Sintetička dimenzija u posebno skrojenoj fotoničkoj strukturi

Bosnar, Mihovil

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:429861

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Mihovil Bosnar

SINTETIČKA DIMENZIJA U POSEBNO SKROJENOJ FOTONIČKOJ STRUKTURI

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: Istraživački smjer fizike

Mihovil Bosnar

Diplomski rad

Sintetička dimenzija u posebno skrojenoj fotoničkoj strukturi

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem se prof. dr. sc. Hrvoju Buljanu na pomoći i diskusijama vezanim za problem. Također, zahvaljujem se mag. phys. Teni Dubček i doc. dr. sc. Robertu Pezeru na pomoći pri kodiranju te Tihani Bosnar na slikama sustava koje je napravila.

Sažetak

Diplomski rad bavi se diskretnim sustavima koji mogu imati dimenziju veću od kontinuiranog prostora u kojem se nalaze. Ovo svojstvo pokazano je na jednostavnim matematičkim primjerima te su dobiveni uvjeti potrebni da se ono ostvari. Dobiveni uvjeti su zatim povezani s elektrodinamikom rešetke valovoda te je uočeno da je vezanje valovoda potrebno učiniti jako ovisnim o međusobnom položaju valovoda. Ovakvo ponašanje vezanja valovoda pokušali smo ostvariti modifikacijom presjeka svakog valovoda u kvadratnoj rešetci valovoda s dva elementa u bazi, u čijem bi presjeku time ostvarili dvosloj kvadratnih rešetki. Usporedbom vrpci dobivenih numeričkim rješavanjem jednadžbi koje opisuju dani sustav te vrpci dobivenih u ekvivalentu aproksimacije čvrste veze iz fizike čvrstog stanja koje opisuju dvosloj pokazano je da pothvat nije uspio jer se vezu između valovoda, za dane parametre, ne može učiniti dovoljno prostorno ovisnom. Na kraju su izložene neke ideje koje bi se dalje mogle koristiti u pokušaju realizacije traženog dvosloja.

Synthetic dimension in specially tailored photonic structure

Abstract

In this thesis we examine the property of discrete systems that their dimension can be greater than the dimension of the continous space they are embedded in. This property is shown in simple mathematical examples and the conditions to achieve it are uncovered. These conditions are recast in the language of electrodynamics of wavegude array and are shown to require strong dependance of the coupling of waveguides on their relative position. An attempt to satisfy this requirement is made by modifying the cross section of each waveguide in a square lattice of waveguides with two elements in the basis, so that the lattice would become a bilayer of square lattices instead of a twodimensional lattice. A comparison of bands calculated numerically for a given array and those determined approximately for the bilayer by method based on the tight binding approximation of solid state physics shows that the attempt is unsuccesful because the modification of the cross section of a waveguide, under the given parameters, does not produce strong enough effect on spatial dependence of coupling. Some further ideas which could be used to realise the bilayer in the cross section of waveguide array are given.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Dimenzionalnost diskretnih sustava **2**

3 Elektrodinamika sustava vezanih dielektričnih valovoda **5**

3.1 Rešetka valovoda u paraaksijalnoj aproksimaciji Maxwellovih jednadžbi 5

3.2 Svojstvena stanja sustava 8

3.3 Aproksimacija čvrste veze (TBA) 10

4 Kvadratna rešetka cilindričnih valovoda s bazom **13**

5 Rešetka križnih valovoda **17**

6 Kvadratna rešetka s bazom povezana kanalićima **19**

7 Zaključak **21**

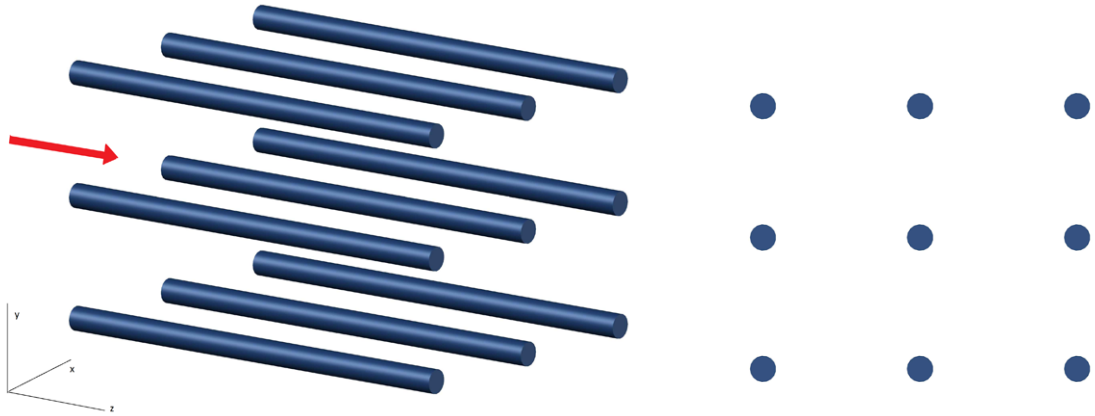
Dodaci **22**

A Dijagonalizacija jednog valovoda **22**

B Usporedba TBA modela i numeričkog rješenja **27**

1 Uvod

Promatrat će se dielektrični sustav pune translacijske simetrije u jednom smjeru (neka je to smjer z), a reducirane translacijske simetrije u ravnini okomitoj na smjer z (neka je to x-y ravnina) prikazan na slici 1.1a. Obično se periodička struktura presjeka koristi za usmjereno vođenje svjetlosti preko velikih udaljenosti, dakle kao valovod, zbog procjepa u spektru kao poslijedice difrakcije na periodičkoj strukturi koji onemogućuje širenje svjetlosti u x-y ravnini [1].



(a) Promatrani sustav (b) Presjek sustava u x-y ravnini

Slika 1.1

Međutim, sada od interesa nije korištenje periodične strukture dielektrika da se postigne usmjereno vođenje svjetlosti nego konstrukcija rešetke valovoda, u stvari periodički raspoređenih područja višeg indeksa loma, u u kojoj će dolaziti do sporog prelaska svjetlosti između valovoda tijekom puta u z smjeru tako da je presjek (okomit na z) tog sustava fotonička rešetka (slika 1.1b; tamnoplave točke su područja višeg indeksa loma). Pokazat ćemo da diskretni sustavi kao što je to rešetka mogu imati dimenzionalnost veću od kontinuiranog prostora u kojem se nalaze pa govorimo o sintetičkoj dimenzijii diskretnog sustava [3]. Zatim će se taj formalizam povezati s opisom sustava u teoriji klasične elektrodinamike. Pritom ćemo vidjeti da jednadžba koja opisuje propagaciju svjetlosti odgovara vremenski ovisnoj Schrödingerovoj jednadžbi što znači da bi se ovakav sustav mogao koristiti za simulaciju evolucije valne funkcije u periodičkom potencijalu. Naposlijetku će se pokušati konstruirati rešetka koja ima svojstvo da se presjek pronaša kao dvosloj kvadratnih fotoničkih rešetki.

2 Dimenzionalnost diskretnih sustava

Diskretne sustave kao što je to rešetka u matematici proučava teorija grafova. Matematički, graf je sustav koji se sastoji od točaka, vrhova, povezanih crtama, bridovima. U modeliranju konkretnih sustava, teoriji mreža, vrhovima se mogu pridijeliti razni pojmovi, a bridovi predstavljaju njihove veze. Na primjer, računala mogu biti povezana u mreže kao što su to prsten ili zvijezda pa model računalne mreže prikazuje računala vrhovima, dok bridovi označavaju njihovu povezanost. U kristalnoj rešetci vrhovi su pak atomi, ioni i molekule koje se ponavljaju, dok su bridovi označavaju tuneliranja elektrona. Ako kristalna rešetka ima po jedan element u bazi, zajedničko svojstvo ova dva grafa je da je veza između dva vrha jednaka u oba smjera ili, matematički, neusmjerenost, a inače je rešetka usmjerena. Kristalna rešetka se od drugih grafova razlikuje po osnovnom svojstvu rešetki općenito; ona posjeduje reduciranu translacijsku simetriju i moguće neke dodatne simetrije, kao što je to rotacijska, koje je precrtavaju u nju samu - prostornu grupu simetrija. Tako se matematički rešetka opisuje kao neusmjereni graf s prostornom grupom.

Dimenzija diskretnog sustava d može se definirati i izračunati na više načina, a jedan od njih je promatranje kako se volumen skalira s udaljenošću. Razmotrimo ovaj problem u prostoru $\mathcal{R}^d$. Poznato je da je volumen unutar udaljenosti R od neke točke (*duljina*) u jednodimenzionalnom prostoru proporcionalan s R, u dvodimenzionalnom (*površina*) s R^2, a u trodimenzionalnom (*volumen*) s R^3. Ako bi se udaljenost pomnožila s nekim brojem λ (udaljenost bi se skalirala), onda bi se volumen u jednodimenzionalnom prostoru promijenio λ puta, u dvodimenzionalnom λ^2 puta, a trodimenzionalnom λ^3 puta. U d-dimenzionalnom prostoru volumen je volumen d-dimenzionalne sfere:

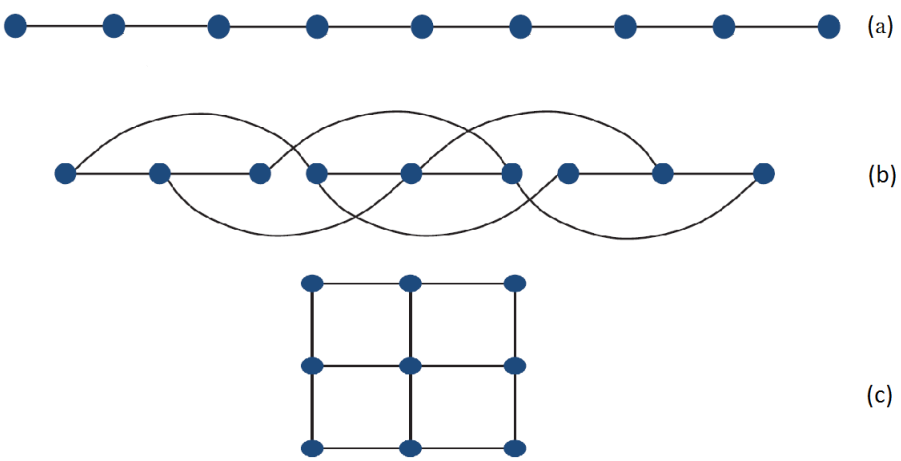
$$V \sim R^d \tag{2.1}$$

U diskretnom sustavu kao analogon volumenu unutar neke udaljenosti l od vrha promatra se broj vrhova $N(l)$ do kojeg se može doći prelaskom $l-1$ bridova od tog vrha [2]. Za $l \to \infty$ analogno kontinuiranom sustavu vrijedi [3]:

$$N(l) \sim l^d$$

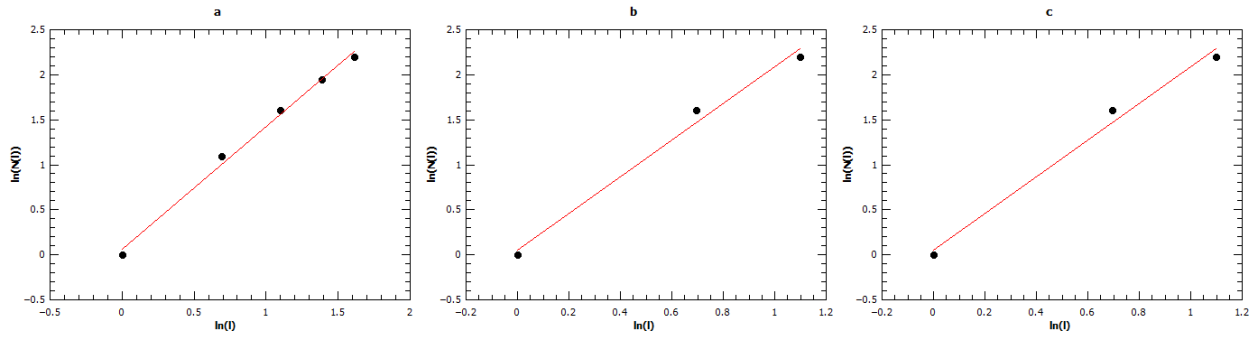
Ako se odredi $N(l)$ za mnogo vrijednosti l, može se odrediti dimenzionalnost diskretnog sustava kao vodeći koeficijent u linearnoj prilagodbi na podatke $\ln(N) - \ln(l)$. Odabir početnog vrha je proizvoljan i za najbolje rezultate trebalo bi uzeti srednju vrijednost $N(l)$ za dani l preko svih mogućih početnih vrhova.

