# Fundamentalni teorem za krivulje

**Bešenić, Ivan**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:991987

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-03-29**

*Repository / Repozitorij:*

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ivan Bešenić

# FUNDAMENTALNI TEOREM ZA KRIVULJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

# Sadržaj

**Sadržaj** **iii**

**Uvod** **1**

**1 Fundamentalni teorem za krivulje $\mathbb{R}^2$** **2**
1.1 Orijentirana zakrivljenost . . . . . 2
1.2 Geometrijska interpretacija orijentirane zakrivljenosti . . . . . 3
1.3 Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^2$ . . . . . 5
1.4 Primjeri . . . . . 7
1.5 Implementacija Fundamentalnog teorema u *Mathematica-i* . . . . . 17

**2 Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^3$** **20**
2.1 Fleksija . . . . . 20
2.2 Torzija . . . . . 21
2.3 Kongruentnost krivulja . . . . . 24
2.4 Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^3$ . . . . . 27
2.5 Specijalne klase krivulja . . . . . 31
2.6 Implementacija Fundamentalnog teorema u *Mathematica-i* . . . . . 42

**Bibliografija** **45**

# Uvod

Kada je krivulja definirana parametarskom jednadžbom $c = c(s)$, oblik jednadžbe ovisi o izboru koordinatnog sustava. Kada krivulja mijenja svoj položaj u ravnini ili prostoru, bez promjene oblika, njezina se jednadžba mijenja s obzirom na početni koordinatni sustav. Nije uvijek očito kada dvije različite parametarske jednadžbe predstavljaju istu krivulju do na izometriju i obično je potreban dulji izračun kako bi se utvrdilo da te jednadžbe određuju krivulju istog oblika. Cilj ovog diplomskog rada bio je stoga odgovoriti na pitanje: *postoji li karakterizacija krivulja koja ne ovisi o koordinatama?* Odgovor je potvrdan i jednadžbu koja omogućuje takvu karakterizaciju zovemo **prirodna jednadžba**.

Diplomski rad sastoji se od dva poglavlja u kojima zasebno proučavamo krivulje u $\mathbb{R}^2$ i krivulje u $\mathbb{R}^3$. U prvom poglavlju najprije se definira orijentirana zakrivljenost krivulje i daje se geometrijska interpretacija te zakrivljenosti. Zatim slijedi središnje pitanje ovog poglavlja: *u kojoj mjeri orijentirana zakrivljenost određuje krivulju u* $\mathbb{R}^2$*?* Odgovor na to pitanje daje *Fundamentalni teorem za krivulje u* $\mathbb{R}^2$. Najprije se dokazuje egzistencijski dio teorema, to jest pokazuje se da se iz zadane funkcije zakrivljenosti može odrediti parametarska jednadžba krivulje. Štoviše, egzistencijski dio teorema daje algoritam, odnosno sustav diferencijabilnih jednadžbi, koji omogućuje rekonstrukciju krivulje iz njezine zakrivljenosti. U jednostavnim slučajevima taj je sustav moguće riješiti egzaktno, no općenito je moguće pronaći samo numeričko rješenje. Oba slučaja ilustrirana su primjerima. Također, dokazan je i drugi dio Fundamentalnog teorema (jedinstvenost) koji kaže da se dvije krivulje parametrizirane duljinom luka, koje imaju jednaku zakrivljenost, razlikuju do na izometriju.

Analogan rezultat vrijedi i u $\mathbb{R}^3$, samo ovdje uvodimo dva nova tipa zakrivljenosti - fleksiju i torziju. *Fundamentalni teorem za krivulje u* $\mathbb{R}^3$ tvrdi da postoji jedinstvena (do na izometriju) prostorna krivulja sa zadanom fleksijom i torzijom. Nakon što se teorem dokaže, slijede primjeri specijalnih klasa krivulja koje su zadane funkcijskim vezama fleksije i torzije. U praksi, problem određivanja krivulje iz njezine prirodne jednadžbe nije egzaktno rješiv, nego se rješava primjenom računalnih programa, pa smo ilustrirali nekoliko primjera u *Mathematica-i*.

# Poglavlje 1

# Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^2$

## 1.1 Orijentirana zakrivljenost

U ovom poglavlju uvodimo pojam orijentirane zakrivljenosti (zakrivljenosti sa predznakom) za krivulje u euklidskoj ravnini $\mathbb{R}^2$. Uvedena zakrivljenost podudarat će se do na predznak sa standardnom definicijom zakrivljenosti [1] krivulja u euklidskom prostoru pa otuda i njezino ime.

Pretpostavimo da je $c(s)$ krivulja jedinične brzine (parametrizirana duljinom luka) u $\mathbb{R}^2$. Ako znakom crtice ($'$) označimo $d/ds$ tada je

$$T = c'(s)$$

tangencijalni vektor od $c$, pri čemu je $T$ jedinični. Postoje dva jedinična vektora okomita na $T$. Vektor $N$ biramo tako da je $\{T, N\}$ desna ortonormirana baza za $\mathbb{R}^2_{c(s)}$.

Znamo da je vektor $T' = c''$ okomit na $T$, odnosno paralelan s $N$. Prema tome, postoji broj $\kappa_s$ takav da vrijedi

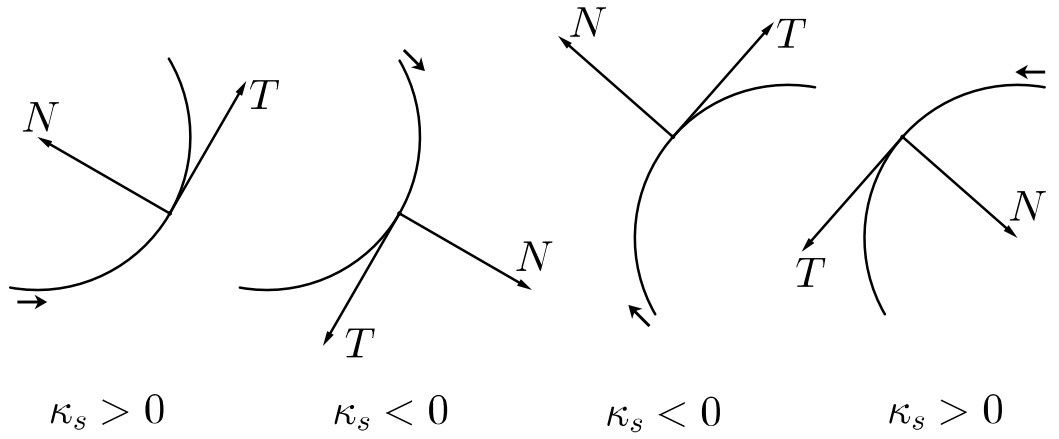
$$c'' = \kappa_s N.$$

Skalar $\kappa_s$ zovemo *orijentirana zakrivljenost* ili *zakrivljenost s predznakom* (može biti pozitivan, negativan ili nula). Nadalje, zbog $\|N\| = 1$, imamo

$$\kappa = \|c''\| = \|\kappa_s N\| = |\kappa_s|,$$

pa je fleksija krivulje $c$ jednaka apsolutnoj vrijednosti orijentirane zakrivljenosti. Slika 1.1 pokazuje kako je određen predznak orijentirane zakrivljenosti (strelica uz krivulju pokazuje smjer povećanja parametra $s$).

[1] Zakrivljenost ili fleksiju (ozn. $\kappa$) krivulje $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ definirat ćemo na početku Poglavlja 2




Slika 1.1: Predznak orijentirane zakrivljenosti krivulje u $\mathbb{R}^2$ parametrizirane duljinom luka

## 1.2 Geometrijska interpretacija orijentirane zakrivljenosti

Orijentirana zakrivljenost ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju:

**Teorem 1.2.1.** *Neka je $c(s)$ ravninska krivulja parametrizirana duljinom luka, i neka je $\varphi(s)$ kut za koji, u pozitivnom smjeru, treba rotirati proizvoljan fiksni vektor (primjerice, jedinični vektor pozitivne x-osi) tako da se on poklopi s jediničnim tangencijalnim vektorom $T(s)$. Tada vrijedi,*

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Prema tome, orijentirana zakrivljenost je brzina promjene tangencijalnog vektora s obzirom na parametar duljine luka. Kao što Slika 1.1 pokazuje, orijentirana zakrivljenost je pozitivna ili negativna, a ovisi o tome da li se $T$ pri povećanju parametra $s$ rotira u pozitivnom ili negativnom smjeru.

Prije dokaza Teorema 1.2.1 moramo pokazati da li je derivacija $d\varphi/ds$ dobro definirana. Kut $\varphi$ nije jedinstven jer svakom partikularnom izboru kuta možemo dodavati kut $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. No, diferencijabilna funkcija $\varphi$ postoji i ona je jedinstvena, a to je posljedica sljedeće važne leme:

**Lema 1.2.2** (Neilova lema)**.** *Neka su $f, g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije za koje vrijedi $f^2 + g^2 = 1$. Neka je $t_0$ fiksiran i $a < t_0 < b$ i neka je $\theta_0$ takav da $f(t_0) = cos(\theta_0)$ i $g(t_0) = sin(\theta_0)$. Tada postoji jedinstvena neprekidna funkcija $\theta\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ takva da*

*vrijedi*

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad f(t) = \cos\theta(t) \quad i \quad g(t) = \sin\theta(t)$$

*za* $a < t < b$.

*Dokaz.* U dokazu koristimo kompleksne brojeve. Neka je $h = f + ig$ pa vrijedi $h\bar{h} = f^2 + g^2 = 1$. Definiramo

$$\theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} h'(s)\overline{h(s)}ds. \tag{1.1}$$

Zatim, vrijedi

$$\frac{d}{dt}(he^{-i\theta}) = h'e^{-i\theta} + h\left(e^{-i\theta}\right)' = h'e^{-i\theta} + he^{-i\theta}(-i\theta)' = e^{-i\theta}(h' - ih\theta').$$

Deriviranjem funkcije 1.1 i uvrštavanjem u prethodnu jednakost, dobivamo

$$\frac{d}{dt}(he^{-i\theta}) = e^{-i\theta}(h' - ih(-ih'\bar{h})) = e^{-i\theta}(h' - h'h\bar{h}) = 0.$$

Stoga, slijedi da je $he^{-i\theta} = c$, pri čemu je $c$ konstanta. Također, $h(t_0) = e^{i\theta_0}$, pa vrijedi

$$c = h(t_0)e^{-i\theta(t_0)} = 1.$$

Zaključujemo, $h(t) = e^{i\theta}$ čime smo pokazali egzistenciju.

Neka je $\tilde{\theta}$ druga neprekidna funkcija takva da je

$$\tilde{\theta}(t_0) = \theta_0, \quad f(t) = \cos\tilde{\theta}(t) \quad \text{i} \quad g(t) = \sin\tilde{\theta}(t)$$

za $a < t < b$. Tada je $e^{i\theta(t)} = e^{i\tilde{\theta}(t)}$ za $a < t < b$. Pošto su $\theta$ i $\tilde{\theta}$ neprekidne funkcije, postoji cijeli broj $n$ takav da

$$\theta(t) - \tilde{\theta}(t) = 2\pi n$$

za $a < t < b$. Ali $\theta(t_0) = \tilde{\theta}(t_0)$, pa je $n = 0$. Stoga se $\theta$ podudara s $\tilde{\theta}$ i time smo dokazali jedinstvenost. □

Sada možemo dokazati Teorem 1.2.1.

*Dokaz.* Neka je $a$ fiksni jedinični vektor i neka je $b$ jedinični vektor dobiven pozitivnom rotacijom vektora $a$ za $\frac{\pi}{2}$. Tada $T$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $a$ i $b$,

$$T = a\cos\varphi + b\sin\varphi.$$

Deriviranjem slijedi

$$T' = (-a\sin\varphi + b\cos\varphi)\frac{d\varphi}{ds}.$$

Skalarno množimo vektore $T'$ i $a$, dobivamo

$$T' \cdot a = -\frac{d\varphi}{ds} \sin\varphi.$$

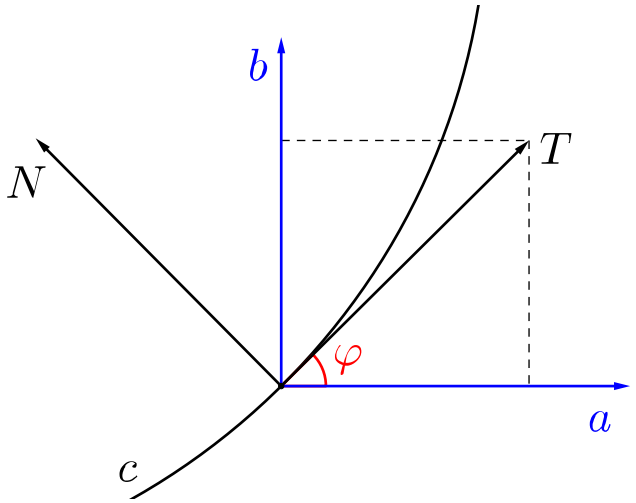
Nadalje, iz $T' = \kappa_s N$, slijedi

$$\kappa_s (N \cdot a) = -\frac{d\varphi}{ds} \sin\varphi. \tag{1.2}$$

Kut između $N$ i $a$ je $\varphi + \frac{\pi}{2}$, jer se $N$ dobije pozitivnom rotacijom vektora $T$ za $\frac{\pi}{2}$. Stoga,

$$N \cdot a = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi. \tag{1.3}$$

Umetanjem (1.3) u formulu (1.2) dobivamo traženu tvrdnju. □




Slika 1.2: Kut između jediničnog tangencijalnog vektora $T$ i pozitivne $x$-osi

## 1.3 Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^2$

Sljedeći rezultat pokazuje kako je krivulja parametrizirana duljinom luka u biti određena ako nam je poznata orijentirana zakrivljenost u svakoj točki krivulje. Kada kažemo "u biti" zapravo mislimo "do na izometriju u $\mathbb{R}^2$". Svaka izometrija $M\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ može se na jedinstven način zapisati kao kompozicija translacije i rotacije, odnosno

$$M = T_a \circ R_\theta,$$

gdje je $R_\theta$ rotacija u pozitivnom smjeru oko ishodišta za kut $\theta$,

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

ili zapisano matrično

$$R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

a $T_a$ je translacija za vektor $a$,

$$T_a(v) = v + a,$$

za svaki vektor $(x, y)$ i $v \in \mathbb{R}^2$.

