

# Trigonometrijske funkcijske jednadžbe

---

Filipašić, Melissa

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:630266>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Melissa Filipašić

**TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJSKE**  
**JEDNADŽBE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, lipanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*”Ti to hoćeš, ti to možeš, ti to budeš!”*

# Sadržaj

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Sadržaj</b>                                             | <b>iv</b> |
| <b>Uvod</b>                                                | <b>1</b>  |
| <b>1 D'Alembertova funkcijska jednađžba</b>                | <b>2</b>  |
| 1.1 Neprekidna rješenja d'Alembertove jednađžbe . . . . .  | 2         |
| 1.2 Opće rješenje d'Alembertove jednađžbe . . . . .        | 17        |
| 1.3 Prva i druga Cauchyjeva funkcijska jednađžba . . . . . | 25        |
| <b>2 Trigonometrijske funkcijske jednađžbe</b>             | <b>29</b> |
| 2.1 Kosinus-sinus funkcijska jednađžba . . . . .           | 29        |
| 2.2 Sinus-kosinus funkcijska jednađžba . . . . .           | 33        |
| 2.3 Sinus funkcijska jednađžba . . . . .                   | 36        |
| 2.4 Poopćenje sinus funkcijske jednađžbe . . . . .         | 43        |
| <b>Bibliografija</b>                                       | <b>57</b> |

# Uvod

Trigonometrijski identiteti motiviraju proučavanje trigonometrijskih funkcijskih jednadžbi kojima su trigonometrijske funkcije samo jedno od mogućih rješenja. Tako na primjer trigonometrijski identitet

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

vodi do funkcijske jednadžbe

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

kojoj funkcija kosinus nije jedino moguće rješenje. Ova funkcijska jednadžba poznata je kao *d'Alembertova funkcijska jednadžba*. Kako bi odredio sumu dva ili više vektora u euklidskoj i neeuklidskoj geometriji, Jean d'Alembert (1717.–1783.) sveo je problem na određivanje svih rješenja navedene funkcijske jednadžbe. Cauchy je odredio njena neprekidna rješenja 1821. godine, a Kannappan je 1968. godine odredio njeno opće rješenje. Rješavanje d'Alembertove funkcijske jednadžbe opisat ćemo u prvom poglavlju ovoga rada.

U drugom poglavlju proučavamo trigonometrijske funkcijske jednadžbe s dvjema nepoznanicama. Primjer je *sinus-kosinus funkcijska jednadžba*

$$f(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

dobivena iz trigonometrijskog identiteta

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$

no funkcije sinus i kosinus nisu njena jedina rješenja. Uočit ćemo različite metode rješavanja te odrediti opća i neprekidna rješenja nekoliko različitih trigonometrijskih funkcijskih jednadžbi.

# Poglavlje 1

## D'Alembertova funkcijska jednađžba

### 1.1 Neprekidna rješenja d'Alembertove jednađžbe

U sljedećem teoremu riješit ćemo d'Alembertovu jednađžbu uz pretpostavku neprekidnosti rješenja.

**Teorem 1.1.1.** *Neprekidna funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je rješenje d'Alembertove funkcijske jednađžbe*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (\text{DE})$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  ako i samo ako vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:

$$f(x) = 0 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

$$f(x) = 1 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

$$f(x) = \text{ch}(\alpha x) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

$$f(x) = \cos(\beta x) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

gdje su  $\alpha, \beta$  proizvoljne realne konstante.

*Dokaz.* Uvrštavanjem  $x = y = 0$  u (DE) dobivamo

$$2f(0) = 2[f(0)]^2,$$

pa je

$$f(0) = 0 \quad \text{ili} \quad f(0) = 1.$$

Ako je  $f(0) = 0$ , tada uvrštavanjem  $y = 0$  u (DE) dobivamo  $f(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . To nam daje rješenje (1.1). Zbog toga dalje pretpostavimo da je  $f(0) \neq 0$ .

Nadalje, dokazat ćemo da je bilo koje rješenje od (DE) parna funkcija. Da bismo to dokazali, uvrstimo  $x = 0$  u (DE). Tada dobivamo

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y).$$

Kako je  $f(0) \neq 0$ , to je  $f(0) = 1$ , pa prethodna jednadžba prelazi u

$$f(y) + f(-y) = 2f(y)$$

odakle slijedi

$$f(-y) = f(y)$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $f$  je parna funkcija. Kako je  $f$  neprekidna na  $\mathbb{R}$ ,  $f$  je također integrabilna na bilo kojem segmentu. Zbog toga za svaki  $t > 0$  imamo

$$\int_{-t}^t f(x+y)dy + \int_{-t}^t f(x-y)dy = 2f(x) \int_{-t}^t f(y)dy. \quad (1.5)$$

Vrijedi

$$\int_{-t}^t f(x+y)dy = \int_{x-t}^{x+t} f(z)dz = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Slično,

$$\int_{-t}^t f(x-y)dy = \int_{x-t}^{x+t} f(w)(-dw) = \int_{x-t}^{x+t} f(w)dw = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Sada (1.5) postaje

$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy + \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = 2f(x) \int_{-t}^t f(y)dy$$

odnosno

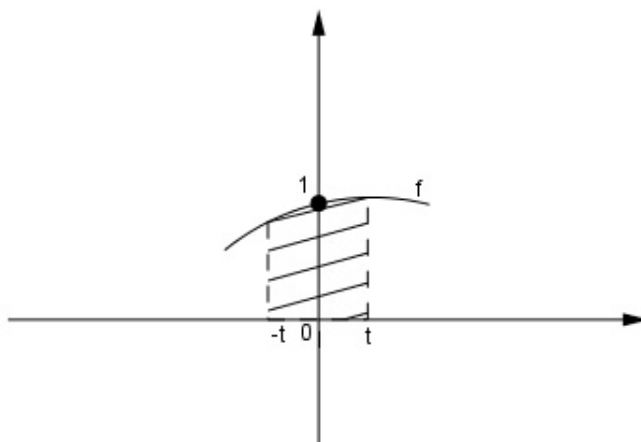
$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = f(x) \int_{-t}^t f(y)dy. \quad (1.6)$$

Nadalje, kako je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna, postoji  $t > 0$  takav da vrijedi (vidite sliku 1.1)

$$\int_{-t}^t f(y)dy > 0.$$

Uočimo da je lijeva strana u (1.6) derivabilna po varijabli  $x$  prema osnovnom teoremu diferencijalnog računa. Uočimo također da je i desna strana u (1.6) derivabilna po varijabli  $x$ . Tada deriviranjem jednakosti (1.6) po  $x$  dobivamo

$$\frac{d}{dx} \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = \frac{d}{dx} \left[ f(x) \int_{-t}^t f(y)dy \right]$$

Slika 1.1: Postoji  $t > 0$  sa svojstvom  $\int_{-t}^t f(y)dy > 0$ 

odakle slijedi

$$f(x+t) - f(x-t) = f'(x) \int_{-t}^t f(y)dy. \quad (1.7)$$

Ovo pokazuje da je  $f$  dvostruko derivabilna te je

$$f'(x+t) - f'(x-t) = f''(x) \int_{-t}^t f(y)dy.$$

Iz toga slijedi da je  $f$  trostruko derivabilna. Nastavljajući korak po korak, zaključujemo da su neprekidna rješenja od (DE) beskonačno derivabilna.

Uvrštavanjem  $x = 0$  u (1.7) dobivamo

$$f(t) - f(-t) = f'(0) \int_{-t}^t f(y)dy. \quad (1.8)$$

Kako je  $f$  parna, vrijedi  $f(t) = f(-t)$ , pa (1.8) postaje

$$f'(0) \int_{-t}^t f(y)dy = 0. \quad (1.9)$$

Kako je  $\int_{-t}^t f(y)dy > 0$ , iz (1.9) slijedi

$$f'(0) = 0.$$

Kako je  $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ , deriviramo (DE) po  $y$  dva puta kako bismo dobili

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y),$$

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Uvrštavanjem  $y = 0$  dobivamo

$$2f''(x) = 2f(x)f''(0).$$

Neka je  $k = f''(0)$ . Tada je

$$f''(x) = kf(x)$$

što povlači sljedeći problem početne vrijednosti (PPV):

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = ky, \quad y(0) = 1 \quad \text{ i } \quad y'(0) = 0. \quad (\text{PPV})}$$

Kako bismo riješili ovaj problem početne vrijednosti, moramo obuhvatiti 3 slučaja:  $k = 0$ ,  $k > 0$  i  $k < 0$ .

*Prvi slučaj.* Neka je  $k = 0$ . Tada (PPV) postaje

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Odatle slijedi

$$y(x) = c_1x + c_2$$

za neke  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Kako je  $y(0) = 1$ , to je  $c_2 = 1$ . Također, iz  $y'(0) = 0$  dobivamo  $c_1 = 0$ . Dakle,  $y(x) = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa u ovom slučaju dobivamo (1.2).

*Drugi slučaj.* Neka je  $k > 0$ . Uvrštavanjem  $y = e^{mx}$  u

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky \tag{1.10}$$

dobivamo  $m^2 = k$ , odnosno  $m = \pm \sqrt{k}$ . Zbog toga je

$$y(x) = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x},$$

gdje je  $\alpha = \sqrt{k} \neq 0$ . Sada vrijedi

$$1 = y(0) = c_1e^{\alpha \cdot 0} + c_2e^{-\alpha \cdot 0} = c_1 + c_2.$$

Slijedi

$$c_2 = 1 - c_1,$$

pa je

$$y(x) = c_1e^{\alpha x} + (1 - c_1)e^{-\alpha x}.$$

Sada je

$$0 = y'(0) = c_1\alpha e^{\alpha x} + (1 - c_1)(-\alpha)e^{-\alpha x}.$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  dobivamo

$$0 = c_1\alpha + (1 - c_1)(-\alpha) = c_1\alpha - \alpha + c_1\alpha = 2c_1\alpha - \alpha.$$

Iz toga slijedi

$$c_1 = \frac{1}{2}.$$

Zbog toga je rješenje od (1.10) dano sa

$$y(x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} = \operatorname{ch}(\alpha x).$$

Dakle, u ovom slučaju dobivamo (1.3).

*Treći slučaj.* Neka je  $k < 0$ . Uvrštavanjem  $y = e^{mx}$  u (1.10), dobivamo  $m^2 = k < 0$ . Stoga je  $m = \pm i\beta$ , gdje je  $\beta = \sqrt{-k} \neq 0$ . Zbog toga je rješenje od (1.10) dano sa

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}.$$

Kako je

$$1 = y(0) = c_1 + c_2,$$

imamo

$$c_2 = 1 - c_1.$$

Dakle,

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + (1 - c_1) e^{-i\beta x}.$$

Nadalje, kako je

$$0 = y'(0) = i\beta c_1 - i\beta(1 - c_1) = 2i\beta c_1 - i\beta,$$

to je

$$c_1 = \frac{1}{2}.$$

Zbog toga imamo

$$y(x) = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = \cos(\beta x).$$

Dakle, u ovom slučaju dobivamo (1.4).

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.1) ili (1.2) u (DE), lako se uvjerimo da su ona rješenja od (DE). Uvrštavanjem (1.3) u (DE), koristeći parnost funkcije kosinus hiperbolni i neparnost funkcije sinus hiperbolni, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \operatorname{ch}(\alpha(x+y)) + \operatorname{ch}(\alpha(x-y)) \\ &= \operatorname{ch}(\alpha x) \operatorname{ch}(\alpha y) + \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{sh}(\alpha y) + \operatorname{ch}(\alpha x) \operatorname{ch}(-\alpha y) + \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{sh}(-\alpha y) \\ &= 2 \operatorname{ch}(\alpha x) \operatorname{ch}(\alpha y) \\ &= 2f(x)f(y), \end{aligned} \tag{1.11}$$

odnosno (1.3) je rješenje jednadžbe (DE).

Uvrštavanjem (1.4) u (DE), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \cos(\beta(x+y)) + \cos(\beta(x-y)) \\ &= \cos(\beta x) \cos(\beta y) - \sin(\beta x) \sin(\beta y) + \cos(\beta x) \cos(\beta y) + \sin(\beta x) \sin(\beta y) \\ &= 2 \cos(\beta x) \cos(\beta y) \\ &= 2f(x)f(y) \end{aligned}$$

pa slijedi da je (1.4) rješenje jednadžbe (DE). Ovime smo završili dokaz teorema.  $\square$

**Napomena.** Uočimo da neprekidnost funkcije  $f$  u funkcijskoj jednadžbi povlači beskonačnu derivabilnost od  $f$ . Drugim riječima, deriviranjem funkcijske jednadžbe dobivamo diferencijalnu jednadžbu koju zatim rješavamo i na taj način pronalazimo rješenje polazne funkcijske jednadžbe. To je standardna metoda rješavanja funkcijskih jednadžbi kada je pretpostavljena neprekidnost njenih rješenja.

**Propozicija 1.1.2.** *Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) *Neprekidna je u svakoj točki  $x \in \mathbb{R}$ .*

(ii) *Zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (\text{DE})$$

*za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .*

(iii) *Postoji najmanji nenegativan korijen  $\lambda$  takav da je  $f(\lambda) = 0$ .*

(iv)  *$f(0) > 0$ .*

*Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a)  *$f(x) > 0$  za svaki  $x \in \langle 0, \lambda \rangle$ .*

(b)  *$f(0) = 1$ .*

(c)  *$f(-x) = f(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

(d)  *$f(x + 2\lambda) = -f(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

(e)  *$f(2x) = 2f(x)^2 - 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

(f)  *$f\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+f(x)}{2}}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

(g)  *$|f(x)| \leq 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

(h) Funkcija  $f$  je periodična s najmanjim pozitivnim periodom  $4\lambda$ .

*Dokaz.* (a) Iz svojstva (iii) i (iv) možemo zaključiti da je  $\lambda > 0$ . Kako je  $\lambda$  najmanji pozitivan korijen od  $f$ , za bilo koji  $x \in \langle 0, \lambda \rangle$  vrijedi da je  $f(x) \neq 0$ . Neprekidnost funkcije  $f$  i činjenica da je  $f(0) > 0$  povlače da je  $f(x) > 0$  za svaki  $x \in \langle 0, \lambda \rangle$ .