Ilustrirajmo sad svojstvo diskretnih sustava da mogu imati dimenziju različitu od dimenzije kontinuiranog prostora u kojem se nalaze na jednostavnom primjeru grafova prikazanih na slici 2.1.



Slika 2.1: Grafovi. Slika je preuzeta iz [3]

Izabran je jedan vrh, peti u sustavima (a) i (b) te drugi u drugom redu u sustavu (c). l se uzima od 1 do broja potrebnog da se dosegne sve vrhove sustava; u slučaju (a) $l_{max} = 5$, a u sustavima (b) i (c) $l_{max} = 3$. Za svaki l se izračuna pripadni N te logaritam oba broja. Rezultati su prikazani grafički na slici 2.2. Dimenzija se odredi kao vodeći koeficijent pravca regresije, prikazan crvenom linijom na slici 2.2.



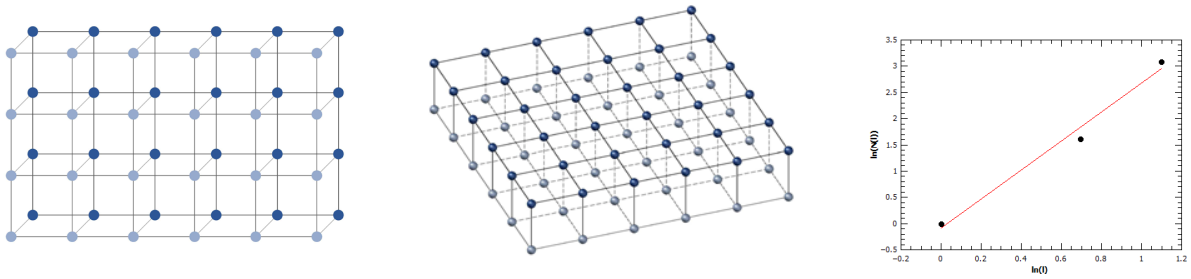
(a) $d = 1.36 \pm 0.06$ (b) $d = 2.0 \pm 0.2$ (c) $d = 2.0 \pm 0.2$

Slika 2.2: Ovisnost $\ln(N(l))$ o $\ln(l)$ za sustave (a), (b) i (c). Crne točke su podatci, a crvena linija je pravac regresije. Ispod svakog grafa naveden je koeficijent smjera, odnosno dimenzionalnost sustava

Sustav (a) je otprilike - bolji rezultat bi se dobio za usrednjene podatke te beskonačnu rešetku - jednodimenzionalan, a sustavi (b) i (c) su dvodimenzionalni. Rezultat nije iznenađujuć za sustave (a) i (c) s obzirom da se nalaze redom na pravcu i u ravnini, ali sustav (b) se nalazi na pravcu i dvodimenzionalan je. Može se zaključiti da dimenzionalnost ne predstavlja samo geometriju sustava, nego i njegovu složenost,

budući da je rezultat za sustav (b) poslijedica netrivijalne povezanosti vrhova - neki prvi susjedi nisu vezani, a neki treći jesu.

Promotrimo sada dvodimenzionalnu rešetku na slici 2.3a. Ako bi se vrhovi povezali kao na slici, dobiveni sustav bi odgovarao dvosloju kakav je prikazan na slici 2.3b istim postupkom kao i prije možemo utvrditi da je dimenzija otprilike 3 (slika 2.3c). Ako bismo željeli takav sustav konstruirati u presjeku rešetke valovoda prvo bi trebalo naći materijal u kojem su maksimumi indeksa loma na mjestima u rešetci na slici 2.3a, a zatim pokazati da su bridovi upravo takvi kakvi su označeni na istoj slici. Da se to pokaže, prvo je potrebno matematičkim pojmovima vrha i brida pridružiti fizikalno značenje iz teorije elektrodinamike.



(a) (b) (c) $d = 2.8 \pm 0.45$

Slika 2.3: (a) Prikaz veza potrebnih da kvadratna rešetka s bazom postane ekvivalentna dvosloju (b) Dvosloj rezonatora (c) Linearna prilagodba na podatke $\ln(N)$ - $\ln l$ za $l = 1, 2, 3$

3 Elektrodinamika sustava vezanih dielektričnih valovoda

Promotrimo sustav dielektričnih valova reducirane translacijske simetrije u x-y ravnini kakav je prikazan na slici 1.1. Temeljno svojstvo valovoda općenito usmjereno vođenje svjetlosti, što se postiže tako da se valovodi načine od materijala većeg indeksa loma od okolnog prostora pa na njihovoj granici dolazi do totalne unutarnje refleksije ili pak tako da im presjek bude periodična struktura koja vodi na vrpčastu strukturu disperzijske relacije pa se svjetlost odgovarajućih frekvencija ne može propagirati u x-y ravnini [1]. Obije izvedbe imaju zajedničko da u x-y ravnini električno polje određenih frekvencija ima evanescentno ponašanje, dok se u z smjeru val slobodno propagira bez atenuacije. No, ako bi se dovoljno blizu, na skali opadanja evanescentnih valova, postavio drugi valovod evanescentni valovi u x-y ravnini mogli bi pobuditi njegove modove te bi energija tekla između njih.
U eksperimentu se promatra širenje svjetlosti sustavom tako da je prirodno valovodima pridružiti vrhove, jer je svjetlost tamo lokalizirana, a bridovi će biti njihove veze, izmjene energije izmedju valovoda. Prijelazi energije općenito nisu jednaki između svih valvoda te će se zato svakom bridu pridružiti težina, veličina koja opisuje prijenos energije. Da dobijemo tu veličinu treba se detaljnije promotriti elektrodinamiku sustava.

3.1 Rešetka valovoda u paraaksijalnoj aproksimaciji Maxwellovih jednadžbi

Za eksperimentalno ostvarivanje rešetke valovoda mogu se koristiti, između ostalog, fotorefraktivni materijali. To su materijali koji u elektronskoj strukturi osim vrpci imaju i nivoe zamke u procjepima. Ako bi se na takvom materijalu napravila interferencijska slika pomoću svjetlosti frekvencije procjepa, do pobuđivanja elektrona iz vodljive u valentnu vrpcu dolazilo bi pretežno u svjetlim zonama dok bi u tamnim zonama dominantna bila rekombinacija. Elektroni u vodljivoj vrpci difundiraju iz svjetlih zona u tamne i tamo se rekombiniraju s nivoima zamkama jer je valentna vrpca puna. Nakon gašenja svjetlosti ostaje raspodjela naboja koja odgovara interferencijskoj slici te se preslikava u istu prostornu ovisnost dielektične funkcije, odnosno indeksa loma. Uobičajne vrijednosti varijacije indeksa loma su ispod jedan posto indeksa loma materijala od kojeg se kreće, a period rešetke je uobičajno reda veličine desetak mikrometara. Da bi se dobila rešetka valovoda interakcijska slika mora biti takva da se periodički pojavljuju područja višeg indeksa loma u kojima će se svjetlost zadržavati zbog refleksije. To će biti valovodi. Svjetlost koja će se širiti sustavom u eksperimentu bit će laserska svjetlost frekvencije ω u vidljivom dijelu spektra.

Za opis ovakvog sustava pretpostavimo linearni nemagnetski materijal bez slobodnih naboja i struja. Vremenska ovisnost električnog i magnetskog polja je oscilatorna frekvencije ω na kojoj oscilira upadni laser. Maxwellove jednadžbe su tada:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \tag{3.1}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{3.2}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H} \tag{3.3}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\epsilon \vec{E} \tag{3.4}$$

Iz Faradayevog zakona može se odrediti magnetsko polje ako je poznato električno:

$$\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E} \tag{3.5}$$

Dalje je potrebno odrediti električno polje te ga uvrstiti u (6) da se dobije magnetsko. Djelovanje operatora rotacije na Faradayev zakon daje:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} \tag{3.6}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0\epsilon\omega^2 \vec{E} \tag{3.7}$$

Pri prelasku iz (3.6) u (3.7) koristi se poznati izraz za rotaciju rotacije na lijevoj strani te Ampereov zakon da se eliminira rotacija magnetskog polja na desnoj strani.

Promotrimo sad prvi član na lijevoj strani. Prema Gaussovom zakonu (3.1) divergencija električnog polja iznosi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla}\epsilon}{\epsilon} \approx 0 \tag{3.8}$$

Zadnja aproksimacija je opravdana jer je u fotorefraktivnim materijalima varijacija indeksa loma je mnogo manja od varijacije električnog polja, budući da je valna duljina svjetlosti reda veličine sto nanometara, a period materijala desetak mikrometara, pa se član na lijevoj strani može zanemariti i divergencija električnog polja praktički isčezava. U ovom slučaju jednadžba (3.7) postaje:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0\epsilon\omega^2 \vec{E} \tag{3.9}$$

To je poznata valna jednadžba. Uočimo da je polje transverzalno, također kao posljedica aproksimacije (3.8).

S obzirom da je varijacija indeksa loma $n = \sqrt{\epsilon_r}$ mala s obzirom na indeks loma početnog materijala n_0, dalje se promatraju izrazi najviše prvog reda u varijaciji indeksa loma $\delta n(x, y)$:

$$\epsilon = \epsilon_0(n_0 + \delta n(x, y))^2 \approx \epsilon_0(n_0^2 + 2n_0\delta n(x, y)), \;\; \delta n(x, y) \ll n_0 \tag{3.10}$$

Uvrštavanjem (3.10) u (3.9):

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}(n_0^2 + 2n_0\delta n)\vec{E} \tag{3.11}$$

Iz uvodne diskusije o širenju svjetlosti u valovodu može se konstruirati pretpostavka rješenja jednadžbe (3.11). Pretpostavimo da je laserom transverzalne linearne polarizacije pobuđen jedan valovod i da funkcija ψ opisuje električno polje zrake u x-y ravnini. Na početku propagacije električno polje sastoji se od produkta ravnog vala valnog vektora $k_0 = \frac{\omega n_0}{c}$ koji opisuje širenje u z smjeru te funkcije ψ koja ima oblik linearne kombinacije svih pobuđenih modova valovoda, a polarizacija je linearna transverzalna. Daljnjom propagacijom u z smjeru zbog pobuđivanja modova drugih valovoda u linearnoj kombinaciji koja tvori ψ pojavljuju se pobuđeni modovi drugih valovoda, uz promjenu koeficijenata koja mora zadovoljavati zakon očuvanja energije, pa se zaključuje da će ψ imati ovisnost i o koordinati z. Promjena polarizacije tijekom propagacije se ne očekuje jer val u materijalu mora biti (gotovo) transverzalan, a do eventualne rotacije polarizacije u x-y ravnini dovela bi birefraktivnost medija [5] koja nije prisutna u ovom problemu. Prema tome, može se pretpostaviti oblik riješenja:

$$\vec{E} = \psi(x, y, z)e^{ik_0 z}\hat{e} \tag{3.12}$$

Uvrštavanjem u (3.11):

$$\vec{\nabla}^2\left[\psi e^{ik_0 z}\hat{e}\right] = -\frac{\omega^2}{c^2}(n_0^2 + 2n_0\delta n)\psi e^{ik_0 z}\hat{e} \tag{3.13}$$

Raspis Laplaciana i sređivanje daje:

$$\vec{\nabla}^2\psi + 2ik_0\hat{z}\cdot\vec{\nabla}\psi - k_0^2\psi = -\frac{\omega^2}{c^2}(n_0^2 + 2n_0\delta n)\psi \tag{3.14}$$

Korištenjem definicijske relacije $k_0 = \frac{\omega n_0}{c}$ eliminira se ω te se zadnji član na lijevoj strani i prvi na desnoj mogu pokratiti. Ostaje:

$$\vec{\nabla}^2\psi + 2ik_0\hat{z}\cdot\vec{\nabla}\psi = -2\frac{k_0^2}{n_0}\delta n\psi \tag{3.15}$$