**Teorem 1.3.1.** *Neka je $k\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ bilo koja glatka funkcija. Tada, postoji krivulja parametrizirana duljinom luka $c\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ čija je orijentirana zakrivljenost $k$.*

*Nadalje, ako je $\tilde{c}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ bilo koja druga krivulja parametrizirana duljinom luka čija je orijentirana zakrivljenost $k$, postoji izometrija $M$ u $\mathbb{R}^2$ takva da vrijedi*

$$\tilde{c} = M(c(s)) \quad \forall s \in \langle a, b\rangle.$$

*Dokaz.* Dokažimo prvi dio teorema. Fiksirajmo $s_0 \in \langle a, b\rangle$ i definirajmo za svaki $s \in \langle a, b\rangle$,

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)du, \tag{1.4}$$

$$c(s) = \left( \int_{s_0}^{s} \cos\varphi(t)dt, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(t)dt \right). \tag{1.5}$$

Tada, je tangencijalni vektor od $c$

$$c'(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s)),$$

jedinični vektor koji s pozitivnom $x$-osi zatvara kut $\varphi(s)$. Iz toga slijedi da je $c(s)$ krivulja parametrizirana duljinom luka i po Teoremu 1.2.1 slijedi da je njezina orijentirana zakrivljenost

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds}\int_{s_0}^{s} k(u)du = k(s).$$

Sada dokažimo drugi dio teorema. Neka je $\tilde{\varphi}$ kut između pozitivne $x$-osi i jediničnog tangencijalnog vektora $\tilde{c}'$ od $\tilde{c}$. Tada je

$$\tilde{c}'(s) = (\cos\tilde{\varphi}(s), \sin\tilde{\varphi}(s))$$

$$\tilde{c}(s) = \left( \int_{s_0}^{s} \cos\tilde{\varphi}(t)dt, \int_{s_0}^{s} \sin\tilde{\varphi}(t)dt \right) + \tilde{c}(s_0). \tag{1.6}$$

Prema Teoremu 1.2.1,

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{ds} = k(s)$$
$$\tilde{\varphi}(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)du + \tilde{\varphi}(s_0),$$

odnosno

$$\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) + \tilde{\varphi}(s_0).$$

Prethodnu jednakost umećemo u formulu (1.6), pri čemu stavljamo oznaku $a$ za konstantni vektor $\tilde{c}(s_0)$ i $\theta$ za konstantni skalar $\tilde{\varphi}(s_0)$. Slijedi

$$\tilde{c}(s) = T_a\left(\int_{s_0}^{s} \cos(\varphi(t) + \theta)dt, \int_{s_0}^{s} \sin(\varphi(t) + \theta)dt\right).$$

Primjenom adicijskih formula dobivamo

$$\tilde{c}(s) = T_a\left(\cos\theta \int_{s_0}^{s} \cos\varphi(t)dt - \sin\theta \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(t)dt,\ \sin\theta \int_{s_0}^{s} \cos\varphi(t)dt + \cos\theta \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(t)dt\right).$$

U prethodnom izrazu uočavamo analitički zapis rotacije ravnine oko ishodišta za kut $\theta$ pa možemo pisati

$$\tilde{c}(s) = T_a R_\theta\left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(t)dt, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(t)dt\right),$$

odnosno

$$\tilde{c}(s) = T_a R_\theta(c(s)) = M(c(s)),$$

čime je dokazan i drugi dio teorema. □

## 1.4 Primjeri

Klasični način da opišemo ravninsku krivulju $c$ je pomoću **prirodne jednadžbe**, koja izražava zakrivljenost $\kappa_s$ u odnosu na duljinu luka $s$ od $c$. Drugim riječima, prirodna jednadžba krivulje je oblika

$$(1)\ \ \kappa_s = \kappa_s(s), \quad \text{ili} \quad (2)\ \ F(\kappa_s, s) = 0.$$

Iako takva jednadžba možda neće biti prikladna za mnoge izračune, ona izgleda mnogo prirodnije jer ne ovisi o izboru parametrizacije krivulje. Ako želimo pronaći prirodnu jednadžbu krivulje $c$ s općim parametrom $t$, prvo moramo izračunati zakrivljenost i duljinu luka kao funkciju od $t$ i zatim pokušavamo eliminirati $t$. Na nekoliko primjera demonstrirat

ćemo obrnuti postupak, odnosno kako iz prirodne jednadžbe možemo dobiti parametarsku jednadžbu krivulje. Postupak se temelji na prethodno dokazanom Fundamentalnom teoremu, gdje smo pokazali da se naš problem zapravo svodi na rješavanje sustava jednadžbi 1.4 i 1.5.

**Primjer 1.4.1.** *Krivulja čija je orijentirana zakrivljenost $\kappa_s$ jednaka 0 je pravac.*

Imamo

$$\kappa_s = 0.$$

Prema Teoremu 1.3.1 slijedi

$$\varphi(s) = \int_0^s du = c, \quad c = konst.,$$

odnosno,

$$c(s) = \left( \int_0^s \cos c dt, \int_0^s \sin c dt \right).$$

Slijedi

$$c(s) = (s \cos c, s \sin c). \tag{1.7}$$

Uvođenjem supstitucije $t = s \cos c$, parametarska jednadžba (1.7) poprima oblik

$$c(s) = (t, at)$$

pri čemu je $a = \dfrac{\sin c}{\cos c}$. Zaključujemo da je jednadžba (1.7) pravac parametriziran duljinom luka.

Teorem 1.3.1 kaže da se dvije krivulje, čije su orijentirane zakrivljenosti $\kappa_s$ jednake, razlikuju do na izometriju. Očito je da translacijom i rotacijom pravca, opet dobivamo pravac, pa slijedi da je svaka krivulja, čija je orijentirana zakrivljenost nula, pravac (ili dio pravca).

**Primjer 1.4.2.** *Svaka regularna krivulja, čija je orijentirana zakrivljenost $\kappa_s$ konstanta, je dio kružnice.*

Idemo se uvjeriti u to. Pokazali smo da vrijedi

$$\kappa_s = \pm\kappa.$$

gdje je $\kappa$ fleksija krivulje $c$.

*A priori*, moguće je da vrijedi $\kappa_s = \kappa$ za neke točke krivulje i $\kappa_s = -\kappa$ za druge, ali u biti to se ne može dogoditi zbog Teorema srednje vrijednosti koji kaže da ako je $\kappa_s$ neprekidna

funkcija koja poprima vrijednosti $\kappa$ i $-\kappa$, tada mora poprimati i sve vrijednosti između. Prema tome, moguće je da za sve točke krivulje vrijedi $\kappa_s = \kappa$ (ili $\kappa_s = -\kappa$)

Ideja je da, bez obzira kolika je vrijednost konstante $\kappa_s$, pronađemo parametriziranu kružnicu čija je zakrivljenost $\kappa_s$. Neka je

$$\kappa_s = \frac{1}{r}, \quad r = konst.$$

Za $s_0 = 0$ vrijedi

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{1}{r} du = \frac{s}{r}.$$

Sada imamo

$$c(s) = \left( \int_0^s \cos \frac{t}{r} dt, \int_0^s \sin \frac{t}{r} dt \right).$$

Integriranjem dobivamo

$$c(s) = \left( r \sin \frac{s}{r}, -r \cos \frac{s}{r} \right),$$

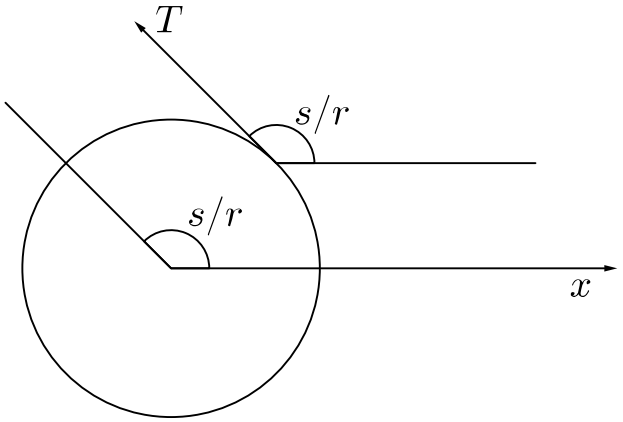
što je parametrizacija duljinom luka kružnice sa središtem u ishodištu i radijusom $r$.

Prema Teoremu 1.3.1 slijedi da je da svaka krivulja čija je orijentirana zakrivljenost $\kappa_s$ konstanta, kružnica (ili dio kružnice).

Kako vrijedi

$$c'(s) = \left( \cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

zaključujemo da je kut između jediničnog tangencijalnog vektora $T$ i pozitivne $x$-osi jednak $s/r$. To smo ilustrirali na Slici 1.3.




Slika 1.3: Kružnica $c(s) = \left( r \sin \frac{s}{r}, -r \cos \frac{s}{r} \right)$

**Primjer 1.4.3.** *Odredite krivulju* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *kojoj je prirodna jednadžba* $\kappa_s = -\dfrac{a}{a^2+s^2}$, $s$ *je duljina luka te krivulje.*

*Rješenje.*

Uz $s_0 = 0$ imamo

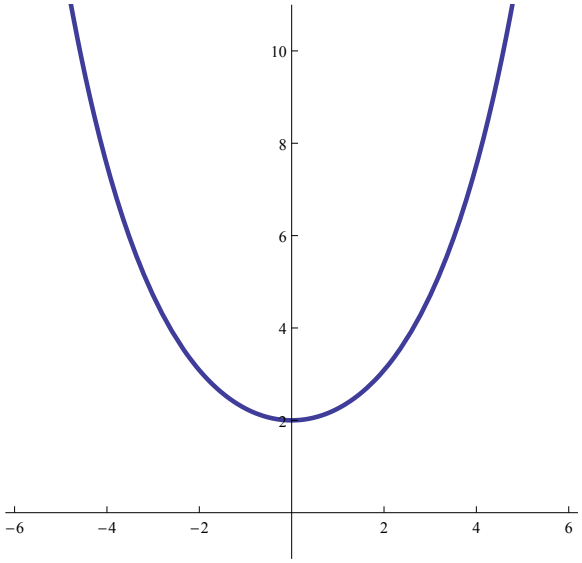
$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{-a}{a^2+u^2}du = -\operatorname{arctg}\left(\frac{s}{a}\right).$$

Slijedi

$$c(s) = \left(\int_0^s \cos\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)\right)dt, \int_0^s \sin\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)\right)dt\right).$$

Integriranjem dobivamo krivulju koja je prema Teoremu 1.3.1 parametrizirana duljinom luka,

$$c(s) = \left(|a|\operatorname{Arsh}\left(\frac{s}{|a|}\right), -a\sqrt{\frac{s^2}{a^2}+1}\right). \tag{1.8}$$




Slika 1.4: Lančaica, $\kappa_s = \frac{2}{s^2+4}$

Reparametrizirajmo dobivenu jednadžbu krivulje. Definiramo:

$$u := \operatorname{Arsh}\left(\frac{s}{|a|}\right)$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} u &= \frac{s}{|a|} \\ (\operatorname{sh} u)^2 &= \frac{s^2}{a^2} \\ (\operatorname{sh} u)^2 + 1 &= \frac{s^2}{a^2} + 1 \\ (\operatorname{ch} u)^2 &= \sqrt{\frac{s^2}{a^2} + 1} \end{aligned}$$

Parametarska jednadžba krivulje sada izgleda ovako:

$$c(s) = (|a|\, u, -a \operatorname{ch} u)$$

Supstituiramo:

$$|a|\, u = v$$

Konačno,

$$c(v) = \left( v, -a \operatorname{ch} \frac{v}{|a|} \right),$$

pa zaključujemo da parametarska jednadžba (1.8) određuje lančanicu.