(b) Uvrštavanjem  $y = 0$  u (DE) dobivamo  $2f(x) = 2f(x)f(0)$ , odnosno

$$f(x)(f(0) - 1) = 0.$$

Ova jednakost vrijedi za svaki  $x \in \mathbb{R}$  pa i za  $x \in \langle 0, \lambda \rangle$ . Kako prethodno svojstvo povlači da je  $f(x) \neq 0$ , zaključujemo da mora vrijediti  $f(0) = 1$ .

(c) Uvrštavanjem  $x = 0$  u (DE) dobivamo

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y).$$

Primjenom prethodnog svojstva, to jest,  $f(0) = 1$ , dobivamo  $f(-y) = f(y)$  za svaki  $y \in \mathbb{R}$ .

(d) Zamjenom  $x$  sa  $x + \lambda$  i  $y$  sa  $\lambda$  u (DE) dobivamo

$$f(x + 2\lambda) + f(x) = 2f(x + \lambda)f(\lambda).$$

Prema svojstvu (iii) slijedi

$$f(x + 2\lambda) + f(x) = 0.$$

(e) Uvrstimo li  $y = x$  u (DE), dobivamo  $f(2x) + f(0) = 2[f(x)]^2$  pa prema tvrdnji (b) slijedi  $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ .

(f) Rješavanjem prethodne kvadratne jednačbe po  $f(x)$  dobit ćemo

$$f(x) = \pm \sqrt{\frac{1 + f(2x)}{2}},$$

što je ekvivalentno traženom svojstvu zamijenimo li  $x$  sa  $\frac{x}{2}$ .

(g) Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji  $a \in \mathbb{R}$  takav da je  $|f(a)| > 1$ . Uvrštavanjem  $x = \lambda + a$  i  $y = \lambda - a$  u (DE) slijedi

$$f(2\lambda) + f(2a) = 2f(\lambda + a)f(\lambda - a). \quad (1.12)$$

Primijenimo li svojstvo (e) na lijevu stranu prethodne jednakosti, ona će postati

$$[2[f(\lambda)]^2 - 1] + [2[f(a)]^2 - 1].$$

Kako je  $f(\lambda) = 0$ , lijeva strana od (1.12) postaje

$$2[f(a)]^2 - 1$$

što je pozitivan broj. Kako je  $f(\lambda - a) = f(2\lambda - (\lambda + a)) = f(-(\lambda + a) + 2\lambda)$ , što je prema svojstvu (d) i (c) jednako  $-f(-(\lambda + a)) = -f(\lambda + a)$ , desna strana jednakosti (1.12) je jednaka

$$-2[f(\lambda + a)]^2.$$

Kako taj broj nije pozitivan, zaključujemo da jednakost (1.12) nije moguća pa mora vrijediti  $|f(x)| \leq 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

(h) Primijenimo li svojstvo (d) dva puta, vidjet ćemo da je  $f$  periodična funkcija:

$$f(4\lambda + x) = f(2\lambda + (2\lambda + x)) = -f(2\lambda + x) = f(x).$$

Preostaje dokazati da je  $4\lambda$  najmanji period funkcije  $f$ . Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji period  $T$  takav da je  $0 < T < 4\lambda$ . Tada je

$$f(T) = f(0 + T) = f(0) = 1.$$

Uvrstimo sada  $x = y = \frac{T}{2}$  u (DE):

$$f(T) + f(0) = 2\left[f\left(\frac{T}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow f\left(\frac{T}{2}\right) = 1 \text{ ili } f\left(\frac{T}{2}\right) = -1.$$

Ako je  $f\left(\frac{T}{2}\right) = -1$ , uvrštavanjem  $x = y = \frac{T}{4}$  u (DE) dobit ćemo

$$f\left(\frac{T}{2}\right) + f(0) = 2\left[f\left(\frac{T}{4}\right)\right]^2 \Rightarrow f\left(\frac{T}{4}\right) = 0.$$

Drugim riječima,  $\frac{T}{4}$  je pozitivan korijen od  $f(x)$  što je kontradikcija sa svojstvom (iii) jer je  $0 < \frac{T}{4} < \lambda$ .

Ako je  $f\left(\frac{T}{2}\right) = 1$ , uvrštavanjem  $x = \lambda + \frac{T}{4}$  i  $y = \lambda - \frac{T}{4}$  u (DE) dobit ćemo

$$f(2\lambda) + f\left(\frac{T}{2}\right) = 2f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right)f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right).$$

Prema svojstvima (d) i (b) vrijedi  $f(2\lambda) = f(0 + 2\lambda) = -f(0) = -1$ , pa iz prethodne jednakosti slijedi

$$f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right)f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right) = 0. \quad (1.13)$$

Primjenom svojstava (d) i (c) dobivamo

$$f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right) = f\left(2\lambda - \left(\lambda - \frac{T}{4}\right)\right) = -f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right)$$

pa je jednakost (1.13) ekvivalentna

$$\left[ f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right) \right]^2 = 0.$$

No, kako je  $0 < \lambda - \frac{T}{4} < \lambda$  što je kontradikcija s (iii), zaključujemo da je  $4\lambda$  najmanji period funkcije  $f$ .  $\square$

Uzevši u obzir teorem 1.1.1, tvrdnjama (a)-(h) su dana svojstva funkcije kosinus. Slijedi još jedna karakterizacija funkcije kosinus pomoću funkcijske jednadžbe.

**Teorem 1.1.3.** *Neka je  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Neprekidna funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , različita od nul-funkcije, zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x - y + \alpha) - f(x + y + \alpha) = 2f(x)f(y) \quad (1.14)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , ako i samo ako je

$$f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right) \quad (1.15)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $k \in \mathbb{Z}$  neparan.

*Dokaz.* Zamijenimo li  $y$  sa  $-y$ , iz (1.14) slijedi:

$$f(x + y + \alpha) - f(x - y + \alpha) = 2f(x)f(-y). \quad (1.16)$$

Zbrajanjem (1.14) i (1.16) dobivamo

$$f(x)f(y) = -f(x)f(-y),$$

odnosno

$$f(-y) = -f(y)$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $f$  je neparna funkcija. Zamjenom  $x$  i  $y$  u (1.14) slijedi:

$$f(y - x + \alpha) - f(x + y + \alpha) = 2f(y)f(x). \quad (1.17)$$

Oduzimanjem (1.14) od (1.17) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(x - y + \alpha) &= f(y - x + \alpha) \\ &= f(-(x - y - \alpha)) \\ &= -f(x - y - \alpha). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Za  $y = 0$ , iz (1.18) slijedi

$$f(x + \alpha) = -f(x - \alpha) \quad (1.19)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Dodavanjem  $\alpha$  u argument funkcije, iz (1.19) slijedi:

$$\begin{aligned} f(x + 2\alpha) &= -f(x), \\ f(x + 3\alpha) &= -f(x + \alpha), \\ f(x + 4\alpha) &= -f(x + 2\alpha) = f(x). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Zaključujemo,

$$f(x + 4\alpha) = f(x) \quad (1.21)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , odnosno  $f$  je periodična funkcija s periodom  $4\alpha$ . Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $\alpha > 0$ . Zamjenom  $x$  sa  $x + \alpha$  i  $y$  sa  $y + \alpha$  u (1.14) slijedi:

$$f(x - y + \alpha) - f(x + y + 3\alpha) = 2f(x + \alpha)f(y + \alpha). \quad (1.22)$$

Uvrštavanjem (1.20) u (1.22) dobivamo

$$f(x - y + \alpha) + f(x + y + \alpha) = 2f(x + \alpha)f(y + \alpha). \quad (1.23)$$

Neka je

$$g(x) = f(x + \alpha).$$

Tada (1.23) postaje

$$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)g(y).$$

Kako je  $f$  neprekidna, to je i  $g$  neprekidna funkcija, pa prema teoremu 1.1.1 vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:  $g(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \operatorname{ch}(ax)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  ili  $g(x) = \cos(bx)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje su  $a, b$  proizvoljne konstante.

Ako je  $g$  nul-funkcija, tada je i  $f$  nul-funkcija, suprotno pretpostavci.

Ako je  $g(x) = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , tada je  $f(x) = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Međutim, uvrštavanjem  $f(x) = 1$  u (1.14), dobivamo  $0 = 2$  što je kontradikcija pa zaključujemo da ni ono nije rješenje.

Neka je  $g(x) = \operatorname{ch}(ax)$ . Tada je

$$f(x) = g(x - \alpha) = \operatorname{ch}(a(x - \alpha)),$$

odnosno

$$f(x + 4\alpha) = \operatorname{ch}(a(x + 3\alpha)).$$

Prema (1.21) tada slijedi

$$\operatorname{ch}(a(x + 3\alpha)) = \operatorname{ch}(a(x - \alpha)).$$

Posebno, za  $x = \alpha$  dobivamo  $\operatorname{ch}(4a\alpha) = 1$ , pa je  $4a\alpha = 0$ , odakle slijedi  $a = 0$ . Dakle,  $g(x) = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , što ne može biti.

Neka je  $g(x) = \cos(bx)$ . Kako je  $f$  periodična funkcija s periodom  $4\alpha$ , isto vrijedi i za funkciju  $g$ :

$$g(x + 4\alpha) = f(x + 5\alpha) = f(x + \alpha) = g(x),$$

odakle slijedi

$$\cos(bx + 4b\alpha) = \cos(bx)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Slijedi

$$4b\alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pa je

$$b = \frac{k\pi}{2\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kako je  $f(x) = g(x - \alpha) = \cos(b(x - \alpha))$ , slijedi da je

$$f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right).$$

Primjenom adicijskih formula dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos \frac{k\pi x}{2\alpha} \cos \frac{k\pi}{2} + \sin \frac{k\pi x}{2\alpha} \sin \frac{k\pi}{2} \\ &= \sin \frac{k\pi x}{2\alpha} \sin \frac{k\pi}{2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Sada s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f(x - y + \alpha) - f(x + y + \alpha) &= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - y)\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x + y)\right) \\ &= \left(\cos \frac{k\pi x}{2\alpha} \cos \frac{k\pi y}{2\alpha} + \sin \frac{k\pi x}{2\alpha} \sin \frac{k\pi y}{2\alpha}\right) \\ &\quad - \left(\cos \frac{k\pi x}{2\alpha} \cos \frac{k\pi y}{2\alpha} - \sin \frac{k\pi x}{2\alpha} \sin \frac{k\pi y}{2\alpha}\right) \\ &= 2 \sin \frac{k\pi x}{2\alpha} \sin \frac{k\pi y}{2\alpha}, \end{aligned}$$

a s druge, primjenom (1.24), imamo

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= 2\left(\sin \frac{k\pi x}{2\alpha} \sin \frac{k\pi}{2}\right)\left(\sin \frac{k\pi y}{2\alpha} \sin \frac{k\pi}{2}\right) \\ &= 2 \sin \frac{k\pi x}{2\alpha} \sin \frac{k\pi y}{2\alpha} \left(\sin \frac{k\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Prema (1.14), izjednačavanjem desnih strana zaključujemo da je  $\left(\sin \frac{k\pi}{2}\right)^2 = 1$ , odakle slijedi da je  $k \in \mathbb{Z}$  neparan.

Dakle,  $f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $k \in \mathbb{Z}$  neparan.

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.15) u (1.14), slijedi da je lijeva strana jednaka

$$\begin{aligned} f(x - y + \alpha) - f(x + y + \alpha) &= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - y)\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x + y)\right) \\ &= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) \\ &\quad - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right). \end{aligned}$$

S desne strane imamo

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= 2\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(y - \alpha)\right) \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right] \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\left[\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]^2 \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right). \end{aligned}$$

Kako su lijeva i desna strana jednake, zaključujemo da je (1.15) rješenje jednadžbe (1.14). Ovime smo završili dokaz teorema.  $\square$

**Teorem 1.1.4.** *Neka je  $(S, +)$  komutativna polugrupa, a  $\mathbb{F}$  polje sa svojstvima:*

- (i)  $2x = 0$  ( $x \in \mathbb{F}$ ) povlači  $x = 0$ ,
- (ii) za svaki  $x \in \mathbb{F}$  postoji  $y \in \mathbb{F}$  takav da je  $y^2 = x$ .

*Neka je  $\sigma$  endomorfizam od  $S$  takav da vrijedi  $\sigma(\sigma x) = x$  za svaki  $x \in S$ . Tada je  $g: S \rightarrow \mathbb{F}$  rješenje funkcijske jednadžbe*

$$g(x + y) + g(x + \sigma y) = 2g(x)g(y) \quad (1.25)$$

za sve  $x, y \in S$ , ako i samo ako je

$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2} \quad (1.26)$$

za svaki  $x \in S$ , gdje je  $h: S \rightarrow \mathbb{F}$  rješenje funkcijske jednadžbe  $h(x+y) = h(x)h(y)$  za sve  $x, y \in S$ .

*Dokaz.* Uvrštavanjem (1.26) u (1.25) vidimo da funkcija  $g$  zadovoljava danu funkcijsku jednadžbu. Preostaje dokazati da je  $g$  jedino rješenje od (1.25).

Ako je  $g(x) = 0$  za svaki  $x \in S$  ili  $g(x) = 1$  za svaki  $x \in S$ , uvrštavanjem u (1.25) se uvjeravamo da su obje funkcije rješenja od (1.25). U nastavku pretpostavljamo da  $g$  nije konstantna funkcija. Uvrštavanjem  $y = 0$  u (1.25) dobivamo

$$g(x) = g(x)g(0) \quad (1.27)$$

za svaki  $x \in S$ . Uvrštavanjem  $x = 0$  u (1.25) i primjenom (1.27) dobivamo

$$g(y) + g(\sigma y) = 2g(0)g(y) = 2g(y),$$

pa je

$$g(\sigma x) = g(x) \quad (1.28)$$

za svaki  $x \in S$ .

Sada slijedi

$$g(x + \sigma y) = g(\sigma(x + \sigma y)) = g(\sigma x + y).$$

Razlikujemo dva slučaja: (1)  $g(x+y) = g(x+\sigma y)$  za sve  $x, y \in S$  i (2) postoje  $x_0, y_0 \in S$  takvi da je  $g(x_0 + y_0) \neq g(x_0 + \sigma y_0)$ .