Pretpostavljamo da će tok energije u x-y ravnini biti dovoljno spor da je varijacija ψ sa z puno sporija od varijacije ravnog vala. Budući da je tok energije u x-y ravnini povezan s komponentom valnog vektora u x-y ravnini, zapravo pretpostavljamo da je valni vektor gotovo paralelan s osi z pa se ovakva aproksimacija naziva paraaksijalna. Matematički, paraaksijalna aproksimacija glasi:

$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right| \ll \left|2ik_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \tag{3.16}$$

Korištenje aproksimacije (3.16) u jednadžbi (3.15) daje:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi - \frac{k_0\delta n}{n_0}\psi \equiv \left(-\frac{1}{2k_0}\vec{\nabla}_\perp^2 - \frac{k_0\delta n}{n_0}\right)\psi \tag{3.17}$$

Ova jednadžba uz odgovarajući rubni uvijet daje ψ, a zatim se električno polje odredi iz (3.12) te magnetsko iz (3.5):

$$\vec{E} = \psi e^{ik_0 z}\hat{e} \tag{3.18}$$

$$\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu_0}\vec{\nabla}\times\left[\psi e^{ik_0z}\hat{e}\right] = -\frac{i}{\omega\mu_0}\hat{e}\times\left(\vec{\nabla}\psi + ik_0\psi\hat{z}\right)e^{ik_0z} \tag{3.19}$$

Napomenimo da iako se u izvodu koristi kontekst rešetke valovoda, jednadžba (3.17) može opisati širok spektar sustava koji zadovoljavaju aproksimacije korištene u ovom izvodu, a posebno među njima i samo jedan od dielektričnih valovoda koji tvore rešetku. Uočimo da jednadžba (3.17) odgovara vremenski ovisnoj Schrödingerovoj jednadžbi u dvije dimenzije u kojoj koordinata z igra ulogu vremena, što znači da se ovakav sustav može koristiti za simulaciju kvantnih sustava, a mjerenje električnog polja dat će ekvivalent amplitude vjerojatnosti iz kvantne mehanike.
Riješimo jednadžbu (3.17) za rešetku valovoda, odnosno periodičnu varijaciju indeksa loma, te iz toga pokušajmo odrediti veličinu koja opisuje vezanje valovoda.

3.2 Svojstvena stanja sustava

Jednadžba (3.17) za indeks loma neovisan o koordinati z može se rješavati separacijom varijabli $\psi = \Phi(\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y})Z(z)$. Uvrštavanjem pretpostavke u (3.17) i sređivanjem:

$$\frac{i}{Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\Phi(\vec{r})}\left(\frac{1}{2k_0}\vec{\nabla}_\perp^2 + \frac{k_0\delta n(\vec{r})}{n_0}\right)\Phi(\vec{r}) = \beta \tag{3.20}$$

Separacijska konstanta β naziva se konstanta propagacije i igra ulogu analognu energiji u kvantnoj mehanici. Ovisnost o koordinati z lagano se odredi iz (3.20):

$$\frac{i}{Z}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} = \beta \Longrightarrow Z(z) = e^{-i\beta z} \tag{3.21}$$

S druge strane, jednadžba u ravnini je složenija:

$$-\left(\frac{1}{2k_0}\vec{\nabla}_\perp^2 + \frac{k_0\delta n(\vec{r})}{n_0}\right)\Phi(\vec{r}) = \beta\Phi(\vec{r}) \tag{3.22}$$

No, za rešetku valovoda, operator na lijevoj strani je komutativan s operatorom translacije za vektore rešetke $\vec{R} = m\hat{a}_1 + n\hat{a}_2$ u x-y ravnini, što znači da su svojstvena stanja u x-y ravnini Blochove funkcije [1]:

$$\Phi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}u_{\vec{k}}(\vec{r}), \;\; u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R}) \tag{3.23}$$

Vektor $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$ je element I. Brillouinove zone rešetke. Uvrštavanjem u (3.22):

$$\begin{gathered} -\tfrac{1}{2k_0}\vec{\nabla}_\perp^2\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}u_{\vec{k}}(\vec{r})\right) - \tfrac{k_0\delta n(\vec{r})}{n_0}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \beta_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\ -\tfrac{1}{2k_0}\left(-k^2u_{\vec{k}}(\vec{r}) + 2i\vec{k}\cdot\vec{\nabla}_\perp u_{\vec{k}}(\vec{r}) + \vec{\nabla}_\perp^2 u_{\vec{k}}(\vec{r})\right) - \tfrac{k_0\delta n(\vec{r})}{n_0}u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \beta_{\vec{k}}u_{\vec{k}}(\vec{r}) \end{gathered} \tag{3.24}$$

I $\delta n(\vec{r})$ i $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ su periodični s periodom rešetke pa ih se može razviti u Fourireov red s Fourierovim komponentama koje odgovaraju vektorima recipročne rešetke $\vec{G}$:

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} u_{\vec{k},\vec{G}}e^{i\vec{G}\vec{r}}, \;\; \delta n(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \delta n_{\vec{G}}e^{i\vec{G}\vec{r}} \tag{3.25}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (3.25) u (3.24) te sređivanjem:

$$\frac{1}{2k_0}\left(\vec{k}+\vec{G}\right)^2 - \frac{k_0}{n_0}\sum_{\vec{K}}\delta n_{\vec{K}+\vec{G}}u_{\vec{k},\vec{K}} = \beta_{\vec{k}}u_{\vec{k}.\vec{G}} \tag{3.26}$$

Ako determinanta sustava iščezava, za dani $\vec{k}$ postoji beskonačno mnogo rješenja, koja se označe indeksom n. Uvjet postojanja rješenja vodi na beskonačno pripadnih vrijednost $\beta_n(\vec{k})$ koje tvore vrpce razdvojene procjepima, jedinstvene za dani problem [6]. Za opis propagacije potrebno je riješiti (3.26) za $u_{\vec{k},\vec{G},n}$ za svaki $\vec{k}$, iz (3.25) izračunati funkcije $u_{\vec{k},n}(\vec{r})$ te zatim iz (3.23) funkcije $\Phi_{\vec{k},n}(\vec{r})$. To je jedan od delokaliziranih modova sustava, a opis propagacije dan je razvojem po svim modovima:

$$\psi(\vec{r},z) = \sum_n \int_{I.B.Z.} c_{\vec{k},n}u_{\vec{k},n}(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\beta_{\vec{k},n}z}\mathrm{d}\vec{k} \tag{3.27}$$

Koeficijenti $c_{\vec{k},n} = \int u_{\vec{k},n}(x,y)^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\psi(\vec{r},0)\mathrm{d}\vec{r}$ su projekcije početnog oblika zrake na svojstvena stanja rešetke. Ako je u početku pobuđen jedan valovod superpozicija zbog delokalizirane prirode svojstvenih stanja sadrži mnogo članova koja izlaze iz faze tijekom propagacije duž z osi. Izlaskom iz faze opisan je prijenos energije između valovoda zbog pobude preko evanescentnih valova, no nije jasno vidljivo između kojih valovoda je prijenos kakve jačine. Zato se koristi aproksimacija čvrste veze (TBA, engl. *tight binding approximation*) u kojoj se riješenje gradi od lokaliziranih modova.

3.3 Aproksimacija čvrste veze (TBA)

Opet se rješava jednadžba (3.17) separacijom varijabli. Dio ovisan o koordinati z opet se rješava prema (3.21), a aproksimacija se koristi za rješavanje jednadžbe u ravnini (3.22). Pretpostavi se riješenje u obliku:

$$\Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \phi_{\vec{R}}(\vec{r}) \tag{3.28}$$

N je broj mjesta u rešetci. Ovo je Wannierov razvoj Blochovog stanja, a funkcije $\phi_{\vec{R}}(\vec{r})$ su lokalizirane na mjestu $\vec{R}$ u rešetci valovoda te se nazivaju Wannierove funkcije. Ako valovodi, opisani s $\delta n_{\vec{R}}(\vec{r})$, dovoljno dobro lokaliziraju svjetlost, Wannierove funkcije otprilike će odgovarati linearnoj kombinaciji modova χ_j pojedinog valovoda [6] (pristup je jako sličan metodi linearne kombinacije atomskih orbitala [6] iz fizike čvrstog stanja):

$$\phi_{\vec{R}}(\vec{r}) \approx \textstyle\sum_j c_{j,\vec{R}} \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \tag{3.29}$$

$$\left(\tfrac{1}{2k_0}\vec{\nabla}_\perp^2 + \tfrac{k_0\delta n_{\vec{R}}(\vec{r})}{n_0}\right)\chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) = \beta^{(0)}_{\vec{R}}\chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \tag{3.30}$$

Ovdje suma po j ide po svim stanjima na mjestu u rešetci $\vec{R}$, što znači po svim stanjima svih valovoda koji tvore bazu rešetke.

Uvrštavanjem aproksimacije čvrste veze (3.29) u pretpostavku (3.28) te pretpostavke (3.28) u (3.22):

$$-\left(\frac{1}{2k_0}\vec{\nabla}_\perp^2 + \frac{k_0\delta n(\vec{r})}{n_0}\right)\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j,\vec{R}} c_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}\chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) = \beta\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j,\vec{R}} c_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}\chi_{j,\vec{R}}(\vec{r})$$

Operator je linearan:

$$-\sum_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \left(\frac{1}{2k_0}\vec{\nabla}_\perp^2 + \frac{k_0 \sum_{\vec{P}} \delta n_{\vec{P}}(\vec{r})}{n_0} \right) c_{j,\vec{R}} \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) = \beta \sum_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} c_{j,\vec{R}} \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \tag{3.31}$$

Izraz (3.30) iskoristi je da se eliminira operator koji opisuje jedan valovod:

$$\sum_{j,\vec{R}} c_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \left(\beta_{j,\vec{R}}^{(0)} - \frac{k_0}{n_0} \sum_{\vec{P}\neq\vec{R}} \delta n_{\vec{P}}(\vec{r}) \right) \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) = \beta \sum_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} c_{j,\vec{R}} \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \tag{3.32}$$

Jednadžba (3.32) pomnoži se s $\chi_{l,\vec{R}'}(\vec{r})$ i integrira po x-y ravnini:

$$\sum_{j,\vec{R}} c_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \left(\beta_{j,\vec{R}}^{(0)} \int \chi_{l,\vec{R}'}(\vec{r}) \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r} - \frac{k_0}{n_0} \int \chi_{l,\vec{R}'}(\vec{r}) \sum_{\vec{P}\neq\vec{R}} \delta n_{\vec{P}}(\vec{r}) \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r} \right) =$$
$$= \beta \sum_{j,\vec{R}} c_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \int \chi_{l,\vec{R}'}(\vec{r}) \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r} \tag{3.33}$$

U prvom članu u sumi na desnoj strani i u sumi na lijevoj strani integrali isčezavaju ako je $\vec{R} = \vec{R}'$ i $j \neq l$ jer su modovi jednog valovoda ortogonalni, jednaki su normi moda $\vec{N}$ ako je $j = l$, a za različite $\vec{R}$ i $\vec{R}'$ te bilo koje l i j su općenito konačni i mali. Ukupno:

$$\int \chi_{l,\vec{R}'}(\vec{r}) \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r} = \mathcal{N} \delta_{\vec{R}\vec{R}'} \delta_{il} + \mathcal{N}(1 - \delta_{\vec{R}\vec{R}'}) S_{\vec{R}\vec{R}'}^{jl} \tag{3.34}$$

Za integral iz drugog člana u sumi na desnoj strani uvedemo pokratu:

$$J_{\vec{R}\vec{R}'}^{jl} \equiv -\frac{k_0}{n_0 \mathcal{N}} \int \chi_{l,\vec{R}'}(\vec{r}) \sum_{\vec{P}\neq\vec{R}} \delta n_{\vec{P}}(\vec{r}) \chi_{j,\vec{R}}(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r} \tag{3.35}$$

Koristeći (3.34) i (3.35) jednadžba (3.33) postaje:

$$\left(\beta - \beta_{l,\vec{R}'}^{(0)}\right) \left(c_{l,\vec{R}'} + \sum_{j,\vec{R}\neq\vec{R}'} S_{\vec{R}\vec{R}'}^{jl} c_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{R}-\vec{R}')} \right) - \sum_{j,\vec{R}} J_{\vec{R}\vec{R}'}^{jl} c_{j,\vec{R}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{R}-\vec{R}')} = 0 \tag{3.36}$$

Ovo je sustav jednadžbi za koeficijente $c_{j,\vec{R}}$ kojima se onda konstruira svojstveno stanje $\psi_{\vec{k}}$ prema (3.28) i (3.29). Netrivijalno riješenje postoji za one β za koje determinanta sustava iščezava, što vodi na relaciju između β i $\vec{k}$. Relacija će imati g grana, gdje je g dan brojem modova u razvoju (3.29), koje će se dobro poklapati s prvih g vrpci koje se dobiju iz jednadžbe (3.26).