**Primjer 1.4.4.** *Odredite krivulju* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *kojoj je prirodna jednadžba* $\kappa_s = \dfrac{1}{bs}$, $s$ *je duljina luka te krivulje.*

*Rješenje.*

Za $s_0 = 1$, vrijedi

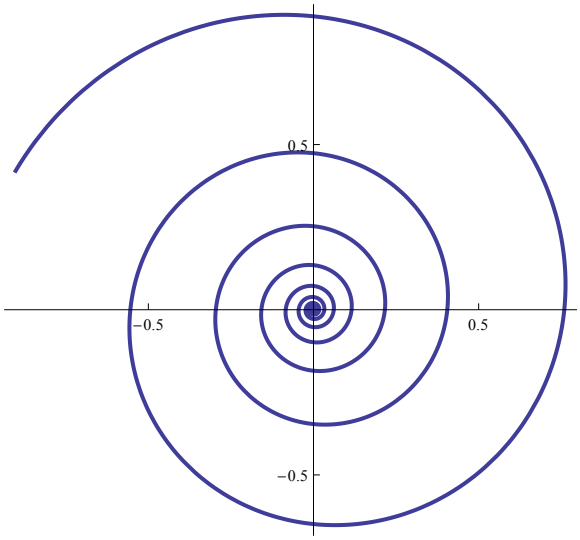
$$\varphi(s) = \int_1^s \frac{1}{bu} du = \frac{\ln s}{b}.$$

Slijedi

$$c(s) = \left( \int_1^s \cos\left(\frac{\ln t}{b}\right) dt, \int_1^s \sin\left(\frac{\ln t}{b}\right) dt \right).$$

Integriranjem dobivamo krivulju (parametriziranu duljinom luka)

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{bs}{b^2+1} \left( \sin\left(\frac{\ln s}{b}\right) + b \cos\left(\frac{\ln s}{b}\right) \right) \\ y(s) &= \frac{bs}{b^2+1} \left( b \sin\left(\frac{\ln s}{b}\right) - \cos\left(\frac{\ln s}{b}\right) \right). \end{aligned} \tag{1.9}$$




Slika 1.5: Logaritamska spirala, $\kappa_s = \frac{1}{0.1s}$

Iz dobivene parametarske jednadžbe ne možemo zaključiti o kojoj se krivulji radi. Zapisat ćemo jednadžbu u drugom obliku. Uvodimo supstituciju

$$t = \frac{\ln s}{b}.$$

Tada je $s = e^{bt}$ pa imamo

$$x(t) = \frac{be^{bt}}{b^2+1}(\sin t + b\cos t)$$
$$y(t) = \frac{be^{bt}}{b^2+1}(b\sin t - \cos t)).$$

Stavimo li

$$\sin t + b\cos t = c\cos(t+\alpha),$$

primjenom adicijskih formula za kosinus dobijemo

$$\sin t + b\cos t = c\cos t\cos\alpha - c\sin t\sin\alpha.$$

Iz toga slijedi

$$1 = -c\sin\alpha \quad \text{i} \quad b = c\cos\alpha,$$

odnosno,

$$c = \sqrt{1+b^2} \quad \text{i} \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{b}\right) + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Analogno, iz

$$b\sin t - \cos t = d\sin(t+\beta),$$

dobijemo da je

$$d = c \quad \text{i} \quad \beta = \alpha.$$

Sada imamo,

$$x(t) = \frac{be^{bt}}{b^2+1}c\cos(t+\alpha)$$
$$y(t) = \frac{be^{bt}}{b^2+1}c\sin(t+\alpha).$$

Supstitucijom $t' = t + \alpha$ parametarska jednadžba krivulje poprima oblik

$$x(t') = \rho(t')\cos(t')$$
$$y(t') = \rho(t')\sin(t'),$$

gdje je $\rho(t') = \dfrac{be^{b(t'-\alpha)}}{b^2+1}$.

Sada zaključujemo da parametarska jednadžba 1.9 određuje logaritamsku spiralu.

**Primjer 1.4.5.** *Odredite krivulju kojoj je prirodna jednadžba*

$$a^2s^2 + \left(\frac{a+2b}{\kappa_s}\right)^2 = 16b^2(a+b)^2, \quad a,b>0, \tag{1.10}$$

*s je duljina luka te krivulje.*

Ako stavimo

$$A = \frac{4b(a+b)}{a}, \quad B = \frac{4b(a+b)}{a+2b} \tag{1.11}$$

jednadžba poprima oblik

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{R^2}{B^2} = 1, \tag{1.12}$$

pri čemu je $R = 1/\kappa_s$. Sređivanjem jednakosti (1.12) dobivamo

$$\kappa_s^2 = \frac{A^2}{A^2B^2 - B^2s^2}.$$

Prema pretpostavci $a, b > 0$, odnosno $A, B > 0$, pa slijedi

$$\kappa_s = \frac{A}{\sqrt{A^2B^2 - B^2s^2}} = \frac{A}{B\sqrt{A^2 - s^2}}.$$

Sada, uz $s_0 = 0$, imamo

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{A}{B\sqrt{A^2 - s^2}} du = \frac{A}{B} \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{A^2 - s^2}},$$

odnosno

$$c(s) = \left( \int \cos\left( \frac{A}{B} \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{A^2 - s^2}} \right) ds, \int \sin\left( \frac{A}{B} \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{A^2 - s^2}} \right) ds \right).$$

Označimo

$$I_1 = \int \cos\left( \frac{A}{B} \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{A^2 - s^2}} \right) ds.$$

Uvodimo novu varijablu

$$t = \frac{A}{B} \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{A^2 - s^2}}. \tag{1.13}$$

Deriviranjem dobivamo

$$\frac{dt}{ds} = \frac{A}{B} \frac{1}{\sqrt{A^2 - s^2}},$$

odnosno,

$$ds = \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - s^2}\, dt.$$

Sada ćemo iz jednakosti 1.13 izraziti $s$ kao funkciju po $t$. Dakle,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{B}{A} t &= \frac{s}{\sqrt{A^2 - s^2}}, \\ s^2 &= \frac{A^2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{A} t}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{A} t}, \\ s^2 &= A^2 \sin^2 \frac{B}{A} t. \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti,

$$s = A \sin \frac{B}{A} t.$$

Primjenom prethodne jednakosti dobivamo

$$A^2 - s^2 = A^2 \left( 1 - \sin^2 \frac{B}{A} t \right) = A^2 \cos^2 \frac{B}{A} t,$$

odnosno,

$$ds = \frac{B}{A} A \cos \frac{B}{A} t\, dt = B \cos \frac{B}{A} t\, dt. \tag{1.14}$$

Sada, iz 1.13 i 1.14, slijedi

$$I_1 = \int \cos t \, B \cos \frac{B}{A} t \, dt.$$

Integriranjem dobivamo

$$I_1 = B \, \frac{A}{A^2 - B^2} \left( A \cos \frac{Bt}{A} \, \sin t - B \cos t \, \sin \frac{Bt}{A} \right).$$

Analognom supstitucijom dobijemo da je integral

$$I_2 = \int \sin \left( \frac{A}{B} \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{A^2 - s^2}} \right) ds$$

jednak integralu

$$I_2 = \int \sin t \, B \cos \frac{B}{A} t \, dt,$$

odnosno,

$$I_2 = B \, \frac{A}{A^2 - B^2} \left( A \cos \frac{Bt}{A} \, \cos t + B \sin t \, \sin \frac{Bt}{A} \right).$$

Vraćanjem supstitucije (1.11), parametarska jednadžba krivulje poprima oblik

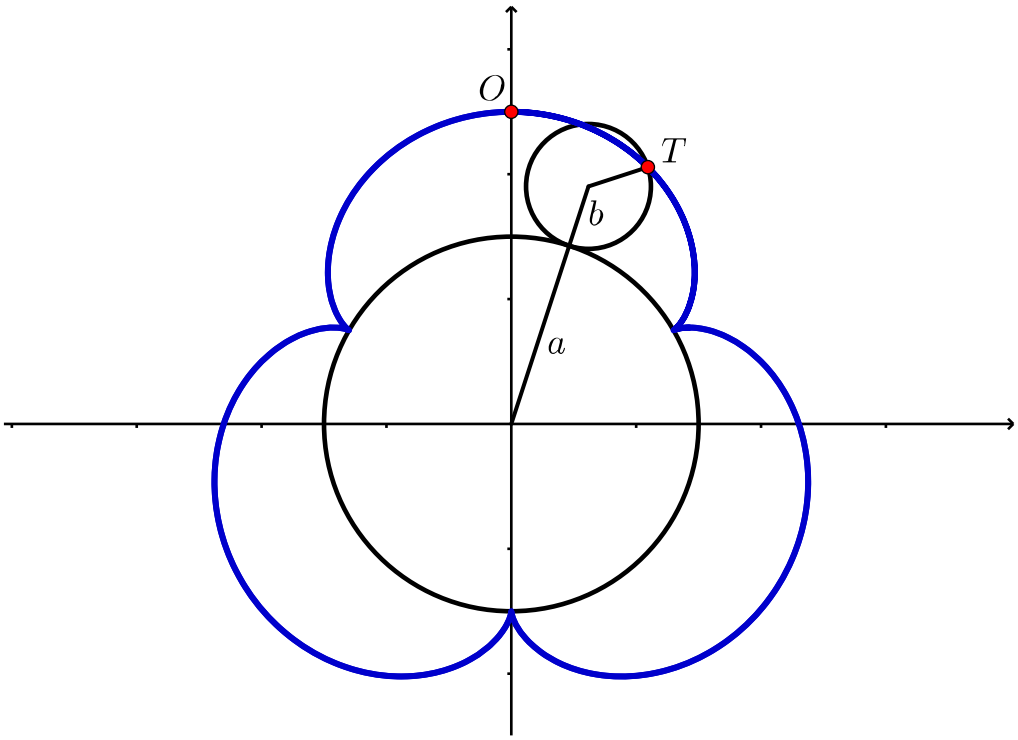
$$\begin{aligned} x(t) &= (a + 2b) \cos \left( \frac{at}{a + 2b} \right) \sin t - a \cos t \, \sin \left( \frac{at}{a + 2b} \right) \\ y(t) &= (a + 2b) \cos \left( \frac{at}{a + 2b} \right) \cos t + a \sin t \, \sin \left( \frac{at}{a + 2b} \right). \end{aligned}$$

Primjenom formula pretvorbe umnoška u zbroj dobivamo

$$\begin{aligned} x(t) &= b \sin \left( \frac{2(a + b)t}{a + 2b} \right) + (a + b) \sin \left( \frac{2bt}{a + 2b} \right) \\ y(t) &= b \cos \left( \frac{2(a + b)t}{a + 2b} \right) + (a + b) \cos \left( \frac{2bt}{a + 2b} \right). \end{aligned}$$

Iz oblika dobivene parametarske jednadžbe zaključujemo da se radi o epicikloidi.

Geometrijski, epicikloida je krivulja koju opisuje neka proizvoljna fiksna točka kružnice (radijusa $b$) koja se bez klizanja kotrlja izvana po nekoj drugoj kružnici (radijusa $a$). Slika 1.6 prikazuje epicikloidu nastalu za $a = 3$ i $b = 1$. Za $t = 0$, početni položaj generatorne točke $T$ je u točki $O$. S porastom parametra $t$, točka $T$ iscrtava graf epicikloide u smjeru kazaljke na satu.




Slika 1.6: Epicikloida za $a = 3$ i $b = 1$

**Primjer 1.4.6.** *Odredite krivulju* $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ *kojoj je prirodna jednadžba* $\kappa_s = s$, $s$ *je duljina luka te krivulje.*

*Rješenje.*

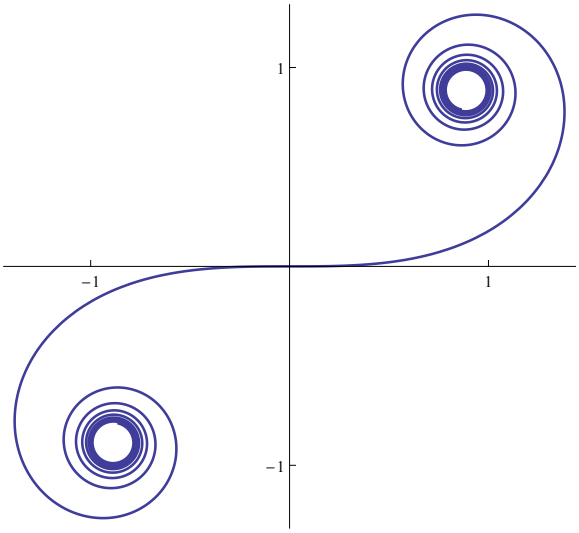
Za $s_0 = 0$, dobivamo

$$\varphi(s) = \int_0^s u\,du = \frac{s^2}{2},$$

odnosno,

$$c(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2}\right)dt, \int_0^s \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)dt\right). \tag{1.15}$$

Integrali koji se javljaju u (1.15) zovu se *Fresnelovi integrali*; ime su dobili po francuskom inžinjeru i fizičaru A.J.Fresnelu koji ih je koristio u optici. Iako Fresnelovi integrali nisu rješivi u termininima elementarnih funkcija, *Mathematica* crta graf krivulje (1.15) razvijanjem integrala u redove.




Slika 1.7: Klotoida, $\kappa_s = s$

Nastala krivulja zove se Eulerova spirala,a također se koriste i nazivi klotoida ili Cornuova spirala. Eulerova spirala poznata je po svojstvu da je udaljenost svake točke $T$ spirale od ishodišta proporcionalna duljini luka spirale promatarano od ishodišta do točke $T$.

