# Renormalizacijska grupa

**Mađor-Božinović, Marija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:295963

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-03-29**




*Repository / Repozitorij:*

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb









SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Marija Mađor-Božinović

# RENORMALIZACIJSKA GRUPA

Diplomski rad

Zagreb, MMXVI

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

**Marija Mađor-Božinović**

Diplomski rad

# Renormalizacijska grupa

Voditelj diplomskog rada: Amon Ilakovac

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, MMXVI

Neizmjerno hvala profesoru Amonu Ilakovcu na mentorstvu i na svom znanju prenesenom u proteklim godinama.

## Sažetak

Tema obuhvaća primjenu renormalizacijske grupe na kvantnu elektrodinamiku (QED), kvantnu kromodinamiku (QCD) i standardni model (SM). Izračun divergentnih dijagrama za prvi red računa smetnje proveden je dimenzionalnom regularizacijom, u MS-shemi, za renormaliziranu perturbacijsku teoriju. Izračunate su beta funkcije i efektivne konstante vezanja za QED, QCD i SM na nivou jedne petlje. Za SM i minimalni supersimetrični standardni model (MSSM) ispitana je mogućnost ujedinjenja konstanti vezanja.

# Renormalization Group


## Abstract

The thesis includes the application of the renormalization group to quantum electrodynamics (QED), quantum chromodynamics (QCD) and the Standard Model (SM). One-loop level calculation of radiative corrections was made using dimensional regularization in the MS scheme, employing the renormalized perturbation theory. The beta functions and the effective coupling constants of QED, QCD and the SM were calculated at one-loop level. The unification of the coupling constants of the SM and the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) was tested.

# Sadržaj

**1 Uvod** **1**

**2 Teorijski okviri renormalizacijske grupe** **3**
2.1 Opća grupna svojstva . . . . . 3
2.2 Klizna skala . . . . . 3
2.3 Minimalna suptrakcija . . . . . 5

**3 Renormalizacijske grupne jednadžbe (RGEs) za QED** **7**
3.1 Renormalizirana perturbacijska teorija na primjeru QED-a . . . . . 7
3.2 Radijativne korekcije QED-a na nivou jedne petlje . . . . . 11
3.3 RGE i efektivna konstanta vezanja za QED . . . . . 13

**4 Renormalizacijske grupne jednadžbe (RGEs) za QCD** **15**
4.1 Struktura teorije i baždarenje za duhove . . . . . 15
4.2 Renormalizirana perturbacijska teorija za QCD . . . . . 19
4.3 Radijativne korekcije QCD-a na nivou jedne petlje . . . . . 20
4.4 RGEs i efektivna konstanta vezanja za QCD . . . . . 24
4.5 RGEs i ujedinjenje konstanti vezanja . . . . . 26

**5 Renormalizacijske grupne jednadžbe (RGEs) za standardni model** **27**
5.1 Struktura teorije . . . . . 27
5.2 Renormalizacijska perturbacijska teorija za standardni model . . . . . 32
5.3 Radijativne korekcije standardnog modela na nivou jedne petlje I (vlastite energije) . . . . . 36
5.4 Radijativne korekcije standardnog modela na nivou jedne petlje II (vrhovi) . . . . . 45
5.5 Provjera i popis renormalizacijskih faktora standardnog modela . . . . 62
5.6 RGEs i efektivne konstante vezanja za standardni model . . . . . 65
5.7 MSSM i ujedinjenje konstanti vezanja . . . . . 71

**6 Zaključak** **74**

**Dodaci** **75**

**A Osnovni alati u računanju amplituda** **75**
A.1 Feynmanova parametrizacija . . . . . 75
A.2 Wickova rotacija . . . . . 75
A.3 Dimenzionalna regularizacija . . . . . 75

**B Feynmanova pravila** **76**
B.1 Kvantna elektrodinamika (QED) . . . . . 76
B.2 Kvantna kromodinamika (QCD) . . . . . 76

B.3 Standardni model (SM) . . . . . 77

**C SU(N) algebra** **79**

# 1 Uvod

Tehnike renormalizacije u kvantnu teoriju polja uvedene su zbog pojave divergencija na visokim i niskim energijama, koje su se prirodno pojavile zbog uvođenja u kvantnu teoriju specijalne teorije relativnosti, koja sa sobom donosi beskonačan broj stupnjeva slobode. Divergencije od interesa jesu ultraljubičaste (UV) divergencije, uzrokovane velikim fluktuacijama polja na višim energijama. Povijesno je otkriće divergencija 1930-ih prvo dovelo do zaključka da je potrebno mijenjati fundamentalne fizikalne principe u svrhu njihovog otklanjanja. Desetak godina kasnije, Feynman, Dyson i ostali uveli su renormalizaciju za Abelove teorije koja je rezultirala u fizikalnim rezultatima, tako što su divergencije implementirali u redefiniciju fizikalnih veličina. U okviru tog pristupa predviđen je g-faktor elektrona na točnost od dvanaest decimala, što je jedan od najpreciznijih teorijskih rezultata u povijesti fizike. Ovakav uspjeh nije se uklapao u sliku renormalizacije kao tehničkog alata za otklanjanje divergencija. Uskoro je uslijedio i dokaz t'Hoofta o renormalizabilnosti Yang-Millsovih teorija. Uvođenjem renormalizacijske grupe renormalizacija je dobila status samokonzistentnog mehanizma koji opisuje fiziku u širokom rasponu skale energije. Danas ju shvaćamo kao posljedicu principa koji kaže da u fizikalnom procesu na nekoj zadanoj energiji ne sudjeluju stupnjevi slobode viših energija. Općenito, lagranžijan bilo koje teorije možemo rastaviti na dva dijela

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu) + \Delta\mathcal{L}(\mu),$$

gdje je $\mu$ renormalizacijska točka ili skala. Promjena skale mijenja parametre teorije, a veza skale i parametara opisana je renormalizacijskom grupom (RG). Drugim riječima, RG opisuje ovisnost fizikalnog sistema o energiji.
Renormalizacija je reparametrizacija teorije koja fizikalne veličine čini konačnima, red po red u perturbacijskoj teoriji. Konkretan odabir renormaliziranih parametara definira shemu renormalizacije. U ovom radu gole i renormalizirane parametre povezali smo uvođenjem kontračlanova, drugim riječima, radimo u okviru renormalizirane perturbacijske teorije (RPT). Kontračlanove smo fiksirali tako da se sastoje samo od beskonačnih članova koji čine teoriju konačnom, koristeći MS-shemu, koja implicira uvođenje skale mase $\mu$ koja ulazi u proces dimenzionalne regularizacije, i dodatno, drži konstante vezanja bezdimenzionalnima. Kontračlanovi u sebi sadrže renormalizacijske faktore koje smo izračunali u prvom redu računa smetnje. Nakon izračuna faktora uvrštavali smo ih u vezu gole i renormalizirane konstante vezanja, i derivirajući izraz po skali $\mu$ dobili smo tzv. beta funkcije, koje integracijom daju ovisnost konstanti vezanja o teoriji. Ispostavilo se da su beta funkcije za prvi red računa smetnje definirane polom prvog reda, pa smo samo taj doprinos izdvajali iz korekcija. Razlog zašto je dana prednost MS-shemi, umjesto, recimo, često korištenoj on-shell fizikalnoj shemi (čije su renormalizirane mase i naboji jednaki fizikalnima) leži u činjenici da su u MS-shemi beta funkcije neovisne o skali, čime se daju trivijalno integrirati.

Nakon teorijskog uvoda u renormalizacijsku grupu u poglavlju 2, renormalizacijsku grupu primijenili smo na kvantnu elektrodinamiku (QED), kvantnu kromodinamiku (QCD) i standardni model (SM), redom u poglavljima 3, 4 i 5. U poglavlju 2 objasnili smo uvođenje renormalizacijskih faktora, nakon čega smo primjenom RPT-a dobili Wardov identitet i vezu golog i renormaliziranog naboja. Nadalje smo proveli standardnu proceduru, iz korekcija u prvom redu izdvojili smo renormalizacijske faktore, iz njih beta funkciju i konačno iz beta funkcije efektivnu konstantu vezanja. U poglavljima 3 i 4 prije standardne procedure objasnili smo strukture teorija, s naglaskom na ne-Abelovu prirodu teorija i uvođenje duhova. U Yang-Millsovim teorijama veze među renormalizacijskim faktorima nazivamo Slavnov-Taylorovim identitetima, koje smo koristili za provjeru točnosti renormalizacijskih faktora. U poglavlju 3 na samom smo kraju uveli primjenu renormalizacijske grupe na ispitivanje ujedinjenja konstanti vezanja u teoriji. Isti postupak ponovljen je za SM i minimalni supersimetrični standardni model (MSSM) na samom kraju 5. poglavlja.

# 2 Teorijski okviri renormalizacijske grupe

## *2.1 Opća grupna svojstva*

Renormalizacijska invarijantnost podrazumijeva da su fizikalne opservable neovisne o izboru renormalizacije koja se bira za teorijske proračune [1]. Pretpostavimo da biramo određenu renormalizacijsku shemu $R$ i neka je $\Gamma_R$ R-renormalizirana Greenova funkcija. Tada je ona sa golom (eng. *bare*) Greenovom funkcijom povezana kao

$$\Gamma_R(...) = Z(R)\Gamma(...), \tag{2.1}$$

gdje $Z(R)$ podrazumijeva pripadajući produkt renormalizacijskih konstanti za R-renormalizaciju. Analogno tome za neku novu renormalizacijsku shemu $R'$ vrijedi

$$\Gamma_{R'}(...) = Z(R')\Gamma(...). \tag{2.2}$$

Iz (2.1) i (2.2) definiramo vezu između dvije renormalizacijske sheme kao

$$\Gamma_{R'}(...) = Z(R', R)\Gamma_R(...), \tag{2.3}$$

gdje je

$$Z(R', R) = \frac{Z(R')}{Z(R)}. \tag{2.4}$$

Promotrimo sada set svih mogućih elemenata $Z(R', R)$. U takvom setu vrijede svojstva

$$Z(R'', R) = Z(R'', R')Z(R', R), \tag{2.5a}$$
$$Z^{-1}(R', R) = Z(R, R'), \tag{2.5b}$$
$$Z(R, R) = 1, \tag{2.5c}$$

koja redom predstavljaju pravilo kompozicije, postojanje inverza i jediničnog elementa. Produkt (2.5a) oblika $Z(R_i, R_j)Z(R_k, R_l)$ element je grupe isključivo u slučaju kada je $j = k$. Stoga set različitih renormalizacijskih shema tvori grupoidnu strukturu [1].

## *2.2 Klizna skala*

Model koji opisuje sistem elementarnih čestica određen je svojim lagranžijanom, iz kojeg se izvođenjem Feynmanovih pravila konstruiraju sva polja, propagatori i vrhovi koje teorija sadrži. Uz svaki vrh stoji pripadajuća konstanta vezanja koja spada u parametre teorije. Pod renormalizacijskom grupom u užem smislu podrazumijevamo metode koje omogućavaju proučavanje tih parametara na različitim skalama energije. Od znanstvene je važnosti proučavati kako se parametri teorije ponašaju na

skalama koje su (trenutno) nedostupne eksperimentu. Tu se u prvom redu podrazumijevaju visoke skale energija, odnosno male udaljenosti.
Renormalizacijsku grupu uveli su Gell-Mann i Low zbog nemogućnosti funkcioniranja perturbacijske teorije u QED-u na jako visokim energijama [2]. Primjerice, amplituda dijagrama vakuumske polarizacije u sebi sadrži faktor

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \supseteq \left(\alpha ln\frac{q^2}{m_e^2}\right)^n, \tag{2.6}$$

što znači da perturbacijska teorija na velikim prijenosima impulsa $q$ ne može funkcionirati iako je konstanta fine strukture $\alpha$ mala. U takvim slučajevima koristi se modificirana perturbacijska teorija koja redefinira konstante vezanja, ne drži ih fiksnima, nego ih uvodi kao parametre $g_\mu$ definirane na kliznoj skali mase $\mu$ (koja ne ovisi o masama čestica). Ako se $\mu$ izabere da bude reda veličine energije $E$ koja je tipična za promatrani proces, logaritamski faktor u npr. (2.6) više ne divergira. Ako je $g_\mu$ mali, ponovno možemo koristiti perturbacijski račun.
Procedura je sljedeća: ako je poznata konstanta vezanja na skali $\mu$, perturbacijskom teorijom možemo izračunati amplitude na energiji $\mu + d\mu$ i koristiti ih za račun konstanti vezanja na istoj skali. Integriranjem dobivene diferencijalne jednadžbe moguće je povezati konstante vezanja na skali koju proučavamo s njihovim uobičajeno definiranim vrijednostima. Efektivno, pomicanjem skale $\mu$ mijenja se raspon stupnjeva slobode koji se uzimaju u obzir u konkretnim računima. Metoda renormalizacijske grupe ilustracija je principa po kojem treba eliminirati sve stupnjeve slobode koji se pojavljuju na energijama višim od one na kojoj računamo.

Razmotrimo sada kliznu skalu u detalje. Definiramo renormaliziranu konstantu vezanja na skali $\mu$ koja ne ovisi o skali $m$ na kojoj se nalaze fizikalne mase u teoriji (barem za slučaj $\mu \gg m$). Tada parametri teorije (za koje smo sigurni da nisu IR-divergentni) mogu biti prikazani kao funkcije od $\mu$ i $g_\mu$. Takva funkcija, npr. ukupni udarni presjek, ima oblik [2]

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D\Gamma\Big(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\Big). \tag{2.7}$$

U (2.7) $x$ podrazumijeva sve ostale bezdimenzionalne veličine o kojima $\Gamma$ može ovisiti, npr. prostorne kuteve. Kako je $\mu$ potpuno proizvoljan parametar, biramo točku $\mu = E$ i tada (2.7) postaje

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D\Gamma\Big(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\Big). \tag{2.8}$$

Ovim izborom eliminiramo singularitete kada je $m = 0$ jer $g_E$ ne ovisi o $m$, zbog čega se ne pojavljuju divergentni logaritmi i moguće je koristiti perturbacijsku teoriju. Preostaje izračunati $g_E$, što činimo u diskretnim koracima: $g_\mu$ može se izračunati preko $g_R$ ako je omjer $\mu/m$ blizu jedinice, $g_{\mu'}$ može se izračunati preko $g_\mu$ ako je omjer $\mu'/\mu$ također infinitezimalno oko jedinice, i tako redom sve do $g_E$. Diskretne korake pustimo u nulu čime dobivamo kontinuiran tok od polazne vrijednosti konstante vezanja

$g_R$ do $g_E$, konstante vezanja na nekoj skali energije koja nas zanima (najčešće pod tim podrazumijevamo visoke energije nedostupne eksperimentu). Klizna konstanta vezanja $g_{\mu'}$ funkcija je oblika

$$g_{\mu'} = G\Big(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}\Big). \tag{2.9}$$

Provodimo standarnu proceduru, deriviramo (2.9) po $\mu'$ i izvrijednimo u $\mu' = \mu$ čime se dobije diferencijalna jednadžba

$$\mu\frac{d}{d\mu}g_\mu = \frac{\partial}{\partial z}G\Big(g_\mu, z, \frac{m}{\mu}\Big)\Big|_{z=1} \equiv \beta\Big(g_\mu, \frac{m}{\mu}\Big). \tag{2.10}$$

Za $\mu \gg m$ jednadžba se pojednostavljuje i ima oblik

$$\mu\frac{d}{d\mu}g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu), \tag{2.11}$$

i u literaturi je poznata kao Callan-Symanzikova jednadžba [2]. Separacijom varijabli jednostavno dolazimo do rješenja koje glasi

$$ln\frac{E}{M} = \int_{g_M}^{g_E}\frac{dg}{\beta(g)}, \tag{2.12}$$

pri čemu je važno naglasiti da integracija kreće od skale $\mu = M$ koja se bira tako da bude dovoljno velika da mase fizikalnih čestica budu zanemarive i dovoljno mala da logaritmi ne divergiraju kako bi bilo opravdano koristiti perturbacijski račun. Razmatranja za $\beta$-funkciju ne ovise neposredno o perturbacijskoj teoriji, nego se ona koristi kao metoda za izračune.

## *2.3 Minimalna suptrakcija*

Dimenzionalna regularizacija kao jedna od najmoćnijih metoda regularizacije u kvantnoj teoriji polja čuva baždarnu invarijantnost i, što je važno, daje alternativnu definiciju za kliznu skalu.

Pravilo je da se UV-divergencije javljaju kao polovi u amplitudama kada se dimenzija prostor-vremena $D$ približava svojoj fizikalnoj vrijednosti $D \to 4$. Da bi ovi polovi bili poništeni, gole konstante vezanja $g_B^l$ moraju imati polove iste vrste sa reziduumima fiksiranima na način da su fizikalne amplitude konačne kada $D \to 4$. Kako je prvi uvjet koji konstrukcija lagranžijana mora zadovoljiti taj da umnožak svakog člana mora biti dimenzije $D$ (što proizlazi iz bezdimenzionalnosti akcije koja je integral lagranžijana po D-dimenzionalnom prostor-vremenu) ako su fizikalne konstante vezanja bezdimenzionalne, moramo napraviti preskripciju (reskaliranje) golih konstanti vezanja $g_B^l(D)$, koje nisu nužno bezdimenzionalne, nego su dimenzije $\Delta_l(D)$. Stoga uvodimo bezdimenzionalnu veličinu [2]

$$g_B^l(D) \to g_B^l(D)\mu^{-\Delta_l(D)}, \tag{2.13}$$

gdje je $\mu$ klizna skala dimenzije mase. Sada reskalirana gola konstanta vezanja može biti prikazana kao suma fizikalne konstante vezanja i polova do beskonačnog reda

$$g_B^l(D)\mu^{-\Delta_l(D)} = g^l(\mu, D) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n} b_n^l(g(\mu, D)). \tag{2.14}$$

Koeficijenti $b_n$ određeni su uvjetom da se u fizikalnim amplitudama poništavaju singulariteti za $D \to 4$. Sada deriviramo (2.14) po $\mu$ i pomnožimo cijeli izraz sa $\mu$ da dobijemo $\beta$-funkciju, čime izraz uz pokrate

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^l(\mu, D) = \beta^l(g, D), \tag{2.15a}$$

$$b_{n,m}^l(g) = \frac{\partial b_n^l(g)}{\partial g^m}, \tag{2.15b}$$

i zamjenu LHS sa RHS u (2.14) postaje

$$-\Delta^l(D)\Big(g^l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n} b_n^l(g)\Big) = \beta^l(g, D) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m \frac{1}{(D-4)^n} b_{n,m}^l(g)\beta^m(g, D). \tag{2.16}$$

Vidimo da je $\beta^l$ funkcija ne samo svoje konstante vezanja $g^l(\mu, D)$, nego svih konstanti $g^m(\mu, D)$ koje se javljaju u teoriji. Sada koristimo činjenicu da je $\Delta_l(D)$ uvijek linearna funkcija u $D$ (npr. $D = 4 - \epsilon$), što znači da možemo uzeti

$$\Delta_l(D) = \Delta_l + \rho_l(D-4). \tag{2.17}$$

Lijeva strana jednadžbe (2.16) uz korištenje (2.17) i djelomičnu ekstrakciju člana $n = 1$ iz sume postaje

$$-\Big[\Delta_l g^l + b_1^l(g)\rho^l\Big] - \rho_l g^l(D-4) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n}\Big[\rho_l b_{n+1}^l + \Delta_l b_n^l(g)\Big]. \tag{2.18}$$

U (2.18) vidimo da je najviša potencija s kojom se pojavljuje $D$ jedan, što implicira da i desna strana iste jednadžbe, koja sadrži $\beta$, mora biti linearna u $D$, odnosno

$$\beta^l(g, D) = \beta^l(g) + (D-4)\alpha^l(g). \tag{2.19}$$

Sada uspoređivanjem članova na lijevoj i desnoj strani dobivamo relaciju

$$\alpha^l(g) = -\rho_l g^l, \tag{2.20}$$

i jednakost za $\beta$ koja je od ključne važnosti, a dobijemo je uzimajući članove koji stoje uz nultu potenciju faktora $D-4$, i ona glasi

$$\beta_l(g) = -\Delta_l g^l - b_1^l(g)\rho_l + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m b_{1,m}^l(g)\rho_m g^m. \tag{2.21}$$

Preostali niži članovi potencija daju rekurzivnu relaciju

$$\rho_l b_{n+1}^l(g) - \sum_m \rho_m g^m b_{n+1,m}^l(g) = -\Delta_l b_n^l(g) - \sum_m b_{n,m}^l(g)\beta^m(g). \tag{2.22}$$

U (2.21) vidimo da $\beta$ ovisi samo o koeficijentima koji stoje uz pol prvog reda u golim konstantama vezanja. To podrazumijeva da ćemo u konkretnim računima za amplitude u prostor-vremenu dimenzija

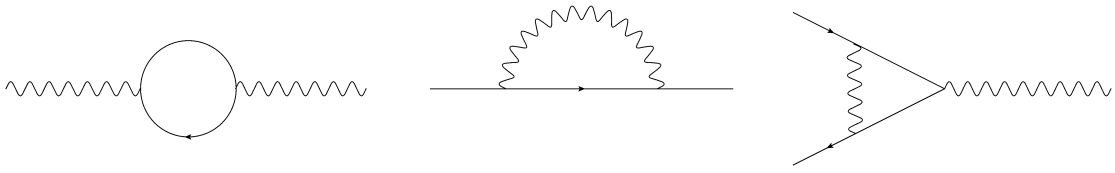
$$D = 4 - 2\epsilon, \tag{2.23}$$

što je konvencija preuzeta iz [6], tražiti samo članove koji stoje uz divergenciju, odnosno pol prvog reda $1/\epsilon$ i te članove koristiti za nalaženje $\beta$-funkcija za pojedine konstante vezanja. Iako je predmet ovog rada izračun divergencija na nivou jedne petlje, napomenimo da bi analiza na nivou dvije i više petlji dala korekcije višeg reda na $\beta$-funkciju, no ona bi ponovno bila definirana polom prvog reda. Minimalna suptrakcija (eng. *MS scheme*) odstranjuje beskonačne članove u amplitudama stavljajući ih u tzv. kontračlanove (eng. *counterterms*), koji stoje uz negativne potencije $\epsilon$. Prvi član, kako je već rečeno, definira $\beta$-funkciju.