Pokažimo sad kako se vidi tok energije između pojedinih modova. Ako bi svi koeficijenti $S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ i $J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ iščezavali, sustav (3.36) je dijagonalan i "vrpce" konstanti popagacije sastoje se od D-terostruko degeneriranih konstanti propagacije neovisnih valovoda. Svakoj vrpci odgovaralo bi D modova izgrađenih od linearnih kombinacija D modova pojedinih valovoda koji imaju istu konstantu propagacije. Propagacija svjetlosti opet se promatra razvojem početnog uvjeta po svojstvenim stanjima sustava kao u (3.27). Ako bi u početku bio pobuđen jedan mod jednog valovoda onda bi jedini neisčezavajući koeficijenti u razvoju biti oni čija pripadna konstanta propagacije odgovara konstanti propagacije pobuđenog moda. No to znači da se ovisnost o z svodi na globalni fazni faktor te tijekom evolucije komponente u razvoju u x-y ravnini nikada ne izlaze iz faze i oblik funkcije u x-y ravnini uvijek ostaje isti, odnosno lokaliziran u početnom valovodu.

Ako bi pak neki koeficijenti $S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ i $J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ bili konačni za indekse koji odgovaraju dvama modovima lokaliziranim na različitim valovodima, sustav (3.36) je nedijagonalan u dvodimenzionalnom potprostoru tih modova. Dijagonalizacija sustava u tom potprostoru dat će svojstvena stanja koja su linearne kombinacije vezanih modova te će se razbiti degeneracija između konstatni propagacije vezanih modova i onih koji su nevezani. Svojstvena stanja sustava sadržavat će dakle, osim D-terostruko degeneriranih vrpci, dvije $D-1$-terostruko degenerirane vrpce i dvije vrpce koje se dobiju dijagonalizacijom u potprostoru vezanih stanja. Modovi sustava slično bi bili linearne kombinacije degeneriranih modova, njih D ili $D-1$, kao i prije, ali postojala bi i dvije navedene linearne kombinacije koje dijagonaliziraju potprostor vezanih modova. Ako bi u početku bio pobuđen jedan od vezanih modova, razvoj po svojstvenim stanjima imao bi barem dva konačna koeficijenta koji bi u z smjeru evoluirali s različitim faznim faktorima. To znači da će tijekom propagacije u z smjeru svjetlost periodično prelaziti između valovoda. Frekvencija preskoka dana je razlikom koeficijenata propagacije u pripadnim vrpcama i općenito ovisi o $S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ i $J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$, a iščezava ako oni iščezavaju. Kao težinu bridu može se pridružiti sumu $\beta_0 S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'} + J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$, koja se javlja u (3.36) kao nedijagonalni matrični element.

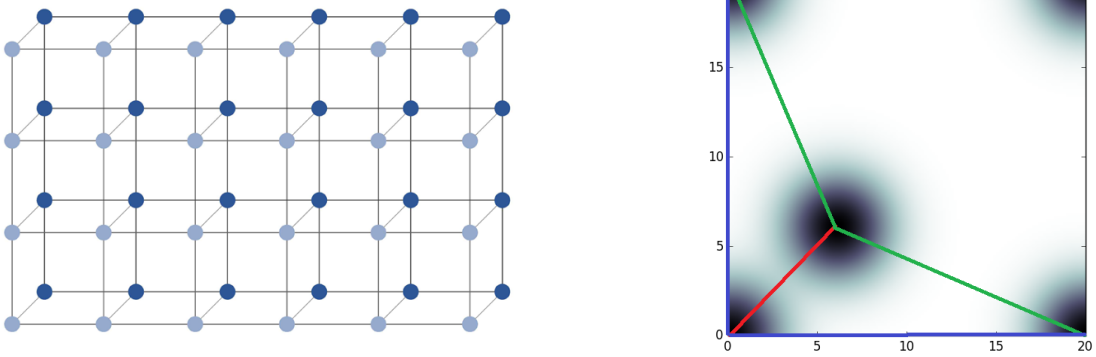
Gornji slučajevi su umjetni i u stvarnosti $S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ i $J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ nikada ne iščezavaju. No oni mogu biti jako mali što vodi na malu frekvenciju preskoka pa ih možemo zanemariti prema drugima koji su mnogo veći. Dakle, cilj je konstruirati rešetku u x-y ravnini u kojoj će $\beta_0 S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'} + J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ biti nezanemarivo točno između onih valvovoda da težinski graf koji opisuje sustav odgovara slici 2.3a.

4 Kvadratna rešetka cilindričnih valovoda s bazom

Vratimo se na shemu vezanja vrhova koja je potrebna da se ostvari dvosloj kvadratnih rešetki (slika 4.1a). Neka pojedini valovod pridružen vrhu opisuje Gaussova funkcija tako da cijelu rešetku opisuje varijacija indeksa loma:

$$\delta n = \delta n_0 \sum_{mn} \left(e^{-\frac{(x-am)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-an)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x-am-b)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-an-b)^2}{2\sigma^2}} \right) \tag{4.1}$$

a je konstanta rešetke, σ je širina valovoda, a položaji valovoda u bazi dani su s $\vec{b}_1 = \vec{0}$ te $\vec{b}_2 = b\hat{x} + b\hat{y}$.



(a) (b)

Slika 4.1: (a) Shema vezanja valovoda koja je efektivni dvosloj (b) Prikaz jedninične ćelije konkretne rešetke s $a = 20\mu$m, $\sigma = 0.1a$ te $b = 0.3a$. Označeni su prvi (crveno), drugi (zeleno) i treći (plavo) susjedi jednog valovoda.

Na slici 4.1b vidimo da ako su povezani prvi susjedi te treći susjedi, ali ne i drugi susjedi, rešetka odgovara dvosloju, kao na slici 4.1a. Koliko ova idealna situacija odgovara stvarnosti vidjet će se usporedbom vrpci iz TBA modela koji je opisuje s vrpcama dobivenim numeričkim rješavanjem jednadžbe (3.26) za rešetku (4.1). Prilikom rješavanja jednadžbe (3.36) koeficijenti $J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$, $S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ i β_0 promatrat će se kao nepoznati. Dobit će se ovisnost $\beta\left(\vec{k}, \{J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}, S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}\}, \beta_0\right)$ te će se nelinearnom prilagodbom na numeričko rješenje dobiti koeficijenti tako da vrpce iz TBA modela najbolje odgovaraju vrpcama iz numeričkog modela. Ako je stvarna situacija jako blizu idealne, poklapanje će biti jako dobro i tada se može zaključiti da je dvosloj ostvaren.
Promotrimo sada TBA modele u kojima postoji u pojedinom valovodu postoji samo jedno vezano stanje. Numeričkim rješavajem jednadžbe (3.22) za jedan cilindrični valovod zaključuje se da za upadnu svjetlost valne duljine $\lambda = 500$nm, početni indeks loma $n_0 = 2.3$ (indeks loma $Sr_xBa_{1-x}Nb_2O_6$, čestog materijala u fotorefraktivnim primjenama) te širinu valovoda od 2μm postoji jedno vezano stanje u realističnom intervalu amplituda varijacija indeksa loma za dani materijal od 2×10^{-4} do 11×10^{-4}.

Promotrimo prvo model koji opisuje dvosloj. Ako s 1 označimo stanje valovoda na mjestu $\vec{b}=0$, a s 2 stanje valovoda na mjestu $\vec{b}=b\hat{x}+b\hat{y}$, (3.36) postaje:

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\beta}(1+2SZ)-\Delta\beta-2JZ\right)c_1+\left(\tilde{\beta}S'-K\right)c_2=0\\ \left(\tilde{\beta}S'-K\right)c_1+\left(\tilde{\beta}(1+2SZ)-\Delta\beta-2JZ\right)c_2=0\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ovdje je $Z=\cos k_x a+\cos k_y a$, $\tilde{\beta}=\beta-\beta_0$, $\Delta\beta=J^{(11),(22)}_{\vec{R}\vec{R}}$, $J=J^{(11),(22)}_{\vec{R},\vec{R}\pm a\hat{x}/\hat{y}}$, $K=J^{(12)}_{\vec{R}\vec{R}}$, $S^{(11),(22)}_{\vec{R},\vec{R}\pm a\hat{x}/\hat{y}}$, $S'=S^{(12)}_{\vec{R}\vec{R}}$. Netrivijalno riješenje postoji kad iščezava determinanta sustava:

$$\tilde{\beta}^2\underbrace{\left[(1+2SZ)^2-S'^2\right]}_{\equiv A}\underbrace{-2\left[(1+2SZ)(\Delta\beta+2JZ)-S'K\right]}_{\equiv B}\tilde{\beta}+\underbrace{(\Delta\beta+2JZ)^2-K^2}_{\equiv C}=0 \tag{4.3}$$

Ovo vodi na vrpce oblika:

$$\beta=\beta_0+\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \tag{4.4}$$

Za usporedbu pogledajmo i model u kojem je uključen prijelaz između drugih susjeda. Sada je (3.36):

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\beta}(1+2SZ)-\Delta\beta-2JZ\right)c_1+\left[(\tilde{\beta}S'-K)+\left(\tilde{\beta}S''-K'\right)\left(e^{ik_xa}+e^{ik_ya}\right)\right]c_2=0\\ \left[(\tilde{\beta}S'-K)+\left(\tilde{\beta}S''-K'\right)\left(e^{ik_xa}+e^{ik_ya}\right)\right]c_1+\left(\tilde{\beta}(1+2SZ)-\Delta\beta-2JZ\right)c_2=0\end{aligned} \tag{4.5}$$

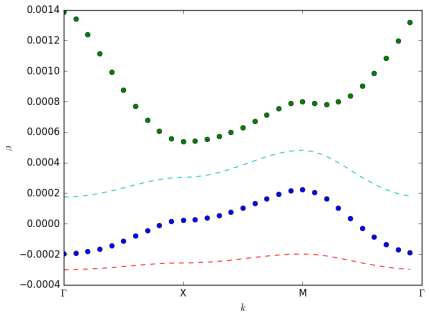
Tu je $K'=J^{(12)}_{\vec{R},\vec{R}\pm a\hat{x}/\hat{y}}$ te $S''=S^{(12)}_{\vec{R},\vec{R}\pm a\hat{x}/\hat{y}}$. Uvjet postojanja netrivijalnog riješenja je:

$$\begin{aligned}&\tilde{\beta}^2\underbrace{\left[(1+2SZ)^2-S'^2-2S'S''Z-4S''^2\cos^2\frac{kx-ky}{2}a\right]}_{\equiv\tilde{A}}+\\ &+\underbrace{\left[-2(1+2SZ)(\Delta\beta+2JZ)+2S'K+2(S'K'+S''K)Z+8S''K'\cos^2\frac{kx-ky}{2}a\right]}_{\equiv\tilde{B}}\tilde{\beta}+\\ &+\underbrace{(\Delta\beta+2JZ)^2-K^2-2KK'Z-4K'^2\cos\frac{k_x-k_y}{2}a}_{\equiv\tilde{C}}=0\end{aligned} \tag{4.6}$$

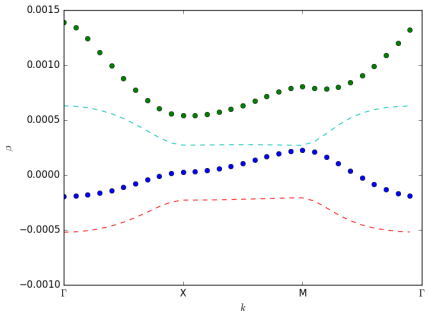
Prema tome, vrpce su dane izrazima:

$$\beta=\beta_0+\frac{-\tilde{B}\pm\sqrt{\tilde{B}^2-4\tilde{A}\tilde{C}}}{2\tilde{A}} \tag{4.7}$$

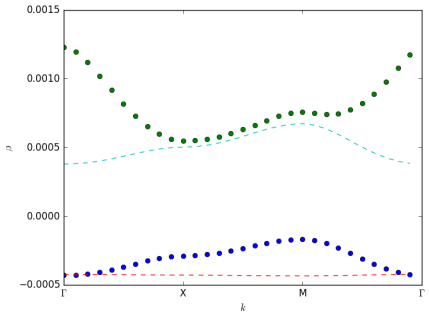
Usporedba prilagodbe dobivenih TBA modela na numeričko riješenje i samog numeričkog rješenja prikazana je na slici 4.2 za razne vrijednosti parametara.