## 1.5 Implementacija Fundamentalnog teorema u *Mathematica-i*

Označimo funkciju $\kappa_s$ s $k(s)$. Pokazali smo da iz zakrivljenosti krivulje $k(s)$ možemo pronaći njezinu parametarsku jednadžbu $c(s)$ rješavanjem sustava jednadžbi

$$c(s) = \left( \int \cos\varphi(s)ds, \int \sin\varphi(s)ds \right)$$
$$\varphi(s) = \int k(s)ds.$$

U prethodnoj sekciji demonstrirali smo slučajeve u kojima je taj sustav riješen egzaktno, no općenito je moguće pronaći samo numeričko rješenje. Uočimo da se naš problem zapravo svodi na rješavanje sustava diferencijabilnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos\varphi(s) \\ y'(s) &= \sin\varphi(s) \\ \varphi'(s) &= k(s) \end{aligned} \tag{1.16}$$

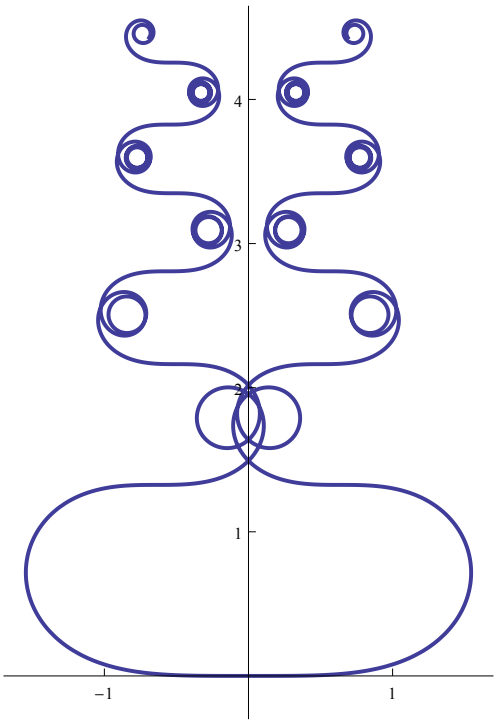
s početnim uvjetima $x(0) = y(0) = \varphi(s) = 0$. (Ovi početni uvjeti utjecat će samo na položaj krivulje u koordinatnom sustavu, odnosno svaka druga krivulja $\tilde{c}$ čija je zakrivljenost $k(s)$, može se dobiti izometrijom krivulje $c$.) Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da vrijedi $a \leq 0 \leq b$, pri čemu su $a$ i $b$ granice intervala u kojem se nalazi parametar $s$. Kod numeričkog rješavanja sustava diferencijabilnih jednadžbi i crtanja grafova koristit ćemo programski paket *Mathematica-u*. Numeričko rješenje sustava 1.16 s pripadnim početnim uvjetima dobivamo naredbom

```
f=NDSolve[{x'[s]==Cos[phi[s]],y'[s]==Sin[phi[s]],
  phi'[s]==k[s],x[0]==0,y[0]==0,phi[0]==0},{x,y,phi},{s,a,b}]
```

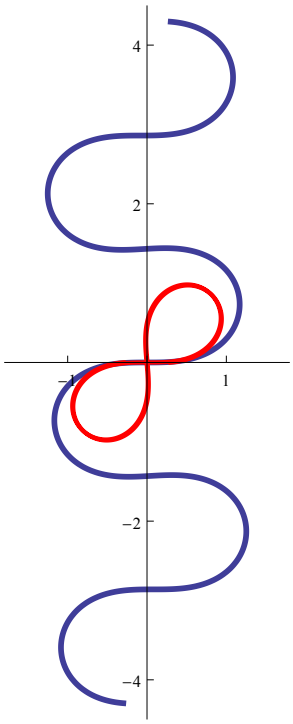
Konačno, graf tražene krivulje dobit ćemo naredbom

```
ParametricPlot[Evaluate[{x[s)],y[s]}/.f],{s,a,b}]
```

Sasvim jednostavne funkcije zakrivljenosti mogu stvoriti vrlo zanimljive krivulje. U prethodnoj sekciji, na primjeru klotoide, vidjeli smo kako jednostavna zakrivljenost ($\kappa_s = s$), može dati krivulju čiju parametarsku jednadžbu nije moguće pronaći egzaktno.



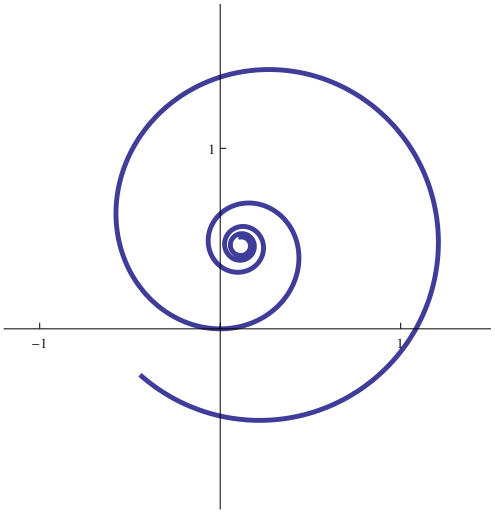

Slika 1.8: $\kappa_s = s \sin s$



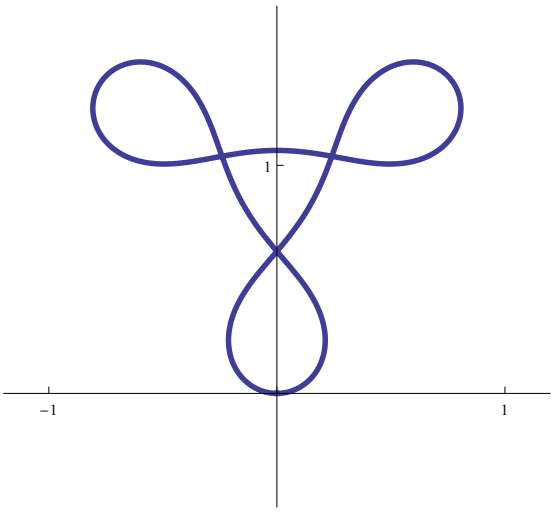

Slika 1.9: $\kappa_s = 1.6 \sin s$ i $\kappa_s = 2.4 \sin s$

Slika 1.8 prikazuje krivulju čija je zakrivljenost $\kappa_s = s \sin s$, a slika 1.9 prikazuje istodobno dvije krivulje čija je zakrivljenost oblika $c \sin s$, gdje je $c$ konstanta. Crvena krivulja nastaje za $c = 2.4$ i ima svojstvo da je zatvorena.

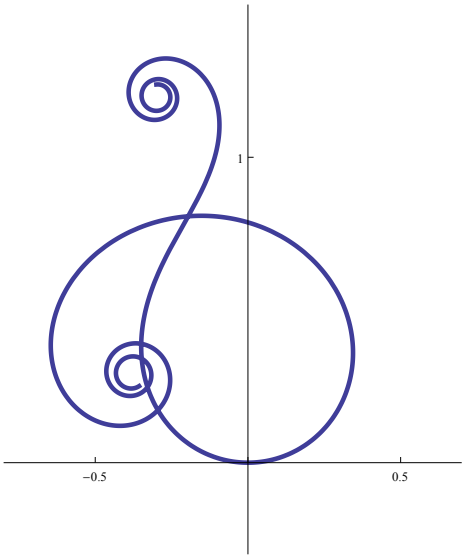
Na sljedećim slikama prikazane su još neke zanimljive krivulje čije smo grafove dobili iz njihove prirodne jednadžbe.




Slika 1.10: $\kappa_s = 1 + e^s$




Slika 1.11: $\kappa_s = 2 + 3\cos 3s$




Slika 1.12: $\kappa_s = 3 - 2s^2 + s^3$

# Poglavlje 2

# Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^3$

## 2.1 Fleksija

Kako bi izmjerili koliko je neka krivulja "zakrivljena" uvodimo pojam zakrivljenosti ili fleksije. Želimo da definicija zakrivljenosti zadovoljava našu intuiciju, odnosno da zakrivljenost pravca bude 0, a zakrivljenost veće kružnice bude manja od zakrivljenosti manje kružnice. Također, cilj nam je definirati zakrivljenost tako da ona ne ovisi o parametrizaciji krivulje, nego samo o njezinom "obliku".

Zbog jednostavnosti, u definiciji se najprije ograničavamo na krivulje parametrizirane duljinom luka.

**Definicija 2.1.1.** *Ako je* $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ *krivulja parametrizirana duljinom luka, Funkciju* $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$,

$$\kappa(s) = \|c''(s)\|$$

*nazivamo zakrivljenost ili fleksija krivulje* $c$ *u točki* $c(s)$.

Primjetite da smo na taj način zapravo definirali fleksiju općenito, odnosno za krivulje parametrizirane duljinom luka u $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. U prethodnom poglavlju pokazali smo da ta definicija zaista odgovara našoj intuiciji zakrivljenosti.

Sada ćemo pokazati da je definicija zakrivljenosti dobra, odnosno da ne ovisi o izboru parametrizacije duljinom luka. Prije toga, dokazat ćemo lemu koja govori o tome kako izgleda neki drugi parametar duljine luka krivulje

**Lema 2.1.2.** *Neka je* $c$ *regularna krivulja parametrizirana duljinom luka* $s$ *i neka je* $\tilde{c}$ *njena reparametrizacija duljinom luka* $u$*. Tada je*

$$u = \pm s + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

*Obratno, ako je* $s$ *parametar duljine luka, tada je* $s$ *(2.1) također definiran parametar duljine luka.*

*Dokaz.* Neka je $c(s) = \tilde{c}(u)$. Deriviranjem po parametru $s$ dobivamo

$$\frac{dc}{ds} = \frac{d\tilde{c}}{du}\frac{du}{ds}. \tag{2.2}$$

Normiranjem obiju strana i korištenjem činjenine da su krivulje jedinične brzine, dobivamo

$$\left|\frac{du}{ds}\right| = 1.$$

iz čega zaključujemo da vrijedi (2.1) □

**Teorem 2.1.3.** *Neka je $c$ regularna krivulja parametrizirana duljinom luka $s$ i neka je $\tilde{c}$ njena reparametrizacija duljinom luka $u$. Tada vrijedi*

$$\kappa(s) = \tilde{\kappa}(u)$$

*Dokaz.* Iz (2.1) i (2.2) slijedi

$$\frac{d^2c}{ds^2} = \frac{d^2\tilde{c}}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{d\tilde{c}}{du}\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d^2\tilde{c}}{du^2} \tag{2.3}$$

iz čeka zaključujemo $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(u)$ □

## 2.2 Torzija

U prethodnom poglavlju pokazali smo kako su ravninske krivulje u biti određene svojom fleksijom (Teorem 1.3.1), no to nije slučaj sa krivuljama u prostoru. Na primjer, kružnica radijusa jednakog 1 u $xy$ ravnini i kružna spirala kojoj je $a = b = \frac{1}{2}$, obje imaju fleksiju jednaku 1 u svim točkama, no očito je nemoguće dobiti jednu krivulju iz druge bilo kakvom kombinacijom rotacije i translacije. Zato ćemo definirati drugi tip zakrivljenosti za prostorne krivulje, koju ćemo zvati *torzija*, i pokazat ćemo kako fleksija i torzija zajedno određuju krivulju do na izometriju.

Neka je $c(s)$ krivulja parametrizirana duljinom luka u $\mathbb{R}^3$, i neka je $T = c'$ njezin jedinični tangencijani vektor. Ako je fleksija $\kappa(s)$ različita od nule, definiramo *glavni normalni vektor* od $c$ u točki $c(s)$:

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}T'(s). \tag{2.4}$$

Sada ćemo dokazati jednu općenititu tvrdnju koja vrijedi za sva vektorska polja duž krivulje, a koja će nam koristiti u sljedećim razmatranjima.

**Lema 2.2.1.** *Neka je $F$ vektorsko polje jedinične brzine duž krivulje $c\colon I \to \mathbb{R}^n$. Tada vrijedi*

$$F' \cdot F = 0$$

*Dokaz.* Derivirnjem jednadžbe

$$F(t) \cdot F(t) = 1$$

dobivamo

$$2F(t) \cdot F'(t) = 0.$$

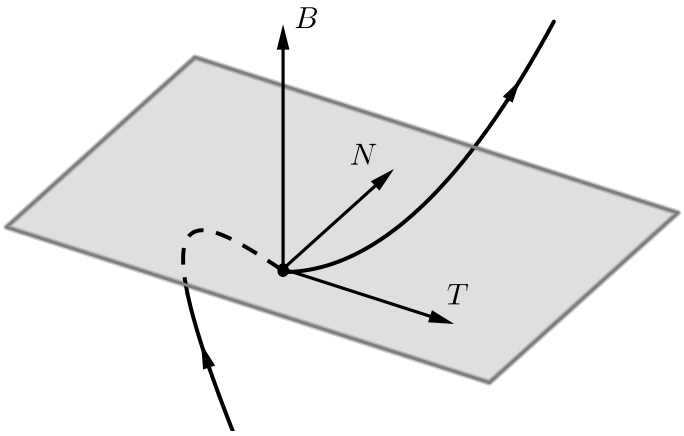
□

Zbog $\|T'\| = \kappa$, $N$ je jedinični vektor. Nadalje, prema prethodno dokazanoj lemi je $T \cdot T' = 0$, pa su $T$ i $N$ okomiti jedinični vektori. Iz toga slijedi da je

$$B = T \times N \tag{2.5}$$

jedinični vektor okomit i na $T$ i na $N$. Vektor $B(s)$ zovemo *vektor binormale* od $c$ u točki $c(s)$. Stoga, vektori $T, N$ i $B$ čine desnu ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^3$ (*Frenetov trobrid*). odnosno vrijedi

$$B = T \times N, \quad N = B \times T, \quad T = N \times B.$$




Slika 2.1: Frenetov trobrid

Primjenimo li "pravilo produkta" za deriviranje vektorskih funkcija na $B = T \times N$, dobivamo

$$B' = T' \times N + T \times N' = T \times N', \tag{2.6}$$

jer iz definicije (2.4), zbog kolinearnosti vektora $T'$ i $N$, slijedi $T' \times N = 0$.

Formula (2.6) pokazuje da je $B'$ okomit na $T$. Kako je okomit i na vektor $B$ (Lema 2.2.1), $B'$ mora biti paralelan s $N$, pa vrijedi

$$B' = -\tau N,$$

za neki skalar $\tau$ (negativan predznak je stavljen dogovorno).

**Definicija 2.2.2.** *Neka je c krivulja parametrizirana duljinom luka i neka je N polje vektora glavnih normala,a B polje binormala. Funkciju* $\tau\colon I \to \mathbb{R}$*,*

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

*nazivamo torzijom krivulje c .*

Primjetimo da je polje $N$, a stoga i torzija, definirano jedino kada je $\kappa(s) \neq 0$, te u daljnjem promatramo samo takve krivulje.

Naravno, želimo da torzija koju smo definirali za proizvoljnu krivulju $c$ parametriziranu duljinom luka ostane nepromijenjena kada reparametriziramo krivulju. Kao i u slučaju fleksije $\kappa$, kako bismo se uvjerili da tako definirana torzija ima smisla, moramo pokazati da promjenom jediničnog parametra $s$, torzija $\tau$ ostaje ista.