# 3 Renormalizacijske grupne jednadžbe (RGEs) za QED

## *3.1 Renormalizirana perturbacijska teorija na primjeru QED-a*

U teorijama polja javljaju se divergentni dijagrami. Pri računu amplituda za procese već u prvom redu računa smetnje javljaju se divergentni integrali koji zahtijevaju posebne matematičke metode. Divergencije mogu biti infracrvene (IR) i ultraljubičaste (UV). IR-divergencije se pojavljuju iz dva razloga. Prvi je emisija mekih (niskoenergetskih) fotona, bilo slobodnih ili u petljama. Bloch i Nordsieck su prvi zaključili [7] (a Weinberg je ponovio analizu u okviru perturbacijske teorije [8]), da se doprinosi virtualnih fotona i emisije mekanih fotona krate, čime amplitude poprimaju konačne vrijednosti. Drugi razlog je slučaj kada su dvije bezmasene čestice kolinearne, odnosno njihovi impulsi zadovoljavaju $p_1 = cp_2$, što rezultira u divergencijama kod fazne integracije. Jedan od razloga divergencija je i postojanje petlji. Na primjer, u kvantnoj elektrodinamici u najnižem redu računa smetnje javljaju se dijagrami prikazani na slici 3.1. Prvi predstavlja vakuumsku polarizaciju, drugi tzv. vlastitu energiju elektrona, a treći popravku na vrh u najnižem redu računa smetnje.



Slika 3.1: Divergentni QED dijagrami u najnižem redu

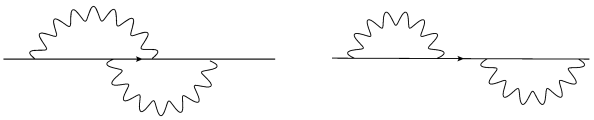
Svaka petlja u amplitudi sadrži integraciju po impulsu

$$\int_0^\infty \frac{d^D l}{(2\pi)^D}. \tag{3.1}$$

Kako gornja granica nije omeđena, amplituda divergira za velike prijenose impulsa (tzv. UV-divergencija). Razumno je gornju granicu integracije ograničiti uporabom regulatora $\Lambda$, nakon čega se provede renormalizacija teorije u kojoj se eliminiraju nefizikalni parametri te se u konačnici regulator ukloni limesom $\Lambda \to \infty$. Renormalizaciju je moguće provesti preko dva ekvivalentna postupka: metodom gole perturbacijske teorije i renormalizirane perturbacijske teorije [10].
Renormaliziranu perturbacijsku teoriju u detalje ćemo objasniti na primjeru kvantne elektrodinamike [2]. QED je Abelova baždarna teorija sa U(1) kao grupom simetrije. Originalni QED lagranžijan (gustoću lagranžijana konvencionalno nazivamo lagranžijanom) jest

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_B)\psi - e_B\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \tag{3.2}$$

gdje su $m_B$ i $e_B$ gola masa i goli naboj (eng. *bare*) nerenormalizirani, odnosno neopservabilni parametri teorije, a $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ jakost fotonskog polja. Renormalizacija polja proizlazit će iz računa renormalizacija fermionskog i fotonskog propagatora. Definirajmo prije izračuna jednočestične ireducibilne dijagrame (1PI) kao dijagrame koji se ne mogu razdvojiti u dva odvojena dijagrama prekidanjem jedne linije. Ilustracija definicije prikazana je na slici 3.2.

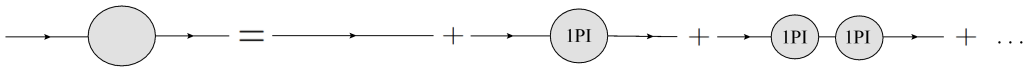


Slika 3.2: Primjer jednočestičnog ireducibilnog (1PI) i jednočestičnog reducibilnog dijagrama.

Na primjer, standardno Feynmanovo pravilo za propagator poznato u literaturi [3]

$$\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\longrightarrow = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}, \tag{3.3}$$

u principu predstavlja samo dominantni član beskonačne sume propagatora u teoriji s međudjelovanjem [4] koja ima oblik prikazan na slici 3.3.




Slika 3.3: Fermionski propagator kao beskonačna suma 1PI-dijagrama

Dijagram na lijevoj strani jednakosti predstavlja potpuni propagator u slici međudjelovanja i za sve redove računa smetnje. Ako sa $-i\Sigma$ označimo sumu svih 1PI-dijagrama sa dvije vanjske fermionske linije, slika 3.3 postaje ekvivalentna izrazu

$$P_f = \frac{i(\not{p} + m_B)}{p^2 - m_B^2} + \frac{i(\not{p} + m_B)}{p^2 - m_B^2}(-i\Sigma)\frac{i(\not{p} + m_B)}{p^2 - m_B^2} + ... \tag{3.4}$$

Prvi dijagram ima jednostavni pol u $p^2 = m_B^2$, dok naredni dijagram ima dvostruki pol u istoj točki, i tako redom. Suma svih dijagrama čini geometrijski red. Kako vrijedi da je $p^2 = \not{p}^2$, sumu zapišimo u jednostavnijem obliku i izvrijednimo, što daje rezultat

$$P_f = \frac{i}{\not{p} - m_B} + \frac{i}{\not{p} - m_B}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_B}\right)^2 + ... = \frac{i}{\not{p} - m_B - \Sigma(\not{p})}. \tag{3.5}$$

Potpuni propagator ima dakle jednostavan pol pomaknut za $\Sigma(\not{p})$. Položaj pola koji predstavlja fizikalnu masu $m$ rješenje je jednadžbe

$$[\not{p} - m_B - \Sigma(\not{p})]\Big|_{\not{p}=m}. \tag{3.6}$$

U blizini pola nazivnik u (3.5) ima oblik

$$(\not{p} - m)\Big(1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}}\Big|_{\not{p}=m}\Big) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2). \tag{3.7}$$

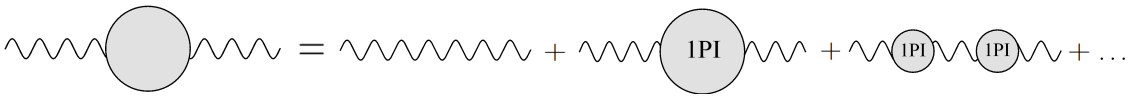
Uvedimo definiciju renormalizacije

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}}\Big|_{\not{p}=m}, \tag{3.8}$$

čime potpuni fermionski propagator možemo zapisati kao

$$P_f = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + ... \tag{3.9}$$

gdje $m$ sada predstavlja fizikalnu masu. Stoga slijedi da će fermionsko polje biti renormalizirano faktorom $Z_2^{1/2}$.
Fotonski propagator renormaliziramo analogno. Shematski prikaz fotonskog propagatora u teoriji s međudjelovanjem prikazan je na slici 3.4.




Slika 3.4: Fotonski propagator kao beskonačna suma 1PI-dijagrama

Neka je $i\Pi^{\mu\nu}$ suma svih 1PI-dijagrama sa dvije vanjske fotonske linije [4]. Wardov identitet

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 \tag{3.10}$$

zahtijeva da je $\Pi^{\mu\nu}$ proporcionalan projektoru $(g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu/q^2)$. Stoga $\Pi^{\mu\nu}$ možemo raspisati kao tenzorsku strukturu zadanu oblikom

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2). \tag{3.11}$$

Fotonski propagator beskonačna je suma

$$P_\gamma = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\Big[i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\Pi(q^2)\Big]\frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + ... \tag{3.12}$$

koju prepoznajemo kao geometrijski red

$$P_\gamma = \frac{-i}{q^2(1-\Pi(q^2))}\Big(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\Big) - \frac{i}{q^2}\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \tag{3.13}$$

U računu za S-matricu fotonski propagator mora se vezati na fermionsku liniju. Po zahtijevima Wardovog identiteta svi članovi u propagatoru proporcionalni sa $q_\mu$ i $q_\nu$ moraju iščezavati, stoga ćemo ih ispustiti. Pol propagatora nalazi se u $q^2 = 0$, odnosno foton ostaje bezmasen u svim redovima računa smetnje. Definirajmo reziduum pola $q^2 = 0$ kao

$$Z_3 = \frac{1}{1-\Pi(0)}. \tag{3.14}$$

U niskoenergetskim raspršenjima stoga za fotonski propagator možemo uzeti

$$P_\gamma = \frac{-iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + ... \tag{3.15}$$

Stoga slijedi da će fotonsko polje biti renormalizirano faktorom $Z_3^{1/2}$.
Koristeći rezultate (3.9) i (3.15) polja iz lagranžijana zamjenjujemo renormaliziranim poljima

$$\psi = Z_2^{1/2}\psi_r, \tag{3.16a}$$

$$A^\mu = Z_3^{1/2}A_r^\mu \tag{3.16b}$$

Novi lagranžijan ima oblik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3(F_r^{\mu\nu})^2 + Z_2\bar{\psi}_r(i\partial\!\!\!/ - m_B)\psi_r - e_B Z_2 Z_3^{1/2}\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r A_r^\mu. \tag{3.17}$$

Skaliramo fizikalni naboj uvođenjem dodatnog faktora skaliranja $Z_1$ na način

$$e = Z_1^{-1}Z_2 Z_3^{1/2}e_B. \tag{3.18}$$

Sada lagranžijan razdvajamo u dva dijela

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}(F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_r - e\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r A_r^\mu \\ &+ (-\frac{1}{4}\delta_3(F_r^{\mu\nu})^2 + +\bar{\psi}_r(i\delta_2\partial\!\!\!/ - \delta_m)\psi_r - e\delta_1\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r A_r^\mu),\end{aligned} \tag{3.19}$$

gdje delte predstavljaju renormalizacijske konstante

$$\delta_1 = Z_1 - 1, \tag{3.20a}$$

$$\delta_2 = Z_2 - 1, \tag{3.20b}$$

$$\delta_3 = Z_3 - 1, \tag{3.20c}$$

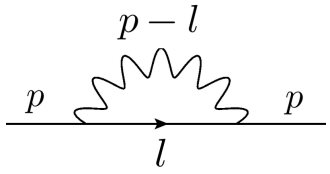
$$\delta_m = Z_2 m_B - m. \tag{3.20d}$$

Prvi red u (3.19) prestavlja renormalizirani, opservabilni dio teorije dok drugi predstavlja divergentne članove poznate pod nazivom kontračlanovi (eng. *counterterms*).

Iz lagranžijana (3.19) sada se mogu lako iščitati Feynmanova pravila, a svaki kontračlan određen je svojim renormalizacijskim uvjetom. U konkretnom slučaju ti su uvjeti da je elektronska i fotonska jakost polja jednaka jedan u točkama $\not{p} = m$ odnosno $q^2 = 0$, da je fizikalni naboj definiran u $q^\mu = 0$, te da je masa definirana sa (3.6). Sa zadanim uvjetima mogu se odrediti renormalizacijske konstante (3.20) u perturbativnom računu smetnje. Postupak je iterativan, odnosno svaki red računa smetnje posebno se računa.
Za izračun renormalizacijskih grupnih jednadžbi dovoljno je poznavati veze između golih i fizikalnih parametara teorije. Renormalizirana perturbacijska teorija primjenjena na modele kompleksnije od QED-a generirat će veze među renormalizacijskim faktorima $Z$ koje mogu služiti kao provjera točnosti računa.

## *3.2 Radijativne korekcije QED-a na nivou jedne petlje*

U prvom redu računa smetnje u kvantnoj elektrodinamici pojavljuju se dijagrami prikazani na slici 3.1. Za izračun $\beta$-funkcije dovoljno je iz amplituda izdvojiti $1/\epsilon$ doprinose, koji će se u okviru renormalizacijske perturbacijske teorije pojaviti kao članovi u renormalizacijskim faktorima $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$. U računu ćemo se upoznati s metodama koje su potrebne za izračun divergentnih integrala, a dane su u Dodatku A.
Dijagram vlastite energije fermiona prikazan je na slici 3.5




Slika 3.5: Vlastita energija fermiona

Amplituda raspisana po Feynmanovim pravilima (Dodatak B) i uz $g^{\mu\nu}\gamma_\nu = \gamma^\mu$ ima oblik

$$-i\Sigma = -e^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu(\not{l} + m)\gamma^\mu}{(l^2 - m^2)((l-p)^2 - m_\gamma^2)}. \tag{3.21}$$

Iz antikomutacijske relacije za $\gamma$-matrice slijedi

$$\gamma_\mu \not{l} \gamma^\mu = \not{l}(2 - D), \tag{3.22}$$

dok Feynmanovu parametrizaciju (A.1) primijenimo tako da vrijedi

$$k = l - px \tag{3.23a}$$

$$\Delta = -((1-x)^2 m^2 + m_\gamma^2 x). \tag{3.23b}$$

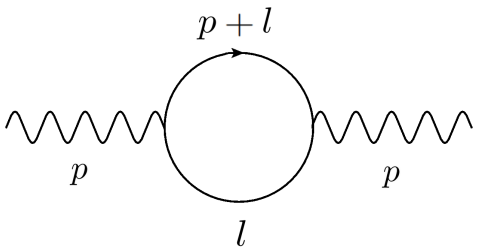
Uporabom Wickove rotacije (A.2), integrala (A.4) i razvoja $\Gamma$-funkcije (A.7) te ekstrahiranjem člana uz $1/\epsilon$ dobije se kinetički član

$$-i\Sigma(\not{p}) \supseteq \frac{1}{\epsilon}\frac{ie^2}{(4\pi)^2}\not{p}, \tag{3.24}$$

iz čega slijedi da je renormalizacijski faktor $Z_2$ u najnižem redu računa smetnje

$$Z_2 = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{3.25}$$

Za izračun renormalizacijskog faktora $Z_3$ potrebno je izvrijediti dijagram vakuumske polarizacije prikazan na slici 3.6.




Slika 3.6: Vakuumska polarizacija

Dijagram je izraz oblika

$$i\Pi_{\mu\nu}(p) = -e^2\int_0^\infty \frac{d^D l\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{Tr[\gamma_\mu(\not{p}+\not{l}+m)\gamma_\nu(\not{l}+m)]}{(l^2-m^2)((p+l)^2-m^2)}, \tag{3.26}$$

koji ima konačnu strukturu

$$i\Pi_{\mu\nu}(p) \supseteq i(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)\frac{-e^2}{12\pi^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{3.27}$$

Renormalizacijski faktor $Z_3$ do prve radijativne korekcije ima oblik

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{3.28}$$

gdje smo od doprinosa petlji u obzir uzeli samo $1/\epsilon$ član. Preostaje izračunati faktor $Z_1$ iz korekcije vrha. Primjetimo da se izraz (3.18) može prikazati shemom na slici 3.7.

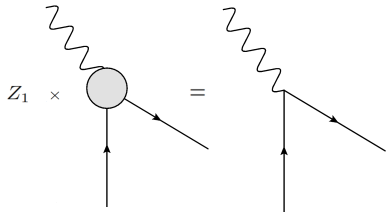
Amplituda procesa prikazanog na slici 3.8 zadana je izrazom

$$-i\Sigma = -e^3\int_0^\infty \frac{d^D l\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{\gamma_\nu(\not{l}+\not{p}'+m)\gamma^\mu(\not{l}+\not{p}+m)\gamma^\nu}{(l^2-m_\gamma^2)((l+p)^2-m^2)((l+p')^2-m^2)}. \tag{3.29}$$

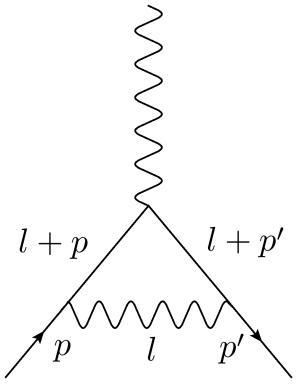
Nazivnik u (3.29) sadrži doprinos tri propagatora pa se Feynmanova parametrizacija provodi uz supstitucije

$$k = l + p'x + py, \tag{3.30a}$$

$$\Delta = -((1-z)^2m^2 + m_\gamma^2 z). \tag{3.30b}$$




Slika 3.7: Renormalizacija QED vrha




Slika 3.8: Korekcija za QED vrh u najnižem redu

Iz antikomutacijske relacije za $\gamma$ matrice i primjenom kutne integracije nalazimo

$$\gamma_\nu \not{l} \gamma^\mu \not{l} \gamma^\nu = l^2 \frac{(2-D)^2}{D} \gamma^\mu, \tag{3.31}$$

što za rezultat ima uz $1/\epsilon$ član strukturu oblika

$$-i\Sigma \supseteq \frac{1}{\epsilon} \frac{-ie^3}{(4\pi)^2} \gamma^\mu. \tag{3.32}$$

Nerenormalizirani, goli QED vrh zadan je Feynmanovim pravilom $-ie\gamma^\mu$ što zadaje renormalizacijski faktor $Z_1$

$$Z_1^{-1} = 1 + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{3.33}$$

Primijetimo da vrijedi

$$Z_1^{-1} Z_2 = 1. \tag{3.34}$$

Izraz slijedi iz Ward-Takahashijevog identiteta [4] i vrijedi za svaki red računa smetnje.