*Prvi slučaj.* Pretpostavimo da je  $g(x+y) = g(x+\sigma y)$  za sve  $x, y \in S$ . Tada iz (1.25) slijedi

$$g(x+y) = g(x)g(y)$$

za sve  $x, y \in S$ . Dakle,  $g$  je eksponencijalna funkcija. Neka je  $h = g$ . Tada je  $2g(x) = h(x) + h(x)$ . Iz (1.28) slijedi da je  $h(x) = g(x) = g(\sigma x) = h(\sigma x)$ , pa je  $2g(x) = h(x) + h(\sigma x)$ , odnosno

$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2}$$

za svaki  $x \in S$ .

*Drugi slučaj.* Pretpostavimo da postoje  $x_0, y_0 \in S$  takvi da je

$$g(x_0 + y_0) - g(x_0 + \sigma y_0) \neq 0. \quad (1.29)$$

Neka je  $f: S \rightarrow \mathbb{F}$  funkcija zadana pravilom

$$f(x) = g(x + y_0) - g(x + \sigma y_0). \quad (1.30)$$

Tada iz (1.29) slijedi da je  $f(x_0) \neq 0$ . Iz (1.30) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(\sigma x) &= g(\sigma x + y_0) - g(\sigma x + \sigma y_0) \\ &= g(\sigma x + y_0) - g(\sigma(x + y_0)) \\ &= g(x + \sigma y_0) - g(x + y_0) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Dakle,  $f(x) = -f(\sigma x)$  pa je

$$f(x + \sigma y) = -f(\sigma(x + \sigma y)) = -f(\sigma x + y). \quad (1.31)$$

Daljnijim korištenjem (1.30) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) &= g(x + y + y_0) - g(x + y + \sigma y_0), \\ f(x + \sigma y) &= g(x + \sigma y + y_0) - g(x + \sigma y + \sigma y_0). \end{aligned}$$

Zbrajanjem prethodnih dviju jednakosti te korištenjem (1.25) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + f(x + \sigma y) &= g((x + y_0) + y) + g((x + y_0) + \sigma y) \\ &\quad - g((x + \sigma y_0) - y) + g((x + \sigma y_0) + \sigma y) \\ &= 2g(x + y_0)g(y) - 2g(x + \sigma y_0)g(y). \end{aligned}$$

Faktoriziranjem desne strane prethodne jednakosti dobivamo

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2g(y)[g(x + y_0) - g(x + \sigma y_0)].$$

Primjenom (1.30), prethodna jednakost postaje

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2f(x)g(y). \quad (1.32)$$

Zamjenom  $x$  i  $y$  u (1.32) slijedi

$$f(y + x) + f(y + \sigma x) = 2f(y)g(x). \quad (1.33)$$

Zbrajanjem (1.32) i (1.33) dobivamo

$$2f(x + y) + f(x + \sigma y) + f(\sigma x + y) = 2f(x)g(y) + 2f(y)g(x).$$

Primjenom (1.31) zaključujemo

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \quad (1.34)$$

za sve  $x, y \in S$ . Preostaje riješiti funkcijsku jednadžbu (1.34). Zapišimo  $f(x+t+y)$  kao  $f((x+t)+y)$  i  $f(x+(t+y))$ . Korištenjem (1.34) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+t+y) &= f(x+t)g(y) + f(y)g(x+t) \\ &= [f(x)g(t) + f(t)g(x)]g(y) + f(y)g(x+t), \\ f(x+t+y) &= f(x)g(t+y) + f(t+y)g(x) \\ &= f(x)g(t+y) + [f(t)g(y) + f(y)g(t)]g(x). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza, dobivamo

$$[g(x+t) - g(x)g(t)]f(y) = [g(t+y) - g(t)g(y)]f(x). \quad (1.35)$$

Neka je  $y = x_0$  i  $s(t) := f(x_0)^{-1}[g(t+x_0) - g(t)g(x_0)]$ . Tada (1.35) postaje

$$g(x+t) - g(x)g(t) = s(t)f(x). \quad (1.36)$$

Kako je lijeva strana ove jednadžbe simetrična po  $x$  i  $t$ , slijedi da je i desna pa vrijedi  $s(t)f(x) = s(x)f(t)$ . Uvrštavanjem  $x = x_0$  dobivamo  $s(t) = f(x_0)^{-1}s(x_0)f(t)$ . Kako je  $\mathbb{F}$  polje zatvoreno na kvadrate, postoji  $\alpha \in \mathbb{F}$  takav da vrijedi  $\alpha^2 = f(x_0)^{-1}s(x_0)$ , pa je  $s(t) = \alpha^2 f(t)$ . Zamjenom  $t$  sa  $y$  u jednadžbi (1.36), dobivamo

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g(x)g(y) + s(y)f(x) \\ &= g(x)g(y) + s(x)f(y) \\ &= g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Množenjem jednakosti (1.34) sa  $\alpha$  te dodavanjem i oduzimanjem od izraza (1.37), dobivamo:

$$\begin{aligned} g(x+y) + \alpha f(x+y) &= g(x)[g(y) + \alpha f(y)] + \alpha f(x)[g(y) + \alpha f(y)] \\ &= [g(x) + \alpha f(x)][g(y) + \alpha f(y)], \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} g(x+y) - \alpha f(x+y) &= g(x)[g(y) - \alpha f(y)] - \alpha f(x)[g(y) - \alpha f(y)] \\ &= [g(x) - \alpha f(x)][g(y) - \alpha f(y)]. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Neka je  $h_1(x) = g(x) + \alpha f(x)$  i  $h_2(x) = g(x) - \alpha f(x)$ . Iz (1.38) i (1.39) slijedi da su  $h_1$  i  $h_2$  rješenja funkcijske jednadžbe  $h(x+y) = h(x)h(y)$  za sve  $x, y \in S$ . Njihovim zbrajanjem dobivamo

$$g(x) = \frac{h_1(x) + h_2(x)}{2}.$$

Kako je

$$h_1(\sigma x) = g(\sigma x) + \alpha f(\sigma x) = g(x) - \alpha f(x) = h_2(x),$$

za  $h_1 = h$  dobivamo

$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2}.$$

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.26) u (1.25) dobivamo

$$\begin{aligned} g(x+y) + g(x+\sigma y) &= \frac{h(x+y) + h(\sigma(x+y))}{2} + \frac{h(x+\sigma y) + h(\sigma(x+\sigma y))}{2} \\ &= \frac{h(x)h(y) + h(\sigma x)h(\sigma y)}{2} + \frac{h(x)h(\sigma y) + h(\sigma x)h(y)}{2} \\ &= \frac{h(x)[h(y) + h(\sigma y)] + h(\sigma x)[h(y) + h(\sigma y)]}{2} \\ &= \frac{[h(x) + h(\sigma x)][h(y) + h(\sigma y)]}{2} \\ &= 2 \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2} \frac{h(y) + h(\sigma y)}{2} \\ &= 2g(x)g(y). \end{aligned}$$

Dakle, (1.26) je rješenje jednadžbe (1.25) čime smo završili dokaz teorema.  $\square$

O funkcijskoj jednadžbi  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , gdje je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , bit će više riječi u sljedećem poglavlju.

## 1.2 Opće rješenje d'Alembertove jednadžbe

Prije negoli odredimo opće rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe, definirajmo eksponencijalnu funkciju i dokažimo neka njena osnovna svojstva.

Kažemo da je funkcija  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalna ako vrijedi:

$$E(x+y) = E(x)E(y) \tag{1.40}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Ako je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalna funkcija različita od nul-funkcije, tada uvodimo oznaku:

$$E^*(y) = [E(y)]^{-1}$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$ .

**Propozicija 1.2.1.** *Ako je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalna funkcija i  $E(0) = 0$ , tada je  $E$  nul-funkcija.*

*Dokaz.* Uvrštavanjem  $y = 0$  u (1.40) dobivamo:

$$E(x) = E(x)E(0).$$

Kako je  $E(0) = 0$ , slijedi

$$E(x) = 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $E$  je nul-funkcija.  $\square$

**Propozicija 1.2.2.** *Neka je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalna funkcija. Ako  $E$  nije nul-funkcija, tada je  $E(0) = 1$ .*

*Dokaz.* Uvrštavanjem  $x = y = 0$  u (1.40), dobivamo

$$E(0)[1 - E(0)] = 0,$$

pa je

$$E(0) = 0 \quad \text{ili} \quad E(0) = 1.$$

Tvrdimo da je  $E(0) = 1$ . Pretpostavimo suprotno, odnosno da je  $E(0) = 0$ . Tada prema propoziciji 1.2.1 slijedi da je  $E$  nul-funkcija, što je kontradikcija. Dakle,  $E(0) = 1$ .  $\square$

**Propozicija 1.2.3.** *Neka je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalna funkcija. Ako je  $E(x_0) = 0$  za neki  $x_0 \neq 0$ , tada je  $E$  nul-funkcija.*

*Dokaz.* Neka je  $x \neq x_0 \in \mathbb{R}$ . Tada, zbog  $E(x_0) = 0$ , imamo

$$E(x) = E((x - x_0) + x_0) = E(x - x_0)E(x_0) = 0.$$

Dakle,  $E(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Propozicija 1.2.4.** *Neka je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalna funkcija. Ako  $E$  nije nul-funkcija, onda vrijedi*

$$E^*(-x) = E(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

*Dokaz.* Uvrštavanjem  $y = -x$  u (1.40), dobivamo

$$E(0) = E(x)E(-x).$$

Kako  $E$  nije nul-funkcija, iz propozicije 1.2.2 slijedi da je  $E(0) = 1$ , pa je

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)},$$

odnosno

$$E(-x) = E^*(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Zamjenom  $x$  i  $-x$  dobivamo

$$E^*(-x) = E(x)$$

čime smo dokazali propoziciju. □

**Propozicija 1.2.5.** *Neka je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalna funkcija. Ako  $E$  nije nul-funkcija, onda vrijedi:*

$$E^*(x+y) = E^*(x)E^*(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Dokaz.* Kako  $E$  nije nul-funkcija, prema propoziciji 1.2.3 slijedi da je  $E(x) \neq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Primjenom (1.40) dobivamo:

$$\begin{aligned} E^*(x+y) &= \frac{1}{E(x+y)} \\ &= \frac{1}{E(x)E(y)} = E^*(x)E^*(y) \end{aligned}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , čime smo dokazali propoziciju. □

Dokažimo sada jedno svojstvo d'Alembertove funkcijske jednadžbe.

**Propozicija 1.2.6.** *Svako rješenje različito od nule  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  d'Alembertove funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

*je parna funkcija.*

*Dokaz.* Zamjenom  $y$  sa  $-y$  u (DE), dobivamo:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(-y). \tag{1.41}$$

Iz (DE) i (1.41) slijedi

$$2f(x)f(y) = 2f(x)f(-y).$$

Kako  $f$  nije nul-funkcija, postoji  $x \in \mathbb{R}$  takav da je  $f(x) \neq 0$ , pa zaključujemo

$$f(y) = f(-y)$$

za sve  $y \in \mathbb{R}$ , odnosno  $f$  je parna funkcija. □

Sada ćemo odrediti opće rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe.

**Teorem 1.2.7.** *Nenul-funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  je rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (\text{DE})$$

*ako i samo ako je oblika*

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \quad (1.42)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija.

*Dokaz.* Neka je  $f$  netrivialno rješenje jednadžbe (DE), odnosno  $f$  nije nul-funkcija. Uvrštavanjem  $y = 0$  u (DE) dobivamo  $2f(x) = 2f(x)f(0)$ . Ako je  $f(0) = 0$ , tada je  $f(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , što je u kontradikciji s pretpostavkom da  $f$  nije nul-funkcija. Dakle,  $f(0) \neq 0$ . Uvrštavanjem  $x = y = 0$  u (DE) dobivamo  $f(0)[1 - f(0)] = 0$  iz čega slijedi:

$$f(0) = 1. \quad (1.43)$$

Uvrštavanjem  $x = y$  u (DE) dobivamo

$$f(2x) + f(0) = 2[f(x)]^2,$$

odnosno, primjenom (1.43) slijedi

$$f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1. \quad (1.44)$$

Zamjenom  $x$  sa  $x + y$  i  $y$  sa  $x - y$  u (DE) dobivamo

$$f(x+y+x-y) + f(x+y-x+y) = 2f(x+y)f(x-y),$$

odnosno

$$f(2x) + f(2y) = 2f(x+y)f(x-y). \quad (1.45)$$

Primjenom (1.45) i (1.44) dobivamo:

$$\begin{aligned} [f(x+y) - f(x-y)]^2 &= [f(x+y) + f(x-y)]^2 - 4f(x+y)f(x-y) \\ &= [2f(x)f(y)]^2 - 4f(x+y)f(x-y) \\ &= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 2[f(2x) + f(2y)] \\ &= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 2[2[f(x)]^2 - 1 + 2[f(y)]^2 - 1] \\ &= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 4[f(x)]^2 - 4[f(y)]^2 + 4 \\ &= 4\{[f(x)]^2 - 1\}\{[f(y)]^2 - 1\}, \end{aligned}$$

pa je

$$f(x+y) - f(x-y) = \pm 2\sqrt{\{[f(x)]^2 - 1\}\{[f(y)]^2 - 1\}}.$$

Zbrajanjem prethodne jednakosti s (DE), dobivamo

$$f(x+y) = f(x)f(y) \pm \sqrt{[f(x)]^2 - 1}[f(y)]^2 - 1},$$

pa je

$$[f(x+y) - f(x)f(y)]^2 = \{[f(x)]^2 - 1\}[f(y)]^2 - 1\}. \quad (1.46)$$

Sada ćemo promotriti dva različita slučaja s obzirom na vrijednost funkcije  $f$ :

(1)  $f(x) \in \{-1, 1\}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  ili (2) postoji  $x \in \mathbb{R}$  takav da  $f(x) \notin \{-1, 1\}$ .