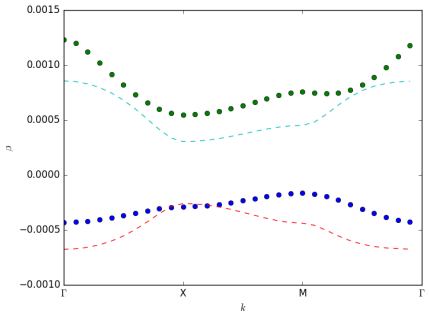
(a) $\delta n_0 = 4 \times 10^{-4}$; $J = -2.31 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.07 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.28 \times 10^{-2}$



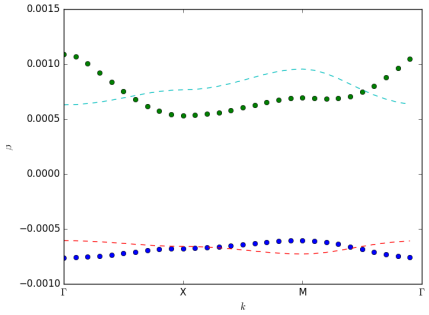
(b) $\delta n_0 = 4 \times 10^{-4}$; $J = -2.34 \times 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.24 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -2.28 \times 10^{4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.28 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$



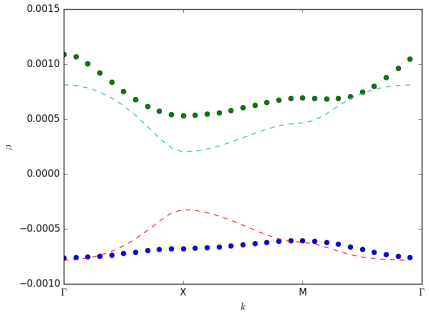
(c) $\delta n_0 = 6 \times 10^{-4}$; $J = -1.43 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -4.63 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.28 \times 10^{-2}$



(d) $\delta n_0 = 6 \times 10^{-4}$; $J = -6.98 \times 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.73 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -3.11 \times 10^{4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.28 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$



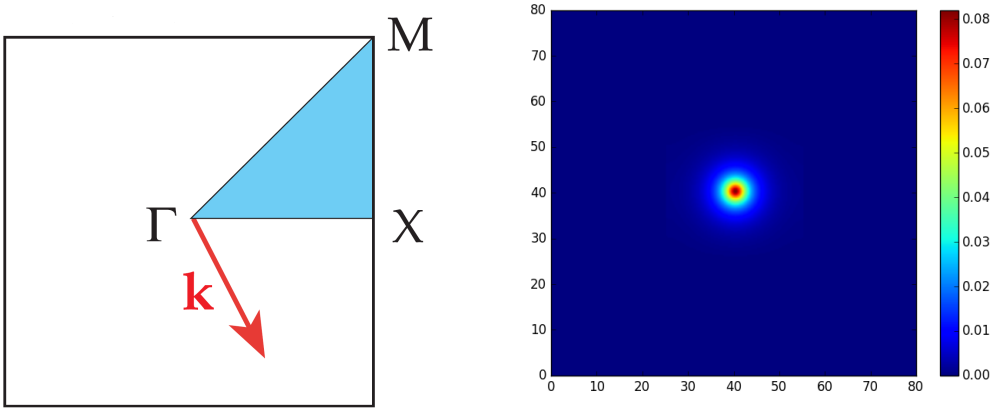
(e) $\delta n_0 = 8 \times 10^{-4}$; $J = -8.01 \times 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -7.08 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.28 \times 10^{-2}$



(f) $\delta n_0 = 8 \times 10^{-4}$; $J = -1.34 \times 10^{-7}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.61 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -3.43 \times 10^{4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.28 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$

Slika 4.2: Usporedba numeričkog rješenja i TBA modela s nepovezanim drugim susjedima prikazana je na slikama (a), (c) i (e), a usporedba numeričkog rješenja i TBA modela s vezom između prvih, drugih i trećih susjeda prikazana je na slikama (b), (d) i (f). Koeficijeni dobiveni prilagodbom navedeni su ispod svake slike.

Izračuni su napravljeni u paketu Anaconda za Python, a kodovi su priloženi u dodatcima. Put u I. Brillouinovoj zoni po kojem su nacrtane vrpce i po kojem je numerički riješena jednadžba (3.26) je trokut $\Gamma = (0,0)$ - $X = \left(\frac{1}{2}G_x, 0\right)$ - $M = \left(\frac{1}{2}G_x, \frac{1}{2}G_y\right)$ - Γ prikazan na slici 4.3a, gdje je $G_x = G_y = \frac{2\pi}{a}$. Slike su dobivene za $a = 20\mu$m te $\sigma = 0.1a$ i $b = 0.3a$ te amplitude varijacije indeksa loma navedene ispod slika jer je slaganje bolje nego za drugačije vrijednosti geometrijskih parametara rešetke.



(a) (b)

Slika 4.3: (a) Brillouinova zona rešetke i označen put po kojem su izračunate vrpce (slika preuzeta iz [1]) (b) Vezano stanje cilindričnog valovoda

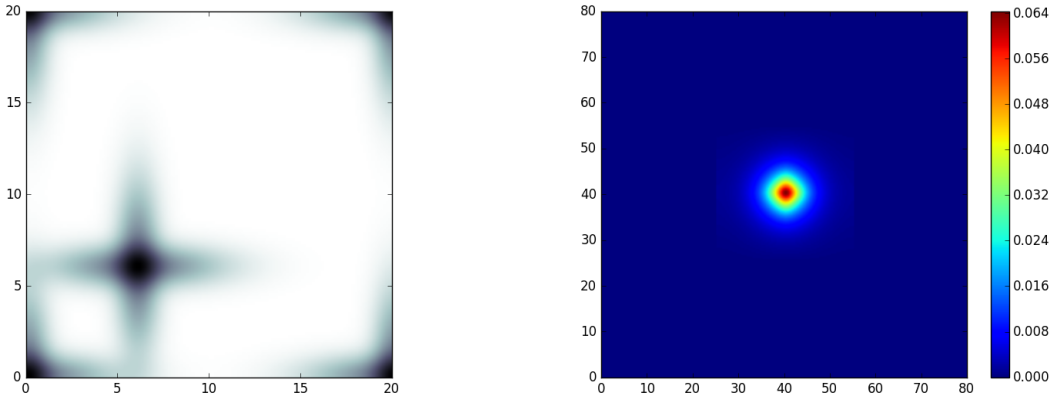
Vidi se da slaganje nije pretjerano dobro ni za jedan model, ali je nešto bolje za model koji ima i preskok između drugih susjeda, pogotovo oko točke $\Gamma = (0,0)$. Jedan razlog za to se može dokučiti iz slike 4.2, koja prikazuje vezano stanje u valovodu, dobiveno rješavanjem jednadžbe (3.22) za jedan gaussijanski valovod u sumi (4.1). Vidimo da je ono cilindrički simetrično pa integrali koji definiraju $J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ i $S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ ovise o udaljenosti valovoda, ali ne i njihovom međusobnom položaju. Očito, da se dobije dvosloj potrebno je imati stanja koja neće biti cilindrično simetrična nego izdužena duž osi x i osi y tako da $S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ i $J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ budu veći za valovode koje se nalaze translatirani duž njih, a za ostale smjerove manji, nego je to sada. Drugi razlog je da rezultat TBA metode je to bolji što su stanja lokaliziranija tako da bi bilo dobro kada bi geometrija valovoda bolje lokalizirala stanja za istu amplitudu varijacije indeksa loma. Rezultate ćemo pokušati poboljšati promatranjem valovoda kojima presjek nije cilindričan tako da stanja preuzmu njihovu simetriju.

5 Rešetka križnih valovoda

Promotrimo rešetku jedinične ćelije prikazane na slici 5.1a. Funkcija koja opisuje profil pojedinog valovoda je zbroj dva Gaussijana od kojih je jedan izdužen u x smjeru a jedan u y smjeru pa cijelu rešetku opisuje:

$$\begin{aligned}\delta n &= \frac{\delta n_0}{2}\sum_{mn}\left(e^{-\frac{(x-ma)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-na)^2}{2\sigma_2^2}}+e^{-\frac{(x-ma)^2}{2\sigma_2^2}-\frac{(y-na)^2}{2\sigma_1^2}}\right)\\ &+ \frac{\delta n_0}{2}\sum_{mn}\left(e^{-\frac{(x-ma-b)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-na-b)^2}{2\sigma_2^2}}+e^{-\frac{(x-ma-b)^2}{2\sigma_2^2}-\frac{(y-na-b)^2}{2\sigma_1^2}}\right), \quad \sigma_1>\sigma_2 \qquad (5.1)\end{aligned}$$

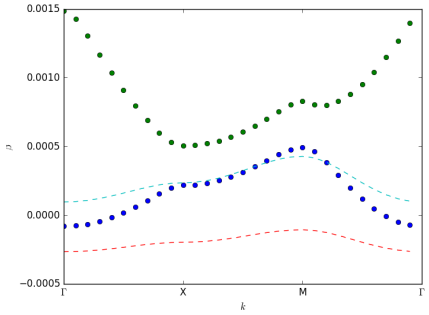
S obzirom da se opet radi o kvadratnoj rešetci s bazom, I. Brillouinova zona ista je kao i u slučaju rešetke cilindričnih valovoda, kvadrat na slici 4.3a.



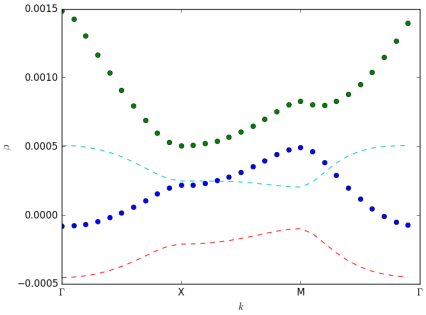
(a) (b)

Slika 5.1: (a) Rešetka križnih valvoda (b) Vezano stanje križnog valvoda za $a = 20\mu$m, $\sigma_1 = 0.16a$ te $\sigma_2 = 0.04a$. Vidimo da osnovno stanje nema duge "repove" koji slijede simetriju jednog valovoda, što je vjerojatan uzrok činjenice da nismo uspjeli dobiti željeni rezultat (vidi tekst).

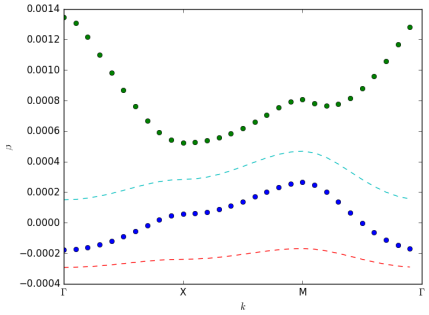
Svojstveno stanje pojedinog valovoda u sumi (5.1) valovoda opet se traži rješavanjem jednadžbe (3.22) za isti materijal i istu valnu duljinu kao i za rešetku cilindričnih valovoda. Pokazuje se da postoji jedno vezano stanje u intervalu od oko 3×10^{-4} do oko 20×10^{-4} za $a = 20\mu$m, $\sigma_1 = 0.16a$ te $\sigma_2 = 0.04a$. Kao što se vidi na slici 5.1b, za 8×10^{-4} stanje je izduženo duž osi x i y pa ima smisla promatrati vrpce za ovakav sustav. I. Brillouinova zona je ista kao i za slučaj rešetke cilidričnih valovoda pa će se TBA modeli i numeričko riješenje jednadžbe (3.26) uspoređivati po istom putu kao i prije: trokutu $\Gamma = (0,0)$ - $X = \left(\frac{1}{2}G_x, 0\right)$ - $M = \left(\frac{1}{2}G_x, \frac{1}{2}G_y\right)$ - Γ prikazan na slici 4.3a. Usporedba je prikazana na slici 5.2. Opet se vidi da slaganje nije dobro i da je bolje za model u kojem su uključeni drugi susjedi, pogotovo oko točke Γ. Dakle, deformacija nije dovoljno velika da kompenzira druge učinke koji smanjuju slaganje.