## *3.3 RGE i efektivna konstanta vezanja za QED*

Renormalizacijske grupne jednadžbe za QED izvest ćemo u potpunosti prateći formalizam Machaceka i Vaughna [6]. Provođenjem dimenzionalne analize nad lagranžijanom QED-a tako da se polazi iz uvjeta bezdimenzionalnosti akcije

$$\mathcal{S} = \int d^D x \mathcal{L}, \tag{3.35}$$

slijede dimenzije polja i konstanti vezanja te dimenzije faktora za reskaliranje konstante vezanja u skladu sa (2.13)

$$[A_\mu] = \frac{D-2}{2}, \tag{3.36a}$$

$$[\psi] = \frac{D-1}{2}, \tag{3.36b}$$

$$[e_B] = [\Delta] = \frac{4-D}{2}, \tag{3.36c}$$

iz čega slijedi skaliranje fizikalnog naboja u prostor-vremenu dimenzije $4-2\epsilon$

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon}. \tag{3.37}$$

Uvrstimo rezultate iz radijativnih korekcija i rastavimo goli i fizikalni naboj po uzoru na (2.14)

$$e_B \mu^{-\epsilon} = e Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} = e\Big(1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\Big)^{-\frac{1}{2}} \approx e\Big(1 + \frac{e^2}{24\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\Big). \tag{3.38}$$

U kontekstu dimenzije (2.23) i uz izraze (2.15a) i (2.19) za $\beta$-funkciju vrijedi

$$\mu\tfrac{de}{d\mu} \;= \beta - \epsilon e, \tag{3.39a}$$

$$\tfrac{d}{d\mu} \;= \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial e}{\partial \mu}\frac{\partial}{\partial e}. \tag{3.39b}$$

gdje je u posljednjem redu raspisana totalna derivacija $d/d\mu$. Izvod za $\beta$-funkciju QED-a polazi od primjene operatora $\mu d/d\mu$ na izraz (3.38)

$$e_B \mu^{-\epsilon} = e + \frac{e^3}{24\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\Big|_{\mu\frac{d}{d\mu}}$$

$$-\epsilon(e_B\mu^{-\epsilon}) = \beta - \epsilon e + \frac{3e^2}{24\pi^2}\frac{1}{\epsilon}(\beta - \epsilon e) \tag{3.40}$$

$$-\epsilon\Big(e + \frac{e^3}{24\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\Big) = \beta - \epsilon e + \frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{\epsilon}(\beta - \epsilon e),$$

iz čega slijedi rezultat na nivou jedne petlje (uz zanemarivanje $1/\epsilon$ člana uz $\beta$-funkciju)

$$\beta_{QED} = \frac{e^3}{12\pi^2}. \tag{3.41}$$

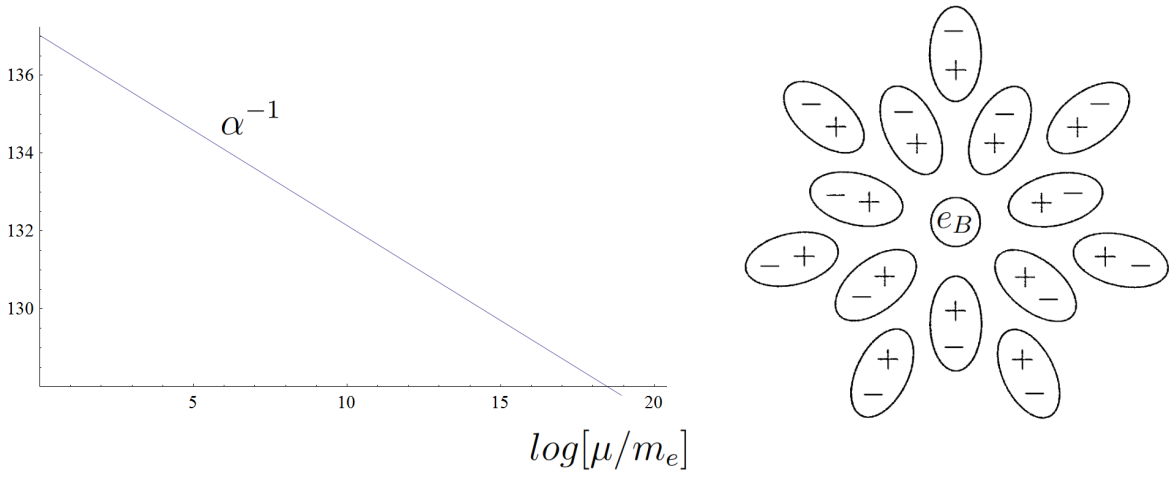
Rezultat se slaže sa literaturom [2] [4] i predstavlja jedno od mogućih asimptotskih ponašanja u kojem porastom energije $\beta$-funkcija divergira, odnosno ima Landauov pol. Efektivnu konstantu vezanja izračunamo integriranjem $\beta$ funkcije u skladu s (2.12), uz $\alpha = e^2/4\pi$ u prirodnom sustavu jedinica. Ovisnost konstante fine strukture $\alpha$ o energiji glasi

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} ln(\frac{\mu^2}{E_0^2})}, \tag{3.42}$$

gdje $E_0$ prestavlja proizvoljno odabranu donju granicu integracije dok je $\alpha_0 = e_R^2/4\pi \approx 1/137.036$. Ovisnost je prikazana na slici 3.9. Kako je i očekivano, konstanta vezanja raste s energijom. Na konačnoj energiji

$$\mu_\infty = E_0 \sqrt{e^{3\pi/8\alpha_0}}, \tag{3.43}$$

konstanta fine strukture ima Landauov pol. Perturbacijska teorija će se slomiti prije nego što se dosegne energija ovog iznosa [2]. Razlog vjerojatno leži u činjenici da se perturbacijska teorija primjenjuje na skalama na kojima više ne vrijedi. QED je dakle strogo perturbativna teorija.
Fizikalno objašnjenje porasta konstante fine strukture s energijom nalazi se u činjenici da je zbog stvaranja virtualnih elektron-pozitron parova (npr. u dijagramu vakuumske polarizacije) fizikalni naboj zasjenjen kao što je prikazano na slici 3.9. Povećanjem energije zasjenjenje ima sve manji efekt i vrijednost (izmjerenog) naboja raste.




Slika 3.9: Ovisnost inverza konstante fine strukture o energiji i ilustracija efekta zasjenjenja naboja

Ovisnost konstante fine strukture o energiji više je puta eksperimentalno provjerena te je potvrđeno slaganje s teorijskim predviđanjima. Na različitim skalama energije ovisnost su provjerile kolaboracije TOPAZ, VENUS i L3 [9].

# 4 Renormalizacijske grupne jednadžbe (RGEs) za QCD

## *4.1 Struktura teorije i baždarenje za duhove*

Teorija koja valjano opisuje jake interakcije polazi od činjenice da se kvarkovi, fermioni necjelobrojnog iznosa naboja, pojavljuju u tri boje. Kako smo u kvantnoj elektrodinamici polazili od Abelove U(1) grupe simetrija, razumno je pretpostaviti da će SU(3) grupa simetrija dobro opisati jake interakcije kvarkova i gluona. Kako je

broj generatora Lieve grupe $n^2 - 1$, za SU(3) će to biti osam Gell-Mannovih matrica. Kako je grupna operacija množenje matrica, grupa je ne-Abelova. Vidjet ćemo da to u QCD unosi nove vrste interakcija, odnosno nove vrhove u odnosu na QED. Krenimo od QED lagranžijana kao predloška za teoriju interakcije fermiona i baždarnih bozona uz neabelovsko poopćenje

$$\{D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu\} \to \{D_\mu = \partial_\mu + igA^a_\mu T^a\}, \tag{4.1}$$

gdje je $a = 1, ..., 8$, a $T^a$ su generatori SU(3) grupe (Dodatak C), koji zadovoljavaju komutacijsku relaciju

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \tag{4.2}$$

gdje su $f^{abc}$ potpuno antisimetrične i realne strukturne konstante. Gluonsko polje dobiva se iz fotonskog zamjenom

$$\{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} \to \{F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\}. \tag{4.3}$$

Iz kvadriranja (4.3) proizlazi da se u QCD-u pojavljuju trogluonski i četverogluonski vrhovi. QCD lagranžijan uz minimalne modifikacije ima oblik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} + \bar{q}(i\not{D} - m)q. \tag{4.4}$$

Teorija, da bi bila fizikalna, mora poštivati da vanjske linije propagiraju samo fizikalne stupnjeve slobode, kao što su transverzalni fotoni u QED-u. S druge strane, unutarnje linije, koje se pojavljuju u petljama, predstavljaju sve stupnjeve slobode, što je dopušteno jer se nefizikalne komponente ponište uporabom Wardovog identiteta, pa ne doprinose zatvorenim petljama. Kako u QCD-u postoje trogluonska i četverogluonska vezanja ovo pravilo, (barem u ovoj fazi izvoda) nije zadovoljeno. Ako promotrimo lijevi dijagram na slici 4.1, svaka unutarnja linija mora imati neki doprinos u ukupnoj amplitudi koji će poništiti nefizikalne gluonske doprinose za tu liniju. To se može postići uvođenjem dodatnog dijagrama prikazanog na desnoj strani slike 4.1. Isprekidane linije predstavljaju duhove (eng. *ghosts*), nefizikalne čestice koje se pojavljuju samo kao unutarnje linije. Kako se doprinosi lijevog i desnog dijagrama moraju dijelom poništavati, petlja s duhovima mora imati negativan predznak. To implicira da će duhovi poštivati Fermi-Diracovu statistiku iako će, kao što ćemo vidjeti, imati i neka bozonska svojstva. U teoriju ih se uvodi korištenjem Faddeev-Popov trika [2], pa se još nazivaju i Faddeev-Popov duhovi.



Slika 4.1: Dijagram s trogluonskim vrhovima i njegova popravka uvođenjem duhova

Akcija za jakost gluonskog polja $F^a_{\mu\nu}$ ima oblik

$$S[A] = \int d^4x \Big( -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} \Big). \tag{4.5}$$

Infinitezimalna baždarna transformacija za gluonsko polje sada ima i ne-Abelov doprinos

$$(A^\alpha)^a_\mu \to A^a_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc}A^b_\mu \alpha^c = A^a_\mu - \frac{1}{g}D^{ac}_\mu \alpha^c, \tag{4.6}$$

gdje je

$$D^{ac}_\mu = \partial_\mu \delta^{ac} - g f^{abc} A^b_\mu. \tag{4.7}$$

Cilj nam je izračunati vakuumske očekivane vrijednosti baždarno invarijantnih operatora [12]. Biramo Feynman-t'Hooft-Landauovo baždarenje

$$G(A) = \partial^\mu A^a_\mu + \omega^a, \tag{4.8}$$

koje uz infinitezimalnu transformaciju postaje

$$G(A^\alpha) = \partial^\mu (A^a_\mu - \frac{1}{g}D^{ab}_\mu \alpha^b) + \omega^a. \tag{4.9}$$

Vakuumska očekivana vrijednost općenitog operatora $\mathcal{O}$ zadana je izrazom

$$\langle \Omega | T\mathcal{O}[A] | \Omega \rangle = \frac{\int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \mathcal{O}[A] \text{exp}(iS[A])}{\int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \text{exp}(iS[A])}. \tag{4.10}$$

Primijetimo da $\delta$-funkcija integrirana po cijelom prostoru daje identitetu, odnosno da trivijalno vrijedi izraz

$$1 = \int d\alpha \delta(G(\alpha)) \frac{dG}{d\alpha}. \tag{4.11}$$

Poopćavanjem (4.12) dolazimo do izraza koji predstavlja prvi dio Faddeev-Popov trika u kojem identitetu raspišemo kao funkcionalni integral oblika

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G[A^\alpha]) \text{det}\left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta \alpha}\right) \tag{4.12}$$

i ubacujemo je u nazivnik izraza (4.11)

$$\int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \mathcal{O}[A] \text{exp}(iS[A]) = \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha \delta(G[A^\alpha]) \text{det}\left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta \alpha}\right) \mathcal{O}[A] \text{exp}(iS[A]). \tag{4.13}$$

U ne-Abelovom slučaju determinanta u izrazu ne bi ovisila o $A$, pa bi je izvukli ispred funkcionalnog integrala, no kako u ovom slučaju vrijedi

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha^b} = -\frac{1}{g}\partial^\mu D^{ab}_\mu = -\frac{1}{g}(\delta^{ab}\Box - g f^{abc}\partial^\mu A^b_\mu) \tag{4.14}$$

ne možemo izvršiti taj zahvat. Napravimo sada trik preimenovanja koji neće narušiti baždarnu invarijantnost: $\mathcal{D}A$, $S[A]$ i $\mathcal{O}[A]$ najprije pretvorimo u veličine koje ovise o infinitezimalno transformiranom gluonskom polju $\mathcal{D}A^\alpha$, $S[A^\alpha]$ i $\mathcal{O}[A^\alpha]$ i nakon toga preimenujemo $A^\alpha$ u $A$. Jednadžbu (4.14) sada možemo prepraviti u oblik

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \mathcal{O}[A] \text{exp}(iS[A]) \\ &= \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \delta(\partial^\mu A^a_\mu + \omega^a) \text{det}\left(-\frac{1}{g}\partial^\mu D^{ab}_\mu\right) \mathcal{O}[A] \text{exp}(iS[A]). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ako obje strane jednadžbe (4.16) funkcionalno integriramo Gaussijanom oblika

$$\int \mathcal{D}\omega^a \text{exp}\Big( - i \int d^4x \frac{(\omega^a)^2}{2\xi}\Big), \tag{4.16}$$

gornji dio, neovisan o $\omega$, samo će biti pomnožen nekim fakorom proporcionalnim sa $\xi$ dok će nam taj zahvat na donjoj strani jednadžbe omogućiti integraciju $\delta$-funkcije, čime dobijemo dodatno pojednostavljenje

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\xi) \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A\mathcal{O}[A]\text{exp}(iS[A]) = \\ = \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \text{det}\left( - \frac{1}{g}\partial^\mu D^{ab}_\mu \right) \mathcal{O}[A]\text{exp}(iS_{GF}[A]), \end{aligned} \tag{4.17}$$

gdje je $S_{GF}$ akcija fiksirana baždarenjem (eng. *gauge fixing*)

$$S_{GF}[A] = \int d^4x \Big( - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A^a_\mu)^2 \Big). \tag{4.18}$$

Determinantu raspišemo uzimajući u obzir da se općenito determinanta svakog (diferencijalnog) hermitskog operatora može prikazati kao integral po stazama [4], što predstavlja drugi dio Faddeev-Popov trika

$$\text{det } B = \left( \prod_i \int d\theta^*_i d\theta_i \right) \text{exp}(-\theta^*_i B_{ij} \theta_j), \tag{4.19}$$

odnosno u našem slučaju

$$\text{det}\left( -\frac{1}{g}\partial^\mu D^{ab}_\mu \right) = \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c \text{ exp}\left( i \int d^4x \left( \bar{c}^a(-\delta^{ab}\Box)c^b - g f^{abc} \bar{c}^a \partial^\mu (A^c_\mu c^b) \right) \right). \tag{4.20}$$

Ovdje $c$ i $\bar{c}$ predstavljaju kompleksna antikomutirajuća Lorentzova skalarna polja, gdje su $c^a(x)$ i $\bar{c}^a(x)$ Grassmanovi brojevi. Oni predstavljaju duhove u teoriji. Vidimo da kao antikomutirajuće strukture poštuju Fermi-Diracovu statistiku dok s druge strane zadovoljavaju Klein-Gordonovu jednadžbu, što je svojstvo skalara. Posjedovanje fermionskih i bozonskih svojstava istovremeno dopušteno je jer je riječ o isključivo virtualnim česticama. Konstanta vezanja $g$ iz determinante apsorbirana je u definiciju duhova. Konačno akcija postaje

$$S_{FP}[A] = \int d^4x \Big( -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A^a_\mu)^2 + \bar{c}^a(-\delta^{ab}\Box)c^b - g f^{abc} \bar{c}^a \partial^\mu (A^c_\mu c^b) \Big). \tag{4.21}$$

Lagranžijan QCD-a postaje potpun dodavanjem kvarkovskog dijela i glasi

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A^a_\mu)^2 + \bar{c}^a(-\delta^{ab}\Box)c^b - g f^{abc} \bar{c}^a \partial^\mu (A^c_\mu c^b) + \bar{q}(i\not{D} - m)q. \tag{4.22}$$

te će na ovom obliku biti primjenjena renormalizirana perturbacijska teorija.

## 4.2 Renormalizirana perturbacijska teorija za QCD

Dimenzionalna analiza QCD lagrangijana daje nam sljedeće dimenzije veličina u lagrangijanu:

$$[A_\mu] = \frac{D-2}{2}, \tag{4.23a}$$

$$[q] = \frac{D-1}{2}, \tag{4.23b}$$

$$[c] = \frac{D-2}{2}, \tag{4.23c}$$

$$[g_B] = [\Delta] = \frac{4-D}{2}. \tag{4.23d}$$

Duh se po dimenziji ponaša kao i bozonsko polje. Multiplikativnom renormalizacijom dobijamo sljedeće relacije između nerenormaliziranih i renormaliziranih veličina:

$$q = Z_2^{1/2} q_r, \tag{4.24a}$$

$$A^{\mu,a} = Z_3^{1/2} A_r^{\mu,a}, \tag{4.24b}$$

$$c = (Z_2^c)^{1/2} c_r, \tag{4.24c}$$

i preimenujmo polja u $\phi_r \to \phi$ radi jednostavnosti zapisa. Radi preglednosti interakcija, raspisat ćemo jakost gluonskog polja prema jednadžbi (4.3) te provesti renormalizaciju. Renormalizirajmo lagranžijan član po član. Jakost gluonskog polja izražena preko renormaliziranih polja glasi

$$-\frac{1}{4} Z_3 (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + Z_3^{3/2} g_B f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{\mu,b} A^{\nu,c} + Z_3^2 g_B^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu,d} A^{\nu,e}, \tag{4.25}$$

gdje drugi i treći član predstavljaju renormalizaciju trogluonskog i četverogluonskog vrha, dok za baždarni član, uz pretpostavku da se parametar baždarenja ne renormalizira, vrijedi jednostavno

$$-\frac{1}{2\xi} Z_3 (\partial^\mu A_\mu^a)^2. \tag{4.26}$$

Dio s duhovima sada je jednak

$$Z_2^c \bar{c}^a (-\delta^{ab} \Box) c^b - Z_2^c Z_3^{1/2} g_B \bar{c}^a f^{abc} \partial^\mu (A_\mu^c c^b), \tag{4.27}$$

i konačno kvarkovski dio glasi

$$Z_2 \bar{q} (i \partial\!\!\!/ - m) q - Z_2 Z_3^{1/2} g_B \bar{q} A\!\!\!/^a T^a q. \tag{4.28}$$

Općeniti izraz za reskaliranje konstante veze (primjenjen u 3.37) možemo zapisati kao

$$g_{B,r} = Z_s g \mu^\epsilon, \tag{4.29}$$

gdje je $Z_s$ oznaka za renormalizacijski faktor zadane strukture, a $g_{B,r}$ gola konstanta vezanja sa pripadnim renormalizacijskim faktorima proizašlim iz renormalizacije po-

lja. Vrijedi:

$$Z_3^{3/2} g_B = Z_1^{3g} g \mu^\epsilon, \tag{4.30a}$$
$$Z_3^2 g_B^2 = Z_1^{4g} g^2 \mu^{2\epsilon}, \tag{4.30b}$$
$$Z_2 Z_3^{1/2} g_B = Z_1 g \mu^\epsilon, \tag{4.30c}$$
$$Z_2^c Z_3^{1/2} g_B = Z_1^c g \mu^\epsilon, \tag{4.30d}$$

redom za trogluonski, četverogluonski, antikvark-gluon-kvark i antiduh-gluon-duh vrhove. Svakom vrhu, kako je vidljivo, i dalje pridodajemo renormalizacijski faktor $Z_1$. Ako ove identitete izrazimo preko gole reskalirane konstante vezanja, vrijedi

$$g_B \mu^{-\epsilon} = Z_1^{3g} Z_3^{-3/2} g = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} g = Z_1^c (Z_2^c)^{-1} Z_3^{-1/2} g = (Z_1^{4g})^{1/2} Z_3^{-1} g, \tag{4.31}$$

ili ekvivalentno preko renormalizacijskih faktora,

$$Z_1 Z_2^{-1} = Z_1^{3g} Z_3^{-1} = Z_1^c (Z_2^c)^{-1} = (Z_1^{4g})^{1/2} Z_3^{-1/2}. \tag{4.32}$$

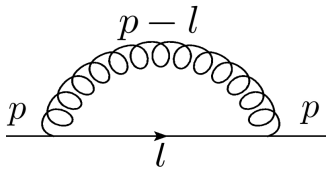
Jednadžba (4.32) u literaturi [11] se poistovjećuje sa Slavnov-Taylorovim identitetima, koji su u općenitijem smislu ne-Abelova analogija Wardovom identitetu u QED-u. Vidimo da oni osiguravaju univerzalnost renormalizirane konstante vezanja. U praksi su korisni kao provjera točnosti računa. Do renormalizacijskih grupnih jednadžbi najjednostavnije ćemo doći računajući $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$, koje će imati doprinose analogne QED-u, do na razlike proizišle iz struktura SU(3) algebre.