*Prvi slučaj.* Pretpostavimo da je  $f(x) \in \{-1, 1\}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada prema (1.46) slijedi

$$[f(x+y) - f(x)f(y)]^2 = 0,$$

odnosno

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $f$  je eksponencijalna funkcija. Kako je  $f(x) \in \{-1, 1\}$ , to je

$$f^*(x) = f(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Dodavanjem  $f(x)$  na obje strane prethodne jednakosti, dobivamo

$$f^*(x) + f(x) = 2f(x),$$

pa je

$$f(x) = \frac{f(x) + f^*(x)}{2},$$

odnosno

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2},$$

gdje je  $E$  eksponencijalna funkcija sa svojstvom  $E(x) \in \{-1, 1\}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

*Drugi slučaj.* Pretpostavimo da postoji  $x_0 \in \mathbb{R}$  takav da  $f(x_0) \notin \{-1, 1\}$ , odnosno  $f(x_0)^2 \neq 1$ . Ako stavimo  $\alpha = f(x_0)$ , tada je  $\alpha^2 - 1 \neq 0$ . Neka je  $\beta \neq 0$  takav da vrijedi

$$\beta^2 = \alpha^2 - 1. \quad (1.47)$$

Sada definirajmo

$$\begin{aligned} E(x) &= f(x) + \frac{1}{\beta} [f(x+x_0) - f(x)f(x_0)] \\ &= \frac{1}{\beta} f(x+x_0) + \left[1 - \frac{1}{\beta} f(x_0)\right] f(x) \\ &= \frac{1}{\beta} f(x+x_0) + \left[\frac{\beta - f(x_0)}{\beta}\right] f(x) \\ &= \frac{1}{\beta} [f(x+x_0) + (\beta - \alpha)f(x)] \end{aligned} \quad (1.48)$$

za sve  $x \in \mathbb{R}$ .

Primjenom (1.46) i (1.47) dobivamo

$$\begin{aligned}
 [E(x) - f(x)]^2 &= \frac{1}{\beta^2} [f(x + x_0) - f(x)f(x_0)]^2 \\
 &= \frac{1}{\beta^2} [f(x)]^2 - 1 [f(x_0)]^2 - 1 \\
 &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2} [f(x)]^2 - 1 \\
 &= [f(x)]^2 - 1,
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

pa je

$$[E(x)]^2 - 2E(x)f(x) + [f(x)]^2 = [f(x)]^2 - 1,$$

odnosno

$$[E(x)]^2 - 2E(x)f(x) + 1 = 0.$$

Ako postoji  $x \in \mathbb{R}$  takav da je  $E(x) = 0$ , dobit ćemo  $1 = 0$ , što je kontradikcija. Dakle,  $E(x) \neq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa imamo

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{[E(x)]^2 + 1}{2E(x)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ E(x) + \frac{1}{E(x)} \right] \\
 &= \frac{E(x) + E^*(x)}{2}.
 \end{aligned}$$

Preostaje dokazati da je  $E$  eksponencijalna funkcija, odnosno da zadovoljava jednakost

$$E(x + y) = E(x)E(y).$$

Da bismo to dokazali, trebat će nam sljedeće jednakosti dobivene višestrukom primjenom (DE):

$$\begin{aligned}
 &2[f(x_0 + x)f(y) + f(x_0 + y)f(x)] \\
 &= f(x_0 + x + y) + f(x_0 + x - y) + f(x_0 + y + x) + f(x_0 + y - x) \\
 &= 2f(x_0 + x + y) + f[x_0 + (x - y)] + f[x_0 - (x - y)] \\
 &= 2f(x_0 + x + y) + 2f(x_0)f(x - y) \\
 &= 2f(x_0 + x + y) + f(x_0)[2f(x)f(y) - f(x + y)] \\
 &= 2\{f(x_0 + x + y) + \alpha[2f(x)f(y) - f(x + y)]\},
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned}
& 2f(x_0 + x)f(x_0 + y) \\
&= f(x_0 + x + x_0 + y) + f(x_0 + x - x_0 - y) \\
&= f[x_0 + (x_0 + x + y)] + f(x - y) \\
&= [2f(x_0)f(x_0 + x + y) - f(x_0 + x + y - x_0)] + [2f(x)f(y) - f(x + y)] \\
&= [2f(x_0)f(x_0 + x + y) - f(x + y)] + [2f(x)f(y) - f(x + y)] \\
&= 2[f(x)f(y) + \alpha f(x_0 + x + y) - f(x + y)]. \tag{1.51}
\end{aligned}$$

Sada, polazeći od (1.48), imamo:

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2} [f(x + x_0) + (\beta - \alpha)f(x)] [f(y + x_0) + (\beta - \alpha)f(y)] \\
&= \frac{1}{\beta^2} \{ f(x + x_0)f(y + x_0) + (\beta - \alpha)[f(x)f(y + x_0) + f(y)f(x + x_0)] \\
&\quad + (\beta - \alpha)^2 f(x)f(y) \}.
\end{aligned}$$

Odatle primjenom (1.51) i (1.50) dobivamo

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2} \{ f(x)f(y) + \alpha f(x_0 + x + y) - f(x + y) \\
&\quad + (\beta - \alpha)[f(x_0 + x + y) + 2\alpha f(x)f(y) - \alpha f(x + y)] + (\beta - \alpha)^2 f(x)f(y) \} \\
&= \frac{1}{\beta^2} \{ f(x)f(y)[(\beta - \alpha)^2 + 2\alpha(\beta - \alpha) + 1] \\
&\quad + \beta f(x_0 + x + y) - f(x + y)[1 + (\beta - \alpha)\alpha] \} \\
&= \frac{1}{\beta^2} [f(x)f(y)(\beta^2 - \alpha^2 + 1) + \beta f(x_0 + x + y) \\
&\quad + f(x + y)(\alpha^2 - 1 - \alpha\beta)].
\end{aligned}$$

Dalje, primjenom (1.47) i (1.48) dobivamo

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2} [\beta f(x_0 + x + y) + \beta(\beta - \alpha)f(x + y)] \\
&= \frac{1}{\beta} [f(x_0 + x + y) + (\beta - \alpha)f(x + y)] \\
&= E(x + y).
\end{aligned}$$

Dakle,  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  je eksponencijalna funkcija.

Ovime smo dokazali samo jedan smjer teorema. Suprotan smjer ćemo dokazati direktnim uvrštavanjem rješenja oblika  $f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}$  u (DE), koristeći propozicije 1.2.5 i

1.2.4:

$$\begin{aligned}
 f(x+y) + f(x-y) &= \frac{E(x+y) + E^*(x+y)}{2} + \frac{E(x-y) + E^*(x-y)}{2} \\
 &= \frac{E(x)E(y) + E^*(x)E^*(y) + E(x)E(-y) + E^*(x)E^*(-y)}{2} \\
 &= \frac{E(x)E(y) + E^*(x)E^*(y) + E(x)E^*(y) + E^*(x)E(y)}{2} \\
 &= \frac{E(x)[E(y) + E^*(y)] + E^*(x)[E^*(y) + E(y)]}{2} \\
 &= \frac{[E(x) + E^*(x)][E(y) + E^*(y)]}{2} \\
 &= 2f(x)f(y).
 \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi i obrat teorema. Ovime smo završili dokaz.  $\square$

**Korolar 1.2.8.** Funkcije  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu

$$g(x+y) + g(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (1.52)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , su oblika

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[E(x) + E^*(x)] \quad i \quad g(x) = \frac{\alpha^2}{2}[E(x) + E^*(x)]$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija i  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

*Dokaz.* Ako je  $f$  nul-funkcija, tada iz (1.52) slijedi

$$g(x+y) = -g(x-y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Uvrštavanjem  $y = 0$  dobivamo  $g(x) = -g(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , odnosno  $g$  je nul-funkcija. U nastavku pretpostavimo da  $f$  i  $g$  nisu nul-funkcije.

Uvrštavanjem  $y = 0$  u (1.52), dobivamo  $2g(x) = 2f(x)f(0)$ , odnosno

$$g(x) = \alpha f(x) \quad (1.53)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$  i  $\alpha = f(0)$ . Uvrštavanjem  $x = 0$  u (1.52), dobivamo  $g(y) + g(-y) = 2f(0)f(y)$ , odnosno

$$g(x) + g(-x) = 2\alpha f(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Uvrštavanjem u (1.53), slijedi

$$g(-x) = \alpha f(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Uspoređujući s (1.53), slijedi da je  $g$  parna funkcija, pa iz (1.53) zaključujemo da je i  $f$  parna funkcija.

Uvrštavanjem (1.53) u (1.52), dobivamo

$$\alpha f(x+y) + \alpha f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Ako je  $\alpha = 0$ , tada je  $f$  nul-funkcija, suprotno pretpostavci. Slijedi  $\alpha \neq 0$ , pa je

$$f(x+y) + f(x-y) = \frac{2}{\alpha} f(x)f(y).$$

Neka je  $h(x) = \frac{1}{\alpha} f(x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada je

$$\begin{aligned} h(x+y) + h(x-y) &= \frac{1}{\alpha} f(x+y) + \frac{1}{\alpha} f(x-y) = \frac{1}{\alpha} [f(x+y) + f(x-y)] \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2}{\alpha} f(x)f(y) = 2h(x)h(y). \end{aligned}$$

Prema teoremu 1.2.7,

$$h(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija. Dakle,

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} [E(x) + E^*(x)] \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{\alpha^2}{2} [E(x) + E^*(x)]$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . □

### 1.3 Prva i druga Cauchyjeva funkcijska jednadžba

U idućem poglavlju koristit ćemo rezultate sljedeća dva teorema koji daju neprekidna rješenja *prve (linearne) Cauchyjeve funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

i *druge (eksponencijalne) Cauchyjeve funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

**Teorem 1.3.1.** *Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1.54}$$

*za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Tada postoji konstanta  $c \in \mathbb{C}$  takva da je*

$$f(x) = cx \tag{1.55}$$

*za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Dokaz.* Uvrštavanjem  $x = y = 0$  u (1.54) dobivamo  $f(0) = 2f(0)$  iz čega slijedi da je

$$f(0) = 0. \quad (1.56)$$

Uvrštavanjem  $x = -y$  u (1.54) te primjenjujući (1.56) dobivamo

$$f(0) = f(x) + f(-x),$$

odnosno

$$f(-x) = -f(x) \quad (1.57)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Matematičkom indukcijom dokažimo da je

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \quad (1.58)$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Pretpostavimo da (1.58) vrijedi za neki  $n \in \mathbb{N}$ . Za  $n + 1$ , primjenom (1.54) i (1.58), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}) &= f((x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, (1.58) vrijedi za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Posebno, za  $x_i = x$  za svaki  $i$ , vrijedi

$$f(nx) = nf(x) \quad (1.59)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$ .

Neka je  $x = \frac{m}{n}z$ , gdje je  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  i  $z \in \mathbb{C}$ . Prema (1.59) tada imamo

$$f(mz) = nf\left(\frac{m}{n}z\right).$$

Ponovnom primjenom (1.59) dobivamo najprije  $mf(z) = nf\left(\frac{m}{n}z\right)$ , a zatim

$$\frac{m}{n}f(z) = f\left(\frac{m}{n}z\right).$$

Iz (1.57) slijedi

$$f\left(-\frac{m}{n}z\right) = -f\left(\frac{m}{n}z\right) = -\frac{m}{n}f(z).$$

Zaključujemo da vrijedi

$$f(qz) = qf(z)$$

za svaki  $z \in \mathbb{R}$  i  $q \in \mathbb{Q}$ . Posebno, za  $c = f(1)$  slijedi

$$f(q) = cq \tag{1.60}$$

za svaki  $q \in \mathbb{Q}$ .

Neka je  $r \in \mathbb{R}$ . Postoji niz racionalnih brojeva  $(q_n)$  takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = r.$$

Kako prema (1.60) vrijedi  $f(q_n) = cq_n$ , a  $f$  je neprekidna funkcija, imamo

$$f(r) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} cq_n = cr,$$

odnosno

$$f(x) = cx,$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $c \in \mathbb{C}$  proizvoljna konstanta, što nam daje rješenje (1.55). □

**Teorem 1.3.2.** *Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  neprekidna funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{1.61}$$

*za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ako  $f$  nije nul-funkcija, tada postoji konstanta  $c \in \mathbb{C}$  takva da je*

$$f(x) = e^{cx} \tag{1.62}$$

*za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Dokaz.* Ako je  $f(x_0) = 0$ , tada iz (1.61) slijedi

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , odnosno  $f$  je nul-funkcija što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Dakle,  $f(x) \neq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Kako prema (1.61) vrijedi  $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ , slijedi da je

$$f(x) > 0$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Znamo da eksponencijalna funkcija  $x \rightarrow e^x$  zadovoljava navedeno svojstvo i funkcijsku jednadžbu (1.61). Stoga definiramo funkciju  $f(x) = e^{g(x)}$ , gdje je

$$g(x) = \ln f(x). \tag{1.63}$$

Tada vrijedi

$$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y),$$

odnosno

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \tag{1.64}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Prema teoremu 1.3.1, rješenje jednadžbe (1.64) je funkcija oblika  $g(x) = cx$  gdje je  $c \in \mathbb{C}$  proizvoljna konstanta. Prema (1.63) slijedi da je

$$f(x) = e^{cx},$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $c \in \mathbb{C}$  proizvoljna konstanta. To nam daje rješenje (1.62). □

## Poglavlje 2

# Trigonometrijske funkcijske jednađžbe

### 2.1 Kosinus-sinus funkcijska jednađžba

**Propozicija 2.1.1.** *Ako funkcije  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zadovoljavaju funkcijsku jednađžbu*

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \quad (\text{KS})$$

*tada je  $f$  parna, a  $g$  neparna funkcija te vrijedi*

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

*za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Dokaz.* Zamjenom  $x$  i  $y$  u (KS) dobivamo

$$f(y-x) = f(y)f(x) + g(y)g(x)$$

odnosno

$$f(x-y) = f(y-x)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Odatle slijedi, uvrštavanjem  $y = 0$ ,

$$f(x) = f(-x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Dakle,  $f$  je parna funkcija. Zamjenom  $x$  sa  $-x$  te  $y$  sa  $-y$  u (KS) dobivamo

$$f(-x+y) = f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y). \quad (2.1)$$

Kako je  $f$  parna funkcija, iz (2.1) slijedi

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(-x)g(-y).$$

Usporedbom s (KS) dobivamo

$$g(x)g(y) = g(-x)g(-y) \quad (2.2)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Pretpostavimo da je  $g$  konstantna funkcija, odnosno da je  $g(x) = c$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada iz (KS) slijedi

$$f(x-y) = f(x)f(y) + c^2.$$

Zamjenom  $y$  sa  $-y$  i primjenom parnosti funkcije  $f$  dobivamo

$$f(x+y) = f(x)f(y) + c^2$$

pa slijedi  $f(x+y) = f(x-y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Neka su  $u, v \in \mathbb{R}$  proizvoljni. Tada je

$$f(u) = f\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = f(v),$$

pa je  $f$  konstantna funkcija. Kako je to u kontradikciji s našom pretpostavkom, zaključujemo da  $g$  nije konstantna funkcija. Odaberimo  $y_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $g(y_0) \neq 0$ . Uvrštavanjem  $y = y_0$  u (2.2), dobivamo

$$g(x) = cg(-x), \quad (2.3)$$

gdje je  $c = \frac{g(-y_0)}{g(y_0)} \neq 0$ . Tada je

$$g(x) = cg(-x) = c \cdot cg(-(-x)) = c^2g(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa slijedi da je  $c^2 = 1$ , odnosno  $c = 1$  ili  $c = -1$ . Pretpostavimo da je  $c = 1$ . Tada iz (2.3) slijedi

$$g(x) = g(-x),$$

odnosno  $g$  je parna funkcija. Zamjenom  $y$  sa  $-y$  u (KS) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) + g(x)g(y) \\ &= f(x-y) \end{aligned}$$

pa slijedi da je  $f$  konstantna funkcija što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Dakle,  $c = -1$ , odnosno  $g(x) = -g(-x)$  pa je  $g$  neparna funkcija.