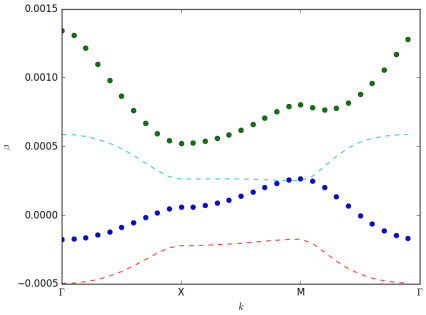
(a) $\delta n_0 = 4 \times 10^{-4}$; $J = -2.85 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.15 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$



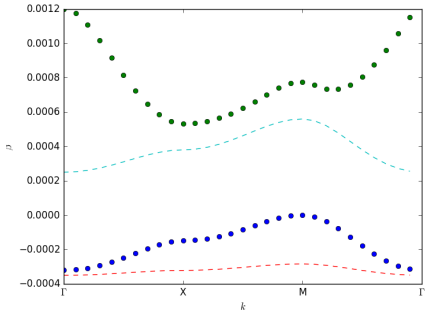
(b) $\delta n_0 = 4 \times 10^{-4}$; $J = -1.05 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.28 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -1.74 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 5.22 \times 10^{-2}$, $S' = 7.95 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$



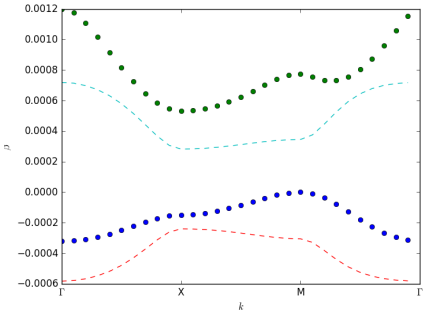
(c) $\delta n_0 = 6 \times 10^{-4}$; $J = -2.52 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.60 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$



(d) $\delta n_0 = 6 \times 10^{-4}$; $J = -7.49 \times 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.41 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -2.05 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 5.22 \times 10^{-2}$, $S' = 7.95 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$



(e) $\delta n_0 = 8 \times 10^{-4}$; $J = -2.07 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -3.49 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$



(f) $\delta n_0 = 8 \times 10^{-4}$; $J = -4.37 \times 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.60 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -2.59 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 5.22 \times 10^{-2}$, $S' = 7.95 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$

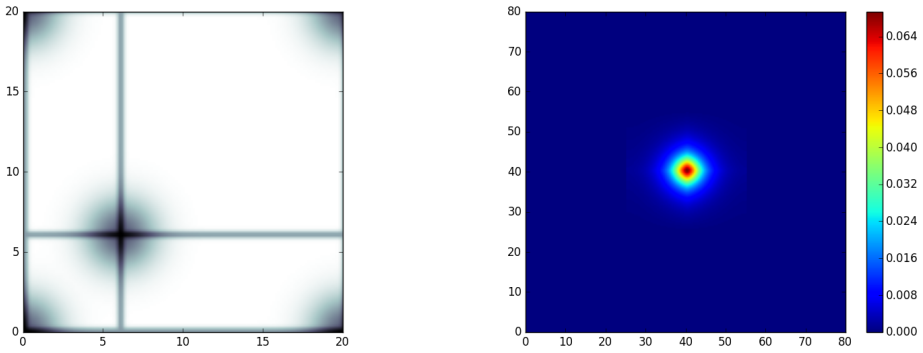
Slika 5.2: Na slikama 5.2a, 5.2c i 5.2e, a usporedba numeričkog rješenja i TBA modela s vezom između prvih, drugih i trećih susjeda prikazana je na slikama 5.2b, 5.2d i 5.2f. Ispod svake slike navedeni su pripadni indeksi loma i parametri dobiveni prilagodbom

6 Kvadratna rešetka s bazom povezana kanalićima

Radikalniji korak možemo napraviti tako da valovode u kvadratnoj rešetci s bazom (4.1) povežemo kanalićima u x-y ravnini, kao što je prikazano na slici 6.1a. Neka kanaliće opisuju funkcije:

$$\delta n^x_{kanal} = \frac{2}{5}\delta n_0 \left(e^{-\frac{(y-na)^2}{2\sigma^2_{kanal}}} + e^{-\frac{(y-na-b)^2}{2\sigma^2_{kanal}}} \right), \quad \delta n^y_{kanal} = \frac{2}{5}\delta n_0 \left(e^{-\frac{(x-ma)^2}{2\sigma^2_{kanal}}} + e^{-\frac{(x-ma-b)^2}{2\sigma^2_{kanal}}} \right) \tag{6.1}$$

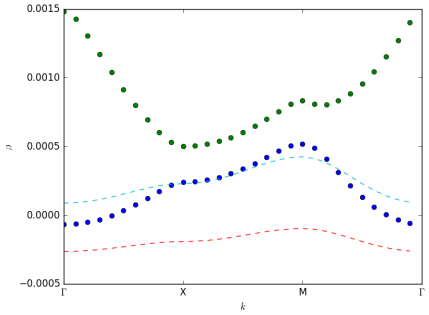
Ove funkcije se dodaju (4.1) pomnoženom s $\frac{3}{5}$ (ovi faktori su odabrani da stanje pojedinog valovoda bude lokalizirano, a opet izduženo). S obzirom da se kanalići unutar baze presjeku u $(0,0)$, $(0,b)$, $(b,0)$ te (b,b), funkciji koja opisuje rešetku doda se još četiri Gaussijana sa središtem presjecištima tako da se korigira dupli indeks loma. Ako je $a = 20\mu$m te $\sigma_{kanal} = 0.075a$ postoji jedno vezano stanje za amplitude varijacije indeksa loma od 3×10^{-4} do 10^{-3}. Na slici 6.1b prikazano je vezano stanje za $\delta n_0 = 8 \times 10^{-4}$ te prije navedene geometrijske parametre.



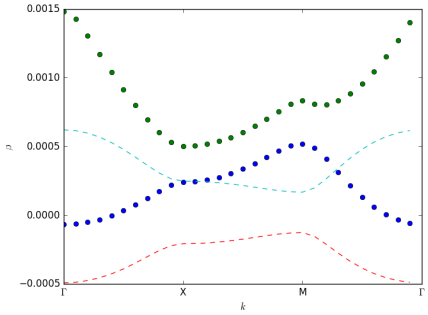
(a) (b)

Slika 6.1: (a) Jedinična ćelija u kvadratnoj rešetci valovoda s bazom povezanih kanalićima (b) Stanje vezano na jednom valovodu u takvoj rešetci. Opet nismo dobili duge "repove" koji slijede kanaliće što u konačnici vodi na činjenicu da je s ovakvim sustavom teško dobiti efektivni dvosloj.

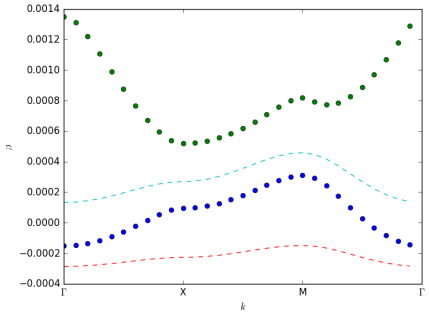
Usporedba numeričkog riješenja i TBA modela s vezom između prvih i trećih susjeda prikazana je na slici 6.2. Brillouinova zona je ista kao i kod rešetke cilindričnih valovoda pa je put u I. Brillouinovoj zoni po kojem su nacrtane vrpce i po kojem je riješena jednadžba (3.26) opet trokut $\Gamma = (0,0)$ - $X = \left(\frac{1}{2}G_x, 0\right)$ - $M = \left(\frac{1}{2}G_x, \frac{1}{2}G_y\right)$ - Γ, gdje je $G_x = G_y = \frac{2\pi}{a}$. Slike su dobivene za $a = 20\mu$m te $\sigma = 0.075a$ i $b = 0.3a$ te amplitude varijacije indeksa loma navedene ispod slika. Vidi se da slaganje opet nije previše dobro i da je bolje u modelu s uključenim prijelazom između drugih susjeda, pogotovo oko točke Γ. Zaključak je sličan zaključku za rešetku križnih valovoda: Stanje nije dovoljno deformirano da se popravi slaganje.



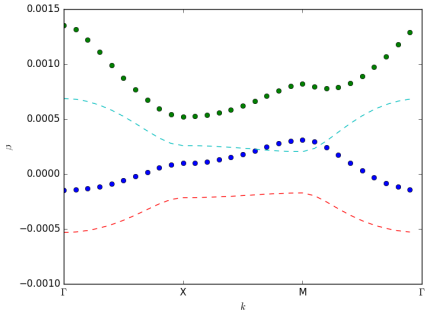
(a) $\delta n_0 = 4 \times 10^{-4}$; $J = -2.92 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.09 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$



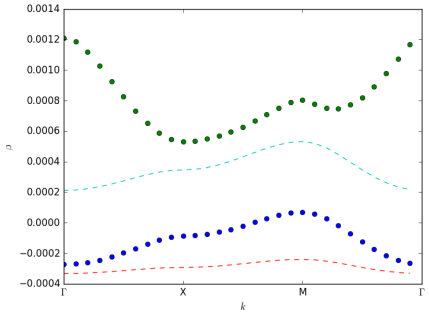
(b) $\delta n_0 = 4 \times 10^{-4}$; $J = -4.77 \times 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.26 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -1.81 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 1.89 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$



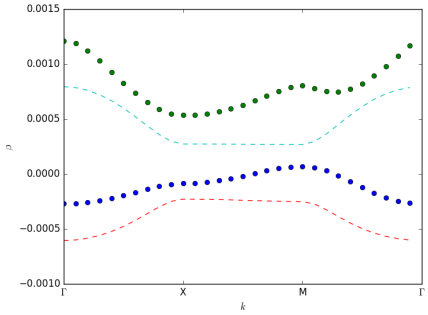
(c) $\delta n_0 = 6 \times 10^{-4}$; $J = -2.65 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.47 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$



(d) $\delta n_0 = 6 \times 10^{-4}$; $J = -3.51 \times 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.24 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -2.04 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 1.89 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$



(e) $\delta n_0 = 8 \times 10^{-4}$; $J = -2.31 \times 10^{-5}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -3.17 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 3.68 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$



(f) $\delta n_0 = 8 \times 10^{-4}$; $J = -2.22 \times 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$, $K = -2.25 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $K' = -2.44 \times 10^{-4}\mu\text{m}^{-1}$, $S = 1.89 \times 10^{-2}$, $S' = 8.26 \times 10^{-2}$, $S'' = 3.68 \times 10^{-2}$

Slika 6.2: Na slikama 6.2a, 6.2c, 6.2e, a usporedba numeričkog rješenja i TBA modela s vezom između prvih, drugih i trećih susjeda prikazana je na slikama 6.2b, 6.2d, 6.2f. Ispod svake slike navedeni su pripadni indeksi loma i parametri dobiveni prilagodbom

7 Zaključak

Na primjerima je pokazano svojstvo diskretnih sustava da mogu imati dimenziju veću od prostora u kojem se nalaze te shema spajanja vrhova kvadratne rešetke s bazom koja je ekvivalentna dvosloju. Napravljena je poveznica elektrodinamičkih veličina i matematičkih pojmova. Neuspješno je napravljen pokušaj realizacije dvosloja kvadratnih rešetki u dvodimenzionalnoj kvadratnoj rešetci s bazom jer za realistične parametre nije moguće dovoljno izobličiti i lokalizirati stanje da se integrali koji definiraju $S^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ i $J^{jl}_{\vec{R}\vec{R}'}$ dovoljno smanje za druge susjede te tako ostvare tražene veze.