## *4.3 Radijativne korekcije QCD-a na nivou jedne petlje*

Za izračun renormalizacijskih grupnih jednadžbi za QCD izabrat ćemo, među radijativnim korekcijama u najnižem redu, one doprinose koji se odnose na relaciju

$$g_B \mu^{-\epsilon} = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} g. \tag{4.33}$$

Renormalizacijski faktor $Z_2$ izračunat ćemo iz dijagrama vlastite energije kvarka prikazanog na slici 4.2. Konstantu vezanja za kvantnu kromodinamiku označit ćemo sa $g_s$.




Slika 4.2: Dijagram vlastite energije kvarka

Amplituda raspisana po Feynmanovim pravilima ima oblik

$$-i\Sigma = -g_s^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu T_a (\not{l} + m) \gamma^\mu T_a}{(l^2 - m^2)((l-p)^2 - m_g^2)}, \tag{4.34}$$

i potpuno je analogna amplitudi vlastite energije elektrona, odnosno razlikuje se u faktoru

$$T_a T_a = C_2(f) = \frac{N^2 - 1}{2N}, \tag{4.35}$$

što predstavlja sumu umnožaka dva generatora SU(3) algebre, što je u ovom slučaju svojstvena vrijednost Casimirove invarijante za fundamentalnu reprezentaciju. Iznos renormalizacijskog faktora $Z_2$ na nivou jedne petlje je jednostavno

$$Z_2 = 1 - C_2(f)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{4.36}$$

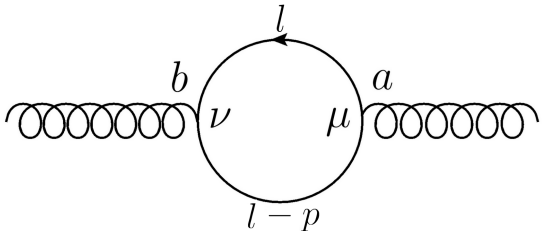
Vlastita energija gluona na nivou jedne petlje sastojat će se od četiri doprinosa prikazana na slici 4.3.



Slika 4.3: Dijagrami vlastite energije gluona

Za izračun renormalizacijskog faktora $Z_3$ moramo dakle izračunati i sumirati sva četiri doprinosa. Analogno QED-u, očekujemo proporcionalnost do na tenzorsku strukturu

$$\Pi^{\mu\nu,ab}(p) = (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\Pi(p^2)\delta^{ab}. \tag{4.37}$$




Slika 4.4: Dijagram vlastite energije gluona - kvarkovski doprinos

Prvi dijagram prikazan na slici 4.4 ima amplitudu zadanu s

$$i\Pi^{ab}_{\mu\nu} = -g_s^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{Tr(T^b T^a) Tr(\gamma^\nu (\not{l} + m)\gamma^\mu (\not{l} - \not{p} + m))}{(l^2 - m^2)((l-p)^2 - m^2)}, \tag{4.38}$$

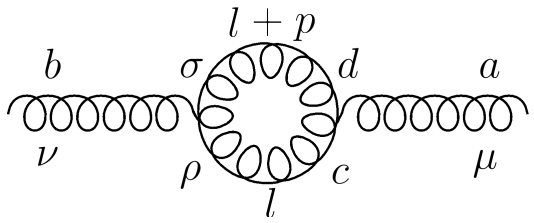
Uz standardnu Feynmanovu parametrizaciju i rezultat za trag četiri $\gamma$-matrice [5] te ostale procedure (Dodatak A i C), izdvajanjem $1/\epsilon$ člana uz strukturu $(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\delta^{ab}$ kao rezultat za prvi doprinos dobije se

$$\Pi(p^2) \supseteq -\frac{4C(f)}{3}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{4.39}$$

gdje je $C(f)$ Dynkinov indeks za reprezentaciju $f$, odnosno skalar koji se javlja u izrazu $Tr(T^bT^a)\delta^{ab}$ ($T^a$ su generatori iste reprezentacije), što daje prvi doprinos renormalizacijskom faktoru oblika

$$Z_{3,a} = 1 - \frac{4C(f)N_f}{3}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{4.40}$$

pri čemu je $N_f$ broj okusa kvarkova koji sudjeluju u procesu na nekoj zadanoj energiji. Idući doprinos je dijagram sa dva trogluoska vrha, prikazan na slici 4.5.




Slika 4.5: Dijagram vlastite energije gluona - prvi gluonski doprinos

Amplituda raspisana po Feynmanovim pravilima ima oblik

$$i\Pi^{ab}_{\mu\nu} = -\frac{g_s^2}{2}\int_0^\infty \frac{d^Dl\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{f^{acd}f^{bcd}S(l,p)}{(l^2-m^2)((l+p)^2-m^2)}, \tag{4.41}$$

gdje je $S(l,p)$ struktura za dva trogluonska vrha oblika

$$\Big(g_{\nu\rho}(p-l)_\sigma + g_{\rho\sigma}(2l+p)_\nu + g_{\sigma\nu}(-l-2p)_\rho\Big)\Big(g^\rho_\mu(-p+l)^\sigma + g^{\rho\sigma}(-2l-p)_\mu + g^\sigma_\mu(l+2p)^\rho\Big). \tag{4.42}$$

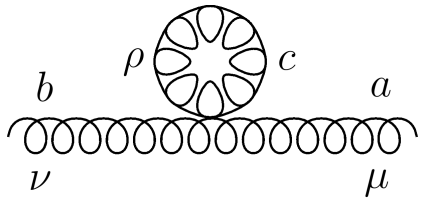
Konačni rezultat doprinosa iznosi

$$iC_2(G)\delta^{ab}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(\frac{19}{12}g^{\mu\nu}p^2 - \frac{11}{6}p^\mu p^\nu\Big), \tag{4.43}$$

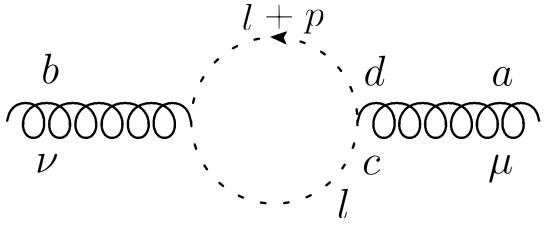
i vidimo da ne posjeduje baždarno invarijantnu formu $(p^2g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\delta^{ab}$, kao što smo i očekivali. Dijagram s duhovima konačno će poništiti nefizikalne gluonske stupnjeve slobode za unutarnje linije ili, drugim riječima, ukupan doprinos dijagrama u prvom redu sastojat će se od baždarno invarijantne forme do na konstantu proporcionalnosti[1].
Dijagram s četverogluonskim vrhom prikazan je na slici 4.6.
Amplituda ovog dijagrama ima strukturu

$$i\Pi^{ab}_{\mu\nu} = -\frac{g_s^2}{2}\int_0^\infty \frac{d^Dl\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{S(f,g)}{(l^2-m^2)}, \tag{4.44}$$

gdje je $S(f,g)$ gluonski četverovrh, funkcija strukturnih konstanti i metričnih tenzora. Očito je da ovaj doprinos iščezava jer postojanje jednog propagatora rezultira u integralu (A.4) za $n = 1$.




Slika 4.6: Dijagram vlastite energije gluona - drugi gluonski doprinos




Slika 4.7: Dijagram vlastite energije gluona - doprinos duhova

Dijagram vlastite energije gluona s petljom duhova prikazan je na slici 4.7.
Amplituda ovog dijagrama je struktura:

$$i\Pi^{ab}_{\mu\nu} = g_s^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{f^{cbd} f^{dac} l_\nu (l+p)_\mu}{(l^2 - m_d^2)((l+p)^2 - m_d^2)}, \tag{4.45}$$

što rezultira u doprinosu

$$iC_2(G)\delta^{ab} \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \Big( \frac{1}{12} g^{\mu\nu} p^2 - \frac{1}{6} p^\mu p^\nu \Big). \tag{4.46}$$

Doprinos duhova i gluonski doprinos vlastitoj energiji gluona zatvaraju se u baždarno invarijantnu strukturu, sa renormalizacijskim faktorom

$$Z_{3,b} = 1 + \frac{5C_2(G)N_f}{3} \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{4.47}$$

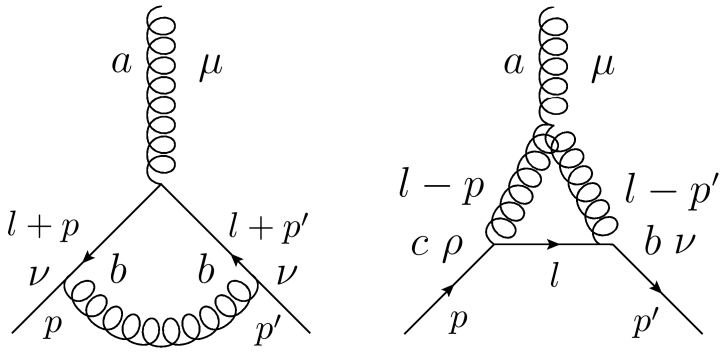
Svi doprinosi sumirani daju nam rezultat za renormalizacijski faktor gluonskog propagatora $Z_3$ koji glasi:

$$Z_3 = 1 + \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \Big( - \frac{4}{3} C(f) N_f + \frac{5}{3} C_2(G) \Big). \tag{4.48}$$

Renormalizacijski faktor $Z_1$ računamo iz popravki QCD kvark-gluonskog vrha u prvom redu. Faktoru doprinose dva dijagrama prikazana na slici 4.8.
Amplituda prvog procesa izraz je analogan korekciji QED elektron-foton vrha do na razlike u algebri i glasi:

$$-i\Sigma_a = -g_s^3 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{T^b T^a T^b \gamma_\nu (\not{l} + \not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{l} + \not{p} + m) \gamma^\nu}{(l^2 - m_g^2)((l+p)^2 - m^2)((l+p')^2 - m^2)}, \tag{4.49}$$

[1]Renormalizabilnost u kontekstu renormalizirane perturbacijske teorije podrazumijeva da u svim redovima računa smetnje strukture ostaju očuvane do na konstantu proporcionalnosti.




Slika 4.8: Dijagrami korekcije QCD vrha u najnižem redu

te će se rezultat razlikovati do na $T^bT^aT^b = (C_2(f) - C_2(G)/2)T^a$. Izdvajanjem $1/\epsilon$ člana dobije se doprinos

$$-i\Sigma_a \supseteq \frac{1}{\epsilon}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\Big(C_2(f) - \frac{1}{2}C_2(G)\Big)(-ig_s\gamma^\mu T^a). \tag{4.50}$$

Izraz u posljednjoj zagradi predstavlja goli QCD vrh.
Amplituda drugog procesa je struktura

$$-i\Sigma_b = ig_s^3\int_0^\infty \frac{d^Dl\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{f^{abc}T^bT^c\gamma^\nu(\not{l}+m)\gamma^\rho S^\mu_{\nu\rho}}{(l^2-m^2)((l-p)^2-m^2)((l-p')^2-m^2)}, \tag{4.51}$$

gdje je $S^\mu_{\nu\rho}$ trogluonski vrh

$$S^\mu_{\nu\rho} = g^\mu_\nu(l+p-2p')_\rho + g_{\nu\rho}(-2l+p+p')^\mu + g^\mu_\rho(l-2p+p')_\nu. \tag{4.52}$$

Relevantni doprinos ovog člana je

$$-i\Sigma_b \supseteq \frac{1}{\epsilon}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\Big(\frac{3C_2(G)}{2}\Big)(-ig_s\gamma^\mu T^a). \tag{4.53}$$

Zbroj ova dva doprinosa konačno nam daje izraz za renormalizacijski faktor $Z_1$ koji glasi

$$Z_1^{-1} = 1 + \frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(C_2(f) + C_2(G)\Big). \tag{4.54}$$

U ovoj fazi imamo sve informacije potrebne za izračun renormalizacijskih grupnih jednadžbi.

## *4.4 RGEs i efektivna konstanta vezanja za QCD*

U prethodnom poglavlju za renormalizacijske faktore u prvom redu računa smetnje dobili smo rezultate:

$$Z_1^{-1} = 1 + \frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(C_2(f) + C_2(G)\Big), \tag{4.55a}$$

$$Z_2 = 1 - \frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}C_2(f), \tag{4.55b}$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(-\frac{4}{3}C(f)N_f + \frac{5}{3}C_2(G)\Big). \tag{4.55c}$$

Veza između gole i renormalizirane jake konstante sada postaje

$$g_{sB}\mu^{-\epsilon} = g_s Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} = g_s\Big(1+\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}(-C_2(f)-C_2(G)+C_2(f)+\frac{2}{3}C(f)N_f-\frac{5}{6}C_2(G))\Big) \tag{4.56}$$

Primjetimo da se u izrazu $Z_1 Z_2^{-1}$ članovi $C_2(f)$ krate, što odgovara Wardovom identitetu (3.34) u QED-u.
Radi jednostavnosti zapisa uvodimo

$$g_{sB}\mu^{-\epsilon} = g_s + \frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(\frac{2}{3}C(f)N_f - \frac{11}{6}C_2(G)\Big) = g_s + \frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}b_{g_s}^{(1)}. \tag{4.57}$$

U kontekstu dimenzije (2.23) i uz izraze (2.15a) i (2.19) za $\beta$-funkciju vrijedi

$$\mu\frac{dg_s}{d\mu} = \beta - \epsilon g_s. \tag{4.58}$$

Izvod za QCD $\beta$-funkciju polazi od primjene operatora $\mu d/d\mu$ na izraz (4.57)

$$g_{sB}\mu^{-\epsilon} = g_s + \frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}b_{g_s}^{(1)}\Big|_{\mu\frac{d}{d\mu}},$$

$$-\epsilon(g_{sB}\mu^{-\epsilon}) = \beta - \epsilon g_s + \frac{3g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}b_{g_s}^{(1)}(\beta-\epsilon g_s), \tag{4.59}$$

$$-\epsilon(g_s + \frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}b_{g_s}^{(1)}) = \beta - \epsilon g_s + \frac{3g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}b_{g_s}^{(1)}(\beta-\epsilon g_s),$$

iz čega slijedi rezultat na nivou jedne petlje (uz zanemarivanje $1/\epsilon$ člana uz $\beta$-funkciju[2])

$$\beta_{QCD} = \frac{g_s^3}{(4\pi)^2}2b_{g_s}^{(1)} = \frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\Big(\frac{4}{3}C(f)N_f - \frac{11}{3}C_2(G)\Big). \tag{4.60}$$

Izraz se slaže s literaturom [2]. Uvrštavanjem $C(f) = 1/2$ i $C_2(G) = 3$ dobije se transparentni izraz

$$\beta_{QCD} = \frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\Big(\frac{2}{3}N_f - 11\Big), \tag{4.61}$$

iz kojeg se vidi da je $\beta$-funkcija za QCD negativna u teoriji koja sadrži šest okusa. Negativnost implicira smanjenje konstante vezanja s povećanjem energije, odnosno na dovoljno visokim energijama teorija ulazi u režim asimptotske slobode [2]. U ovom slučaju, na visokim energijama i dalje je opravdano koristiti perturbativni račun. Pol se sada javlja na niskim energijama, u tzv. režimu zatočenja, gdje ga nije opravdano koristiti. Zanimljivo je primijetiti da bi $\beta$ rasla s energijom kada bi $N_f > 16$.

[2]Sakupljanje članova uz iste potencije $\epsilon$-a generira neovisne jednadžbe. Da bi se izračunala $\beta$-funkcija uz član $1/\epsilon$ potrebno je provesti račun u idućem redu računa smetnje i tako redom za svaku potenciju.

Rješavanjem jednadžbe i biranjem granica integracije od neke donje granice $\Lambda$ (u režimu zatočenja) do neke gornje granice $\mu$ kao rješenje dobijemo

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)ln(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})}, \tag{4.62}$$

što implicira da konstanta vezanja opada s energijom.
Opadanje konstante vezanja s povećanjem energije povlači da je teorija ne-Abelova [2]. Fizikalno objašnjenje ove činjenice leži u sljedećem: kao i u QED-u, i u QCD-u postoji polarizacija vakuuma stvaranjem kvark-antikvark virtualnih parova koja uzrokuje zasjenjenje naboja. Kad bi ovo bio dominantni efekt u teoriji (bilo da postoji $> 16$ okusa kvarkova ili da nema međusobnog vezivanja gluona), QCD bi pokazivao isto ponašanje kao i QED. Upravo zbog međusobnog vezivanja gluona, vakuum je također popunjen virtualnim parovima gluona koji, naravno, nose boju. Time je na većim udaljenostima, odnosno na manjim energijama, efektivni naboj (boja) veći. Ovaj efekt poznat je kao antizasjenjenje. Međusobno vezanje gluona, prisjetimo se, pojavilo se kao posljedica ne-Abelove strukture teorije.
Otkriće asimptotske slobode (Gross, Politzer i Wilczek 1973.) opravdalo je korištenje perturbacijske teorije na visokim energijama, što je omogućilo kvantitativna predviđanja fizikalnih opservabli (npr. udarnih presjeka) za visokoenergetske hadronske procese. S druge strane, u režimu zatočenja koristi se tzv. QCD na rešetci (eng. *Lattice QCD*), koji, iako daje rezultate, nije matematički dokazan *ab initio*[3].
Eksperimentalno proučavanje promjene jake konstante vezanja s energijom provodilo se nizom eksperimenata, primjerice proton-antiproton sudarima, elektron-pozitron sudarima, neelastičnim lepton-hadron sudarima itd. [13]. Sakupljanje rezultata na različitim energijama daje ovisnost poznatu iz renormalizacijskih grupnih jednadžbi.