**Teorem 2.2.3.** *Neka je c regularna krivulja parametrizirana duljinom luka s i neka je* $\tilde{c}$ *njena reparametrizacija duljinom luka u. Tada vrijedi*

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(u)$$

*Dokaz.* Već smo pokazali da je jedinični parametar $u$ oblika

$$u = \pm s + c,$$

gdje je $c$ konstanta (Lema 2.1.2). Sada ćemo pokazati da ta promjena parametra ima sljedeći efekt na prethodne vektore:

$$T = \pm\tilde{T}, \quad T' = \tilde{T}', \quad N = \tilde{N}', \quad B = \pm\tilde{B}, \quad B' = \tilde{B}'.$$

Neka je $c(s) = \tilde{c}(u)$. Tada vrijedi

$$T = \frac{dc}{ds} = \frac{d\tilde{c}}{du}\frac{du}{ds} = \pm\tilde{T}.$$

Deriviranjem prethodne jednakosti dobivamo

$$T' = \frac{d^2c}{ds^2} = \frac{d^2\tilde{c}}{du^2} = \tilde{T}'.$$

Kako je $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(u)$ i $T' = \tilde{T}'$ vrijedi

$$N = \frac{1}{\kappa(s)} T' = \frac{1}{\tilde{\kappa}(u)} \tilde{T}' = \tilde{N}.$$

Analogno,

$$B = T \times N = \pm \tilde{T} \times \tilde{N} = \pm \tilde{B}.$$

Nadalje, deriviranjemo jednakosti $B(s) = \pm \tilde{B}(u)$ po parametru $s$ slijedi

$$B' = \frac{dB(s)}{ds} = \pm \frac{d\tilde{B}(u)}{du} \frac{du}{ds} = \pm \tilde{B}'(u)(\pm 1) = \tilde{B}'.$$

Konačno, dolazimo do tvrdnje koju smo željeli dokazati:

$$\tau(s) = -N \cdot B' = -\tilde{N} \cdot \tilde{B} = \tilde{\tau}(u).$$

□

**Teorem 2.2.4** (Frenetove formule)**.** *Neka je* $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ *krivulja parametrizirana duljinom luka s fleksijom* $\kappa > 0$ *i torzijom* $\tau$*. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N. \end{aligned} \tag{2.7}$$

*Dokaz.* Kao što vidimo, prva i treća formula su zapravo samo definicije fleksije i torzije. Korištenjem tih formula i derivacijom vektorskog produkta $N = B \times T$ dolazimo i do druge formule

$$N' = B' \times T + B \times T' = -\tau(N \times T) + B \times (\kappa N) = -\tau(-B) + \kappa(-T) = -\kappa T + \tau B.$$

□

## 2.3 Kongruentnost krivulja

**Teorem 2.3.1.** *Neka je c krivulja jedinične brzine u* $\mathbb{R}^3$ *pozitivne zakrivljenosti, i neka je* $\bar{c} = F(c)$ *slika krivulje c koja je nastala djelovanjem izometrije F. Tada vrijedi*

$$\bar{\kappa} = \kappa, \quad \bar{\tau} = (sgnF)\tau,$$

$$\bar{T} = A(T), \quad \bar{N} = A(N), \quad \bar{B} = (sgnF)A(B),$$

*gdje je* $sgnF = \pm 1$ *predznak izometrije F, a A je pripadni ortogonalni operator.*

*Dokaz.* Krivulja $\bar{c}$ je također parametrizirana duljinom luka, odnosno

$$\|\bar{c}'\| = \|A(c')\| = \|c'\| = 1,$$

a to vrijedi zato što ortogonalni operator $A$ čuva normu. Primjenom definicije tangencijalnog vektora na $c$ i $\bar{c}$ dobivamo

$$\bar{T} = \bar{c}' = A(c') = A(T).$$

Kako izometrija $F$ čuva ubrzanje i normu, slijedi

$$\bar{\kappa} = \|\bar{c}''\| = \|A(c'')\| = \|c''\| = \kappa.$$

Da bi dobili potpuni Frenetov trobrid, koristimo pretpostavku da je $\kappa > 0$ (što povlači $\bar{\kappa} > 0$, zbog $\bar{\kappa} = \kappa$). Primjenom definicije normalnog vektora i korištenjem prethodnih činjenica, dobivamo

$$\bar{N} = \frac{\bar{c}''}{\bar{\kappa}} = \frac{A(c'')}{\kappa} = A\left(\frac{c''}{\kappa}\right) = A(N).$$

Preostaje nam jedino pokazati djelovanje izometrije $F$ na $B$ i $\tau$. Iz definicije vektora binormale ($B = T \times N$) i iz činjenice da izometrija mijenja vektorski produkt do na predznak slijedi

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = A(T) \times A(N) = (sgnF)A(T \times N) = (sgnF)A(B).$$

Torziju možemo definirati pomoću vektora $B$ i $N'$, odnosno $\tau = -B' \cdot N = B \cdot N'$. Stoga, korištenjem prethodnih rezultata za $B$ i $N$, dobivamo

$$\bar{\tau} = \bar{B} \cdot \bar{N}' = (sgnF)A(B) \cdot A(N') = (sgnF)B \cdot N' = (sgnF)\tau.$$

□

Pojavljivanje predznaka izometrije $F$ u formuli za torziju krivulje $F(c)$ pokazuje kako torzija daje mnogo suptilniji opis krivulje nego što je bilo vidljivo do sad. Predznak od $\tau$ mjeri smjer *uvijanja* krivulje. Pod pojmom *uvijanje* mislimo na smjer otklona od oskulacijske ravnine [1]. U stvari, $\tau(s_0) < 0$ u točki $c(s_0)$ ako krivulja "raste" (diže se) pri prolazu kroz oskulacijsku ravninu i $\tau(s_0) > 0$ ako krivulja "pada" (spušta se) pri prolazu kroz oskulacijsku ravninu. Ako je $F$ lijevo orijentirana izometrija, formula $\bar{\tau} = -\tau$ pokazuje da je smjer uvijanja krivulje $F(c)$ suprotan od smjera uvijanja krivulje $c$. Jednostavnim primjerom ilustrirat ćemo taj obrat.

[1] *Oskulacijska ravnina* krivulje $c$ u točki $c(s_0)$ je ravnina koja prolazi točkom $c(s_0)$ krivulje, a vektor $B(s_0)$ joj je vekor normale

**Primjer 2.3.2.**
Neka je

$$c(s) = \left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, \frac{s}{c}\right).$$

parametrizacija duljinom luka kružne spirale koja je dobivena umetanjem $a = b = 1$ u (2.20); stoga je $c = \sqrt{2}$. Iz općenitih formula za fleksiju (2.21) i torziju (2.22) kružne spirale dobijemo da je $\kappa = \tau = 1/2$. Zatim, neka je $R$ refleksija (zrcaljenje) s obzirom $xy$ ravninu, odnosno $R$ je izometrija $R(x, y, z) = (x, y, -z)$. Stoga, slika krivulje $\bar{c} = R(c)$ je zrcalna slika originalne slike, odnosno

$$\bar{c}(s) = \left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, -\frac{s}{c}\right).$$

Zrcalo ima efekt da se $c$ i $\bar{c}$ uvijaju na suprotan način, odnosno ako je $c$ "desno orijentirana", onda je $\bar{c}$ "lijevo orijentirana". (Činjenica što se $c$ penje, a $\bar{c}$ spušta je sama po sebi beznačajna.) Formalno: refleksija $R$ je lijevo orijentirana izometrija, stoga, po prethodnom teoremu slijedi

$$\bar{\kappa} = \kappa = 1/2 \quad \text{i} \quad \bar{\tau} = -\tau = -1/2. \tag{2.8}$$

Kako je $\bar{c}$ cilindrična spirala, dobivena za $a = 1$ i $b = -1$, tvdnju (2.8) možemo provjeriti uvrštavanjem u općenite formule (2.21) i (2.22).

U slučaju krivulja u $\mathbb{R}^3$, pojam kongruencije definira se na sljedeći način

**Definicija 2.3.3.** *Dvije krivulje* $c, \bar{c} \colon I \to \mathbb{R}^3$ *su kongruentne ako postoji izometrija* $F$ *u* $\mathbb{R}^3$ *takva da je* $\bar{c} = F(c)$ *za svaki* $t$ *iz* $I$.

Intuitivno rečeno, kongruentne krivulje su jednake osim po položaju u prostoru. One predstavljaju *putovanje jednake brzine po putu istog oblika*. Na primjer, cilindrična spirala $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ kruži oko $z$ osi točno na isti način na koji cilindrična spirala $\bar{c} = (t, \cos t, \sin t)$ kruži oko $x$ osi. Očigledno su te dvije krivulje kongruentne, jer ako je $F$ izometrija takva da

$$F(p_1, p_2, p_3) = (p_3, p_1, p_2)$$

tada je $F(c) = \bar{c}$. U praksi može bit vrlo teško zaključiti jesu li krivulje $c$ i $\bar{c}$ kongruentne jer često nije jednostavno pronaći izometriju koja preslikava jednu krivulju u drugu. Ono što mi želimo je pronaći opis oblika krivulje parametrizirane duljinom luka koji nam garantira, da ako imamo dvije krivulje $c$ i $\bar{c}$ s istim opisom oblika, da su onda te krivulje kongruentne. Odgovarajući opis, kao što smo i očekivali, dan je preko fleksije i torzije.

## 2.4 Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^3$

**Teorem 2.4.1** (Fundamentalni teorem, jedinstvenost)**.** *Neka su $c$ i $\bar{c}$ krivulje prametrizirane duljinom luka u $R^3$ definirane na istom intervalu $\langle a, b\rangle$ i pretpostavimo da imaju istu torziju i istu pozitivnu fleksiju. Tada postoji izometrija $F$ koje preslikava $c$ u $\bar{c}$.*

*Dokaz.* Neka je $\{T, N, B\}$ Frenetov trobrid krivulje $c$, a $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ krivulje $\bar{c}$. Iz činjenice da obje krivulje $c$ i $\bar{c}$ imaju fleksiju različitu od nule, zaključujemo da su Frenetovi trobridi $\{T, N, B\}$ i $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ dobro definirani.

Fiksirajmo $s_0$, pri čemu je $a < s_0 < b$. Tada postoji translacija u $\mathbb{R}^3$ koja preslikava točku $c(s_0)$ u $\bar{c}(s_0)$. Neka je $\{T_0, N_0, B_0\}$ Frenetov trobrid krivulje $c$ u točki $c(s_0)$, a $\{\bar{T}_0, \bar{N}_0, \bar{B}_0\}$ Frenetov trobrid krivulje $\bar{c}$ u točki $\bar{c}(s_0)$. Kako su $\{T_0, N_0, B_0\}$ i $\{\bar{T}_0, \bar{N}_0, \bar{B}_0\}$ dvije desne ortonormirane baze, to postoji rotacija koja preslikava jedan trobrid u drugi. Štoviše, postoji izometrija $F$ u $\mathbb{R}^3$, s pripadnom rotacijom $A$, takva da

$$F(c(s_0)) = \bar{c}(s_0)$$

$$A(T_0) = \bar{T}_0, \quad A(N_0) = \bar{N}_0, \quad A(B_0) = \bar{B}_0.$$

Kako bi pokazali da se krivulja $F \circ c$ podudara s $\bar{c}$, definiramo realnu funkciju $f$:

$$f(s) = \|(A \circ T)(s) - \bar{T}(s)\|^2 + \|(A \circ N)(s) - \bar{N}(s)\|^2 + \|(A \circ B)(s) - \bar{B}(s)\|^2$$

za $a < s < b$. Pokazat ćemo da je derivacija od $f$ jednaka 0. U tu svrhu, deriviramo funkciju $f_1(s) = \|(A \circ T)(s) - \bar{T}(s)\|^2$. Radi jednostavnosti zapisa izostavljamo parametar $s$

$$\begin{aligned} f_1' &= 2\left((A \circ T)' - \bar{T}'\right) \cdot \left((A \circ T) - \bar{T}\right) \\ &= 2\left((A \circ T)' \cdot (A \circ T) + \bar{T} \cdot \bar{T}' - (A \circ T)' \cdot \bar{T} - (A \circ T) \cdot \bar{T}'\right) \end{aligned}$$

Kako su $A \circ T$ i $\bar{T}$ jedinična vektorska polja slijedi

$$(A \circ T) \cdot (A \circ T)' = \bar{T} \cdot \bar{T}' = 0.$$

Sada imamo

$$f_1' = -2\left((A \circ T)' \cdot \bar{T} + (A \circ T) \cdot \bar{T}'\right).$$

Kako je $A$ fiksna rotacija možemo pisati

$$f_1' = -2\left(A \cdot T' \cdot \bar{T} + A \cdot T \cdot \bar{T}'\right).$$

Analogno, deriviranjem funkcija $f_2 = \|(A \circ N) - \bar{N}\|^2$ i $f_3 = \|(A \circ B) - \bar{B}\|^2$ dobivamo

$$\begin{aligned} f_2' &= -2\left(A \cdot N' \cdot \bar{N} + A \cdot N \cdot \bar{N}'\right) \\ f_3' &= -2\left(A \cdot B' \cdot \bar{B} + A \cdot B \cdot \bar{B}'\right). \end{aligned}$$

Primjenom Frenetovih formula na polja $\{T, N, B\}$ i $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ slijedi

$$\begin{aligned} f_1' &= -2\left(A \cdot \kappa N \cdot \bar{T} + A \cdot T \cdot \bar{\kappa}\bar{N}\right), \\ f_2' &= -2\left(A \cdot (-\kappa T + \tau B) \cdot \bar{N} + A \cdot N \cdot (-\bar{\kappa}\bar{T} + \bar{\tau}\bar{B})\right), \\ f_3' &= -2\left(A \cdot (-\tau)N \cdot \bar{B} + A \cdot B \cdot (-\bar{\tau})\bar{N}\right). \end{aligned}$$

Prema pretpostavci teorema, vrijedi $\kappa = \bar{\kappa}$ i $\tau = \bar{\tau}$ pa imamo

$$\begin{aligned} f_1' &= -2\kappa \cdot A \cdot N \cdot \bar{T} - 2\kappa \cdot A \cdot T \cdot \bar{N}, \\ f_2' &= 2\kappa \cdot A \cdot T \cdot \bar{N} - 2\tau \cdot A \cdot B \cdot \bar{N} + 2\kappa \cdot A \cdot N \cdot \bar{T} - 2\tau \cdot A \cdot N \cdot \bar{B}, \\ f_3' &= 2\tau \cdot A \cdot N \cdot \bar{B} + 2\tau \cdot A \cdot B \cdot \bar{N}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem prethodnih jednakosti dobivamo

$$f' = f_1' + f_2' + f_3' = 0.$$

Dakle, pokazali smo da je derivacija funkcije $f$ jednaka 0 za svaki $s$ pa slijedi da je $f$ konstanta. Kako je $f(s_0) = 0$ zaključujemo da je $f(s) = 0$ za svaki $s$. Na taj način, zapravo smo pokazali da je

$$A(T(s)) = \bar{T}(s), \quad A(N(s)) = \bar{N}, \quad A(B(s)) = \bar{B}$$

za svaki $s \in \langle a, b\rangle$. Kako je

$$(F \circ c)'(s) = (A \circ c')(s) = (A \circ T)(s) = \bar{T}(s) = \bar{c}'(s),$$

postoji $q \in \mathbb{R}^3$ takav da

$$(F \circ c)(s) = \bar{c}(s) + q.$$

Zbog $F(c(s_0)) = \bar{c}(s_0)$ slijedi da je $q = 0$. Dakle, postoji jedinstvena izometrija $F$ koja preslikava krivulju $c$ u $\bar{c}$. □

Sada prelazimo na pitanje postojanja krivulje ako su zadane fleksija i torzija. Pokazat ćemo da uz zadane funkcije $\kappa$ i $\tau$ postoje $\{T(s), N(s), B(s)\}$ koji zadovoljavaju Frenetove formule.