Daljnji pokušaji mogli bi ići produbljivanjem i proširivanjem valovoda (i kanalića) tako da se pojave viša vezana stanja, ali da su stanja vezana bolje lokalizirana i da je izobličenost bolje izražena. Naravno, sustav (3.36) više ne bi bio riješiv analitički pa bi postupak bio mijenjanje geometrijskih parametara i amplitude varijacije indeksa loma za dani broj vezanih stanja po valovodu te numeričko izračunavanje vrpci koje bi se onda usporedile s (3.26.). Kada bi se postignuto željeno poklapanje vrpci, dvosloj bi bilo ostvaren.
Korak dalje bio bi se pokušati koristiti lokalizirana stanja u kontinuumu [7] kao stanja od kojih se grade vrpce u TBA modelu.
Alternativno bi se moglo koristiti tuneliranja potpomognutom rešetkom (engl. *grating assisted tunneling*) [8] tako da se prekine veza između elemenata baze unošenjem male razlike u indeksu loma između njih, što bi efektivno ostvarilo dvije odvojene kvadratne rešetke, a onda bi se tuneliranje vratilo uvođenjem dodatne rešetke mnogo manjeg indeksa loma ovisne o z. Ova metoda odgovara postupku postizanja rezonantnih prijelaza hladnih atoma u optičkoj rešetci pomoću lasera [9].

Dodaci

Dodatak A Dijagonalizacija jednog valovoda

```
#rjesavanje jednog valovoda i izracun preklopa J i S za cilinidricni valovod
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy import integrate as integ
import sys

xmin=0
xmax=30
Nptsx=90
xstep=(xmax-xmin)/Nptsx
x=np.arange(xmin, xmax, xstep)

ymin=0
ymax=30
Nptsy=90
ystep=(ymax-ymin)/Nptsy
y=np.arange(ymin, ymax, ystep)

a=20
n0L=4*10**(-4)
sigma=0.1*a
bx=0.3*a
by=0.3*a
n0=2.3
lamb=500*10**(-3)
k0=2*np.pi*n0/lamb
delta=0

X,Y=np.meshgrid(x,y,indexing='xy')

def jama(x,y,n0L,sigma,xmax,ymax):
    return n0L*np.exp(-0.5*((x-xmax/2)**2/sigma**2+(y-ymax/2)**2/sigma**2))

def baza(x,y,n0L,sigma,xmax,ymax,delta):
    return
        (n0L+delta)*np.exp(-0.5*((x-xmax/2)**2/sigma**2+(y-ymax/2)**2/sigma**2))

O=jama(X,Y,n0L,sigma,xmax,ymax)
B=baza(X,Y,n0L,sigma,xmax,ymax,delta)
```

```
Z=2*(k0*xstep)**2*O/n0-4
U=2*(k0*xstep)**2*B/n0-4
l=len(Z[0,:])

matrica=np.zeros((Nptsx**2,Nptsx**2))
matrica1=np.zeros((Nptsx**2,Nptsx**2))
L=len(matrica[0][:])

i=0
b=0
h=np.arange(0,l,1)

while i<l:
    for j in h:
        matrica[b][b]=Z[i][j]
        matrica[b][b-1]=1
        if b+1<L:
            matrica[b][b+1]=1
        matrica[b][b-Nptsx]=1
        if b+Nptsx<L:
            matrica[b][b+Nptsx]=1
        matrica1[b][b]=U[i][j]
        matrica1[b][b-1]=1
        if b+1<L:
            matrica1[b][b+1]=1
        matrica1[b][b-Nptsx]=1
        if b+Nptsx<L:
            matrica1[b][b+Nptsx]=1
        b+=1
    i+=1

frek,vekt=np.linalg.eigh(matrica)
frek1,vekt1=np.linalg.eigh(matrica1)
print(frek)

broj=0
broj1=0
for i in np.arange(0, len(frek), 1):
    if frek[i]>=0:
        print('Negativna konstanta propagacije u valovodu bez $\Delta$:
            {}'.format(-frek[i]/(2*k0*xstep**2)))
        k=i
        broj=1
```

```
    if frek1[i]>=0:
        print('Negativna konstanta propagacije u valovodu s $\Delta$:
            {}'.format(-frek1[i]/(2*k0*xstep**2)))
        g=i
        broj1=1

if broj==0:
    print ('Valovod bez $\Delta$ nema vezano stanje')
    sys.exit()

if broj1==0:
    print('Valovod s $\Delta$ nema vezano stanje')
    sys.exit()

Nptsx1=240
Nptsy1=240

f00=np.zeros((Nptsx1,Nptsy1), dtype=np.complex_)
f0a=np.zeros((Nptsx1,Nptsy1), dtype=np.complex_)
faa=np.zeros((Nptsx1,Nptsy1), dtype=np.complex_)
fbb=np.zeros((Nptsx1,Nptsy1), dtype=np.complex_)
f0abb=np.zeros((Nptsx1,Nptsy1), dtype=np.complex_)
osno=np.zeros((Nptsx1,Nptsy1), dtype=np.complex_)
baza=np.zeros((Nptsx1,Nptsy1), dtype=np.complex_)

n=0
j=0
while n*Nptsx<L:
    for i in h:
        f00[j+0.5*(Nptsx1-Nptsx)][i+0.5*(Nptsx1-Nptsx)]=vekt[i+n*Nptsx][k]
        f0a[j+0.5*(Nptsx1-Nptsx)+Nptsx*ax/xmax][i+0.5*(Nptsx1-Nptsx)]=vekt[i+n*Nptsx][k]
        faa[j+0.5*(Nptsx1-Nptsx)+Nptsx*ax/xmax][i+0.5*(Nptsx1-Nptsx)+Nptsy*ay/ymax]
=vekt[i+n*Nptsx][k]
        fbb[j+0.5*(Nptsx1-Nptsx)+Nptsx*bx/xmax][i+0.5*(Nptsx1-Nptsx)+Nptsy*by/ymax]
=vekt1[i+n*Nptsx][g]
    n+=1
    j+=1

for i in h:
    for j in h:
        osno[i+0.5*(Nptsx1-Nptsx)][j+0.5*(Nptsx1-Nptsx)]=-k0*O[i][j]/n0
        baza[j+0.5*(Nptsx1-Nptsx)+Nptsx*bx/xmax][i+0.5*(Nptsx1-Nptsx)+Nptsy*by/ymax]=
-k0*B[i][j]/n0
```

```
def latt(x, y, m, n, n0L, ax, ay, bx, by, delta, sigma):
   return n0L*np.exp(-0.5*(x-ax*m)**2/sigma**2-0.5*(y-ay*n)**2/sigma**2)
+(n0L+delta)*np.exp(-0.5*(x-ax*m-bx)**2/sigma**2-0.5*(y-ay*n-by)**2/sigma**2)

brvalovx=8
brvalovy=8
m1=np.arange(0,brvalovx,1)
n1=np.arange(0,brvalovy,1)

Xmax=brvalovx*ax
Xstep=(Xmax-xmin)/Nptsx1
x1=np.arange(xmin, Xmax-Xstep, Xstep)
Ymax=brvalovy*ay
Ystep=(Ymax-ymin)/Nptsy1
y1=np.arange(ymin, Ymax-Ystep, Ystep)

X1,Y1,M1,N1=np.meshgrid(x1, y1, m1, n1, indexing='xy')

resetka1=-k0*(np.sum(latt(X1, Y1, M1, N1, n0L, ax, ay, bx, by, delta,
    sigma), axis=(2,3)))/n0-osno
resetka2=-k0*(np.sum(latt(X1, Y1, M1, N1, n0L, ax, ay, bx, by, delta,
    sigma), axis=(2,3)))/n0-baza

produkt=np.conj(f0a)*resetka1*f00
produkt1=np.conj(fbb)*resetka2*f00
produkt2=np.conj(fbb)*resetka2*f0a
produkt3=np.conj(f00)*resetka1*fbb
produkt4=np.conj(fbb)*f0a
produkt5=np.conj(f0a)*f00
produkt6=np.conj(fbb)*f00
produkt7=np.conj(f00)*resetka1*f00

J=integ.trapz(integ.trapz(produkt,x1),y1)
K=integ.trapz(integ.trapz(produkt1,x1),y1)
Kcrtica=integ.trapz(integ.trapz(produkt2,x1),y1)
K2=integ.trapz(integ.trapz(produkt3,x1),y1)
S1=integ.trapz(integ.trapz(produkt6,x1),y1)
S2=integ.trapz(integ.trapz(produkt4,x1),y1)
S3=integ.trapz(integ.trapz(produkt5,x1),y1)
dbeta=integ.trapz(integ.trapz(produkt7,x1),y1)

print()
print('Koeficijenti preskoka:')
print('(00) i (0a) = {}'.format(J))
```

```
print('(00) i (bb) = {}'.format(K))
print('(bb) i (0a) = {}'.format(Kcrtica))
print()
print('S-ovi')
print('S1={}'.format(S1))
print('S2={}'.format(S2))
print('S3={}'.format(S3))
print('dbeta={}'.format(dbeta))

plt.figure()
plt.imshow(np.real(f00), origin='lower',extent=[xmin,80,ymin,80])
plt.colorbar()
plt.show()
```