## *4.5 RGEs i ujedinjenje konstanti vezanja*

Rečeno je već kako je renormalizacijska grupa uvedena u fiziku zbog nemogućnosti funkcioniranja perturbacijske teorije u kvantnoj elektrodinamici na visokim energijama. Uskoro se ispostavilo da ona, prikazujući ponašanje parametara teorije na različitim skalama, efikasno pokazuje je li u nekoj teoriji moguće ujedinjenje parametara, odnosno postoji li energija na kojoj sve konstante vezanja imaju jednaku vrijednost. Osim kriterija jednakosti parametara vezanja u nekoj točki, napomenimo da u kriterij ujedinjenja spada i pretpostavka da su te konstante vezanja dio neke veće jedinstvene grupe, koja iznad točke jednakosti valjano opisuje prirodu. Drugim riječima, iznad točke ujedinjenja renormalizacijske grupne jednadžbe opisuju konstantu veze te natkrivajuće grupe.
Povijesno gledano, ujedinjenje elektriciteta i magnetizma, ili elektromagnetske i slabe

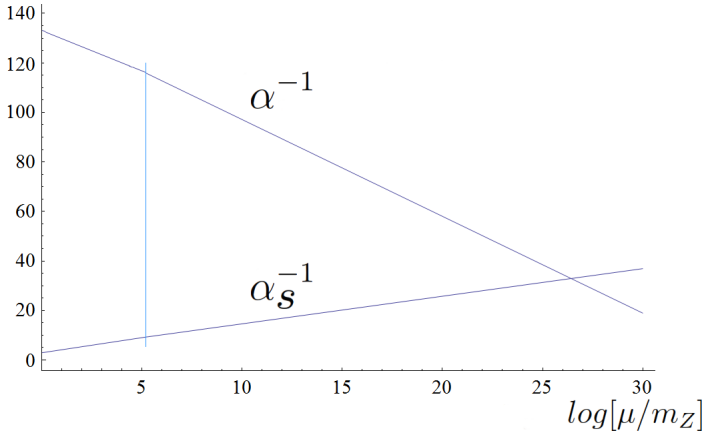
[3] Iz osnovnih matematičkih principa.

sile, navelo je na razumnu pretpostavku da bi teorija koja valjano opisuje prirodu trebala biti definirana parametrima koji za neku određenu energiju imaju jednake vrijednosti, pa time pripadaju i nekoj općenitijoj grupi. To bi se moglo shvatiti tako da u prirodi postoji jedinstvena sila kojoj na nekoj određenoj energiji nije slomljena simetrija. Uzmimo za primjer rezultate za QED i QCD, pri čemu ćemo QED rezultat poopćiti za sve naboje koji se pojavljuju u prirodi. Ustanovili smo da se njihove konstante vezanja u odnosu na energiju ponašaju prema sljedećem pravilu:

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_i Q_i^2 \frac{\alpha_0}{3\pi} ln(\frac{\mu^2}{E_0^2})}, \tag{4.63a}$$

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) ln(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})}, \tag{4.63b}$$

Njihovo ponašanje grafički je prikazano na slici 4.9, uz uvrštavanje eksperimentalnih vrijednosti na skali Z bozona [17], gdje je $N_f = 5$ [2] i $\sum_i Q_i^2 = 20/3$, evoluiranje konstanti vezanja do skale mase top kvarka $m_t$, i uvođenje novih stupnjeva slobode nakon tog praga, $N_f = 6$ i $\sum_i Q_i^2 = 8$. Prag je označen okomitom linijom.




Slika 4.9: Ovisnost inverza konstanti vezanja za QED i QCD o skali energije

Vidimo da na grafu postoji točka ujedinjenja, odnosno energija na kojoj obje konstante vezanja imaju jednaku vrijednost. Lijevo ili desno od točke ujedinjenja jakosti vezivanja poprimaju različite vrijednosti.
Renormalizacijske grupne jednadžbe ubuduće će nam dakle služiti i za proučavanje mogućnosti ujedinjenja parametara teorije.

# 5 Renormalizacijske grupne jednadžbe (RGEs) za standardni model

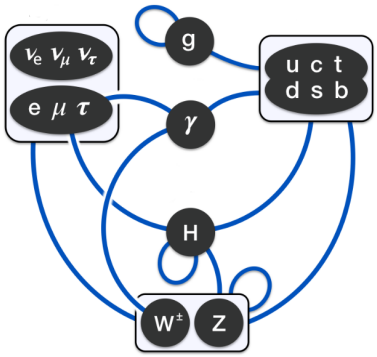
## *5.1 Struktura teorije*

Standardni model (SM) teorija je koja obuhvaća elektromagnetsku, jaku i slabu silu. Kao teorija polja konzistentan je s kvantnom mehanikom i specijalnom teorijom re-

lativnosti. Pokazao se kao izuzetno uspješna teorija za predviđanje i objašnjavanje velikog broja poznatih fenomena te je samokonzistentan u teorijskom smislu. Iako ne obuhvaća gravitaciju i neke eksperimentalno potvrđene fenomene poput neutrinskih oscilacija i ubrzanog širenja svemira[4], zbog velike povijesne važnosti, uspjeha i matematičke konzistencije i danas ostaje teorija na čijim se temeljima grade novi modeli. U kontekstu ovog rada od ključne je važnosti da posjeduje i svojstvo renormalizabilnosti. Standardni model je direktan produkt grupa simetrija

$$G_{SM} = SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y. \tag{5.1}$$

Eksperimentalna zapažanja matematički su valjano opisana unitarnim grupama različitih dimenzija: SU(3) se odnosi na jaku silu koja posjeduje tri različita naboja (boje), SU(2) na slabu silu i U(1) na elektromagnetsku, gdje $Y$ označava hipernaboj, linearnu kombinaciju električnog naboja i treće komponente izospina. U kontekstu kvantizirane baždarne teorije, baždarni bozoni su kvanti baždarnih polja, što implicira da je broj baždarnih bozona jednak broju generatora baždarnih polja. Kako SU(N) grupa ima $N^2-1$ generatora, SU(3) zahtijeva osam baždarnih bozona (gluona) $G$, SU(2) tri bozona $W$ i konačno, U(1) samo jedano bozonsko polje, $B$. S obzirom na Lorentzove transformacije, fermioni se transformiraju kao spinori te međudjeluju izmjenom spomenutih baždarnih bozona, koji se transformiraju kao vektori. Higgsov bozon transformira se kao skalar. Pregled čestica standardnog modela i interakcija među njima prikazan je na slici 5.1.




Slika 5.1: Standardni model - čestice i njihove interakcije

Lagranžijan standardnog modela izvest ćemo u interakcijskoj bazi, za prvu generaciju, bez loma simetrije. Za sada nam je poznato da će se lagranžijan standardnog modela sastojati od jakosti polja za baždarne bozone $B$, $W$ i $G$, njihovih članova dobivenih baždarenjem (eng. *gauge fixing terms*) po uzoru na (4.18), te od Faddeev-Popov duhova za polja $W$ i $G$, koja predstavljaju ne-Abelove strukture u standardnom modelu.

Za slabe interakcije eksperimentalno je poznato da narušavaju paritet, zbog čega

[4]Zbog činenice da standardni model ne obuhvaća sve poznate fenomene danas se smatra efektivnom teorijom polja.

ćemo fermione rastaviti na lijeve i desne komponente [14]. Moramo uzeti u obzir da se leptoni (gdje su lijevi dubleti, a desni singleti) s obzirom na SU(2) transformiraju po pravilu

$$e_R \to \quad e'_R \quad = e_R, \tag{5.2a}$$
$$\ell_L \to \quad \ell'_L \quad = e^{-i\omega^a T^a} \ell_L. \tag{5.2b}$$

Stoga su desne komponente $u_R$, $d_R$, $e_R$ i $\nu_R$ invarijantne na SU(2) transformacije i ne vežu se na baždarne bozone $W^1_\mu$, $W^2_\mu$ i $W^3_\mu$. Primijetimo da desni neutrinski singlet $\nu_R$ ne interagira ni slabom ni jakom interakcijom, niti posjeduje električni naboj; kako je već rečeno, standardni model ne uzima u obzir neutrinske oscilacije, pa time ni masu neutrina. Odsustvo interakcija za $\nu_R$ implicira da su za standardni model bespotrebni[5]. Lagranžijan će sadržavati fermionske dublete i singlete oblika

$$q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \ell_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad ; \quad u_R, d_R, e_R, \tag{5.3}$$

gdje su $u$, $d$, $\nu$ i $e$ redom gornji kvark, donji kvark, neutrino i elektron. Iz njih ćemo graditi kinetičke članove za fermione (i članove za Yukawina vezanja nakon uvođenja Higgsovog polja).
Maseni članovi fermionskih polja se u lagranžijanu pojavljuju uz strukture oblika $\bar{\psi}\psi$ ili po komponentama $\bar{\psi_L}\psi_R + \bar{\psi_R}\psi_L$, što očito nije invarijantno s obzirom na SU(2). Masa bi se trebala generirati interakcijama koje mijenjaju kiralnost, što u standardnom modelu ne može biti zadovoljeno s obzirom da lijevi fermioni nemaju desnog partnera unutar iste SU(2) reprezentacije i obrnuto, odnosno ne postoje partneri sa suprotnim slabim hipernabojem. Pod uvjetom da je on očuvan u interakcijama, fermioni ne mogu mijenjati kiralnost i u teoriji moraju ostati bezmaseni. Isto je tako eksperimentalno poznato da $W$ i $Z$ bozoni imaju masu, no maseni član oblika npr. $W_\mu W^\mu$ ovisi o izboru baždarenja. Stoga fermioni i bozoni standardnog modela moraju dobiti mase nekim drugim mehanizmom. Oba problema rješavaju se uvođenjem Higgsovog polja, čiji je prvi član u lagranžijanu

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \tag{5.4}$$

Posljednja dva člana gornjeg izraza predstavljaju Higgsov potencijal koji je invarijantan na SU(2) transformacije. Skalarno dubletno polje $\phi$ nakon fiksiranja lomi tri globalne simetrije čime generira tri bezmasena Goldstonova bozona, koji će postati longitudinalne komponente $W$ bozona. Fermioni će dobiti masu interakcijama s Higgsovim poljem preko Yukawinih vezanja, što predstavlja drugi član u lagranžijanu u kojem se pojavljuje Higgsovo polje (vidi (5.5) i (5.12)).

[5]Eksperimentalno je opaženo samo postojanje lijevih neutrina. U slučaju da postoje desne komponente, one su ili jako masivne ili interagiraju vrlo slabo.

Konačno možemo složiti lagranžijan standardnog modela (bez sloma simetrije, u interakcijskoj bazi), koji glasi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SM} = &-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{\mu\nu,a} - \frac{1}{4}G^A_{\mu\nu}G^{\mu\nu,A} \\ &- \frac{1}{2\xi_B}(\partial^\mu B_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_W}(\partial^\mu W^a_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_G}(\partial^\mu G^A_\mu)^2 \\ &+ \bar{c}^a_W(-\delta^{ac}\Box)c^c_W + g\epsilon^{abc}\bar{c}^a_W\partial^\mu(W^b_\mu c^c_W) + \bar{c}^A_G(-\delta^{AC}\Box)c^C_G + g_s f^{ABC}\bar{c}^A_G\partial^\mu(G^B_\mu c^C_G) \\ &+ \bar{q}_{Li}i\not{D}q_{Li} + \bar{u}_{Ri}i\not{D}u_{Ri} + \bar{d}_{Ri}i\not{D}d_{Ri} + \bar{\ell}_{Li}i\not{D}\ell_{Li} + \bar{e}_{Ri}i\not{D}e_{Ri} \\ &+ (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\phi) + \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \\ &- \Big(\bar{q}_{Li}\phi(Y_d)_{ij}d_{Rj} + \bar{q}_{Li}i\sigma_2\phi^*(Y_u)_{ij}u_{Rj} + \bar{\ell}_{Li}\phi(Y_e)_{ij}e_{Rj} + h.c.\Big).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Prvi red predstavlja jakosti polja za U(1), SU(2) i SU(3) baždarne bozone, drugi red članove fiksirane baždarenjem, treći duhove za SU(2) i SU(3), četvrti kinetičke fermionske članove, peti lagranžijan Higgsovog polja i zadnji Yukawine članove za interakciju fermiona i Higgsovog polja, gdje indeksi $i, j$ u $(Y)_{ij}$ predstavljaju generacije fermiona koji se vežu na Higgsa, te je h.c. hermitski konjugat za Yukawine članove. Kovarijantne derivacije za fermione i Higgsov bozon definirane su sa:

$$iD_\mu[q_L] = i\partial_\mu - g_s G^A_\mu T^A - gW^a_\mu T^a - g'B_\mu\Upsilon_{q_L}, \tag{5.6a}$$
$$iD_\mu[u_R] = i\partial_\mu - g_s G^A_\mu T^A - g'B_\mu\Upsilon_{u_R}, \tag{5.6b}$$
$$iD_\mu[d_R] = i\partial_\mu - g_s G^A_\mu T^A - g'B_\mu\Upsilon_{d_R}, \tag{5.6c}$$
$$iD_\mu[\ell_L] = i\partial_\mu - gW^a_\mu T^a - g'B_\mu\Upsilon_{\ell_L}, \tag{5.6d}$$
$$iD_\mu[e_R] = i\partial_\mu - g'B_\mu\Upsilon_{e_R}, \tag{5.6e}$$
$$i\mathcal{D}_\mu[\phi] = i\partial_\mu - gW^a_\mu T^a - g'B_\mu\Upsilon_\phi, \tag{5.6f}$$

gdje $\Upsilon$ predstavlja slabi hipernaboj. U definicijama kovarijantnih derivacija zorno se vidi da kvarkovski dubleti interagiraju svim trima silama dok kvarkovski singleti ne interagiraju slabom silom. Jaka sila ne razlikuje dakle lijeve i desne čestice. Leptoni općenito ne interagiraju jakom silom, dok leptonski singleti, kako je već rečeno, ne vide ni slabu silu. Higgsovo polje se zapisuje kao SU(2) dublet i ne interagira jakom silom. Spomenimo još da je veza baždarnih bozona sa fizikalnim česticama definirana kao

$$W^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1 \mp iW^2), \tag{5.7a}$$
$$Z_\mu \equiv cos\theta_W W^3_\mu - sin\theta_W B_\mu, \tag{5.7b}$$
$$A_\mu \equiv cos\theta_W B_\mu + sin\theta_W W^3_\mu, \tag{5.7c}$$

gdje je $\theta_W$ Weinbergov kut ili kut slabog miješanja, koji rotacijom baždarnih bozona daje fizikalni foton i Z bozon.

Da pripremimo lagranžijan za renormaliziranu perturbacijsku teoriju, potrebno je još

raspisati jakosti baždarnih polja i iskombinirati ih s članovima iz baždarnog fiksiranja te raspisati kinetički član Higgsovog polja. Članove za U(1) baždarno polje $B^\mu$ zapisat ćemo kao

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_B}(\partial^\mu B_\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu B^\mu)^2\Big(1-\frac{1}{\xi_B}\Big) - \frac{1}{2}(\partial_\mu B_\nu)^2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Članovi za SU(2) baždarno polje $W^\mu$, s raspisanom kovarijantnom derivacijom imaju oblik,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4}(\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g\epsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu)^2 - \frac{1}{2\xi_W}(\partial^\mu W^a_\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu W^a_\mu)^2\Big(1-\frac{1}{\xi_W}\Big) - \frac{1}{2}(\partial_\mu W^a_\nu)^2 \\ &+ g\epsilon^{abc}\partial_\mu W^a_\nu W^{\mu,b}W^{\nu,c} - \frac{g^2}{4}\epsilon^{abc}\epsilon^{ade}W^b_\mu W^c_\nu W^{\mu,d}W^{\nu,e}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

a član za SU(3) gluonsko polje $G^\mu$ analogno raspisujemo kao

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4}(\partial_\mu G^A_\nu - \partial_\nu G^A_\mu - g_s f^{abc}G^B_\mu G^C_\nu)^2 - \frac{1}{2\xi_G}(\partial^\mu G^A_\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu G^A_\mu)^2\Big(1-\frac{1}{\xi_G}\Big) - \frac{1}{2}(\partial_\mu G^A_\nu)^2 \\ &+ g_s f^{abc}\partial_\mu G^A_\nu G^{\mu,B}G^{\nu,C} - \frac{g_s^2}{4}f^{ABC}f^{ADE}G^B_\mu G^C_\nu G^{\mu,D}G^{\nu,E}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Raspišimo još i kinetički član $(\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\phi)$ za Higgsovo polje:

$$\begin{aligned} &\phi^\dagger(\overleftarrow{\partial}_\mu - igW^a_\mu T^a - ig'B_\mu\Upsilon_\phi)(\overrightarrow{\partial}^\mu + igW^{\mu,a}T^a + ig'B^\mu\Upsilon_\phi)\phi \\ &= \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - igW^a_\mu\phi^\dagger T^a\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi - ig'\Upsilon_\phi B_\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi \\ &+ g^2W^a_\mu W^{\mu,b}\phi^\dagger T^aT^b\phi + 2gg'\Upsilon_\phi W^a_\mu B^\mu\phi^\dagger T^a\phi + g'^2\Upsilon^2_\phi B_\mu B^\mu\phi^\dagger\phi. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Lagranžijan standardnog modela sa definicijama kovarijantnih derivacija i raspisima za članove baždarnih polja i kinetičkog člana za Higgsovo polje sada je u formi u kojoj će se njemu provesti standardna procedura u kontekstu renormalizirane perturbacijske teorije. Preglednosti radi, rastavit ćemo još lagranžijan (5.5) na

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{gauge+fixing} + \mathcal{L}_{ghost} + \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa}, \tag{5.12}$$

gdje prvi član predstavlja prva dva reda, a ostali članovi zadani su svakim idućim redom u (5.5). Nakon definicije renormalizacijskih konstanti renormalizirat ćemo standardni model član po član zadan u (5.12).

## 5.2 Renormalizacijska perturbacijska teorija za standardni model

Iz uvjeta bezdimenzionalnosti akcije slijede dimenzije za bozonska baždarna polja, duhove i fermione standardnog modela u dimenziji $4-2\epsilon$:

$$[B_\mu] = [W^a_\mu] = [G^A_\mu] = [\phi] = [c_W] = [c_G] = \tfrac{D-2}{2} = 1-\epsilon, \tag{5.13a}$$

$$[q_L] = [u_R] = [d_R] = [\ell_L] = [e_R] = \tfrac{D-1}{2} = \tfrac{3}{2} - \epsilon. \tag{5.13b}$$

Gole konstante vezanja imaju dimenzije:

$$[g_B] = [g_{sB}] = [g'_B] = [Y_{u,d,e}] = \epsilon, \tag{5.14a}$$

$$[\lambda_B] = 2\epsilon, \quad [\mu^2_B] = 2. \tag{5.14b}$$

Za lagranžijan (5.5) podrazumijevamo da se sastoji od nerenormaliziranih polja i golih konstanta vezanja. Standardno, fermionska polja i duhove ćemo renormalizirati faktorom $Z_2$, bozonska faktorom $Z_3$ dok renormalizacijski faktor $Z_1$ pripada verteksima modela. Definirajmo renormalizaciju polja redoslijedom kako se pojavljuju u lagranžijanu standardnog modela:

$$B_{\mu B} = (Z_3^B)^{1/2} B_\mu, \quad W^a_{\mu B} = (Z_3^W)^{1/2} W^a_\mu, \quad G^A_{\mu B} = (Z_3^G)^{1/2} G^A_\mu; \tag{5.15a}$$

$$c^a_{WB} = (Z_2^{c_W})^{1/2} c^a_W, \quad c^A_{GB} = (Z_2^{c_G})^{1/2} c^A_G; \tag{5.15b}$$

$$q_{LiB} = (Z_2^{q_L})^{1/2}_{ij} q_{Lj}, \quad u_{RiB} = (Z_2^{u_R})^{1/2}_{ij} u_{Rj}, \quad d_{RiB} = (Z_2^{d_R})^{1/2}_{ij} d_{Rj}; \tag{5.15c}$$

$$\ell_{LiB} = (Z_2^{\ell_L})^{1/2}_{ij} \ell_{Lj}, \quad e_{RiB} = (Z_2^{e_R})^{1/2}_{ij} e_{Rj}; \quad \phi_B = Z_2^\phi \phi, \tag{5.15d}$$

što predstavlja redom renormalizaciju baždarnih bozona, duhova, kvarkova, leptona i Higgsovog bozona.