Kako je  $g$  neparna funkcija, vrijedi

$$g(0) = 0.$$

Uvrštavanjem  $y = 0$  u (KS) dobivamo

$$f(x) = f(x)f(0) + g(x)g(0),$$

odnosno

$$f(x) = f(x)f(0).$$

Kako  $f$  nije konstantna funkcija, nije ni nul-funkcija, pa iz prethodnog izraza slijedi da je

$$f(0) = 1. \quad (2.4)$$

Uvrštavanjem  $y = x$  u (KS) te primjenom (2.4) dobivamo

$$f(0) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2,$$

odnosno

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . □

**Teorem 2.1.2.** *Ako su  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  funkcije koje za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (KS) i ako  $f$  nije konstantna funkcija, tada  $f$  zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (\text{DE})$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  te su  $f$  i  $g$  oblika

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \quad g(x) = k \frac{E(x) - E^*(x)}{2} \quad (2.5)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija, a  $k^2 = -1$ .

*Dokaz.* Iz propozicije 2.1.1 slijedi da je  $g$  neparna funkcija, a  $f$  parna funkcija. Zamjenom  $y$  sa  $-y$  u (KS) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) - g(x)g(y). \end{aligned}$$

Zbrajanjem s (KS) slijedi

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , to jest  $f$  zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu.

Prema teoremu 1.2.7 slijedi da je  $f$  oblika

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \quad (2.6)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija. Iz propozicije 2.1.1, primjenom propozicije 1.2.2, slijedi da je

$$\begin{aligned}
 [g(x)]^2 &= 1 - [f(x)]^2 = 1 - \left[ \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \right]^2 \\
 &= 1 - \frac{[E(x)]^2 + 2E(x)E^*(x) + [E^*(x)]^2}{4} \\
 &= \frac{4 - E(2x) - 2E(0) - E^*(2x)}{4} \\
 &= \frac{2 - E(2x) - E^*(2x)}{4} \\
 &= -\frac{E(2x) - 2E(0) + E^*(2x)}{4} \\
 &= -\frac{[E(x)]^2 - 2E(x)E^*(x) + [E^*(x)]^2}{4} \\
 &= -\left[ \frac{E(x) - E^*(x)}{2} \right]^2,
 \end{aligned}$$

pa je

$$g(x) = k \frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

gdje je  $k^2 = -1$ , što nam s (2.6) daje rješenje (2.5).  $\square$

**Teorem 2.1.3.** *Neprekidne funkcije  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  su rješenja funkcijske jednadžbe (KS) ako i samo ako su oblika*

$$f(x) = c, \quad g(x) = \sqrt{c(1-c)} \quad (2.7)$$

$$f(x) = c, \quad g(x) = -\sqrt{c(1-c)} \quad (2.8)$$

$$f(x) = \cos(\alpha x), \quad g(x) = \pm \sin(\alpha x), \quad (2.9)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje su  $c$  i  $\alpha$  proizvoljne konstante.

*Dokaz.* Neka je  $f(x) = c$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada iz (KS) slijedi

$$c = c^2 + g(x)g(y) \quad (2.10)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ako je  $g$  nul-funkcija, tada je  $c = 0$  ili  $c = 1$ .

Ako  $g$  nije nul-funkcija, tada iz (2.10) slijedi  $c - c^2 = g(x)g(y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , pa je  $c - c^2 = [g(x)]^2$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , odnosno  $g(x) = \sqrt{c(1-c)}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  ili  $g(x) = -\sqrt{c(1-c)}$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , što nam daje rješenja (2.7) i (2.8).

Kako  $f$  zadovoljava (DE), prema teoremu 1.1.1 slijedi da su preostala nekonstantna rješenja od (KS) oblika  $f(x) = \cos(\alpha x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$  ili  $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Ako je  $f = \cos(\alpha x)$ , tada iz propozicije 2.1.1 slijedi

$$[g(x)]^2 = 1 - \cos^2(\alpha x),$$

odnosno

$$g(x) = \pm \sin(\alpha x)$$

što nam daje rješenje (2.9). Ako je  $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$ , tada je  $|f(x)| = |\operatorname{ch}(\beta x)| \geq 1$ . Prema propoziciji 2.1.1 je  $|f(x)| \leq 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Slijedi  $|f(x)| = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa neprekidnost funkcije  $f$  povlači da je  $f$  konstantna funkcija, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Zaključujemo da  $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$  nije rješenje od (KS).

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (2.7) ili (2.8) u (KS), dobivamo

$$c = c^2 + (\sqrt{c(1-c)})^2 = c^2 + c(1-c) = c^2 + c - c^2 = c,$$

dakle (2.7) i (2.8) su rješenja od (KS). Uvrštavanjem (2.9) u (KS), dobivamo

$$f(x-y) = \cos(\alpha(x-y)) = \cos(\alpha x)\cos(\alpha y) + \sin(\alpha x)\sin(\alpha y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

pa je (2.9) rješenje od (KS). Ovime smo završili dokaz teorema.  $\square$

## 2.2 Sinus-kosinus funkcijska jednadžba

Funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \quad (\text{SK})$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , nazivamo *sinus-kosinus funkcijska jednadžba*. Odredimo njena rješenja.

**Teorem 2.2.1.** *Funkcije  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  su rješenja funkcijske jednadžbe (SK) ako i samo ako su  $f$  i  $g$  oblika:*

$$f(x) = 0 \text{ za svaki } x \in \mathbb{R} \quad i \quad g \text{ je proizvoljna funkcija,} \quad (2.11)$$

$$f(x) = A(x)E(x) \quad i \quad g(x) = E(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_2(x)}{2\alpha} \quad i \quad g(x) = \frac{E_1(x) + E_2(x)}{2} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aditivna funkcija,  $E_1, E_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  su eksponencijalne funkcije i  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

*Dokaz.* Lako se provjeri da je sa (2.11) dano rješenje funkcijske jednadžbe (SK). U nastavku pretpostavimo da  $f$  nije nul-funkcija.

Prema (SK), s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f(x + (y + z)) &= f(x)g(y + z) + f(y + z)g(x) \\ &= f(x)g(y + z) + [f(y)g(z) + f(z)g(y)]g(x) \\ &= f(x)g(y + z) + f(y)g(z)g(x) + f(z)g(y)g(x), \end{aligned} \quad (2.14)$$

a s druge

$$\begin{aligned} f((x + y) + z) &= f(x + y)g(z) + f(z)g(x + y) \\ &= f(x)g(y)g(z) + f(y)g(x)g(z) + f(z)g(x + y). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Izjednačavanjem (2.14) i (2.15) dobivamo

$$f(x)[g(y + z) - g(y)g(z)] = f(z)[g(x + y) - g(x)g(y)]. \quad (2.16)$$

Kako  $f$  nije nul-funkcija, postoji  $z_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $f(z_0) \neq 0$ . Uvrštavanjem  $z = z_0$  u (2.16) vidimo da je

$$g(x + y) - g(x)g(y) = f(x)l(y), \quad (2.17)$$

gdje je

$$l(y) = \frac{g(y + z_0) - g(y)g(z_0)}{f(z_0)}.$$

Zamjenom  $x$  i  $y$  u (2.17), dobivamo

$$g(x + y) - g(x)g(y) = f(y)l(x). \quad (2.18)$$

Sada iz (2.17) i (2.18) slijedi

$$f(x)l(y) = f(y)l(x)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Kako  $f$  nije nul-funkcija, postoji  $y_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $f(y_0) \neq 0$ . Tada je  $l(x) = \frac{l(y_0)}{f(y_0)}f(x)$ , odnosno

$$l(x) = \alpha^2 f(x) \quad (2.19)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $\alpha^2 = \frac{l(y_0)}{f(y_0)} \in \mathbb{C}$ . Uvrštavanjem (2.19) u (2.17), dobivamo

$$g(x + y) = g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y) \quad (2.20)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Iz (2.20) i (SK) dobivamo

$$\begin{aligned}
 g(x+y) + \alpha f(x+y) &= g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y) \\
 &\quad + \alpha f(x)g(y) + \alpha f(y)g(x) \\
 &= g(y)[g(x) + \alpha f(x)] + \alpha f(y)[g(x) + \alpha f(x)] \\
 &= [g(x) + \alpha f(x)][g(y) + \alpha f(y)],
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

a također i

$$\begin{aligned}
 g(x+y) - \alpha f(x+y) &= g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y) \\
 &\quad - \alpha f(x)g(y) - \alpha f(y)g(x) \\
 &= g(y)[g(x) - \alpha f(x)] + \alpha f(y)[g(x) - \alpha f(x)] \\
 &= [g(x) - \alpha f(x)][g(y) - \alpha f(y)].
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Neka je

$$\begin{aligned}
 g(x) + \alpha f(x) &= E_1(x), \\
 g(x) - \alpha f(x) &= E_2(x).
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Tada iz (2.21) i (2.22) slijedi

$$\begin{aligned}
 E_1(x+y) &= E_1(x)E_1(y), \\
 E_2(x+y) &= E_2(x)E_2(y),
 \end{aligned}$$

pa su  $E_1, E_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalne funkcije. Ako je  $\alpha = 0$ , tada je  $g =: E$  eksponencijalna funkcija. Kako  $f$  nije nul-funkcija, to ni  $E$  nije nul-funkcija. Propozicije 1.2.1 i 1.2.3 povlače  $E(x) \neq 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Iz (SK) slijedi

$$\frac{f(x+y)}{E(x+y)} = \frac{f(x)E(y) + f(y)E(x)}{E(x)E(y)} = \frac{f(x)}{E(x)} + \frac{f(y)}{E(y)} \tag{2.24}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Stavimo li

$$A(x) = \frac{f(x)}{E(x)}, \tag{2.25}$$

tada (2.24) postaje

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , pa je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aditivna funkcija. Iz (2.25) slijedi

$$f(x) = A(x)E(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , što nam daje rješenje (2.12).

Ako je  $\alpha \neq 0$ , tada oduzimanjem i zbrajanjem izraza iz (2.23) dobivamo

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_2(x)}{2\alpha} \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{E_1(x) + E_2(x)}{2}$$

što nam daje rješenje (2.13) jednadžbe (SK).  $\square$

**Napomena.** Ako je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  neparna funkcija i  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  parna funkcija, tada rješenje (2.11) otpada.

Ako  $f$  i  $g$  zadovoljavaju (2.12), tada je  $E(-x) = E(x)$  to jest  $[E(x)]^2 = 1$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Slijedi da je

$$E(x) = E\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \left[E\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 1$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa je

$$f(x) = A(x) \quad \text{i} \quad g(x) = 1$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Ako  $f$  i  $g$  zadovoljavaju (2.13), tada iz (2.23) slijedi

$$E_1^*(x) = E_1(-x) = g(-x) + \alpha f(-x) = g(x) - \alpha f(x) = E_2(x).$$

Tada rješenje (2.13) jednadžbe (SK) možemo pisati u obliku

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_1^*(x)}{2\alpha} \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{E_1(x) + E_1^*(x)}{2}.$$

## 2.3 Sinus funkcijska jednadžba

Funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2 \quad (\text{SE})$$

nazivamo *sinus funkcijska jednadžba*. Zamijenimo li  $x$  sa  $\frac{x}{2}$  i  $y$  sa  $\frac{y}{2}$ , iz (SE) slijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2.$$

Zamjenom  $x$  sa  $x+y$  i  $y$  sa  $x-y$  u prethodnoj jednakosti, dobivamo

$$f\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y-(x-y)}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2,$$

odnosno

$$f(x)f(y) = \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right]^2 - \left[ f\left(\frac{x-y}{2}\right) \right]^2 \quad (2.26)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , što je ekvivalentni zapis jednadžbe (SE).

Odredimo rješenja sinus funkcijske jednadžbe (SE) bez uvjeta na funkciju  $f$ .

**Teorem 2.3.1.** *Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zadovoljava sinus funkcijsku jednadžbu (SE) ako i samo ako je  $f$  oblika*

$$f(x) = A(x) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

$$f(x) = \beta[E(x) - E^*(x)] \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aditivna funkcija,  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija i  $\beta \in \mathbb{C}$ .

*Dokaz.* Lako se vidi da je  $f$  nul-funkcija rješenje jednadžbe (SE) koje je sadržano u (2.28) za  $\beta = 0$ . U nastavku pretpostavimo da  $f$  nije nul-funkcija. Iz toga slijedi da postoji  $x_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $f(x_0) \neq 0$ .