**Teorem 2.4.2** (Fundamentalni teorem, postojanje)**.** *Pretpostavimo da su* $\kappa\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *i* $\tau\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne funkcije i neka je* $\kappa > 0$*. Tada postoji krivulja parametrizirana duljinom luka* $c\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ *čija fleksija i torzija su* $\kappa$ *i* $\tau$*. Neka je vrijednost od* $c(s_0)$ *proizvoljna za neki* $s_0 \in \langle a, b\rangle$ *i neka su vrijednosti od* $T(s_0)$ *i* $N(s_0)$ *takve da vrijedi* $\|T(s_0)\| = \|N(s_0)\| = 1$ *i* $T(s_0) \cdot N(s_0) = 0$*.*

*Dokaz.* Promotrimo sljedeći sustav 12 diferencijabilnih jednadžbi

$$\begin{cases} x_i'(s) &= t_i(s), \\ t_i'(s) &= \kappa(s)n_i(s), \\ n_i'(s) &= -\kappa(s)t_i(s) + \tau(s)b_i(s), \\ b_i'(s) &= -\tau(s)n_i(s), \end{cases} \tag{2.9}$$

pri čemu je $1 \leq i \leq 3$, zajedno s početnim uvjetima

$$\begin{cases} x_i(s_0) &= p_i, \\ t_i(s_0) &= q_i, \\ n_i(s_0) &= r_i, \\ b_1(s_0) &= q_2r_3 - q_3r_2, \\ b_2(s_0) &= q_3r_1 - q_1r_3, \\ b_3(s_0) &= q_1r_2 - q_2r_1. \end{cases} \tag{2.10}$$

U (2.10) zahtijevamo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{3} q_i^2 = 1 = \sum_{i=1}^{3} r_i^2 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{3} q_i r_i = 0. \tag{2.11}$$

Tim početnim uvjetima zapravo je zadan desno orijentirani trobrid $\{T(s_0), N(s_0), B(s_0)\}$. Ako stavimo $c = (x_1, x_2, x_3)$ i

$$T = (t_1, t_2, t_3), \quad N = (n_1, n_2, n_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3),$$

vidimo da sustav (2.9) možemo zapisati jednadžbama $c' = T$ i

$$\begin{cases} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N. \end{cases} \tag{2.12}$$

Iz teorije o rješavanju sustava diferencijabilnih jednadžbi, znamo da linearan sustav ima jedinstveno rješenje, odnosno postoji jedinstvena familija trobrida $\{T(s), N(s), B(s)\}$ koja zadovoljava početne uvjete i sustav dan s Frenetovim formulama (2.12). □

**Lema 2.4.3.** *Ako su $c, \bar{c}$ krivulje jedinične brzine takve da je $\kappa = \bar{\kappa}$ i $\tau = \pm\bar{\tau}$, tada su $c$ i $\bar{c}$ kongruentne.*

*Dokaz.* Tvrdnja leme, za slučaj kada je $\tau = \bar{\tau}$, slijedi izravno iz Teorema 2.4.1. Preostaje nam komentirati slučaj kada je $\tau = -\bar{\tau}$. Tada biramo lijevo orijentiranu izometriju $F$ koja trobrid $\{T_0, N_0, B_0\}$ preslikava u trobrid $\{\bar{T}_0, \bar{N}_0, -\bar{B}_0\}$. Trobrid $\{T_0, N_0, B_0\}$ je desno orijentiran pa slijedi da je $\{\bar{T}_0, \bar{N}_0, -\bar{B}_0\}$ lijevo orijentiran (jer je $F$ lijevo orijentirana izometrija). Dokaz je dalje analogan kao i za slučaj $\tau = \bar{\tau}$. □

Lema 2.4.3 zapravo daje i više od same kongruencije krivulja $c$ i $\bar{c}$, to jest pokazuje kako eksplicitno možemo pronaći izometriju koja krivulju $c$ preslikava u $\bar{c}$. Demonstrirat ćemo to na jednostavnom primjeru.

**Primjer 2.4.4.** *Neka su* $c, \bar{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *krivulje jedinične brzine zadane parametarskim jednadžbama*

$$c(s) = \left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, \frac{s}{c}\right),$$
$$\bar{c}(s) = \left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, -\frac{s}{c}\right)$$

*gdje je* $c = \sqrt{2}$*. Pronađi izometriju koja preslikava jednu krivulju u drugu.*

Očito, krivulje su kongruentne jer postoji refleksija između njih; radi se o kružnim spiralama iz Primjera 2.3.2. No, sada ćemo tu refleksiju zanemariti kako bi opisali općenitu metodu određivanja pripadajuće izometrije. Preko Leme 2.5.5 smo pokazali da kružne spirale $c$ i $\bar{c}$ imaju istu fleksiju $\kappa = 1/2 = \bar{\kappa}$ i torziju suprotnog predznaka $\tau = 1/2 = -\bar{\tau}$. U tom slučaju, prema prethodnoj lemi, postoji kongruencija između te dvije krivulje preko lijevo orijentirane izometrije $F$. Prema Teoremu 2.3.1 slijedi da će takva izometrija $F$ preslikati Frenetov trobrid

$$T(0) = (0, a, a),$$
$$N(0) = (-1, 0, 0),$$
$$B(0) = (0, -a, a),$$

gdje je $a = 1/\sqrt{2}$, u trobrid

$$\bar{T}(0) = (0, a, -a),$$
$$\bar{N}(0) = (-1, 0, 0),$$
$$-\bar{B}(0) = (0, -a, -a),$$

pri čemu znak minus daje lijevo orijentiranu bazu. Iz linearne algebre znamo da izometrija $F$ ima ortogonalni dio $C = B^t A$, gdje su $A$ i $B$ matrice pridružene prethodnim trobridima. Prema tome

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & -a \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

za $a = 1/\sqrt{2}$. Ova dva trobrida smještena su u istoj točki, to jest $c(0) = \bar{c}(0) = (1, 0, 0)$. Kako je ta točka fiksna za ortogonalni dio $C$, slijedi da je translacijski dio izometrije $F$ identiteta. Na taj način pokazali smo da refleksija $F = C$ preslikava krivulju $c$ u $\bar{c}$.

## 2.5 Specijalne klase krivulja

### Ravninske krivulje

**Lema 2.5.1.** *Neka je c krivulja parametrizirana duljinom luka s pozitivnom fleksijom. Tada je c ravninska*[2] *ako i samo ako je* $\tau = 0$.

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c$ parametrizirana duljinom luka. Uvjet da je $c$ ravninska može biti izražen analitički, odnosno

$$(c(s) - p) \cdot q = 0, \quad \forall s,$$

gdje su $p, q$ konstantni vektori. Deriviranjem slijedi

$$c'(s) \cdot q = c''(s) \cdot q = 0, \quad \forall s.$$

Dakle, $q$ je okomit na $T = c'$ i na $N = c''/\kappa$. Kako je i $B$ također okomit na $T$ i $N$, slijedi, zbog $\|B\| = 1$, $B = \pm q/\|q\|$. Uočimo da je $B$ konstantan pa slijedi $B' = 0$. Iz definicije torzije $\tau = -N \cdot B'$ slijedi $\tau = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $\tau = 0$. Stoga, $B' = 0$, odnosno $B$ je konstantan. Želimo pokazati da $c$ leži u ravnini koja prolazi kroz $c(s_0)$ i okomita je na $B$. U tu svrhu, promatramo funkciju

$$f(s) = (c(s) - c(s_0)) \cdot B.$$

Tada

$$f'(s) = c' \cdot B = T \cdot B = 0, \quad \forall s.$$

Prema tome, funkcija $f$ je konstantna, pa zbog $f(s_0) = 0$ slijedi

$$c(s) - c(s_0)) \cdot B = 0 \quad \forall s,$$

odnosno $c$ je ravninska krivulja. □

### Sferne krivulje

U ovom dijelu pokazat ćemo da postoji relacija između fleksije i torzije koja nam daje nužan i dovoljan uvjet da prostorna krivulja leži na sferi.

**Teorem 2.5.2.** *Neka je c krivulja parametrizirana duljinom luka s pozitivnom fleksijom i torzijom različitom od nule. Pretpostavimo da c leži na sferi radijusa r s centrom u* $q \in \mathbb{R}^3$. *Tada vrijedi*

[2] *Ravninska krivulja* u $\mathbb{R}^3$ je krivulja koja leži u jednoj ravnini u $\mathbb{R}^3$.

*(i)* $\kappa \geq 1/r$;

*(ii)* $\kappa$ *i* $\tau$ *su povezani relacijom*

$$\tau^2 \left( r^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left( \frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2 ; \tag{2.13}$$

*(iii)* $\dfrac{\tau}{\kappa} = \left( \dfrac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)'$;

*Dokaz.* Krivulja leži na sferi pa vrijedi jednadžba $\|c - q\|^2 = r^2$. Deriviranjem slijedi

$$(c - q) \cdot T = 0. \tag{2.14}$$

Nakon ponovne derivacije dobivamo

$$T' \cdot T + (c - q) \cdot T' = 1 + (c - q) \cdot T' = 0.$$

Zaključujemo da je $T'$ različit od 0, iz čega slijedi da je Frenetov trobtid $\{T, N, B\}$ dobro definiran na $c$. Slijedi

$$1 + (c - q) \cdot (\kappa N) = 0 \tag{2.15}$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost povlači

$$1 = |(c - q) \cdot (\kappa N)| \leq \kappa \|c - q\| \cdot \|N\| = \kappa r,$$

što dokazuje tvrdnju (i). Deriviranjem jednakosti (2.15) dobivamo

$$T \cdot (\kappa N) + (c - q) \cdot \left( \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B) \right) = 0.$$

Kako je $T \cdot (\kappa N) = 0$ i $-\kappa^2 T(c - q) = 0$, to slijedi

$$\kappa'(c - q) \cdot N + \kappa\tau(c - q) \cdot B = 0.$$

Iz jednakosti (2.15) slijedi da je

$$(c - q) \cdot N = \frac{-1}{\kappa}, \tag{2.16}$$

pa imamo

$$-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa\tau(c - q) \cdot B = 0. \tag{2.17}$$

Neka su $a_1, a_2$ i $a_3$ koeficijenti pri rastavu vektora $c - q$ po ONB-u, odnosno

$$c - q = a_1 T + a_2 N + a_3 B.$$

Pri tome, zbog (2.14), (2.16) i (2.17), vrijedi

$$a_1 = (c-q)\cdot T = 0, \quad a_2 = (c-q)\cdot N = \frac{-1}{\kappa} \quad \text{i} \quad a_3 = (c-q)\cdot B = \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}.$$

Stoga imamo

$$\tau(c-q) = -\frac{\tau}{\kappa}N + \frac{\kappa'}{\kappa^2}B.$$

Normiranjem dobivamo

$$\tau^2 r^2 = \tau^2\|c-q\|^2 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2,$$

iz čega dolazimo do tvrdnje (ii). Trebamo još dokazati tvrdnju (iii). Deriviranjem jednakosti

$$(c-q)\cdot B = \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}$$

dobivamo

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = T\cdot B + (c-q)\cdot B' = 0 - \tau(c-q)\cdot N.$$

Konačno, primjenom jednakosti (2.16), slijedi

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = -\tau\left(\frac{-1}{\kappa}\right) = \frac{\tau}{\kappa}.$$

□

Uočimo da kružna spirala, čija je jedinična parametrizacija dana jednadžbom (2.20), zadovoljava jednakost (2.13) za $c = (a^2+b^2)/a$, ali ne zadovoljava uvjet (iii). Zaista, kružna spirala ne leži na sferi i ovaj primjer pokazuje da jednakost (2.13) ne daje karakterizaciju sfernih krivulja. Ipak, uz dodatni uvjet, dobivamo obrat prethodnog teorema.

**Teorem 2.5.3.** *Neka je* $c\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^3$ *krivulja jedinične brzine čija fleksija* $\kappa$ *i torzija* $\tau$ *zadovoljava (2.13). Pretpostavimo da* $\kappa, \tau$ *i* $\kappa'$ *iščezavaju samo u izoliranim točkama. Tada c leži na sferi radijusa r čije središte je u nekoj točki* $q \in \mathbb{R}^3$.