Renormalizirajmo sada članove lagranžijana za baždarna polja, koji nakon renormalizacije polja imaju oblik

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gauge+fixing} = & \frac{1}{2} Z_3^B B_\mu \big( g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu (1 - \frac{1}{\xi_B}) \big) B_\nu \\
& + \frac{1}{2} Z_3^W \delta^{ab} W^a_\mu \big( g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu (1 - \frac{1}{\xi_W}) \big) W^b_\nu \\
& + \frac{1}{2} Z_3^G \delta^{AB} G^A_\mu \big( g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu (1 - \frac{1}{\xi_G}) \big) G^B_\nu \\
& + (Z_3^W)^{3/2} g_B \epsilon^{abc} \partial_\mu W^a_\nu W^{\mu,b} W^{\nu,c} \\
& - (Z_3^W)^2 \frac{g_B^2}{4} \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} W^b_\mu W^c_\nu W^{\mu,d} W^{\nu,e} \\
& + (Z_3^G)^{3/2} g_{sB} f^{abc} \partial_\mu G^A_\nu G^{\mu,B} G^{\nu,C} \\
& - (Z_3^G)^2 \frac{g_{sB}^2}{4} f^{ABC} f^{ADE} G^B_\mu G^C_\nu G^{\mu,D} G^{\nu,E}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Prethodni izraz daje nam veze među renormalizacijskim faktorima za prvi član:

$$(Z_3^W)^{3/2} g_B = Z_1^{3W} g \mu^\epsilon, \tag{5.17a}$$

$$(Z_3^W)^2 g_B^2 = Z_1^{4W} g^2 \mu^{2\epsilon}, \tag{5.17b}$$

$$(Z_3^G)^{3/2} g_{sB} = Z_1^{3G} g_s \mu^\epsilon, \tag{5.17c}$$

$$(Z_3^G)^2 g_{sB}^2 = Z_1^{4G} g_s^2 \mu^{2\epsilon}. \tag{5.17d}$$

Renormaliziranje polja za član s duhovima daje rezultat

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ghost} = {} & Z_2^{c_W}\bar{c}_W^a(-\delta^{ab}\Box)c_W^b - Z_2^{c_W}(Z_3^W)^{1/2}g_B\epsilon^{abc}\partial^\mu\bar{c}_W^a W_\mu^b c_W^c \\ & + Z_2^{c_G}\bar{c}_G^A(-\delta^{AB}\Box)c_G^B - Z_2^{c_G}(Z_3^G)^{1/2}g_{sB}f^{abc}\partial^\mu\bar{c}_G^A G_\mu^B c_G^C,\end{aligned} \tag{5.18}$$

što generira nove veze među renormalizacijskim faktorima:

$$Z_2^{c_W}(Z_3^W)^{1/2}g_B = Z_1^{c_W}g\mu^\epsilon, \tag{5.19a}$$

$$Z_2^{c_G}(Z_3^G)^{1/2}g_{sB} = Z_1^{c_G}g_s\mu^\epsilon. \tag{5.19b}$$

Renormalizaciju kinetičkih članova za fermione provest ćemo koristeći pune definicije kovarijantnih derivacija (5.6),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{fermion} = {} & \big(Z_{2i}^{q_L}\bar{q}_{Li}i\partial\!\!\!/ q_{Li} - Z_{2i}^{q_L}(Z_3^G)^{1/2}g_{sB}\bar{q}_{Li}\mathcal{G}\!\!\!/^A T^A q_{Li} \\ & - Z_{2i}^{q_L}(Z_3^W)^{1/2}g_B\bar{q}_{Li}W\!\!\!/^a T^a q_{Li} - Z_{2i}^{q_L}(Z_3^B)^{1/2}g'_B\bar{q}_{Li}B\!\!\!/\Upsilon_{q_L}q_{Li}\big) \\ & + \big(Z_{2i}^{u_R}\bar{u}_{Ri}i\partial\!\!\!/ u_{Ri} - Z_{2i}^{u_R}(Z_3^G)^{1/2}g_{sB}\bar{u}_{Ri}\mathcal{G}\!\!\!/^A T^A u_{Ri} \\ & - Z_{2i}^{u_R}(Z_3^B)^{1/2}g'_B\bar{u}_{Ri}B\!\!\!/\Upsilon_{u_R}u_{Ri}\big) \\ & + \big(Z_{2i}^{d_R}\bar{d}_{Ri}i\partial\!\!\!/ d_{Ri} - Z_{2i}^{d_R}(Z_3^G)^{1/2}g_{sB}\bar{d}_{Ri}\mathcal{G}\!\!\!/^A T^A d_{Ri} \\ & - Z_{2i}^{d_R}(Z_3^B)^{1/2}g'_B\bar{d}_{Ri}B\!\!\!/\Upsilon_{d_R}d_{Ri}\big) \\ & + \big(Z_{2i}^{\ell_L}\bar{\ell}_{Li}i\partial\!\!\!/\ell_{Li} - Z_{2i}^{\ell_L}(Z_3^W)^{1/2}g_B\bar{\ell}_{Li}W\!\!\!/^a T^a\ell_{Li} \\ & - Z_{2i}^{\ell_L}(Z_3^B)^{1/2}g'_B\bar{\ell}_{Li}B\!\!\!/\Upsilon_{\ell_L}\ell_{Li}\big) \\ & + \big(Z_{2i}^{e_R}\bar{e}_{Ri}i\partial\!\!\!/ e_{Ri} - Z_{2i}^{e_R}(Z_3^B)^{1/2}g'_B\bar{e}_{Ri}B\!\!\!/\Upsilon_{e_R}e_{Ri}\big),\end{aligned} \tag{5.20}$$

gdje zagrade odvajaju različite vrste fermiona, iz čega se generiraju veze među renormalizacijskim faktorima proizišle iz fermionskog sektora:

$$Z_{2i}^{q_L}(Z_3^G)^{1/2}g_{sB} = Z_{1i}^{q_L G}g_s\mu^\epsilon, \quad Z_{2i}^{q_L}(Z_3^W)^{1/2}g_B = Z_{1i}^{q_L W}g\mu^\epsilon,$$

$$Z_{2i}^{q_L}(Z_3^B)^{1/2}g'_B = Z_{1i}^{q_L B}g'\mu^\epsilon; \tag{5.21a}$$

$$Z_{2i}^{u_R}(Z_3^G)^{1/2}g_{sB} = Z_{1i}^{u_R G}g_s\mu^\epsilon, \quad Z_{2i}^{u_R}(Z_3^B)^{1/2}g'_B = Z_{1i}^{u_R B}g'\mu^\epsilon; \tag{5.21b}$$

$$Z_{2i}^{d_R}(Z_3^G)^{1/2}g_{sB} = Z_{1i}^{d_R G}g_s\mu^\epsilon, \quad Z_{2i}^{d_R}(Z_3^B)^{1/2}g'_B = Z_{1i}^{d_R B}g'\mu^\epsilon; \tag{5.21c}$$

$$Z_{2i}^{\ell_L}(Z_3^W)^{1/2}g_B = Z_{1i}^{\ell_L W}g\mu^\epsilon, \quad Z_{2i}^{\ell_L}(Z_3^B)^{1/2}g'_B = Z_{1i}^{\ell_L B}g'\mu^\epsilon; \tag{5.21d}$$

$$Z_{2i}^{e_R}(Z_3^B)^{1/2}g'_B = Z_{1i}^{e_R B}g'\mu^\epsilon. \tag{5.21e}$$

Dvostruki indeksi za renormalizacijski faktor vrha $Z_1$ označavaju vrstu fermiona i bozona u općenitoj fermion-bozon-antifermion interakciji.
Renormaliziranje članova za Higgsov bozon uz raspis kinetičkog člana daje rezultat:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Higgs} = {} & Z_2^\phi\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - iZ_2^\phi(Z_3^W)^{1/2}g_B W_\mu^a\phi^\dagger T^a\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi - iZ_2^\phi(Z_3^B)^{1/2}g'_B\Upsilon_\phi B_\mu\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi \\ & + Z_2^\phi Z_3^W g_B^2 W_\mu^a W^{\mu,b}\phi^\dagger T^a T^b\phi + 2Z_2^\phi(Z_3^W)^{1/2}(Z_3^B)^{1/2}g_B g'_B\Upsilon_\phi W_\mu^a B^\mu\phi^\dagger T^a\phi \\ & + Z_2^\phi Z_3^B g_B'^2\Upsilon_\phi^2 B_\mu B^\mu\phi^\dagger\phi + Z_2^\phi\mu_B^2\phi^\dagger\phi - (Z_2^\phi)^2\lambda_B(\phi^\dagger\phi)^2.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Iz (5.22) proizlaze sljedeće veze među renormalizacijskim faktorima:

$$Z_2^\phi (Z_3^W)^{1/2} g_B = Z_1^{\phi W} g \mu^\epsilon, \tag{5.23a}$$
$$Z_2^\phi (Z_3^B)^{1/2} g'_B = Z_1^{\phi B} g' \mu^\epsilon, \tag{5.23b}$$
$$Z_2^\phi Z_3^W g_B^2 = Z_1^{\phi 2W} g^2 \mu^{2\epsilon}, \tag{5.23c}$$
$$Z_2^\phi (Z_3^W Z_3^B)^{1/2} g_B g'_B = Z_1^{\phi WB} g g' \mu^{2\epsilon}, \tag{5.23d}$$
$$Z_2^\phi Z_3^B g_B'^2 = Z_1^{\phi 2B} g'^2 \mu^{2\epsilon}, \tag{5.23e}$$
$$Z_2^\phi \mu_B^2 = Z_1^{\phi\mu} \mu^2, \tag{5.23f}$$
$$(Z_2^\phi)^2 \lambda_B = Z_1^{4\phi} \lambda \mu^{2\epsilon}. \tag{5.23g}$$

Renormalizacija polja u Yukawinom sektoru transformira lagranžijan u sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} = &- (Z_2^\phi)^{1/2} (Z_2^{q_L\dagger})^{1/2}_{ik} (Y_{dB})_{kl} (Z_2^{d_R})^{1/2}_{lj} \bar{q}_{Li} \phi d_{Rj} \\ &- (Z_2^\phi)^{1/2} (Z_2^{q_L\dagger})^{1/2}_{ik} (Y_{uB})_{kl} (Z_2^{u_R})^{1/2}_{lj} \bar{q}_{Li} i\sigma_2 \phi^* u_{Rj} \\ &- (Z_2^\phi)^{1/2} (Z_2^{\ell_L\dagger})^{1/2}_{ik} (Y_{eB})_{kl} (Z_2^{e_R})^{1/2}_{lj} \bar{\ell}_{Li} \phi e_{Rj} + h.c., \end{aligned} \tag{5.24}$$

što nam daje zadnju grupu relacija među renormalizacijskim faktorima:

$$(Z_2^\phi)^{1/2} \big( (Z_2^{q_L\dagger})^{1/2} (Y_{dB}) (Z_2^{d_R})^{1/2} \big)_{ij} = (Z_1^{q_L \phi d_R} (Y_d))_{ij} \mu^\epsilon, \tag{5.25a}$$
$$(Z_2^\phi)^{1/2} \big( (Z_2^{q_L\dagger})^{1/2} (Y_{uB}) (Z_2^{u_R})^{1/2} \big)_{ij} = (Z_1^{q_L \phi u_R} (Y_u))_{ij} \mu^\epsilon, \tag{5.25b}$$
$$(Z_2^\phi)^{1/2} \big( (Z_2^{\ell_L\dagger})^{1/2} (Y_{eB}) (Z_2^{e_R})^{1/2} \big)_{ij} = (Z_1^{\ell_L \phi e_R} (Y_e))_{ij} \mu^\epsilon, \tag{5.25c}$$
$$(Z_2^\phi)^{1/2} \big( (Z_2^{d_R\dagger})^{1/2} (Y_{dB})^\dagger (Z_2^{q_L})^{1/2} \big)_{ji} = ((Y_d)^\dagger (Z_1^{q_L \phi d_R})^\dagger)_{ji} \mu^\epsilon, \tag{5.25d}$$
$$(Z_2^\phi)^{1/2} \big( (Z_2^{u_R\dagger})^{1/2} (Y_{uB})^\dagger (Z_2^{q_L})^{1/2} \big)_{ji} = ((Y_u)^\dagger (Z_1^{q_L \phi u_R})^\dagger)_{ji} \mu^\epsilon, \tag{5.25e}$$
$$(Z_2^\phi)^{1/2} \big( (Z_2^{e_R\dagger})^{1/2} (Z_2^{\ell_L})^{1/2} (Y_{eB})^\dagger (Z_2^{\ell_L})^{1/2} \big)_{ji} = ((Y_e)^\dagger (Z_1^{\ell_L \phi e_R})^\dagger)_{ji} \mu^\epsilon. \tag{5.25f}$$

Konačno možemo sistematski zapisati veze između golih i fizikalnih konstanti vezanja u standardnom modelu:

$$\begin{aligned} g_B \mu^{-\epsilon} &= (Z_3^W)^{-3/2} Z_1^{3W} g = (Z_3^W)^{-1} (Z_1^{4W})^{1/2} g \\ &= (Z_2^{c_W})^{-1} (Z_3^W)^{-1/2} Z_1^{c_W} g = (Z_{2i}^{q_L})^{-1} (Z_3^W)^{-1/2} Z_{1i}^{q_L W} g \\ &= (Z_{2i}^{\ell_L})^{-1} (Z_3^W)^{-1/2} Z_{1i}^{\ell_L W} g = (Z_2^\phi)^{-1} (Z_3^W)^{-1/2} Z_1^{\phi W} g \\ &= (Z_2^\phi)^{-1/2} (Z_3^W)^{-1/2} (Z_1^{\phi 2W})^{1/2} g \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} g_{sB} \mu^{-\epsilon} &= (Z_3^G)^{-3/2} Z_1^{3G} g_s = (Z_3^G)^{-1} (Z_1^{4G})^{1/2} g_s \\ &= (Z_2^{c_G})^{-1} (Z_3^G)^{-1/2} Z_1^{c_G} g_s = (Z_{2i}^{q_L})^{-1} (Z_3^G)^{-1/2} Z_{1i}^{q_L G} g_s \\ &= (Z_{2i}^{u_R})^{-1} (Z_3^G)^{-1/2} Z_{1i}^{u_R G} g_s = (Z_{2i}^{d_R})^{-1} (Z_3^G)^{-1/2} Z_{1i}^{d_R G} g_s, \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} g'_B \mu^{-\epsilon} &= (Z_{2i}^{q_L})^{-1} (Z_3^B)^{-1/2} Z_1^{q_L B} g' = (Z_{2i}^{u_R})^{-1} (Z_3^B)^{-1/2} Z_{1i}^{u_R B} g' \\ &= (Z_{2i}^{d_R})^{-1} (Z_3^B)^{-1/2} Z_{1i}^{d_R B} g' = (Z_{2i}^{\ell_L})^{-1} (Z_3^B)^{-1/2} Z_{1i}^{\ell_L B} g' \\ &= (Z_{2i}^{e_R})^{-1} (Z_3^B)^{-1/2} Z_{1i}^{e_R B} g' = (Z_2^\phi)^{-1} (Z_3^B)^{-1/2} Z_1^{\phi B} g' \\ &= (Z_2^\phi)^{-1/2} (Z_3^B)^{-1/2} (Z_1^{\phi 2B})^{1/2} g', \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$g_B g'_B \mu^{-2\epsilon} = (Z_2^\phi)^{-1}(Z_3^W Z_3^B)^{-1/2} Z_1^{\phi WB} g g', \tag{5.29}$$

za konstante vezanja $g$, $g_s$ i $g'$. Iz Higgsovog dijela preostaju veze:

$$\mu_B^2 = (Z_2^\phi)^{-1} Z_1^{\phi\mu} \mu^2, \tag{5.30a}$$

$$\lambda_B \mu^{-2\epsilon} = (Z_2^\phi)^{-2} Z_1^{4\phi} \lambda, \tag{5.30b}$$

i konačno za Yukawin dio imamo poopćenu relaciju:

$$(Y_{(u,d,e)B})_{ij} \mu^{-\epsilon} = (Z_2^\phi)^{-1/2} \big( (Z_2^{f_1})^{-1/2} Z_1^{f_1 \phi f_2} (Y_{u,d,e}) (Z_2^{f_2})^{-1/2} \big)_{ij} \tag{5.31}$$

gdje su $f_1$ i $f_2$ fermioni koji se vežu na Higgsa. Primijetimo da kroz izvod nismo mijenjali poredak renormalizacijskih faktora u članu s Yukawinim vezanjima.
U izrazu ispod sustavno ćemo popisati relacije koje vežu renormalizacijske faktore u standardnom modelu, koji kao posljedica Slavnov-Taylorovih identiteta osiguravaju univerzalnost renormalizirane konstane vezanja, a slijede iz (5.26), (5.27) i (5.28).

$$\begin{aligned} (Z_3^W)^{-1} Z_1^{3W} &= (Z_3^W)^{-1/2} (Z_1^{4W})^{1/2} \\ &= (Z_2^{c_W})^{-1} Z_1^{c_W} = (Z_{2i}^{q_L})^{-1} Z_{1i}^{q_L W} \\ &= (Z_{2i}^{\ell_L})^{-1} Z_{1i}^{\ell_L W} = (Z_2^\phi)^{-1} Z_1^{\phi W} \\ &= (Z_2^\phi)^{-1/2} (Z_1^{\phi 2W})^{1/2}, \end{aligned} \tag{5.32a}$$

$$\begin{aligned} (Z_3^G)^{-1} Z_1^{3G} &= (Z_3^G)^{-1/2} (Z_1^{4G})^{1/2} \\ &= (Z_2^{c_G})^{-1} Z_1^{c_G} = (Z_{2i}^{q_L})^{-1} Z_{1i}^{q_L G} \\ &= (Z_{2i}^{u_R})^{-1} Z_{1i}^{u_R G} = (Z_{2i}^{d_R})^{-1} Z_{1i}^{d_R G}, \end{aligned} \tag{5.32b}$$

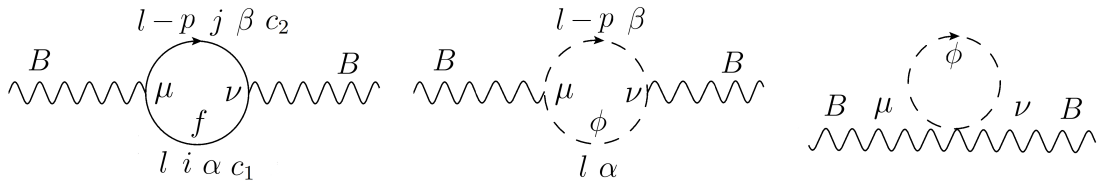
$$\begin{aligned} (Z_{2i}^{q_L})^{-1} Z_{1i}^{q_L B} &= (Z_{2i}^{u_R})^{-1} Z_{1i}^{u_R B} \\ &= (Z_{2i}^{d_R})^{-1} Z_{1i}^{d_R B} = (Z_{2i}^{\ell_L})^{-1} Z_{1i}^{\ell_L B} \\ &= (Z_{2i}^{e_R})^{-1} Z_{1i}^{e_R B} = (Z_2^\phi)^{-1} Z_1^{\phi B} \\ &= (Z_2^\phi)^{-1/2} (Z_1^{\phi 2B})^{1/2}, \end{aligned} \tag{5.32c}$$

Veze među renormalizacijskim faktorima koriste kao pomoć u odabiru onih radijativnih korekcija preko kojih se najjednostavnije dobiju izrazi za izračun $\beta$-funkcija te kao provjera točnosti računa. Također mogu poslužiti za izračun onih renormalizacijskih faktora čiji je eksplicitan račun složeniji (npr. za četverovrhove[6]).