Neka je

$$h(x) = \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)}$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada je

$$\begin{aligned} 2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2} [f(x+x_0) - f(x-x_0)][f(y+x_0) - f(y-x_0)] \\ &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2} [f(x+x_0)f(y+x_0) - f(x-x_0)f(y+x_0) \\ &\quad - f(x+x_0)f(y-x_0) + f(x-x_0)f(y-x_0)] \end{aligned}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Raspišimo dobivene izraze na desnoj strani i grupirajmo tako da možemo primijeniti (SE):

$$\begin{aligned} 2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2} \left[ f\left(\frac{x+y}{2} + x_0 + \frac{x-y}{2}\right) f\left(\frac{x+y}{2} + x_0 - \frac{x-y}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} - x_0\right) f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} + x_0\right) \right. \\ &\quad \left. - f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} + x_0\right) f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} - x_0\right) \right. \\ &\quad \left. + f\left(\frac{x+y}{2} - x_0 + \frac{x-y}{2}\right) f\left(\frac{x+y}{2} - x_0 - \frac{x-y}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Primjenom (SE) dalje imamo

$$\begin{aligned}
 2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2} \left\{ \left[ f\left(\frac{x+y}{2} + x_0\right) \right]^2 - \left[ f\left(\frac{x-y}{2}\right) \right]^2 - \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right]^2 \right. \\
 &\quad + \left[ f\left(\frac{x-y}{2} - x_0\right) \right]^2 - \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right]^2 + \left[ f\left(\frac{x-y}{2} + x_0\right) \right]^2 \\
 &\quad \left. + \left[ f\left(\frac{x+y}{2} - x_0\right) \right]^2 - \left[ f\left(\frac{x-y}{2}\right) \right]^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2} \left\{ \left[ f\left(\frac{x+y}{2} + x_0\right) \right]^2 - \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right]^2 + \left[ f\left(\frac{x-y}{2} + x_0\right) \right]^2 \right. \\
 &\quad - \left[ f\left(\frac{x-y}{2}\right) \right]^2 - \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right]^2 + \left[ f\left(\frac{x+y}{2} - x_0\right) \right]^2 \\
 &\quad \left. - \left[ f\left(\frac{x-y}{2}\right) \right]^2 + \left[ f\left(\frac{x-y}{2} - x_0\right) \right]^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2} [f(x+y+x_0)f(x_0) + f(x-y+x_0)f(x_0) \\
 &\quad - f(x+y-x_0)f(x_0) - f(x-y-x_0)f(x_0)] \\
 &= \frac{1}{2f(x_0)} [f(x+y+x_0) + f(x-y+x_0) \\
 &\quad + f(x+y-x_0) - f(x-y-x_0)] \\
 &= h(x+y) + h(x-y).
 \end{aligned}$$

Dakle,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu

$$h(x+y) + h(x-y) = 2h(x)h(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Prema teoremu 1.2.7,

$$h(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \quad (2.29)$$

gdje je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija. Ako pretpostavimo da  $h$  nije nul-funkcija, tada iz propozicije 1.2.6 slijedi da je  $h$  parna funkcija.

Iz (2.26) slijedi da jednadžbu (SE) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$f(u)f(v) = \left[ f\left(\frac{u+v}{2}\right) \right]^2 - \left[ f\left(\frac{u-v}{2}\right) \right]^2$$

za sve  $u, v \in \mathbb{R}$ . Ako je  $f(y) \neq 0$ , tada je

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2f(y)} &= \frac{f(x+y)f(x_0) - f(x-y)f(x_0)}{2f(y)f(x_0)} \\
 &= \frac{\left[f\left(\frac{x+y+x_0}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x+y-x_0}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y+x_0}{2}\right)\right]^2 + \left[f\left(\frac{x-y-x_0}{2}\right)\right]^2}{2f(y)f(x_0)} \\
 &= \frac{\left[f\left(\frac{x+x_0+y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x+x_0-y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-x_0+y}{2}\right)\right]^2 + \left[f\left(\frac{x-x_0-y}{2}\right)\right]^2}{2f(y)f(x_0)} \\
 &= \frac{f(x+x_0)f(y) - f(x-x_0)f(y)}{2f(y)f(x_0)} \\
 &= \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)} = h(x).
 \end{aligned}$$

Slijedi

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)h(x). \quad (2.30)$$

Kako  $E$  nije nul-funkcija, iz propozicije 1.2.2 slijedi  $E(0) = 1$ , pa (2.29) povlači

$$h(0) = 1. \quad (2.31)$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  u (2.30) i primjenom (2.31), dobivamo

$$f(-y) = -f(y). \quad (2.32)$$

Tada iz (2.30) slijedi

$$f(y+x) + f(y-x) = 2f(y)h(x). \quad (2.33)$$

Zamjenom  $x$  i  $y$  u (2.33), dobivamo

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)h(y). \quad (2.34)$$

Zbrajanjem (2.33) i (2.34) te primjenom (2.32) dolazimo do

$$f(x+y) = f(x)h(y) + f(y)h(x) \quad (2.35)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Kako je  $f$  neparna, a  $h$  parna funkcija, prema napomeni iza teorema 2.2.1, postoje dvije mogućnosti za  $f$ :  $f$  je aditivna funkcija, što nam daje rješenje (2.27), ili

$$f(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2\alpha}, \quad (2.36)$$

gdje je  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija i  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Uvrštavanjem  $\beta = \frac{1}{2\alpha}$  u (2.36) dobivamo rješenje (2.28) jednadžbe (SE).  $\square$

**Teorem 2.3.2.** *Neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (SE) su oblika*

$$f(x) = ax, \quad (2.37)$$

$$f(x) = \beta \sin(bx) \quad (2.38)$$

$$f(x) = \beta \operatorname{sh}(cx) \quad (2.39)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje su  $a, b, c, \beta \in \mathbb{R}$  proizvoljne konstante.

*Dokaz.* Nul-funkcija je očito rješenje dane jednadžbe. U nastavku pretpostavimo da  $f$  nije nul-funkcija. Prema teoremu 2.3.1 tada slijedi da su rješenja dane jednadžbe jednog od sljedećih oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x), \\ f(x) &= \beta[E(x) - E^*(x)], \end{aligned} \quad (2.40)$$

gdje je  $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivna funkcija, a  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eksponencijalna funkcija. Kako je  $f$  neprekidna, prema teoremu 1.3.1 slijedi da su neprekidne aditivne funkcije oblika

$$f(x) = ax,$$

gdje je  $a \in \mathbb{R}$ , što nam daje rješenje (2.37).

Prema teoremu 1.3.2, neprekidne eksponencijalne funkcije su oblika

$$f(x) = e^{cx} \quad (2.41)$$

gdje je  $c \in \mathbb{C}$ . Uvrštavanjem (2.41) u (2.40) dobivamo

$$f(x) = \beta(e^{cx} - e^{-cx}). \quad (2.42)$$

Ako su  $c, \beta \in \mathbb{R}$ , zamjenom  $\beta$  sa  $\frac{\beta}{2}$  u (2.42) dobivamo

$$f(x) = \beta \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} = \beta \operatorname{sh}(cx)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$  što nam daje rješenje (2.39).

Ako  $c, \beta \notin \mathbb{R}$ , onda je  $c = a + bi$  i  $\beta = u + iv$ , pri čemu je  $b \neq 0$  i  $v \neq 0$ . Iz (2.42) tada slijedi

$$f(x) = (u + iv)(e^{(a+bi)x} - e^{-(a+bi)x}). \quad (2.43)$$

Kako vrijedi

$$\begin{aligned} e^{(a+bi)x} - e^{-(a+bi)x} &= e^{ax}e^{ibx} - e^{-ax}e^{-ibx} \\ &= e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) - e^{-ax}(\cos(bx) - i\sin(bx)) \\ &= \cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) + i\sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}), \end{aligned}$$

iz (2.43) dalje imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= u[\cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) + i \sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax})] \\ &\quad + iv[\cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) + i \sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax})] \\ &= u \cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) - v \sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}) \\ &\quad + i[u \sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}) + v \cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax})]. \end{aligned}$$

Kako je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , slijedi da je imaginarni dio dobivenog broja jednak nuli, odnosno

$$u \sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}) + v \cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) = 0. \quad (2.44)$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  u (2.44), dobivamo

$$v(e^{ax} - e^{-ax}) = 0 \Leftrightarrow e^{ax} = e^{-ax} \Leftrightarrow ax = -ax \Leftrightarrow a = 0.$$

Uvrštavanjem  $x = \frac{\pi}{2}$  u (2.44) te primjenjujući  $a = 0$ , dobivamo  $u = 0$ . Dakle,  $c = bi$  i  $\beta = vi$ . Slijedi

$$f(x) = \beta \sin(bx),$$

gdje je  $\beta = -2v \in \mathbb{R}$ , što nam daje rješenje (2.38). □

Dokažimo da *sinus funkcijska nejednadžba*

$$f(x+y)f(x-y) \leq [f(x)]^2 - [f(y)]^2$$

ima ista rješenja kao i sinus funkcijska jednadžba (SE).

**Teorem 2.3.3.** *Ako  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava funkcijsku nejednadžbu*

$$f(x+y)f(x-y) \leq [f(x)]^2 - [f(y)]^2 \quad (2.45)$$

*za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , tada je  $f$  rješenje sinus funkcijske jednadžbe (SE).*

*Dokaz.* Uvrstimo li  $x = y = 0$  u (2.45), slijedi da je  $[f(0)]^2 \leq 0$ , odnosno

$$f(0) = 0. \quad (2.46)$$

Uvrstimo li  $x = -y$  u (2.45), dobivamo

$$0 \leq [f(-y)]^2 - [f(y)]^2,$$

odnosno

$$[f(y)]^2 \leq [f(-y)]^2. \quad (2.47)$$

Zamjenom  $y$  i  $-y$ , dobivamo  $[f(-y)]^2 \leq [f(y)]^2$ . Ovo zajedno sa (2.47) daje

$$[f(-y)]^2 \leq [f(y)]^2 \leq [f(-y)]^2$$

pa je

$$[f(y)]^2 = [f(-y)]^2$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$ . Iz toga slijedi da je

$$f(-y) = -f(y) \quad \text{ili} \quad f(-y) = f(y).$$

Neka je  $y_0 \in \mathbb{R}$  takav da je

$$f(y_0) = f(-y_0). \quad (2.48)$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  i  $y = y_0$  u (2.45) te primjenom (2.46) dobivamo

$$f(y_0)f(-y_0) \leq -[f(y_0)]^2. \quad (2.49)$$

Uvrštavanjem (2.48) u (2.49), dobivamo

$$[f(y_0)]^2 \leq -[f(y_0)]^2,$$

odnosno

$$2[f(y_0)]^2 \leq 0$$

pa slijedi da je

$$f(y_0) = 0 \quad \text{i} \quad f(-y_0) = 0.$$

Ako je  $f(-y) = -f(y)$  za svaki  $y \in \mathbb{R}$ , tada iz (2.45) slijedi

$$[f(y)]^2 \leq [f(x)]^2 + f(x+y)f(y-x).$$

Zamjenom  $x$  i  $y$  dobivamo

$$[f(x)]^2 - [f(y)]^2 \leq f(x+y)f(x-y).$$

Ovo zajedno sa (2.45) povlači

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2.$$

Dakle,  $f$  je rješenje sinus funkcijske jednadžbe (SE). □

## 2.4 Poopćenje sinus funkcijske jednadžbe

U sljedećem teoremu dajemo opće rješenje funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y) \quad (\text{PS})$$

koja je poopćenje sinus funkcijske jednadžbe (SE).

**Teorem 2.4.1.** *Funkcije  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (PS) ako i samo ako vrijedi jedno od sljedećeg:*

$$f \text{ je nul-funkcija} \quad i \quad g \text{ je proizvoljna funkcija}, \quad (2.50)$$

$$f \text{ je proizvoljna funkcija} \quad i \quad g \text{ je nul-funkcija}, \quad (2.51)$$

$$f(x) = k \quad i \quad g(x) = A(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (2.52)$$

$$f(x) = A(x) + \delta \quad i \quad g(x) = \beta A(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (2.53)$$

$$f(x) = \gamma \frac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \quad i \quad g(x) = \beta \frac{E(x) - E^*(x)}{2} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \quad (2.54)$$

gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aditivna funkcija,  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija, a  $\beta, \delta, k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  i  $\gamma \in \mathbb{C}$  su proizvoljne konstante.

*Dokaz.* Lako se provjeri da funkcije  $f$  i  $g$  iz (2.50) do (2.54) zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (PS). U nastavku ćemo dokazati da su one jedina rješenja funkcijske jednadžbe (PS).

Pretpostavimo da je  $f$  konstantna funkcija,  $f(x) = k$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada iz (PS) slijedi

$$k[g(x-y) - g(x) + g(y)] = 0 \quad (2.55)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ako je  $k = 0$ , onda je  $g$  proizvoljna funkcija, što nam daje rješenje (2.50).

Ako je  $k \neq 0$ , tada iz (2.55) slijedi

$$g(x-y) = g(x) - g(y) \quad (2.56)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Uvrstimo li  $y = x$  u (2.56), vidimo da vrijedi  $g(0) = 0$ . Uvrštavanjem  $x = 0$  u (2.56), dobivamo

$$g(-y) = -g(y) \quad (2.57)$$

za svaki  $y \in \mathbb{R}$ . Zamjenom  $y$  i  $-y$  u (2.56), imamo

$$g(x+y) = g(x) - g(-y),$$

odnosno, primjenom (2.57),

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Dakle,  $g(x)=A(x)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aditivna funkcija. To nam daje rješenje (2.52).

Pretpostavimo da je  $g$  konstantna funkcija,  $g(x) = k$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada iz (PS) slijedi

$$k[f(x+y) - f(x) + f(y)] = 0 \quad (2.58)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ako je  $k = 0$ , onda je  $f$  proizvoljna funkcija pa dobivamo rješenje (2.51).

Ako je  $k \neq 0$ , tada iz (2.58) slijedi

$$f(x+y) = f(x) - f(y) \quad (2.59)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Uvrstimo li  $x = 0$  i  $y = 0$  u (2.59), vidimo da vrijedi  $f(0) = 0$ . Uvrštavanjem  $x = 0$  u (2.59), dobivamo  $f(y) = 0$  za svaki  $y \in \mathbb{R}$ , što znači da je ovo rješenje sadržano u (2.50).

U nastavku pretpostavimo da  $f$  i  $g$  nisu konstantne funkcije. Zamjenom  $x$  i  $y$  u (PS), dobivamo

$$f(x+y)g(y-x) = f(y)g(y) - f(x)g(x) \quad (2.60)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Zbrajanjem (PS) i (2.60) slijedi

$$f(x+y)g(x-y) = -f(x+y)g(y-x)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Kako  $f$  nije konstantna funkcija pa ni nul-funkcija, to postoji  $u_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $f(u_0) \neq 0$ . Neka je  $v \in \mathbb{R}$  proizvoljan. Za  $x = \frac{1}{2}(u_0 + v)$  i  $y = \frac{1}{2}(u_0 - v)$  imamo

$$f(u_0)g(v) = -f(u_0)g(-v)$$

odakle slijedi

$$g(-v) = -g(v).$$

Dakle,  $g$  je neparna funkcija.