*Dokaz.* Neka je

$$d = c + \frac{1}{\kappa}N - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)B.$$

Deriviranjem i primjenom Frenetovih formula dobivamo

$$d' = T - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau B) - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' B + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\tau N.$$

Sređivanjem dobivamo

$$d' = \left(\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'\right)B. \tag{2.18}$$

Izraz (2.13) jednak je izrazu

$$\left(c^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2,$$

koji deriviran daje

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = \frac{\kappa'}{\kappa^3}. \tag{2.19}$$

Iz (2.18) i (2.19) slijedi

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)d' = \left(\frac{\tau}{\kappa}\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} - \frac{\kappa'}{\kappa^3}\right)B = 0,$$

odnosno $\kappa' d' = 0$. Prema tome, $d'(t) = 0$ za svaki $t$ za koji vrijedi $\kappa'(t) \neq 0$. Kako je $d'$ neprekidna, slijedi da je $d'(t) = 0$ za svaki $t$. Stoga postoji $q \in \mathbb{R}^3$ takav da je $d(t) = q$ za svaki $t$. Drugim riječima,

$$c(t) - q = -\frac{1}{\kappa(t)}N(t) + \frac{\kappa'(t)}{\tau(t)\kappa(t)^2}B(t)$$

za svaki $t$. Zatim, iz (2.13) dobivamo

$$c^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2,$$

Kako vrijedi

$$\|c(t) - q\|^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2,$$

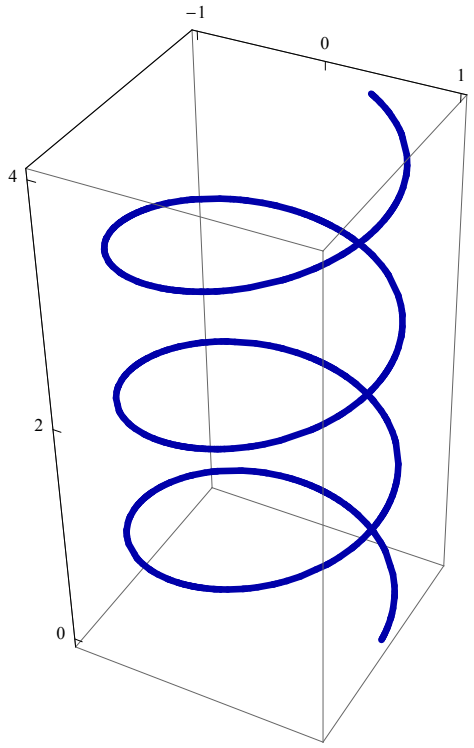
slijedi

$$\|c(t) - q\|^2 = r^2.$$

Prema tome, $c$ leži na sferi radijusa $r$ s centrom u $q$. □

## Krivulje konstantnog nagiba (opće cilindrične spirale)

**Definicija 2.5.4.** *Krivulja* $t \to (a\cos t, a\sin t, 0)$ *je kružnica radijusa* $a$ *u* $xy$ *ravnini u* $\mathbb{R}^3$. *Ako dopustimo da se krivulja diže (ili spušta) konstantnom brzinom duž* $z$*-osi, dobili smo kružnu spiralu* $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, *koja je dana formulom* $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, *gdje je* $a > 0$ *i* $b \neq 0$.




Slika 2.2: Kružna spirala za $a = 1$ i $b = \frac{1}{5}$

**Lema 2.5.5.** *Neka je $c$ krivulja parametrizirana duljinom luka u $\mathbb{R}^3$. Tada je $c$ kružna spirala ako i samo ako je $\kappa = const. > 0$ i $\tau = const.$*

*Dokaz.* Za svaki $a > 0$ i $b \neq 0$ jednadžba

$$c(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right), \tag{2.20}$$

je parametrizacija duljinom luka kružne spirale, pri čemu je $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$. Sada

$$T(s) = c'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right).$$

Stoga

$$T'(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right).$$

Prema tome,

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0. \tag{2.21}$$

Iz $T' = \kappa N$, slijedi

$$N(s) = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right).$$

Vektorski produkt $T \times N$ daje $B$, odnosno

$$B(s) = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right).$$

Iz prethodnog slijedi

$$B'(s) = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right).$$

Uspoređivanjem formula za $B'$ i $N$ i primjenom definicije $B' = -\tau N$, zaključujemo

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}. \tag{2.22}$$

Dakle, fleksija i torzija kružne spirale su konstantne.

Obratno, neka je $c$ krivulja parametrizirana duljinom luka koja ima konstantnu pozitivnu fleksiju i konstantnu torziju. Tada, korištenjem jednadžbi (2.21) i (2.22), dobivamo

$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} > 0, \quad b = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}, \tag{2.23}$$

odnosno $c$ je kružna spirala gdje su $a, b$ kao u (2.23). □

Kako kružna spirala ima konstantnu fleksiju $\kappa$ i konstantnu torziju $\tau$, slijedi da je i omjer $\tau/\kappa$ konstantan. Pitamo se da li postoje druge krivulje s tim svojstvom. Da bi odgovorili na to pitanje, prvo ćemo pokazati da je konstanta $\tau/\kappa$ ekvivalentna konstantnom kutu između krivulje i fiksiranog vektora.

**Definicija 2.5.6.** *Za krivulju* $c\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ *kažemo da ima konstantni nagib u odnosu na jedinični konstantni vektor* $E \in \mathbb{R}^3$*, ako je kut* $\phi$ *između vektora* $E$ *i jediničnog tangencijalnog vektora* $T$ *konstantan. Analitički,*

$$T \cdot E = \cos\phi = konst. \tag{2.24}$$

*Krivulju s tim svojstvom zovemo još opća cilindrična spirala. Nagib krivulje* $c$ *definiramo kao* $\operatorname{ctg}\phi$*.*

**Lema 2.5.7.** *Ako krivulja* $c\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ *ima fleksiju različitu od nule i konstantni nagib u odnosu na neki jedinični vektor* $E$*, tada je omjer* $\tau/\kappa$ *konstantan i jednak* $\pm\operatorname{ctg}\phi$*.*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, krivulja $c$ je jedinične brzine. Derivacijom izraza (2.24) dobivamo $(\kappa N) \cdot E = 0$. Stoga je $E$ okomit na $N$, pa možemo pisati

$$E = T\cos\phi \pm B\sin\phi.$$

Deriviranjem prethodne jedankosti, dobivamo

$$0 = N(\kappa\cos\phi \mp \tau\sin\phi),$$

iz čega slijedi $\kappa\cos\phi \mp \tau\sin\phi = 0$, odnosno

$$\frac{\tau}{\kappa} = \pm\operatorname{ctg}\phi$$

□

Obrat prethodne leme također vrijedi.

**Lema 2.5.8.** *Neka je* $c\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ *krivulja čiji je omjer* $\tau/\kappa$ *konstantan. Označimo* $\tau/\kappa = \operatorname{ctg}\phi$. *Tada krivulja* $c$ *ima konstantni nagib* $\operatorname{ctg}\phi$ *u odnosu na neki jedinični vektor* $E \in \mathbb{R}^3$.

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti, neka je $c$ krivulja jedinične brzine. Uočimo da vrijedi jednakost

$$0 = N(\kappa\cos\phi - \tau\sin\phi) = \frac{d}{ds}(T\cos\phi + B\sin\phi).$$

Iz toga slijedi da postoji konstantni jedinični vektor $E \in \mathbb{R}^3$ takav da je

$$E = T\cos\phi + B\sin\phi.$$

Posebno, skalarni umnožak $E \cdot T$ je konstantan. □

Ako se vratimo na kružnu spiralu (Lema 2.5.5), lako se možemo uvjeriti da ona ima konstantni nagib $b/a$ u odnosu na vektor $(0, 0, 1)$. Sada ćemo pokazati da iz svake ravninske krivulje jedinične brzine možemo dobiti prostornu krivulju konstantnog nagiba na isti način kao što iz kružnice dobivamo kružnu spiralu.

**Lema 2.5.9.** *Neka je* $\bar{c}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ *ravninska krivulja jedinične brzine,* $\bar{c}(s) = (b_1(s), b_2(s))$. *Definiramo prostornu krivulju* $c$*:*

$$c(s) = (b_1(s), b_2(s), s\cos\psi),$$

*gdje je* $\psi$ *konstanta. Tada krivulja* $c$ *ima konstantnu brzinu* $\sqrt{1 + \cos^2\psi}$ *i konstantni nagib* $\cos\psi$ *u odnosu na* $(0, 0, 1)$.

*Dokaz.* Krivulja $\bar{c}$ je jedinične brzine pa slijedi $\|\bar{c}'\| = \sqrt{b_1'(s)^2 + b_2'(s)^2} = 1$, odnosno $b_1'(s)^2 + b_2'(s)^2 = 1$. Prema tome, kako je

$$c'(s) = (b_1'(s), b_2'(s), \cos\psi),$$

slijedi da je brzina od $c$ jednaka $\sqrt{1 + \cos^2\psi}$. Tu činjenicu koristimo kod računanja kuta $\phi$ između $c'(t)$ i $(0, 0, 1)$. Dakle,

$$\cos\phi = \frac{c'(t) \cdot (0, 0, 1)}{\|c'(t)\|} = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1 + \cos^2\psi}},$$

iz čega dobivamo

$$\frac{1}{\cos^2\phi} = 1 + \frac{1}{\cos^2\psi}.$$

Kako je

$$\frac{1}{\cos^2\phi} - 1 = \operatorname{tg}^2\phi,$$

to slijedi $\operatorname{ctg}\phi = \cos\psi$ što smo i željeli dokazati. □

Obrnuta konstrukcija također je moguća.

**Lema 2.5.10.** *Neka je* $c\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ *krivulja jedinične brzine koja ima konstantni nagib* $\operatorname{ctg}\phi$ *u odnosu na jedinični konstantni vektor* $E \in \mathbb{R}^3$. *Pretpostavimo da je* $\operatorname{ctg}\phi \neq 1$. *Neka je* $\bar{c}$ *projekcija od* $c$ *na ravinu okomitu na* $E$, *to jest*

$$\bar{c}(s) = c(s) - (c(s) \cdot E)E \tag{2.25}$$

*za* $a < s < b$. *Tada* $\bar{c}$ *ima konstantnu brzinu* $|\sin\phi|$. *Nadalje, fleksija od* $c$ *i orijentirana zakrivljenost od* $\bar{c}$ *su povezane relacijom*

$$\bar{\kappa_s} = \pm\kappa\frac{1}{\sin^2\phi}. \tag{2.26}$$

*Dokaz.* Neka su $\bar{T} = \dfrac{\bar{c}'}{\|\bar{c}'\|}$ i $T = c'$ jedinični tangencijalni vektori od $\bar{c}$ i $c$. Deriviranjem izraza (2.25) dobivamo

$$\|\bar{c}'\|\bar{T} = \bar{c}' = T - (T \cdot E)E = T - (\cos\phi)E.$$

Prema tome,

$$\|\bar{c}'\|^2\bar{T}^2 = T^2 + \cos^2\phi E^2 - 2\cos\phi T \cdot E.$$

Kako su $\bar{T}, T$ i $E$ jedinični i kako je $T \cdot E = \cos\phi$, slijedi

$$\|\bar{c}'\|^2 = 1 - \cos^2\phi,$$

što dokazuje $\|\bar{c}'\| = |\sin\phi| = konst$. Također, vrijedi $\bar{N} = \pm N$. Krivulja $\bar{c}$ je parametrizirana općim parametrom pa vrijedi $\bar{T}' = \|\bar{c}'\|\bar{\kappa}_s\bar{N}$. Sada konačno imamo

$$\kappa N = T' = \|\bar{c}'\|\bar{T}' = \|\bar{c}'\|^2\bar{\kappa}_s\bar{N} = \pm(\sin^2\phi)\bar{\kappa}_s N.$$

Zbog $\sin\phi \neq 0$, slijedi (2.25). □

Kako bi pronašli još neke zanimljive krivulje konstantnog nagiba osim kružne spirale ili ravninskih krivulja, tražit ćemo krivulje konstantnog nagiba koje leže na sferi. Sljedeća lema dat će nam relaciju koja mora vrijediti između fleksije i torzije takvih krivulja.

**Lema 2.5.11.** *Neka je* $c\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^3$ *krivulja jedinične brzine koja ima konstantni nagib* $\operatorname{ctg}\phi$ *u odnosu na jedinični vektor* $E \in \mathbb{R}^3$*, pri čemu je* $0 < \phi < \pi/2$*. Pretpostavimo također da* $c$ *leži na sferi radijusa* $c > 0$*.*

*(i) Fleksija i torzija od* $c$ *su dane formulama*

$$\kappa(s)^2 = \frac{1}{c^2 - s^2\operatorname{ctg}^2\phi} \quad i \quad \tau(s)^2 = \frac{1}{c^2\operatorname{tg}^2\phi - s^2}. \tag{2.27}$$

*(ii) Neka je* $\bar{c}$ *projekcija krivulje* $c$ *na ravninu okomitu na* $E$*. Tada orijentirana zakrivljenost od* $\bar{c}$ *zadovoljavava jednakost*

$$\bar{\kappa}_s(s_1)^2 = \frac{1}{c^2\sin^4\phi - s_1^2\cos^2\phi}, \tag{2.28}$$

*gdje je* $s_1 = s\sin\phi$ *funkcija duljine luka od* $\bar{c}$*.*

*(iii) Neka je* $c = a + 2b$ *i* $\cos\phi = a/(a + 2b)$*. Tada je prirodna jednadžba (2.28) krivulje* $\bar{c}$ *jednaka prirodnoj jednadžbi epicikloide (1.10).*

*Dokaz.* Kako je $\tau = \kappa\operatorname{ctg}\phi$, iz (2.13) slijedi

$$\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2 = \tau^2\left(c^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = (\kappa^2c^2 - 1)\operatorname{ctg}^2\phi,$$

odnosno,

$$\frac{\kappa'}{\kappa^2\sqrt{\kappa^2c^2 - 1}} = \pm\operatorname{ctg}\phi.$$

Integriranjem prethodne jednakosti dobivamo

$$\frac{1}{\kappa}\sqrt{\kappa^2 c^2 - 1} = \pm s \operatorname{ctg} \phi. \tag{2.29}$$

Rješavanjem jednadžbe (2.29) po $\kappa$, dobivamo (2.27), čime smo pokazali tvrdnju (i). Jednostavnim računom, iz (2.26) i (i), dolazimo do tvrdnje (ii). Trebamo još pokazati da vrijedi tvrdnja (iii). Računamo

$$\sin^4 \phi = (1 - \cos^2 \phi)^2 = \left(1 - \frac{a^2}{(a+2b)^2}\right)^2 = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^4}.$$

Prema tome, izraz (2.28) postaje

$$\frac{1}{\bar{\kappa_s}(s_1)^2} = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2} - \frac{a^2 s_1^2}{(a+2b)^2},$$

odnosno

$$a^2 s_1^2 + \left(\frac{a+2b}{\bar{\kappa_s}(s_1)}\right)^2 = 16b^2(a+b)^2. \tag{2.30}$$

Ako zamijenimo $s_1$ sa $s$, vidimo da izrazi (2.30) i (1.10) jednaki, čime smo dokazali tvrdnju (iii). □

Sada nam se prirodno nameće definicija nove vrste prostornih krivulja. U tu svrhu, koristit ćemo uobičajnu parametrizaciju epicikloide

$$e[a,b](t) = \left((a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{(a+b)t}{b}\right), (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{(a+b)t}{b}\right)\right). \tag{2.31}$$

**Definicija 2.5.12.** *Neka je* $e[a,b](t) = (x(t), y(t))$ *parametarska jednadžba epicikloide kao u (2.31). Sferična spirala je krivulja čija je parametarska jednadžba definirana s*

$$c[a,b](t) = \left(x(t), y(t), 2\sqrt{ab+b^2}\cos\frac{at}{2b}\right).$$

Sljedeća tvrdnja pokazuje da je prethodno konstruirana krivulja zaista konstantnog nagiba i da leži na sferi.