Dodatak B Usporedba TBA modela i numeričkog rješenja

```
#komentirani dijelovi koda odgovaraju slucaju u kojem su ukljuceni preskoci
    izmedju drugih susjeda
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from lmfit import minimize, Parameters #Ova bibilioteka nije dio paketa
    Anaconda
Npts=128
xmin=0
xmax=20
xstep=(xmax-xmin)/Npts
x=np.arange(xmin,xmax,xstep)

broj=15
bct=np.arange(-broj,broj+1,1)
X,Y,M,N=np.meshgrid(x,x,bct,bct,indexing='xy')

a=20
n0L=8*10**(-4)
sigma=0.1*a*0.75
bx=0.3*a
by=0.3*a
n0=2.3
lamb=500*10**(-3)
k0=2*np.pi*n0/lamb
delta=0
Gx=Gy=np.pi/a

def kern(x,y,m,n,Gx,Gy):
    return np.exp(1j*(m*Gx*x+n*Gy*y))

#Izgled jedinicne celije; treba komentirati funkcije kanali asimetricni za
    resetku cilindricnih valovoda, celija i kanal za resetku asimetricnih te
    asimetricni za resetku vezanu kanalicima
def celija(x,y,n0L,sigma,a,bx,by):
    return -k0*n0L*(np.exp(-0.5*x**2/sigma**2-0.5*y**2/sigma**2)
+np.exp(-0.5*(x-a)**2/sigma**2-0.5*y**2/sigma**2)
+np.exp(-0.5*x**2/sigma**2-0.5*(y-a)**2/sigma**2)
+np.exp(-0.5*(x-a)**2/sigma**2-0.5*(y-a)**2/sigma**2))/n0
-k0*(n0L+delta)*np.exp(-0.5*(x-bx)**2/sigma**2-0.5*(y-by)**2/sigma**2)/n0
```

```
def kanal(x,y,n0L,sigma,a,bx,by):
    exp1=-0.5*(x-a)**2/sigma**2
    exp2=-0.5*(y-a)**2/sigma**2
    exp3=-0.5*(x)**2/sigma**2
    exp4=-0.5*(y)**2/sigma**2
    exp1b=-0.5*(x-a-bx)**2/sigma**2
    exp2b=-0.5*(y-a-by)**2/sigma**2
    exp3b=-0.5*(x-bx)**2/sigma**2
    exp4b=-0.5*(y-by)**2/sigma**2
    kor1=-0.5*(x)**2/sigma**2-0.5*(y)**2/sigma**2
    kor2=-0.5*(x-bx)**2/sigma**2-0.5*(y-by)**2/sigma**2
    kor3=-0.5*(x-bx)**2/sigma**2-0.5*(y)**2/sigma**2
    kor4=-0.5*(x)**2/sigma**2-0.5*(y-by)**2/sigma**2
    kor5=-0.5*(x-a)**2/sigma**2-0.5*(y)**2/sigma**2
    kor6=-0.5*(x-a)**2/sigma**2-0.5*(y-by)**2/sigma**2
    kor7=-0.5*(x)**2/sigma**2-0.5*(y-a)**2/sigma**2
    kor8=-0.5*(x-bx)**2/sigma**2-0.5*(y-a)**2/sigma**2
    kor9=-0.5*(x-a)**2/sigma**2-0.5*(y-a)**2/sigma**2
    return -k0*n0L*(np.exp(exp1)+np.exp(exp2)+np.exp(exp3)+np.exp(exp4)+
np.exp(exp1b)+np.exp(exp2b)+np.exp(exp3b)+np.exp(exp4b)
-np.exp(kor1)-np.exp(kor2)-np.exp(kor3)-np.exp(kor4)-np.exp(kor5)-np.exp(kor6)
-np.exp(kor7)-np.exp(kor8)-np.exp(kor9))/n0

def asimetricni(x,y,n0L,sigmax,sigmay,a,bx,by):
    dl=np.exp(-0.5*x**2/sigmax**2-0.5*y**2/sigmay**2)
+np.exp(-0.5*x**2/sigmay**2-0.5*y**2/sigmax**2)
    gl=np.exp(-0.5*x**2/sigmax**2-0.5*(y-a)**2/sigmay**2)
+np.exp(-0.5*x**2/sigmay**2-0.5*(y-a)**2/sigmax**2)
    dd=np.exp(-0.5*(x-a)**2/sigmax**2-0.5*y**2/sigmay**2)
+np.exp(-0.5*(x-a)**2/sigmay**2-0.5*y**2/sigmax**2)
    gd=np.exp(-0.5*(x-a)**2/sigmax**2-0.5*(y-a)**2/sigmay**2)
+np.exp(-0.5*(x-a)**2/sigmay**2-0.5*(y-a)**2/sigmax**2)
    ba=np.exp(-0.5*(x-bx)**2/sigmax**2-0.5*(y-by)**2/sigmay**2)
+np.exp(-0.5*(x-bx)**2/sigmay**2-0.5*(y-by)**2/sigmax**2)
    return -k0*n0L*(dl+gl+dd+gd+ba)/n0

#uvrstiti nekomentirane funkcije i zeljene parametre umjesto fje
vfour=(np.sum(fje)*kern(X,Y,M,N,2*Gx,2*Gy),axis=(0,1))*xstep**2)/(xmax-xmin)**2

X1,Y1=np.meshgrid(x,x,indexing='xy')
slika=celija(X1,Y1,0.6*n0L,sigma,a,bx,by)+kanal(X1,Y1,0.4*n0L,0.1*sigma,a,bx,by)
plt.imshow(slika,origin='lower',extent=[xmin,xmax,xmin,xmax],cmap='bone')
plt.show()
```

```
Nk=10
kxpath1=np.arange(0,Gx,Gx/Nk)
kxpath2=Gx*np.ones(Nk)
kxpath3=np.arange(Gx,0,-Gx/Nk)
kxpath=np.concatenate((kxpath1,kxpath2,kxpath3))

kypath1=np.zeros(Nk)
kypath2=np.arange(0,Gy,Gy/Nk)
kypath3=np.arange(Gy,0,-Gy/Nk)
kypath=np.concatenate((kypath1,kypath2,kypath3))

path=np.vstack((kxpath,kypath))

duljina=len(kxpath)
kspace=np.arange(0,duljina,1)
b=np.zeros((duljina,2))
dim=len(bct)**2

for p in kspace:
    kx=kxpath[p]
    ky=kypath[p]
    matrica=np.zeros((dim,dim), dtype=np.complex_)
    for k in np.arange(0,dim,1):
        for l in np.arange(0,dim,1):
            i=-broj+np.floor(k/(2*broj+1))
            m=-broj+np.floor(l/(2*broj+1))
            j=-broj+np.fmod(k,2*broj+1)
            n=-broj+np.fmod(l,2*broj+1)
            if i-m+broj+1>=0 and i-m+broj+1<2*broj+1 and j-n+broj+1>=0 and
                j-n+broj+1<2*broj+1:
                matrica[k,l]=vfour[i-m+broj+1,j-n+broj+1]
            if k==l:
                matrica[k,l]=matrica[k,l]+((kx+2*i*Gx)**2+(ky+2*j*Gy)**2)/(2*k0)
    beta=np.linalg.eigvalsh(matrica)
    b[p,:]=beta[0:2]
    print(p)

beta0=-0.00036730828493407514
Jc=-4.261167089917892e-05
Kc=-9.593639476349126e-05
Sc=0.0367926080518
Sp=0.0825526076997
dbeta=-6.788535441424382e-05
```

```
parametri=Parameters()
parametri.add('J', value=Jc, max=0)
parametri.add('J1', value=Kc, max=0)
#parametri.add('J2',value=Jp, max=0)
parametri.add('b0', value=beta0, max=0)
parametri.add('db', value=dbeta, max=0)
parametri.add('S', value=Sc, min=0,max=10**(-1))
parametri.add('S1', value=Sp, min=0, max=10**(-1))
#parametri.add('S2', value=Sc, min=0, max=10**(-1))


def qbtba1(kxky,J,K,beta0,dbeta,S,S1):
    kx,ky=kxky
    ZAG=np.cos(kx*a)+np.cos(ky*a)
    A=(1+2*S*ZAG)**2-S1**2
    B=-2*((1+2*S*ZAG)*(dbeta+2*J*ZAG)-S1*K)
    C=(dbeta+2*J*ZAG)**2-K**2
#    COS=np.cos(0.5*(kx-ky)*a)**2
#    A=(1+2*S*ZAG)**2-S1**2-2*S1*S2*ZAG-4*COS*S2**2
#
    B=-2*(1+2*S*ZAG)*(dbeta+2*J*ZAG)+2*S1*K+2*S1*J2*ZAG+2*S2*K*ZAG+8*S2*J2*COS
#    C=(dbeta+2*J*ZAG)**2-K**2-2*K*J2*ZAG-4*COS*J2**2
    return 0.5*(-B-np.sqrt(B**2-4*A*C))/A+beta0

def qbtba2(kxky,J,K,beta0,dbeta,S,S1):
    kx,ky=kxky
    ZAG=np.cos(kx*a)+np.cos(ky*a)
    A=(1+2*S*ZAG)**2-S1**2
    B=-2*((1+2*S*ZAG)*(dbeta+2*J*ZAG)-S1*K)
    C=(dbeta+2*J*ZAG)**2-K**2
#    COS=np.cos(0.5*(kx-ky)*a)**2
#    A=(1+2*S*ZAG)**2-S1**2-2*S1*S2*ZAG-4*COS*S2**2
#
    B=-2*(1+2*S*ZAG)*(dbeta+2*J*ZAG)+2*S1*K+2*S1*J2*ZAG+2*S2*K*ZAG+8*S2*J2*COS
#    C=(dbeta+2*J*ZAG)**2-K**2-2*K*J2*ZAG-4*COS*J2**2
    return 0.5*(-B+np.sqrt(B**2-4*A*C))/A+beta0


def fit_fja(parametri,kxky,data):
    kx,ky=kxky
    J = parametri['J'].value
    K = parametri['J1'].value
#    J2= parametri['J2'].value
    beta0 = parametri['b0'].value
```

```
    dbeta=parametri['db'].value
    S = parametri['S'].value
    S1 = parametri['S1'].value
#    S2=parametri['S2'].value
    ZAG=np.cos(kx*a)+np.cos(ky*a)
    ZAG1=np.cos((kx-100)*a)+np.cos((ky-100)*a)
    A=(1+2*S*ZAG)**2-S1**2
    B=-2*((1+2*S*ZAG)*(dbeta+2*J*ZAG)-S1*K)
    C=(dbeta+2*J*ZAG)**2-K**2
    A1=(1+2*S*ZAG1)**2-S1**2
    B1=-2*((1+2*S*ZAG1)*(dbeta+2*J*ZAG1)-S1*K)
    C1=(dbeta+2*J*ZAG1)**2-K**2
#    COS=np.cos(0.5*(kx-ky)*a)**2
#    A=(1+2*S*ZAG)**2-S1**2-2*S1*S2*ZAG-4*COS*S2**2
#
    B=-2*(1+2*S*ZAG)*(dbeta+2*J*ZAG)+2*S1*K+2*S1*J2*ZAG+2*S2*K*ZAG+8*S2*J2*COS
#    C=(dbeta+2*J*ZAG)**2-K**2-2*K*J2*ZAG-4*COS*J2**2
#    A1=(1+2*S*ZAG1)**2-S1**2-2*S1*S2*ZAG1-4*COS*S2**2
#
    B1=-2*(1+2*S*ZAG1)*(dbeta+2*J*ZAG1)+2*S1*K+2*S1*J2*ZAG1+2*S2*K*ZAG1+8*S2*J2*COS
#    C1=(dbeta+2*J*ZAG1)**2-K**2-2*K*J2*ZAG1-4*COS*J2**2
    funk1=0.5*(-B-np.sqrt(B**2-4*A*C))/A
    funk2=0.5*(-B1+np.sqrt(B1**2-4*A1*C1))/A1
    theta1=0.25*(np.sign(99-kx)+1)*(np.sign(99-ky)+1)
    theta2=0.25*(np.sign(kx-99)+1)*(np.sign(ky-99)+1)
    tba=funk1*theta1+funk2*theta2+beta0
    return tba-data

npath=np.concatenate((path,path+100),axis=1)
data=np.concatenate((b[:,0],b[:,1]))

koef = minimize(fit_fja, parametri, args=(npath,data), method='slsqp')
print(koef.params)

line=qbtba1(path,koef.params['J'],koef.params['J1'],koef.params['b0'],koef.params['db'],
koef.params['S'],koef.params['S1'])
line1=qbtba2(path,koef.params['J'],koef.params['J1'],koef.params['b0'],koef.params['db'],
koef.params['S'],koef.params['S1'])

#line=qbtba1(path,koef.params['J'],koef.params['J1'],koef.params['J2'],koef.params['b0'],
koef.params['db'],koef.params['S'],koef.params['S1'],koef.params['S2'])
#line1=qbtba2(path,koef.params['J'],koef.params['J1'],koef.params['J2'],
koef.params['b0'],koef.params['db'],koef.params['S'],koef.params['S1'],koef.params['S2'])
```

```
plt.figure()
plt.plot(kspace,b[:,0],'o')
plt.plot(kspace,b[:,1],'o')
plt.plot(kspace,line,linestyle='--')
plt.plot(kspace,line1,linestyle='--')
plt.xticks((0,10,20,30),(r'$\Gamma$','X','M',r'$\Gamma$'))
plt.xlabel(r'$k$')
plt.ylabel(r'$\beta$')
plt.show()
```

Literatura

[1] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade *Photonic Crystals - Molding The Flow Of Light* Princeton University Press, Princeton, 2008

[2] C. Song, L. K. Gallos, S. Havlin, H. A. Makse *How to calculate the fractal dimension of a complex network: the boc covering algorithm* J. Stat. Mech. Theor. Exp. 2007, 03, P03006 (2007)

[3] D. Jukić, H. Buljan *Four-dimensional photonic lattices and discrete tessaract solitons*, Phys. Rev. A 87, 013814 (2013)

[4] L. Daqing, K. Kosmidis, A. Bunde, and S. Havlin *Dimension of spatially embedded networks*, Nat. Phys. 7, 481 (2011).

[5] P. W. Milonni, J. H. Eberly *Laser Physics*, J. Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2010

[6] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin *Solid state physics* Saunders College, Philadelphia, 1988

[7] Bo Zhen, Chia Wei Hsu, Ling Lu, A. Douglas Stone, and Marin Soljačić *Topological Nature of Optical Bound States in the Continuum* Phys. Rev. Lett. 113, 257401

[8] T. Dubček et al. *The Harper - Hofstadter Hamiltonian and conical diffraction in photonic lattices with grating assisted tunneling* New J. Phys. 17, 125002 (2015)

[9] H. Miyake et al. *Realizing the Harper Hamiltonian with Laser - Assisted Tunneling in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. 111, 185302 (2013)