Neka su funkcije  $s, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definirane sa

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \\ h(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Tada je  $s$  parna, a  $h$  neparna funkcija te vrijedi

$$f(x) = s(x) + h(x) \quad (2.61)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Uvrštavanjem (2.61) u (PS), dobivamo

$$\begin{aligned} [s(x+y) + h(x+y)]g(x-y) &= [s(x) + h(x)]g(x) - [s(y) + h(y)]g(y), \\ s(x+y)g(x-y) + h(x+y)g(x-y) &= s(x)g(x) - s(y)g(y) \\ &\quad + h(x)g(x) - h(y)g(y) \end{aligned} \quad (2.62)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Zamjenom  $x$  sa  $-x$  i  $y$  sa  $-y$  te primjenom svojstva parnosti funkcije  $s$  i neparnosti funkcija  $g$  i  $h$ , slijedi

$$\begin{aligned} -s(x+y)g(x-y) + h(x+y)g(x-y) &= -s(x)g(x) + s(y)g(y) \\ &\quad + h(x)g(x) - h(y)g(y). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Zbrajanjem (2.62) i (2.63), dobivamo

$$h(x+y)g(x-y) = h(x)g(x) - h(y)g(y) \quad (2.64)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Iz (2.62) i (2.64) slijedi

$$s(x+y)g(x-y) = s(x)g(x) - s(y)g(y) \quad (2.65)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Zamjenom  $y$  sa  $-y$  u (2.64), dobivamo

$$h(x-y)g(x+y) = h(x)g(x) - h(y)g(y)$$

što usporedbom sa (2.64) daje

$$h(x+y)g(x-y) = h(x-y)g(x+y).$$

Neka su  $u, v \in \mathbb{R}$  proizvoljni. Za  $x = \frac{1}{2}(u+v)$  i  $y = \frac{1}{2}(u-v)$  gornja jednakost prelazi u

$$h(u)g(v) = h(v)g(u).$$

Kako  $g$  nije konstantna funkcija, to postoji  $v_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $g(v_0) \neq 0$ . Za  $\alpha = \frac{h(v_0)}{g(v_0)} \in \mathbb{R}$  imamo

$$h(x) = \alpha g(x) \quad (2.66)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Dakle, razlikujemo dva slučaja s obzirom na vrijednost  $\alpha$ .

*Prvi slučaj.* Neka je  $\alpha \neq 0$ . Množenjem (2.64) sa  $\alpha$ , dobivamo

$$h(x+y)h(x-y) = h(x)^2 - h(y)^2. \quad (2.67)$$

Kako  $g$  nije konstantna funkcija, vrijedi da ni  $h$  nije konstantna funkcija. Tada je prema teoremu 2.3.1 rješenje jednadžbe (2.67) oblika

$$h(x) = A(x) \quad (2.68)$$

ili

$$h(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b}, \quad (2.69)$$

gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aditivna funkcija,  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija i  $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Sada iz (2.66) slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\alpha} A(x), \quad (2.70)$$

$$g(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b\alpha}. \quad (2.71)$$

Uvrštavanjem  $y = -x$  u (2.65) te primjenom neparnosti funkcije  $g$  i parnosti funkcije  $s$ , dobivamo

$$s(0)g(2x) = 2s(x)g(x) \quad (2.72)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Stavimo  $\delta = s(0)$ . Ako vrijedi (2.70), tada (2.72) povlači

$$\frac{\delta}{\alpha} A(2x) = 2s(x) \cdot \frac{1}{\alpha} A(x),$$

odakle zbog aditivnosti funkcije  $A$  slijedi  $s(x) = \delta$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Tada iz (2.61), (2.68) i (2.70) slijedi

$$f(x) = A(x) + \delta \text{ i } g(x) = \beta A(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , gdje je  $\beta = \frac{1}{\alpha}$ . Tako smo dobili rješenje (2.53).

Ako vrijedi (2.71), tada (2.72) povlači

$$\frac{\delta}{2b\alpha} (E(2x) - E^*(2x)) = 2s(x) \cdot \frac{E(x) - E^*(x)}{2b\alpha}.$$

Kako je  $E(2x) - E^*(2x) = [E(x)]^2 - [E^*(x)]^2 = [E(x) - E^*(x)][E(x) + E^*(x)]$ , odatle slijedi

$$s(x) = \delta \frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ .

Iz (2.61) i (2.69) tada slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{E(x) - E^*(x)}{2b} + \delta \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ &= \gamma \frac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \end{aligned}$$

gdje je  $\gamma = \frac{1}{b}$ , a iz (2.71) slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\delta b} \frac{E(x) - E^*(x)}{2} = \beta \frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

gdje je  $\beta = \frac{1}{b\delta}$ , što nam daje rješenja (2.54).

*Drugi slučaj.* Neka je  $\alpha = 0$ . Tada iz (2.66) slijedi da je  $h(x) = 0$  za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa iz (2.61) slijedi

$$f(x) = s(x) \quad (2.73)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Zamjenom  $y$  sa  $-x$  u (2.65) i primjenom parnosti funkcije  $s$  i neparnosti funkcije  $g$ , dobivamo

$$s(0)g(2x) = 2s(x)g(x)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Kako mora vrijediti  $s(0) \neq 0$ , slijedi

$$g(2x) = \frac{2}{\delta} s(x)g(x), \quad (2.74)$$

gdje je  $\delta = s(0)$ , odnosno

$$g(x) = \frac{2}{\delta} s\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right).$$

Tada vrijedi, primjenom (2.65) te parnosti funkcije  $s$  i neparnosti funkcije  $g$ ,

$$\begin{aligned} g(x+y)g(x-y) &= \frac{4}{\delta^2} \left[ s\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right)s\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right) \right] \\ &= \frac{4}{\delta^2} \left[ s\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right) \right] \left[ s\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right) \right] \\ &= \frac{4}{\delta^2} \left[ s\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right) - s\left(\frac{y}{2}\right)g\left(\frac{y}{2}\right) \right] \left[ s\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right) + s\left(\frac{y}{2}\right)g\left(\frac{y}{2}\right) \right] \\ &= \frac{4}{\delta^2} \left[ \left[ s\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 \left[ g\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 - \left[ s\left(\frac{y}{2}\right) \right]^2 \left[ g\left(\frac{y}{2}\right) \right]^2 \right] \\ &= [g(x)]^2 - [g(y)]^2 \end{aligned}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ . Prema teoremu 2.3.1,  $g$  je oblika

$$g(x) = \frac{1}{\alpha} A(x) \quad (2.75)$$

ili

$$g(x) = \frac{1}{\alpha b} \frac{E(x) - E^*(x)}{2}, \quad (2.76)$$

gdje je  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aditivna funkcija,  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eksponencijalna funkcija, a  $\alpha, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Iz (2.75) slijedi da je  $g(2x) = \frac{1}{\alpha} A(2x) = \frac{2}{\alpha} A(x)$  te izjednačavanjem s (2.74) slijedi

$$\frac{2}{\delta} s(x) \frac{1}{\alpha} A(x) = \frac{2}{\alpha} A(x),$$

odnosno

$$s(x) = \delta.$$

Sada iz (2.73) slijedi  $f(x) = \delta$  što je u kontradikciji s našom pretpostavkom.

Iz (2.76) slijedi da je  $g(2x) = \frac{1}{ab} \frac{E(2x) - E^*(2x)}{2}$ . Kako je  $E$  eksponencijalna funkcija, to vrijedi  $E(x + y) = E(x)E(y)$ , odakle slijedi  $g(2x) = \frac{1}{ab} \frac{[E(x)]^2 - [E^*(x)]^2}{2}$ . Izjednačavanjem s (2.74) dobivamo

$$\frac{2}{\delta} s(x) \frac{1}{ab} \frac{E(x) - E^*(x)}{2} = \frac{1}{ab} \frac{[E(x) - E^*(x)][E(x) + E^*(x)]}{2},$$

odnosno

$$\frac{2}{\delta} s(x) = E(x) + E^*(x),$$

pa je

$$s(x) = \delta \frac{E(x) + E^*(x)}{2}.$$

Sada iz (2.73) slijedi da je

$$f(x) = \delta \frac{E(x) + E^*(x)}{2},$$

što nam s (2.76) za  $\beta = \frac{1}{ab}$  daje rješenje sadržano u (2.54) za  $\gamma = 0$ .  $\square$

**Teorem 2.4.2.** *Neka je  $d \in \langle 1, \infty \rangle \subset \mathbb{R}$ . Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x)f(y) - d \sin x \sin y \quad (2.77)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  ako i samo ako je  $f$  oblika

$$f(x) = a \sin x + \cos x \quad (2.78)$$

ili

$$f(x) = -a \sin x + \cos x, \quad (2.79)$$

gdje je  $a = \sqrt{d - 1}$ .

*Dokaz.* Lako se provjeri da (2.78) i (2.79) zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (2.77). Preostaje dokazati da su to jedina rješenja funkcijske jednadžbe (2.77).

Prema (2.77), s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f((x + y) + z) &= f(x + y)f(z) - d \sin(x + y) \sin z \\ &= [f(x)f(y)f(z) - d \sin x \sin y f(z)] \\ &\quad - d \sin x \cos y \sin z - d \cos x \sin y \sin z, \end{aligned} \quad (2.80)$$

a s druge

$$\begin{aligned} f(x + (y + z)) &= f(x)f(y + z) - d \sin x \sin(y + z) \\ &= [f(x)f(y)f(z) - df(x) \sin y \sin z] \\ &\quad - d \sin x \sin y \cos z - d \sin x \cos y \sin z. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Izjednačavanjem (2.80) i (2.81) te dijeljenjem sa  $d \neq 0$ , dobivamo

$$\sin x \sin y f(z) + \cos x \sin y \sin z = f(x) \sin y \sin z + \sin x \sin y \cos z.$$

Uvrštavanjem  $y = z = \frac{\pi}{2}$ , slijedi

$$f(x) = \alpha \sin x + \cos x \quad (2.82)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$  i  $\alpha = f(\frac{\pi}{2})$ . Iz (2.82) slijedi

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \alpha \sin(x + y) + \cos(x + y) \\ &= \alpha \sin x \cos y + \alpha \cos x \sin y + \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{aligned} \quad (2.83)$$

a također i

$$\begin{aligned} f(x)f(y) - d \sin x \sin y &= (\alpha \sin x + \cos x)(\alpha \sin y + \cos y) - d \sin x \sin y \\ &= \alpha^2 \sin x \sin y + \alpha \cos x \sin y + \alpha \sin x \cos y \\ &\quad + \cos x \cos y - d \sin x \sin y. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Prema (2.77), izjednačavanjem (2.83) i (2.84) vrijedi

$$(-1 + d) \sin x \sin y = \alpha^2 \sin x \sin y,$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , odakle slijedi

$$\alpha^2 = d - 1.$$

Uvrštavanjem  $\alpha = a$  i  $\alpha = -a$  u (2.82), dobivamo (2.78) i (2.79). □

**Teorem 2.4.3.** *Neka je  $(S, +)$  komutativna polugrupa, a  $\mathbb{F}$  polje sa svojstvima:*

- (i)  $2x = 0$  ( $x \in \mathbb{F}$ ) povlači  $x = 0$ ,
- (ii) za svaki  $x \in \mathbb{F}$  postoji  $y \in \mathbb{F}$  takav da je  $y^2 = x$ .

*Neka je  $\sigma$  endomorfizam od  $S$  takav da vrijedi  $\sigma(\sigma x) = x$  za svaki  $x \in S$ . Funkcije  $f, g: S \rightarrow \mathbb{F}$ , koje nisu konstantne, zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + \sigma y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \quad (2.85)$$

za sve  $x, y \in S$ , ako i samo ako su jednog od oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2} \\ g(x) &= k \frac{t(x) - t(\sigma x)}{2}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= aE(x) \\ g(x) &= bE(x), \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= s(x) - s(x)A(x) \\ g(x) &= ks(x)A(x), \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - a)s(x) + as(x)h(x) \\ g(x) &= bs(x) - bs(x)h(x), \end{aligned} \quad (2.89)$$

za svaki  $x \in S$ , gdje su  $k, a, b \in \mathbb{F}$  takvi da je  $k^2 = -1$ ,  $a^2 + b^2 = a$ ,  $A: S \rightarrow \mathbb{F}$  aditivna funkcija,  $t, s, h, E: S \rightarrow \mathbb{F}$  rješenja funkcijske jednadžbe  $F(x + y) = F(x)F(y)$  za sve  $x, y \in S$ , te vrijedi  $A(\sigma x) = A(x)$ ,  $s(\sigma x) = s(x)$ ,  $s \neq 0$ ,  $h(\sigma x) = h(x)$  i  $E(\sigma x) = E(x)$  za svaki  $x \in S$ .

*Dokaz.* Zamjenom  $x$  i  $y$  u (2.85), dobivamo

$$f(y + \sigma x) = f(y)f(x) + g(y)g(x).$$

Izjednačavanjem sa (2.85) slijedi

$$f(x + \sigma y) = f(y + \sigma x)$$

za sve  $x, y \in S$ . Dakle,  $f(x + \sigma y) = f(\sigma(x + \sigma y))$  za sve  $x, y \in S$ , pa je

$$f(\sigma x) = f(x) \quad (2.90)$$

za svaki  $x \in S$ . Zamjenom  $x$  sa  $\sigma x$  te  $y$  sa  $\sigma y$  u (2.85), dobivamo

$$f(\sigma x + y) = f(\sigma x)f(\sigma y) + g(\sigma x)g(\sigma y).$$

Primjenom (2.90) dobivamo

$$f(x + \sigma y) = f(x)f(y) + g(\sigma x)g(\sigma y)$$

te usporedbom s (2.85) slijedi

$$g(x)g(y) = g(\sigma x)g(\sigma y) \quad (2.91)$$

za sve  $x, y \in S$ . Kako  $g$  nije konstantna funkcija, postoji  $y_0 \in S$  takav da  $g(y_0) \neq 0$  pa uvrštavanjem  $y = y_0$  u (2.91), dobivamo

$$g(x) = \alpha g(\sigma x), \quad (2.92)$$

gdje je  $\alpha = \frac{g(\sigma y_0)}{g(y_0)}$ . Iz (2.92) tada slijedi

$$g(\sigma x) = \alpha g(\sigma(\sigma x)) = \alpha g(x) = \alpha \cdot \alpha g(\sigma x),$$

odnosno

$$g(\sigma x) = \alpha^2 g(\sigma x)$$

za svaki  $x \in S$ , pa slijedi da je  $\alpha^2 = 1$ . Razlikujemo dva slučaja.