**Lema 2.5.13.** *Sferična spirala* $c[a,b]$ *ima konstantni nagib u odnosu na* $(0,0,1)$ *i leži na sferi radijusa* $a + 2b$ *čiji je centar u ishodištu.*

*Dokaz.* Da bi krivulja $c(t)$ bila konstantnog nagiba u odnosu na $(0, 0, 1)$ mora vrijediti

$$\cos\phi = \frac{c'(t) \cdot (0, 0, 1)}{\|c'(t)\|} = konst.$$

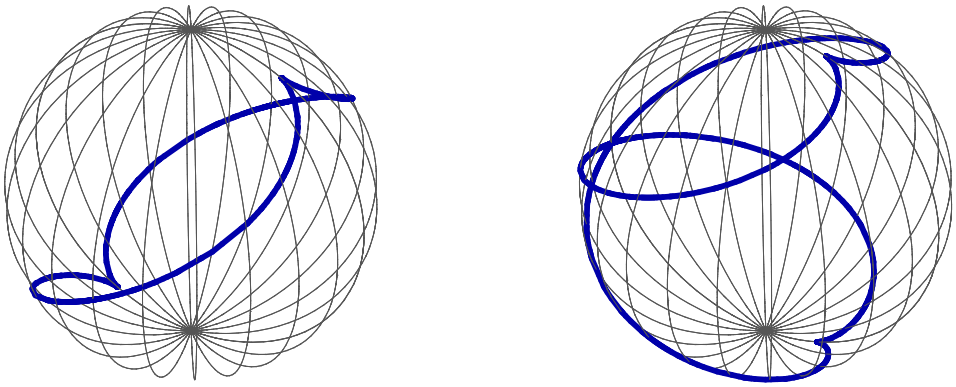
Deriviranjem i sređivanjem izraza dobijemo da vrijedi

$$\cos\phi = \frac{-a}{a + 2b},$$

čime je dokazan prvi dio leme. Zatim, pokaže se da vrijedi

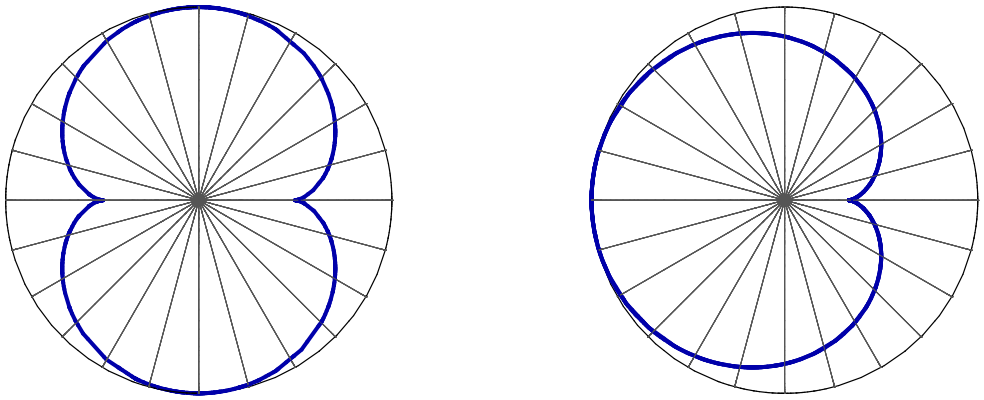
$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = (a + 2b)^2$$

iz čega zaključujemo da $c(t)$ zaista leži na sferi radijusa $a + 2b$ s centrom u ishodištu. □



Slika 2.3: Sferične spirale

Slika 2.3 prikazuje primjere sferičnih spirala koje leže na jediničnoj sferi. Lijeva sferična spirala dobivena je za $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{1}{4}$, a desna za $a = b = \frac{1}{3}$. Projekcije tih krivulja na $xy$ ravninu prikazane su na Slici 2.4.



Slika 2.4: Nefroida (lijevo) i kardioda (desno)

## 2.6 Implementacija Fundamentalnog teorema u *Mathematica-i*

U praksi, Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^3$ implementiramo u *Mathematica-i* koja rješava sustav diferencijabilnih jednadžbi numerički i zatim crta dobivene prostorne krivulje. Pokazali smo da se naš zadatak svodi na rješavanje sustava od 12 diferencijabilnih jednadžbi (2.9) s zadanim početnim uvjetima (2.10) koji zadovoljavaju (2.11).

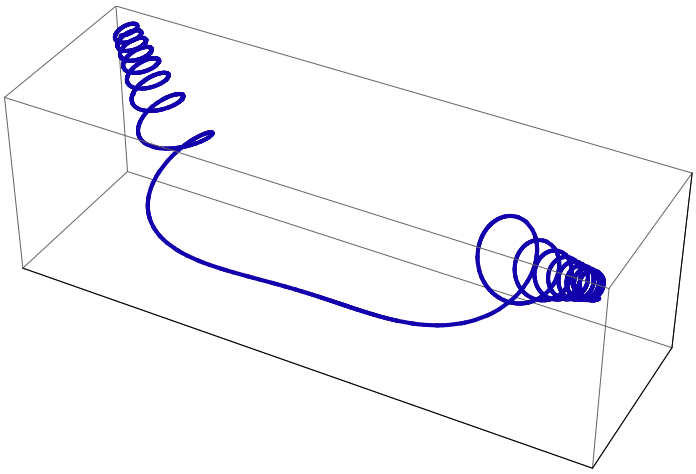
Naredba koju ćemo koristiti analogna je naredbi koju smo imali za krivulje u $\mathbb{R}^2$,

```
g=NDSolve[{x1'[s]==t1[s],x2'[s]==t2[s],x3'[s]==t3[s],
  t1'[s]==k[s]*n1[s],t2'[s]==k[s]*n2[s],t3'[s]==k[s]*n3[s],
  n1'[s]==-k[s]*t1[s]+t[s]*b1[s],n2'[s]==-k[s]*t2[s]+t[s]*b2[s],
  n3'[s]==-k[s]*t3[s]+t[s]*b3[s],
  b1'[s]==-t[s]*n1[s],b2'[s]==-t[s]*n2[s],b3'[s]==-t[s]*n3[s],
  x1[0]=0,x2[0]==0,x3[0]==0,t1[0]==1,t2[0]==0,t3[0]==0,n1[0]==0,
  n2[0]==1,b1[0]=0,b2[0]==0,b3==[1]},
  {x1,x2,x3,t1,t2,t3,n1,n2,n3,b1,b2,b3},{s,a,b}]
```

gdje je `k[s]` fleksija, a `t[s]` torzija tražene krivulje. Graf krivulje zatim jednostavno dobijemo naredbom

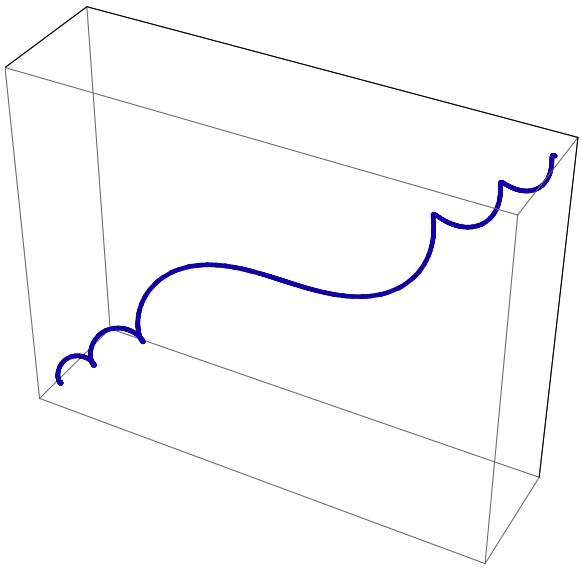
```
ParametricPlot3D[Evaluate[{x1[s],x2[s],x3[s]}/.g],{s,a,b}]
```

U ovom dijelu promatrat ćemo neke familije krivulja koje su formirane tako da im je bar jedna funkcija zakrivljenosti identiteta $s \to s$ ili oblika $s \to cs$, gdje je $c$ konstanta.



Slika 2.5: $\kappa(s) = s$ i $\tau(s) = 1$

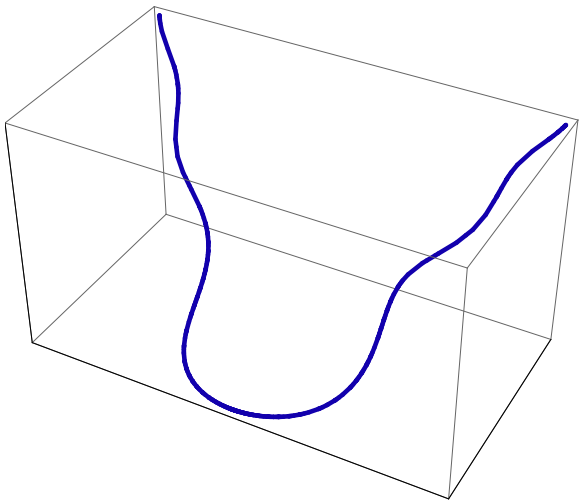
Slika 2.5 je trodimenzionalan analogon klotoide, premda se za $\kappa(s) = |s|$ i $\tau(s) = 1$ postiže veća sličnost s općom cilindričnom spiralom. Slika 2.6 prikazuje "dvostruki vadičep" kojeg karakterizira to što su $\kappa$ i $\tau$ linearni.



Slika 2.6: $\kappa(s) = s$ i $\tau(s) = s$

Slika 2.7 prikazuje jednostavan primjer prostorne krivulje čija je fleksija konstanta. Oko ishodišta, krivulja nalikuje na polukružnicu, ali kako se $|\tau|$ povećava, postaje manje

ravninska. Mnoge druge tipove krivulja u prostoru, čija fleksija je konstanta, možemo dobiti različitim zadavanjem torzije kao funkcije s parametrom duljine luka.



Slika 2.7: $\kappa(s) = 1$ i $\tau(s) = s$

# Bibliografija


[1] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[2] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2010.

[3] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Elsevier Academic Press, 2006.

[4] Dirk J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover Publications, New York, 1988.

[5] T. Banchoff, S. Lovett, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 2010.

[6] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijabilnu geometriju*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odsjek, preuzeto sa
`http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/udg/skripta-stipe-v2.pdf`
(svibanj, 2015.)

# Sažetak

Fundamentalni teorem za krivulje jedan je od najvažnijih rezultata diferencijabilne geometrije za krivulje. Fundamentalni teorem za krivulje u $\mathbb{R}^3$ kaže da postoji jedinstvena, do na orijentaciju i položaj u prostoru (do na izometriju), krivulja sa zadanom pozitivnom fleksijom $\kappa$ i torzijom $\tau$. Jednadžbe $\kappa = \kappa(s)$ i $\tau = \tau(s)$, gdje je $s$ parametar duljine luka krivulje, nazivaju se prirodnim jednadžbama i one ne ovise o izboru koordinatnog sustava. Analogan rezultat također vrijedi i u $\mathbb{R}^2$, samo što je u $\mathbb{R}^2$ krivulja jednoznačno određena, do na orijentaciju i položaj u ravnini, samo relacijom između orijentirane zakrivljenosti $\kappa_s$ i parametra duljine luka $s$.

# Summary

Fundamental Theorem of Curves is one of the most important achievements of differential geometry of curves. Fundamental Theorem of Curve in $\mathbb{R}^3$ states that there exists a unique space curve, determined up to the orientation and a position in space (up to an isometry), with prescribed positive curvature $\kappa$ and torsion $\tau$. Equations $\kappa = \kappa(s)$ and $\tau = \tau(s)$, where $s$ is the arc lenght of a curve, are called naturals equations of a curve. They are called natural because do not depend on the choice of a coordinate system. The analogue result is also obtained in $\mathbb{R}^2$, the only difference is that a curve in $\mathbb{R}^2$ is uniquely determined, up to the orientation and a position in plane, by a relation between signed curvature $\kappa_s$ and arc lenght $s$.

# Životopis

Rođen sam 23. prosinca 1991. u Varaždinu. Srednjoškolsko obrazovanje stekao sam u Gospodarkoj školi Varaždin, smjer ekonomist. Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički, upisao sam 2010. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2013. završavam preddiplomski studij i upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.