[6]Veze među renormalizacijskim faktorima jamstvo su renormalizabilnosti teorije. To se u praksi može lijepo vidjeti kada se složeni računi za npr. četverovrhove na kraju svedu na izraz proporcionalan jednom golom vrhu.

## 5.3 Radijativne korekcije standardnog modela na nivou jedne petlje I (vlastite energije)

Dijagrame vlastitih energija računat ćemo redom kojim se čestice pojavljuju u lagranžijanu standardnog modela. Nakon raspisa amplitude po Feynmanovim pravilima izdvojit ćemo relevantni $1/\epsilon$ član iz svake amplitude. Na kraju poglavlja popisat ćemo renormalizacijske faktore koje ćemo prepoznati kao faktore proporcionalnosti koji se pojavljuju uz inverze propagatora teorije. Generacijske indekse označit ćemo sa $i$ i $j$, a spinorne indekse sa $\alpha$ i $\beta$, a QCD naboj (boju) sa $c_i$. Kako je standardni model kompleksnija teorija od onih koje smo do sada obrađivali, uz svaku liniju ili petlju označit ćemo koju česticu predstavlja. Za svaki se dijagram podrazumijeva da impuls $p$ ulazi s desna. Mase zanemarujemo.
Dijagrami vlastite energije $B$ bozona u standardnom modelu imaju sedam doprinosa, prikazanih na slici 5.2, gdje prvi dijagram podrazumijeva sve fermione koji se javljaju u teoriji (indeks boje odnosi se samo na kvarkove).




Slika 5.2: Dijagrami vlastite energije $B$ bozona u najnižem redu

Amplituda za kvarkovski dublet $q_L$ ima oblik

$$i\Pi^{\mu\nu}[q_L] = -g'^2\delta_{ii}\delta_{\alpha\alpha}\delta_{c_1c_1}\int_0^\infty \frac{d^Dl\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{Tr(\gamma^\mu \not{l}\gamma^\nu(\not{l}-\not{p})P_R)}{l^2(l-p)^2}, \tag{5.33}$$

pri čemu je $\delta_{ii} = n_g$, $\delta_{\alpha\alpha} = 2$ i $\delta_{c_1c_1} = n_c$ redom broj generacija, spinorna dimenzija i broj boja. Općenito će u uglatim zagradama na lijevoj strani jednakosti stajati čestica koja tvori petlju. Doprinosi ostalih fermionskih petlji potpuno su analogni, do na razliku u ova tri faktora. Izdvajanje $1/\epsilon$ člana za prvi dijagram na slici 5.2 daje rezultate:

$$i\Pi^{\mu\nu}[q_L] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Big(\frac{-2\Upsilon^2_{q_L}}{3}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}2n_cn_g \tag{5.34a}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}[u_R] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Big(\frac{-2\Upsilon^2_{u_R}}{3}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}n_cn_g \tag{5.34b}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}[d_R] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Big(\frac{-2\Upsilon^2_{d_R}}{3}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}n_cn_g \tag{5.34c}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}[\ell_L] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Big(\frac{-2\Upsilon^2_{\ell_L}}{3}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}2n_g \tag{5.34d}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}[e_R] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Big(\frac{-2\Upsilon^2_{e_R}}{3}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}n_g \tag{5.34e}$$

gdje, naravno singleti ne nose spinorne indekse i leptoni ne nose boju. Primijetimo invarijantnu strukturu $g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu$ kakvu smo i očekivali u računu vlastite energije baždarnog bozona. Amplituda sa Higgsovim dubletom ima oblik

$$i\Pi^{\mu\nu}[\phi] = g'^2\delta_{\alpha\alpha}\Upsilon_\phi^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{(2l-p)^\mu (2l-p)^\nu}{l^2(l-p)^2}, \tag{5.35}$$

i rezultira doprinosom

$$i\Pi^{\mu\nu}[\phi] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Big(\frac{-2\Upsilon_\phi^2}{3}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.36}$$

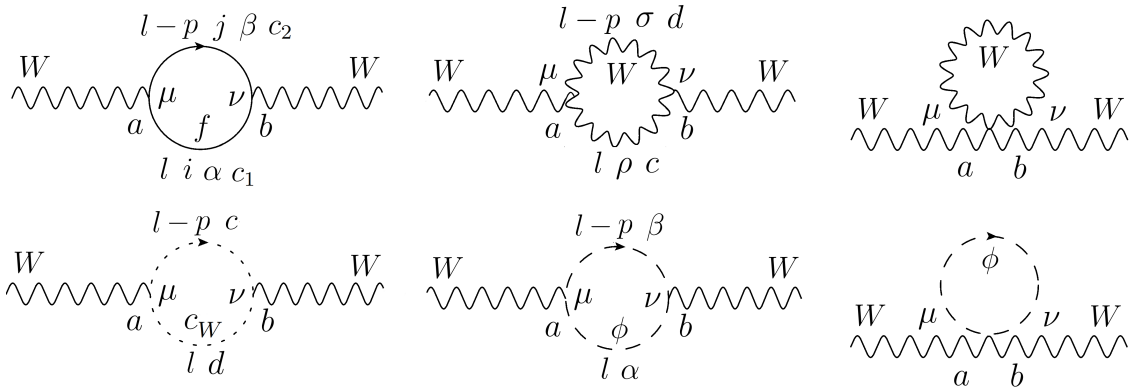
Poslijednji dijagram na slici 5.2 sadrži jedan propagator i iščezava, što smo već do sada susreli u QCD-u. Ubuduće će dijagrami tog tipa biti prikazani na slikama, no u računu ćemo ih zanemariti jer znamo da iščezavaju. Zbroj svih doprinosa, uz $1/\epsilon$ član, za vlastitu energiju $B$ bozona iznosi

$$i\Pi^{\mu\nu}(B) \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\Big(\frac{-1}{3}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\Big)\Big(n_c n_f(2\Upsilon_{q_L}^2 + \Upsilon_{u_R}^2 + \Upsilon_{d_R}^2) + n_f(2\Upsilon_{\ell_L}^2 + \Upsilon_{e_R}^2) + 2\Upsilon_\phi^2\Big)\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.37}$$

pri čemu je uzeto u obzir da je $2n_g = n_f$, gdje je $n_f$ broj okusa[7]. Prethodni izraz implicira renormalizacijski faktor $Z_3^B$, koji glasi:

$$Z_3^B = 1 - \frac{1}{3}\Big(n_c n_f(2\Upsilon_{q_L}^2 + \Upsilon_{u_R}^2 + \Upsilon_{d_R}^2) + n_f(2\Upsilon_{\ell_L}^2 + \Upsilon_{e_R}^2) + 2\Upsilon_\phi^2\Big)\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.38}$$

Idući se u teoriji pojavljuje SU(2) baždarni bozon $W$. Dijagrami koji doprinose njegovoj vlastitoj energiji prikazani su na slici 5.3.




Slika 5.3: Dijagrami vlastite energije $W$ bozona u najnižem redu

Oznaka na prvom dijagramu $f$ sada obuhvaća samo lijeve fermione teorije, dublete $q_L$ i $\ell_L$, budući da $W$ bozon ne interagira sa singletima. Stoga se popravka na vlastitu energiju $W$ bozona u najnižem redu sastoji od ukupno sedam doprinosa, od kojih

[7]U standardnom modelu postoji šest kvarkovskih i šest leptonskih okusa. Okus čestica može se mijenjati elektroslabim interakcijama.

dva, koja sadrže jedan propagator (sasvim desno na slici 5.3) iščezavaju. U rezultatima očekujemo invarijantnu formu oblika $(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{ab}$, no analogno slučaju u QCD-u drugi i četvrti dijagram na slici 5.3 zatvarat će ju tek u zbroju svojih doprinosa. Rezultati će biti potpuno analogni onima za $B$ bozon, do na razlike proizišle iz SU(2) algebre.
Korekcija na vlastitu energiju $W$ bozona sastoji se od doprinosa

$$i\Pi^{\mu\nu}_{ab}[q_L] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{ab}\Big(\frac{-2C(f,2)}{3}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}n_c n_g, \tag{5.39a}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}_{ab}[\ell_L] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{ab}\Big(\frac{-2C(f,2)}{3}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}n_g, \tag{5.39b}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}_{ab}[\phi] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{ab}\Big(\frac{-C(f,2)}{3}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.39c}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}_{ab}[W] \supseteq i(\frac{19}{12}g^{\mu\nu}p^2 - \frac{11}{6}p^\mu p^\nu)\delta_{ab}\Big(C_2(G,2)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.39d}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}_{ab}[c_W] \supseteq i(\frac{1}{12}g^{\mu\nu}p^2 + \frac{1}{6}p^\mu p^\nu)\delta_{ab}\Big(C_2(G,2)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.39e}$$

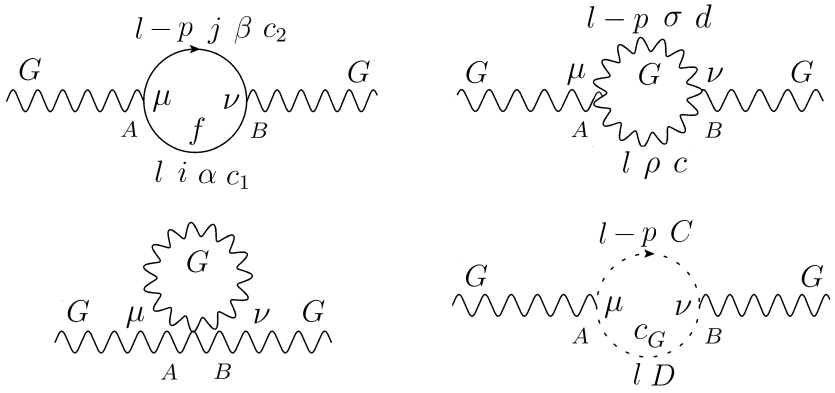
koji zbrojeni zatvaraju invarijantnu formu

$$i\Pi^{\mu\nu}_{ab}(W) \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{ab}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\Big(\frac{5}{3}C_2(G,2) - \frac{1}{3}C(f,2)(1+2n_g(1+n_c))\Big)\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.40}$$

iz čega iščitavamo renormalizacijski faktor $Z_3^W$,

$$Z_3^W = 1 + \left(\frac{5}{3}C_2(G,2) - \frac{1}{3}C(f,2)\Big(1 + n_f(1+n_c)\Big)\right)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.41}$$

Popravka u prvom redu računa smetnje na vlastitu energiju baždarnog SU(3) bozona, gluona, prikazana je na slici 5.4 pri čemu $f$ označava fermione s kojima gluon




Slika 5.4: Dijagrami vlastite energije $G$ bozona u najnižem redu

interagira, odnosno kvarkovski dublet $q_L$ i singlete $u_R$ i $d_R$. To obuhvaća ukupno šest doprinosa, od kojih treći po redu dijagram na slici 5.4 iščezava. Ponovno možemo

iskoristiti već poznate rezultate za $W$ bozon i modificirati ih u skladu s pravilima SU(3) algebre. Rezultati slijede:

$$i\Pi^{\mu\nu}_{AB}[q_L] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{AB}\Big(\frac{-4C(f,3)}{3}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}n_g, \tag{5.42a}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}_{AB}[d_R] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{AB}\Big(\frac{-2C(f,3)}{3}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}n_g, \tag{5.42b}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}_{AB}[u_R] \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{AB}\Big(\frac{-2C(f,3)}{3}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}n_g, \tag{5.42c}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}_{AB}[G] \supseteq i(\frac{19}{12}g^{\mu\nu}p^2 - \frac{11}{6}p^\mu p^\nu)\delta_{AB}\Big(C_2(G,3)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.42d}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}_{AB}[c_G] \supseteq i(\frac{1}{12}g^{\mu\nu}p^2 + \frac{1}{6}p^\mu p^\nu)\delta_{AB}\Big(C_2(G,3)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\Big)\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.42e}$$

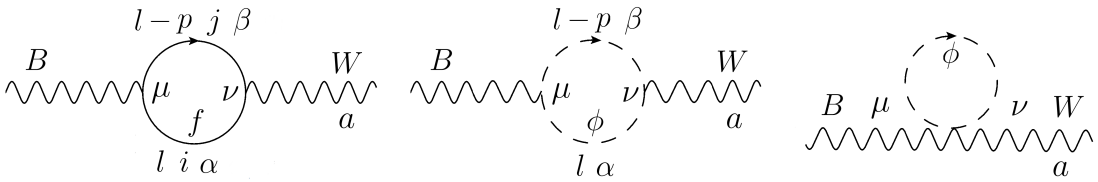
i daju ukupan doprinos oblika

$$i\Pi^{\mu\nu}_{AB}(G) \supseteq i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_{AB}\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\Big(\frac{5}{3}C_2(G,3) - \frac{4}{3}C(f,3)n_f\Big)\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.43}$$

iz čega iščitavamo renormalizacijski faktor $Z_3^G$ koji glasi:

$$Z_3^G = 1 + \left(\frac{5}{3}C_2(G,3) - \frac{4}{3}C(f,3)n_f\right)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.44}$$

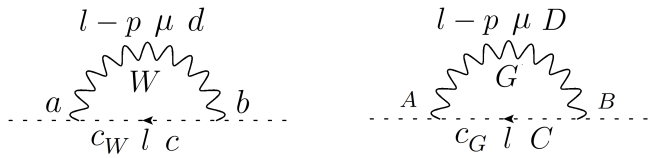
Što se tiče bozonskog dijela, preostaje nam izvrijediti dijagrame vlastite energije u kojima se $B$ bozon pretvara u $W$ bozon ili obrnuto. Dijagrami za ove procese prikazani su na slici 5.5. Sada $f$ predstavlja $q_L$. Za treći dijagram znamo da iščezava, no




Slika 5.5: Dijagrami vlastite energije za $B - W$ prijelaz u prvom redu

isto vrijedi i za prva dva. Naime, vrhovi standardnog modela $\bar{q}Wq$ i $\phi^\dagger W\phi$ sadržavaju SU(2) generator $T^a_{\alpha\beta}$, dok vrhovi $\bar{q}Bq$ i $\phi^\dagger B\phi$ sadržavaju $\delta_{\alpha\beta}$. Time zajedno zatvaraju formu $T^a_{\alpha\alpha}$, koja naravno, iščezava[8]. Dakle, nijedan od ovih dijagrama nema neiščezavajući doprinos, niti rezultira u novim renormalizacijskim faktorima (primijetimo da se renormalizacijski fakori takvog tipa nisu pojavili tokom renormalizacije lagranžijana). Time smo obuhvatili sve bozonske vlastite energije u teoriji.
Idući se u lagranžijanu standardnog modela pojavljuju duhovi. Kako svaki duh interagira samo sa svojim bozonom, dakle $c_W$ sa $W$ bozonom i $c_G$ sa $G$ bozonom, svaki će od duhova doprinijeti s jednim dijagramom, koji će potpuno definirati njegov renormalizacijski faktor u prvom redu. Dijagrami za duhove prikazani su na slici 5.6.
Prvi dijagram ima amplitudu

[8]U fundamentalnoj reprezentaciji SU(n) grupe generatori su općenito hermitske kompleksne $n \times n$ matrice kojima trag iščezava (eng. *traceless matrices*).




Slika 5.6: Dijagrami vlastitih energija za duhove standardnog modela

$$-i\Sigma^{ab}(c_W) = g^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\epsilon^{acd}\epsilon^{bcd} p^\mu l_\mu}{l^2(l-p)^2}, \tag{5.45}$$

koja sadržava $1/\epsilon$ član oblika

$$-i\Sigma^{ab}(c_W) \supseteq -ip^2\delta^{ab}\left(\frac{1}{2}C_2(G,2)\right)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.46}$$

dok drugi dijagram ima analogni doprinos

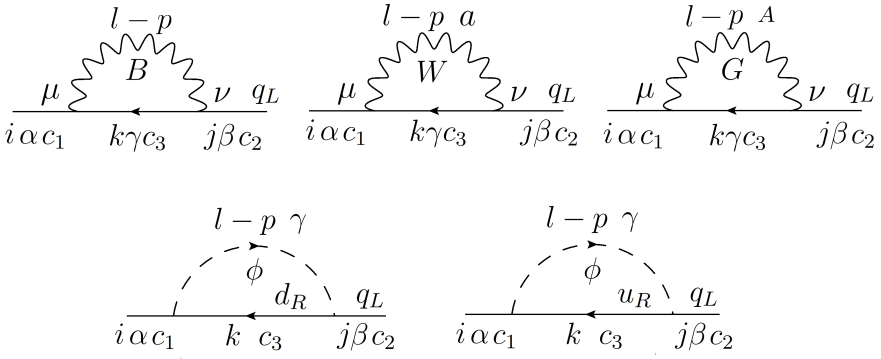
$$-i\Sigma^{AB}(c_G) \supseteq -ip^2\delta^{AB}\left(\frac{1}{2}C_2(G,3)\right)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.47}$$

iz čega iščitavamo renormalizacijske fakore $Z_2^{c_W}$ i $Z_2^{c_G}$:

$$Z_2^{c_W} = 1 + \frac{1}{2}C_2(G,2)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.48}$$

$$Z_2^{c_G} = 1 + \frac{1}{2}C_2(G,3)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.49}$$

Prateći lagranžijan standardnog modela, na red dolaze vlastite energije fermiona. Doprinosi vlastitoj energiji kvarkovskog dubleta $q_L$ prikazani su na slici 5.7. Prvi




Slika 5.7: Dijagrami vlastitih energija za kvarkovski dublet $q_L$

dijagram ima amplitudu:

$$-i\Sigma[B] = -g'^2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta_{c_1c_2}\Upsilon_{q_L}^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu P_L P_L \not{l} P_R \gamma_\mu P_L}{l^2(l-p)^2}, \tag{5.50}$$

koja sadrži $1/\epsilon$ član

$$-i\Sigma[B] \supseteq i\not{p}P_L\big(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta_{c_1c_2}\Upsilon^2_{q_L}\big)\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.51}$$

Analogno, do na razlike u faktorima, možemo napisati rezultate za drugi i treći dijagram sa $W$ i $G$ bozonom,

$$-i\Sigma[W] \supseteq i\not{p}P_L\big(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta_{c_1c_2}C_2(f,2)\big)\tfrac{g^2}{(4\pi)^2}\tfrac{1}{\epsilon}, \tag{5.52a}$$

$$-i\Sigma[G] \supseteq i\not{p}P_L\big(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta_{c_1c_2}C_2(f,3)\big)\tfrac{g_s^2}{(4\pi)^2}\tfrac{1}{\epsilon}, \tag{5.52b}$$

i konačno, rezultate za posljednja dva dijagrama:

$$-i\Sigma[d_R,\phi] \supseteq i\not{p}P_L\big(\tfrac{1}{2}(Y_dY_d^\dagger)_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta_{c_1c_2}\big)\tfrac{1}{(4\pi)^2}\tfrac{1}{\epsilon}, \tag{5.53a}$$

$$-i\Sigma[u_R,\phi] \supseteq i\not{p}P_L\big(\tfrac{1}{2}(Y_uY_u^\dagger)_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta_{c_1c_2}\big)\tfrac{1}{(4\pi)^2}\tfrac{1}{\epsilon}, \tag{5.53b}$$