*Prvi slučaj.* Neka je  $\alpha = -1$ . Tada iz (2.92) slijedi

$$g(\sigma x) = -g(x) \quad (2.93)$$

za svaki  $x \in S$ . Zamjenom  $y$  sa  $\sigma y$  u (2.85), dobivamo

$$f(x + y) = f(x)f(\sigma y) + g(x)g(\sigma y),$$

odakle primjenom (2.90) i (2.93) slijedi

$$f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y).$$

Zbrajanjem sa (2.85) dobivamo

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2f(x)f(y) \quad (2.94)$$

za sve  $x, y \in S$ . Prema teoremu 1.1.4 slijedi da je rješenje funkcijske jednadžbe (2.94) dano sa

$$f(x) = \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2}, \quad (2.95)$$

gdje je  $t: S \rightarrow \mathbb{F}$  rješenje funkcijske jednadžbe  $t(x + y) = t(x)t(y)$  za sve  $x, y \in S$ .

Uvrštavanjem (2.95) u (2.85) dobivamo

$$\begin{aligned} g(x)g(y) &= f(x + \sigma y) - f(x)f(y) \\ &= \frac{t(x + \sigma y) + t(\sigma(x + \sigma y))}{2} - \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2} \cdot \frac{t(y) + t(\sigma y)}{2} \\ &= \frac{2t(x)t(\sigma y) + 2t(\sigma x)t(y)}{4} - \frac{t(x)t(y) + t(\sigma x)t(y) + t(x)t(\sigma y) + t(\sigma x)t(\sigma y)}{4} \\ &= \frac{t(x)t(\sigma y) + t(\sigma x)t(y) - t(x)t(y) - t(\sigma x)t(\sigma y)}{4} \\ &= -\left[ \frac{t(x) - t(\sigma x)}{2} \right] \left[ \frac{t(y) - t(\sigma y)}{2} \right] \end{aligned}$$

za sve  $x, y \in S$ . Uvrštavanjem  $y = x$  slijedi

$$[g(x)]^2 = -\left[\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2}\right]^2$$

pa je

$$g(x) = k \frac{t(x) - t(\sigma x)}{2},$$

gdje je  $k^2 = -1$  što nam daje rješenje (2.86).

*Drugi slučaj.* Neka je  $\alpha = 1$ . Tada iz (2.92) slijedi

$$g(\sigma x) = g(x) \tag{2.96}$$

za svaki  $x \in S$ . Zamjenom  $y$  sa  $\sigma y$  u (2.85), dobivamo

$$f(x + y) = f(x)f(\sigma y) + g(x)g(\sigma y),$$

te primjenom (2.90) i (2.96), slijedi

$$f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{2.97}$$

za sve  $x, y \in S$ .

Prema (2.97), s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f((x + y) + z) &= f(x + y)f(z) + g(x + y)g(z) \\ &= f(x)f(y)f(z) + g(x)g(y)f(z) + g(x + y)g(z), \end{aligned}$$

a s druge

$$\begin{aligned} f(x + (y + z)) &= f(x)f(y + z) + g(x)g(y + z) \\ &= f(x)f(y)f(z) + f(x)g(y)g(z) + g(x)g(y + z). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem desnih strana, dobivamo

$$g(x + y)g(z) - f(x)g(y)g(z) = g(x)g(y + z) - g(x)g(y)f(z). \tag{2.98}$$

Oduzimanjem  $g(x)f(y)g(z)$  s obje strane jednakosti, dobivamo

$$[g(x + y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)]g(z) = [g(y + z) - f(y)g(z) - f(z)g(y)]g(x)$$

za sve  $x, y \in S$ . Za  $z = z_0$ , obzirom da je  $g(z_0) \neq 0$ , imamo

$$g(x + y) - f(x)g(y) - f(y)g(x) = g(x)k(y), \tag{2.99}$$

gdje je  $k(y) = [g(z_0)]^{-1}[g(y + z_0) - f(y)g(z_0) - f(z_0)g(y)]$ .

Primjenom (2.99) u (2.98), dobivamo

$$g(z)[f(y)g(x) + g(x)k(y)] = g(x)[f(y)g(z) + g(y)k(z)],$$

odnosno

$$g(x)k(y)g(z) = g(y)k(z)g(x).$$

Kako  $g$  nije nul-funkcija, slijedi da je

$$k(y) = 2\alpha g(y), \quad (2.100)$$

gdje je  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Uvrštavanjem (2.100) u (2.99), dobivamo

$$g(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) + 2\alpha g(x)g(y)$$

za sve  $x, y \in S$ . Množenjem prethodnog izraza sa  $\lambda$  i zbrajanjem sa (2.97), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + \lambda g(x + y) &= f(x)f(y) + g(x)g(y) + \lambda f(x)g(y) \\ &\quad + \lambda g(x)f(y) + 2\alpha \lambda g(x)g(y). \end{aligned}$$

Proširimo li dobiveni izraz tako da možemo faktorizirati, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + \lambda g(x + y) &= f(x)f(y) + \lambda g(x)f(y) + \lambda f(x)g(y) + \lambda^2 g(x)g(y) \\ &\quad - \lambda^2 g(x)g(y) + g(x)g(y) + 2\alpha \lambda g(x)g(y) \\ &= [f(x) + \lambda g(x)][f(y) + \lambda g(y)] + g(x)g(y)[\lambda^2 - 2\lambda\alpha - 1]. \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je

$$f(x + y) + \lambda g(x + y) = [f(x) + \lambda g(x)][f(y) + \lambda g(y)] \quad (2.101)$$

ako i samo ako  $\lambda$  zadovoljava jednakost

$$\lambda^2 - 2\lambda\alpha - 1 = 0,$$

Neka je

$$s(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

odnosno

$$f(x) = s(x) - \lambda g(x). \quad (2.102)$$

Tada iz (2.101) slijedi da je  $s(x + y) = s(x)s(y)$  za sve  $x, y \in S$ . Uvrštavanjem (2.102) u (2.97), dobivamo

$$s(x + y) - \lambda g(x + y) = [s(x) - \lambda g(x)][s(y) - \lambda g(y)] + g(x)g(y),$$

odnosno

$$s(x)s(y) - \lambda g(x+y) = s(x)s(y) - \lambda g(x)s(y) - \lambda s(x)g(y) + \lambda^2 g(x)g(y) + g(x)g(y)$$

pa je

$$\lambda g(x+y) = \lambda g(x)s(y) + \lambda s(x)g(y) - (\lambda^2 + 1)g(x)g(y). \quad (2.103)$$

Ako je  $s$  nul-funkcija, tada iz (2.103) slijedi

$$g(x+y) = -\frac{(\lambda^2 + 1)g(x)g(y)}{\lambda} \quad (2.104)$$

za sve  $x, y \in S$ . Neka je

$$E(x) = -\frac{(\lambda^2 + 1)g(x)}{\lambda}. \quad (2.105)$$

Tada iz (2.104) slijedi

$$\begin{aligned} E(x+y) &= -\frac{(\lambda^2 + 1)g(x+y)}{\lambda} \\ &= -\frac{(\lambda^2 + 1)}{\lambda} \cdot (-1) \frac{(\lambda^2 + 1)g(x)g(y)}{\lambda} \\ &= E(x)E(y). \end{aligned}$$

Iz (2.105) slijedi

$$g(x) = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} E(x)$$

za svaki  $x \in S$ , odnosno  $g(x) = bE(x)$ , gdje je  $b = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$ . Kako je  $s$  nul-funkcija, iz (2.102) slijedi da je  $f(x) = -\lambda g(x)$  za svaki  $x \in S$ , pa je

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} E(x),$$

odnosno  $f(x) = aE(x)$ , gdje je  $a = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$ . Tada vrijedi

$$a^2 + b^2 = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + 1)^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + 1)^2} = \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 1)}{(\lambda^2 + 1)^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} = a.$$

To nam daje rješenje (2.87).

Ako  $s$  nije nul-funkcija, tada postoji  $x_0 \in S$  takav da je  $s(x_0) \neq 0$ . Kako je  $s(x+y) = s(x)s(y)$  za sve  $x, y \in S$ , to za svaki  $x \in S$  vrijedi

$$s(x_0) = s((x_0 - x) + x) = s(x_0 - x)s(x).$$

Ako postoji  $x \in S$  takav da je  $s(x) = 0$ , tada je  $s(x_0) = 0$ , što je kontradikcija. Dakle,  $s(x) \neq 0$  za svaki  $x \in S$ . Dijeljenjem jednadžbe (2.103) sa  $s(x+y)$ , dobivamo

$$\frac{\lambda g(x+y)}{s(x+y)} = \frac{\lambda g(x)}{s(x)} + \frac{\lambda g(y)}{s(y)} - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \left( \frac{\lambda g(x)}{s(x)} \right) \left( \frac{\lambda g(y)}{s(y)} \right). \quad (2.106)$$

Ako je  $\lambda^2 + 1 = 0$ , tada je

$$\frac{\lambda g(x+y)}{s(x+y)} = \frac{\lambda g(x)}{s(x)} + \frac{\lambda g(y)}{s(y)} \quad (2.107)$$

za sve  $x, y \in S$ . Neka je

$$A(x) = \frac{\lambda g(x)}{s(x)},$$

odnosno

$$g(x) = \frac{s(x)A(x)}{\lambda}. \quad (2.108)$$

Iz (2.107) slijedi da je  $A: S \rightarrow \mathbb{F}$  aditivna funkcija. Uvrštavanjem (2.108) u (2.102), dobivamo

$$f(x) = s(x) - s(x)A(x),$$

što nam sa (2.108) daje rješenje (2.88) za  $k = \frac{1}{\lambda}$ . Kako je  $\lambda^2 + 1 = 0$ , slijedi da je  $k^2 = -1$ .

Neka je  $\lambda^2 + 1 \neq 0$ . Definirajmo

$$h(x) = 1 - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \left( \frac{\lambda g(x)}{s(x)} \right). \quad (2.109)$$

Iz (2.106) tada slijedi

$$h(x+y) = h(x)h(y)$$

za sve  $x, y \in S$ . Iz (2.109) slijedi

$$h(x) - 1 = -\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \cdot \frac{g(x)}{s(x)},$$

odnosno

$$h(x) - 1 = \frac{g(x)}{bs(x)},$$

gdje je  $b = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$ , pa je

$$g(x) = bs(x)h(x) - bs(x).$$

Ako je  $a = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$ , tada je  $-\lambda b = a$  te iz (2.102) slijedi da je

$$f(x) = s(x) - \lambda bs(x)h(x) + \lambda bs(x),$$

odnosno

$$f(x) = (1 + a)s(x) + as(x)h(x).$$

Kako također vrijedi  $a^2 + b^2 = a$ , imamo rješenje (2.89).

Preostaje dokazati da vrijedi  $s(\sigma x) = s(x)$ ,  $h(\sigma x) = h(x)$  i  $E(\sigma x) = E(x)$  za svaki  $x \in S$ .

Primjenom (2.102), (2.90) i (2.96), imamo

$$s(\sigma x) = f(\sigma x) + \lambda g(\sigma x) = f(x) + \lambda g(x) = s(x)$$

za svaki  $x \in S$ .

Kako vrijedi  $s(\sigma x) = s(x)$  za svaki  $x \in S$ , primjenom (2.109) i (2.96), imamo

$$h(\sigma x) = 1 - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \left( \frac{\lambda g(\sigma x)}{s(\sigma x)} \right) = 1 - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \left( \frac{\lambda g(x)}{s(x)} \right) = h(x)$$

za svaki  $x \in S$ .

Primjenom (2.105) i (2.96), imamo

$$E(\sigma x) = -\frac{(\lambda^2 + 1)g(\sigma x)}{\lambda} = -\frac{(\lambda^2 + 1)g(x)}{\lambda} = E(x)$$

za svaki  $x \in S$ . Ovime smo završili dokaz teorema.

□

# Bibliografija

- [1] C. Efthimiou, Introduction to functional equations, MSRI Mathematical Circles Library 6, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [2] P. Kannappan, Functional equations and inequalities with applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.
- [3] P.K. Sahoo, P. Kannappan, Introduction to functional equations, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.
- [4] C.G. Small, Functional equations and how to solve them, Problem Books in Mathematics, Springer, New York, 2007.

# Sažetak

Trigonometrijski identiteti vode do takozvanih trigonometrijskih funkcijskih jednažbi čija rješenja uključuju i neke druge funkcije osim trigonometrijskih. U ovom radu su dana opća i neprekidna rješenja d'Alembertove funkcijske jednažbe

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

kosinus-sinus funkcijske jednažbe

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y),$$

sinus-kosinus funkcijske jednažbe

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

sinus funkcijske jednažbe

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2$$

i poopćene sinus funkcijske jednažbe

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y).$$

# Summary

Trigonometric identities lead to the so-called trigonometric functional equations whose solutions include some other functions besides trigonometric. In this thesis are given general and continuous solutions of the d'Alembert functional equation

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

the cosine-sine functional equation

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y),$$

the sine-cosine functional equation

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

the sine functional equation

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2$$

and a generalization of the sine functional equation

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y).$$

# Životopis

Rođena sam 17.2.1993. u Varaždinu gdje sam pohađala Prvu osnovnu školu. Nastavila sam školovanje 2007. godine na Drugoj gimnaziji Varaždin, opći smjer. U srednjoj školi sam stekla veći interes za matematiku, te sam odlučila upisati nastavnički smjer Matematičkog odsjeka na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2011. godine. Oduvijek sam imala interes za poučavanjem i prenošenjem vlastitog znanja na druge, zbog čega sam 2014. godine upisala i diplomski studij istoga smjera.