Zp3der(z);
Z4der=@(z) ZH4der(z)+Zp4der(z);

const_C1=lam*lam*AH*Z1der(-H)-Av*Z3der(-H)+Av*g*lam*(1-q)/(kv*ro0)-lam*
    lam*Av*AH*ro0*Z2der(-H)/kv-Av*Av*Z4der(-H)/kv;

right_side=@(y) -ro0*const_C1*cos(lam*y)/(lam*g);
left_side=@(y,zeta) ro0*zeta+(1+cos(lam*y))*((sin(mu*(zeta+H)))/mu-q*
    zeta-q*H);

y=linspace(-b,b,n);
```

```
denvl=ones(n,1);
bottom_press=zeros(n,1)
OPTIONS = optimset('Algorithm','Levenberg-Marquardt');

for i=1:n
    fja=@(zeta) left_side(y(i),zeta)-right_side(y(i));
    denvl(i)=fsolve(fja,1,OPTIONS);
    bottom_press(i)=1.01325+(ro0*denvl(i)+ro0*H)*g+(1+cos(lam*y(i)))*((
        sin(mu*(denvl(i)+H)))*(mu^(-1))-q*denvl(i)-q*H)*g;
end

end
```

Funkcija *density.m*

```
function[RHO]=density(H,b,q,g,ro0,n)

mu=pi/(2*H);
lam=pi/b;

rho= @(y,z) (1+cos(lam*y))*(cos(mu*(z+H))-q);

y=linspace(-b,b, n);
z=linspace(-H,0, n);
RHO=zeros(n,n);

for i=1:n
    RHO(i,:)=rho(y,z(i));
end


end
```

Funkcija *var_friction.m*

```
function[]=var_friction(q,lev,poc)

if (nargin < 3)
  q=0;
  lev=0;
  poc=-50;
end

%osnovni parametri
H=100; b=50000;
g=9.81;
ro0=1e3;
n=100;

%varijabilni set parametara
AH=[1:1:99,100:100:10000,20000:10000:1000000];
Av=[1:1:99,100:100:10000,20000:10000:1000000]*10^(-6);
kv=[1:1:99,100:100:10000,20000:10000:1000000]*10^(-6);


Av_f=0.01;
Z=zeros(max(size(kv)),max(size(AH)));

for i=1:max(size(kv))
    for j=1:max(size(AH))
[c,w,Psi,y,z]=stream(H,b, AH(j),Av_f,kv(i),q,g,ro0,n);
[vel,Z(i,j)]=velocity(H,b,AH(j),Av_f,kv(i),q,g,ro0,c,w,n,poc);
    end
end

Z=real(Z)
figure(1)
C=contour(AH,kv,Z,lev);
clabel(C);
set(gca,'XScale','log','FontSize',12) ;
set(gca,'YScale','log','FontSize',12) ;
xlabel('Vrijednost koeficijenta pridnenog trenja','FontSize',12),ylabel(
   'Vrijednost koeficijenta horizontalnog trenja','FontSize',12);
title(['A_v=',num2str(Av_f), ', q=', num2str(q)],'FontSize',12);


kv_f=0.01;
Z=zeros(max(size(Av)),max(size(AH)));
```

```
for i=1:max(size(Av))
    for j=1:max(size(AH))
[c,w,Psi,y,z]=stream(H,b, AH(j),Av(i),kv_f,q,g,ro0);
[vel,Z(i,j)]=velocity(H,b,AH(j),Av(i),kv_f,q,g,ro0,c,w,n,-90);
    end
end

Z=real(Z);
figure(2)
C=contour(AH,Av,Z,lev);
clabel(C);
set(gca,'XScale','log','FontSize',12) ;
set(gca,'YScale','log','FontSize',12) ;
xlabel('Vrijednost koeficijenta horizontalnog trenja','FontSize',12),
   ylabel('Vrijednost koeficijenta vertikalnog trenja','FontSize',12);
title(['k_v=',num2str(kv_f), ', q=', num2str(q)],'FontSize',12);

AH_f=100;
Z=zeros(max(size(kv)),max(size(Av)));
for i=1:max(size(kv))
    for j=1:max(size(Av))
[c,w,Psi,y,z]=stream(H,b, AH_f,Av(j),kv(i),q,g,ro0);
[vel,Z(i,j)]=velocity(H,b,AH_f,Av(j),kv(i),q,g,ro0,c,w,n,poc);
    end
end
Z=real(Z);
figure(3)
C=contour(Av,kv,Z,lev);
clabel(C);
set(gca,'XScale','log','FontSize',12) ;
set(gca,'YScale','log','FontSize',12) ;
xlabel('Vrijednost koeficijenta vertikalnog trenja','FontSize',12),
   ylabel('Vrijednost koeficijenta pridnenog trenja','FontSize',12);
title(['A_H=',num2str(AH_f), ', q=', num2str(q)],'FontSize',12);


end
```