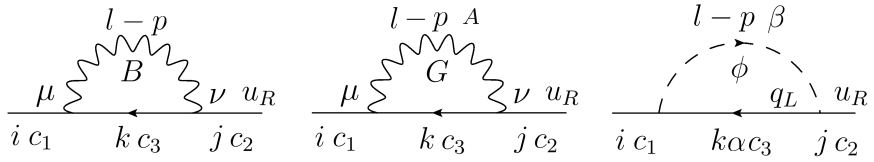
Svi dijagrami zajedno rezultiraju u ukupnom doprinosu

$$\begin{aligned}-i\Sigma(q_L) \supseteq i\not{p}P_L\Big(&\delta_{\alpha\beta}\delta_{c_1c_2}\big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon^2_{q_L}+g^2C_2(f,2)+g_s^2C_2(f,3))\\&+\frac{1}{2}((Y_dY_d^\dagger)_{ij}+(Y_uY_u^\dagger)_{ij})\big)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\end{aligned} \tag{5.54}$$

iz čega iščitavamo renormalizacijski faktor $(Z_2^{q_L})_{ij}$:

$$(Z_2^{q_L})_{ij} = 1-\Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon^2_{q_L}+g^2C_2(f,2)+g_s^2C_2(f,3)\big)+\frac{1}{2}((Y_dY_d^\dagger+Y_uY_u^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.55}$$

Vlastita energija gornjeg kvarka $u_R$ sastoji se od tri doprinosa prikazana na slici 5.8. Doprinosi ova tri dijagrama analogni su onima za $q_L$, sa dvije razlike: kako se radi o




Slika 5.8: Dijagrami vlastitih energija za kvarkovski singlet $u_R$

singletu lijevi projektor $P_L$ prelazi u desni $P_R$, i izostavljamo $\delta_{\alpha\beta}$. Rezultati su stoga

$$\begin{aligned}-i\Sigma[B] &\supseteq i\not{p}P_R\big(\delta_{ij}\delta_{c_1c_2}\Upsilon^2_{u_R}\big)\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\ -i\Sigma[G] &\supseteq i\not{p}P_R\big(\delta_{ij}\delta_{c_1c_2}C_2(f,3)\big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\ -i\Sigma[q_L,\phi] &\supseteq i\not{p}P_R\big((Y_u^\dagger Y_u)_{ij}\delta_{c_1c_2}\big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\end{aligned} \tag{5.56}$$

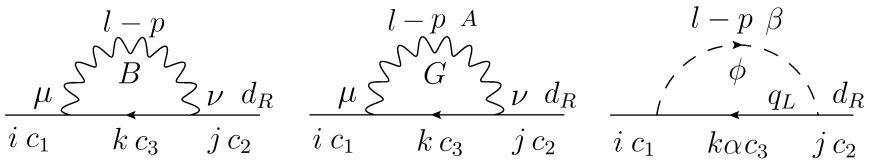
i ukupno doprinose sa:

$$-i\Sigma(u_R) \supseteq i\not{p}P_R\Big(\delta_{c_1c_2}\big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon^2_{u_R}+g_s^2C_2(f,3))+(Y_u^\dagger Y_u)_{ij}\big)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.57}$$

što daje renormalizacijski faktor $(Z_2^{u_R})_{ij}$:

$$(Z_2^{u_R})_{ij} = 1 - \big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon_{u_R}^2 + g_s^2 C_2(f,3)) + (Y_u^\dagger Y_u)_{ij}\big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.58}$$

Na slici 5.9 prikazani su doprinosi vlastitoj energiji donjeg kvarka $d_R$, za prvi red računa smetnje. Rezultat trivijalno slijedi iz onog za gornji kvark, do na zamjenu




Slika 5.9: Dijagrami vlastitih energija za kvarkovski singlet $d_R$

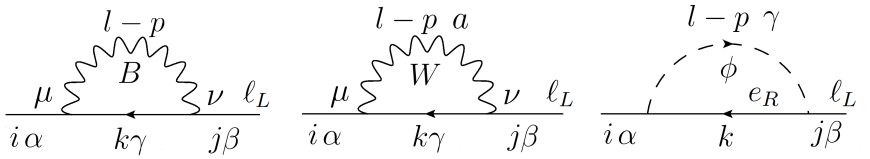
indeksa slabog hipernaboja i Yukawine matrice iz gornjeg u donji. Amplitude ukupno doprinose s

$$-i\Sigma(d_R) \supseteq i\not{p}P_R\Big(\delta_{c_1c_2}\big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon_{d_R}^2 + g_s^2 C_2(f,3)) + (Y_d^\dagger Y_d)_{ij}\big)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.59}$$

što implicira da je renormalizacijski faktor $(Z_2^{d_R})_{ij}$:

$$(Z_2^{d_R})_{ij} = 1 - \big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon_{d_R}^2 + g_s^2 C_2(f,3)) + (Y_d^\dagger Y_d)_{ij}\big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.60}$$

Od fermiona standardnog modela preostali su leptoni. Rezultati će ponovno biti analogni onima za kvarkove, uz odsustvo boje, odnosno bez $\delta_{c_ic_j}$. Dijagrami vlastite energije leptonskog dubleta $\ell_L$ prikazani su na slici 5.10. Dijagrami redom sadrže $1/\epsilon$




Slika 5.10: Dijagrami vlastitih energija za leptonski dublet $\ell_L$

članove zadane s

$$-i\Sigma[B] \quad \supseteq i\not{p}P_L\big(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\Upsilon_{\ell_L}^2\big)\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.61a}$$

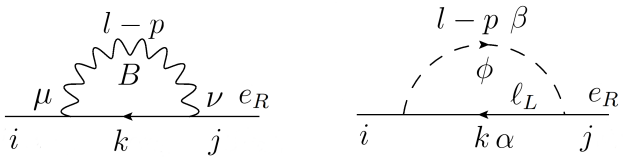
$$-i\Sigma[W] \quad \supseteq i\not{p}P_L\big(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}C_2(f,2)\big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.61b}$$

$$-i\Sigma[e_R,\phi] \quad \supseteq i\not{p}P_L\big(\frac{1}{2}(Y_eY_e^\dagger)_{ij}\delta_{\alpha\beta}\big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.61c}$$

iz čega iščitavamo renormalizacijski faktor $(Z_2^{\ell_L})_{ij}$:

$$(Z_2^{\ell_L})_{ij} = 1 - \left(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon^2_{\ell_L} + g^2 C_2(f,2)) + \frac{1}{2}(Y_e Y_e^\dagger)_{ij}\right)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.62}$$

Dijagrami vlastite energije leptonskog singleta $e_R$, prikazani na slici 5.11, sadrže dva




Slika 5.11: Dijagrami vlastitih energija za leptonski singlet $e_R$

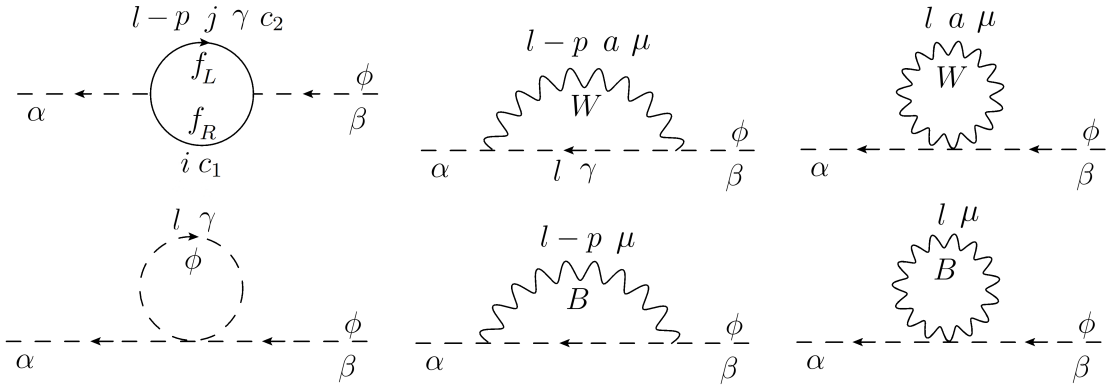
$1/\epsilon$ člana oblika

$$-i\Sigma(e_R) \supseteq i\not{p}P_R\Big(\left(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon^2_{e_R}) + (Y_e^\dagger Y_e)_{ij}\right)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.63}$$

iz čega proizlazi renormalizacijski faktor $(Z_2^{e_R})_{ij}$:

$$(Z_2^{e_R})_{ij} = 1 - \Big(\left(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon^2_{e_R}) + (Y_\ell^\dagger Y_\ell)_{ij}\right)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.64}$$

Od dijagrama vlastitih energija preostalo nam je još izvrijediti popravku na Higgsovo polje $\phi$. Svi mogući dijagrami u prvom redu računa smetnje prikazani su na slici 5.12. Fermioni $f_L$ i $f_R$ predstvljaju redom parove $q_L$ i $u_R$, $q_L$ i $d_R$ i konačno leptonski




Slika 5.12: Dijagrami vlastitih energija za Higgsov dublet $\phi$

par $\ell_L$ i $e_R$, pri čemu zadnji par ne nosi indeks boje. Amplituda prvog dijagrama struktura je oblika:

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}[q_L, u_R] = -Tr(Y_u Y_u^\dagger)\delta_{\alpha\beta}\delta_{c_1 c_1}\int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{Tr(P_R \not{l} P_L(\not{l} - \not{p}))}{l^2(l-p)^2}, \tag{5.65}$$

što rezultira u $1/\epsilon$ članu zadanom sa

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}[q_L, u_R] \supseteq ip^2\delta_{\alpha\beta}\Big(Tr(Y_u Y_u^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}n_c, \tag{5.66}$$

iz čega proizlaze analogni doprinosi za ostale dvije fermionske kombinacije:

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}[q_L, d_R] \supseteq ip^2\delta_{\alpha\beta}\Big(Tr(Y_d Y_d^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}n_c, \tag{5.67a}$$

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}[\ell_L, e_R] \supseteq ip^2\delta_{\alpha\beta}\Big(Tr(Y_e Y_e^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.67b}$$

Amplituda drugog dijagrama ima strukturu:

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}[W] = -g^2 C_2(f,2)\delta_{\alpha\beta}\int_0^\infty \frac{d^D l\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{(p+l)^\mu(p+l)_\mu}{l^2(l-p)^2}, \tag{5.68}$$

i RGE relevantni doprinos

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}[W] \supseteq -ip^2\delta_{\alpha\beta}\Big(2C_2(f,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.69}$$

Iz ovog rezultata slijedi analogni doprinos za dijagram s $B$ bozonom koji glasi

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}[B] \supseteq -ip^2\delta_{\alpha\beta}\Big(2\Upsilon_\phi^2\Big)\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.70}$$

Dijagrami na slici 5.12 sasvim desno i donji dijagram lijevo ne doprinose. Ukupan doprinos svih dijagrama stoga je izraz

$$\begin{aligned}-i\Sigma_{\alpha\beta}(\phi) \supseteq -ip^2\delta_{\alpha\beta}\Big( &- n_c(Tr(Y_u Y_u^\dagger) + Tr(Y_d Y_d^\dagger)) - Tr(Y_e Y_e^\dagger) \\ &+ 2(g^2 C_2(f,2) + g'^2\Upsilon_\phi^2)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}.\end{aligned} \tag{5.71}$$

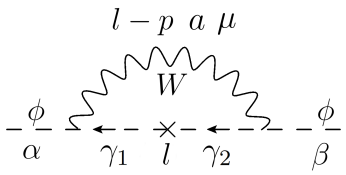
Zadnji renormalizacijski faktor $Z_2$ standardnog modela stoga glasi

$$Z_2^\phi = 1 - \Big(n_c(Tr(Y_u Y_u^\dagger) + Tr(Y_d Y_d^\dagger)) + Tr(Y_e Y_e^\dagger) - 2(g^2 C_2(f,2) + g'^2\Upsilon_\phi^2)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.72}$$

Iz vlastitih energija bozona i fermiona u standardnom modelu izdvajanjem $1/\epsilon$ doprinosa u amplitudama, izračunali smo redom renormalizacijske faktore $Z_3$ i $Z_2$. Za izračun renormalizacijskih grupnih jednadžbi, odnosno $\beta$-funkcija, preostalo nam je izračunati renormalizacijske faktore $Z_1$, i to iz najnižih popravki na sve moguće vrhove u standardnom modelu.

## 5.4 Radijativne korekcije standardnog modela na nivou jedne petlje II (vrhovi)

Vidjeli smo da su se u jednostavnim teorijama poput kvantne elektrodinamike i kvantne kromodinamike pojavili jedan odnosno dva moguća trovrha. Standardni model, opisan grupom simetrija (5.1), kompleksnija je teorija u kojoj će se javljati dvovrhovi, trovrhovi i četverovrhovi (eng. *two, three, four point vertices*). Tim redom ćemo ih renormalizirati, uvodeći ih redom kako se pojavljuju pripadne čestice u lagranžijanu.
Jedini dvostruki vrh u standardnom modelu je onaj u Higgsovom članu uz $\mu^2$, prikazan na slici 5.13. Dvostruki vrh kojeg ćemo označiti sa $V(\phi^\dagger\phi)$ ima, u prvom redu,




Slika 5.13: Dijagram popravke $\phi^\dagger\phi$ vrha

popravku oblika

$$iV_{\alpha\beta}(\phi^\dagger\phi) = \mu^2\delta_{\alpha\beta}g^2C_2(f,2)\int\frac{d^Dl\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{(p+l)^\mu(l+p)_\mu}{(l^2)^2(l-p)^2}, \tag{5.73}$$

koja daje $1/\epsilon$ član oblika

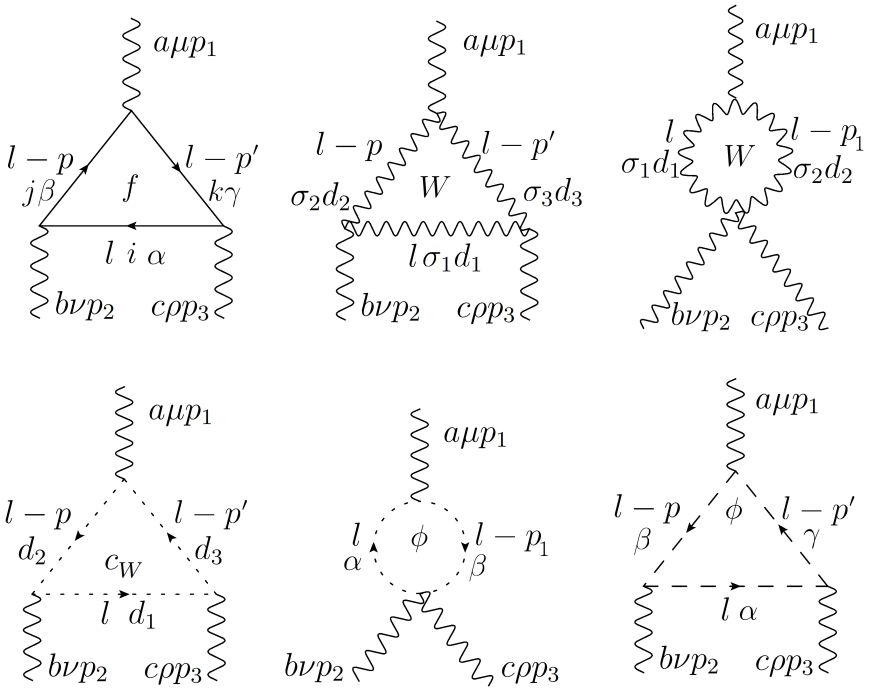
$$iV_{\alpha\beta}(\phi^\dagger\phi) \supseteq i\mu^2\delta_{\alpha\beta}\Big(C_2(f,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.74}$$

Iz ovog doprinosa slijedi renormalizacijski faktor $(Z_1^{\phi\mu})^{-1}$

$$(Z_1^{\phi\mu})^{-1} = 1 + \Big(C_2(f,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \tag{5.75}$$

U ovom dijelu poglavlja prelazimo na trovrhove standardnog modela. Općenito ćemo ih označavati s $V(aBb)$, gdje će $a$ biti bozon, antifermion, antiduh ili kompleksno konjugirano Higgsovo polje, $B$ baždarni bozon ili kod Yukawinih članova Higgsovo polje, i konačno $b$ bozon, fermion, duh ili Higgs. Impulsi propagatora, ukoliko nisu naznačeni na slici dijagrama, bit će jasni iz nazivnika u amplitudama. Tijekom renormalizacije pojavit će se velik broj analognih računa, što će olakšati popisivanje doprinosa koji će u nekim slučajevima biti jasni odmah iz dijagrama. U standardnom modelu postoje 22 različita trovrha koja ćemo renormalizirati na nivou jedne petlje. Provodit ćemo standardnu proceduru, iz popravke u prvom redu izdvojit ćemo član $1/\epsilon$ iz amplituda, zbrojiti doprinose svih mogućih procesa, i u konačnici prepoznati i izdvojiti renormalizacijski faktor, tako da otklonimo goli vrh. Pod golim vrhom u

ovom kontekstu podrazumijevamo vrh u nultom redu računa smetnje (na primjeru QED vrha u ovom slučaju golim vrhom nazivamo strukturu $-ie\gamma^\mu$, a ne $-ie_B\gamma^\mu$ kao inače).
U skladu s lagranžijanom (5.5) prvo ćemo renormalizirati vrhove oblika $V(VVV)$ gdje je $V$ baždarni bozon. Kako je $B$ Abelov baždarni bozon, ne postoji vrh $V(BBB)$. Prvi trovrh sastavljen samo od bozona koji se javlja u teoriji je oblika $V(WWW)$. Svi procesi koji doprinose korekciji vrha u najnižem redu prikazani su na slici 5.14. Prvi




Slika 5.14: Dijagrami popravke $WWW$ vrha

dijagram sastoji se od dva doprinosa, koja podrazumijevaju dva smjera fermionske linije, pri čemu su fermioni lijevi (odmah popisujemo sve doprinose $q_L$ i $\ell_L$). Prvi dijagram prikazan na slici 5.13. je struktura oblika

$$iV_{1a}(WWW) = -g^3\delta_{\alpha\alpha}\delta_{ii}Tr(T^aT^bT^c)\int\frac{d^Dl\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{Tr(\gamma^\mu(\not{l}-\not{p})\gamma^\nu\not{l}\gamma^\rho(\not{l}-\not{p}')P_L)}{l^2(l-p)^2(l-p')^2}, \tag{5.76}$$

dok se drugi, koji se razlikuje u tome što fermionska linija ide u suprotnom smjeru (nije prikazan na 5.14), razlikuje u predznaku i poretku generatora. Oni zajedno zatvaraju formu

$$Tr(T^aT^bT^c-T^aT^cT^b) = Tr(T^a[T^b,T^c]) = iTr(T^a\epsilon^{bcd}T^d) = i\epsilon^{bcd}\delta^{ad}C(f,2) = iC(f)\epsilon^{abc}, \tag{5.77}$$

i sadrže $1/\epsilon$ član

$$iV_1(WWW) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3)\Big(\frac{1}{3}C(f,2)(n_c+1)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}n_f, \tag{5.78}$$

gdje smo izdvojili goli vrh koji ima oblik

$$S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3) = g\epsilon^{abc}\big(g_{\mu\nu}(p_2-p_1)_\rho + g_{\nu\rho}(p_3-p_2)_\mu + g_{\rho\mu}(p_1-p_3)_\nu\big), \tag{5.79}$$

gdje smo zbog postizanja simetričnosti oblika $S_{\mu\nu\rho}$ uveli $p_1 = p - p'$, $p_2 = -p$ i $p_3 = p'$. Drugi dijagram po redu ima samo jedan doprinos zadan sa

$$iV_2 = \int \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{S_{\mu\sigma_2\sigma_3}(p_1, l+p_2, -l+p_3) S_{\nu\sigma_1\sigma_2}(p_2, l, -l-p_2) S_{\rho\sigma_3\sigma_1}(p_3, l-p_3, -l)}{l^2(l-p)^2(l-p')^2}. \tag{5.80}$$

Nakon podužeg algebarskog računa i integracije po impulsu umnožak tri vrha renormalizira se svođenjem na izraz proporcionalan golom vrhu, što rezultira u $1/\epsilon$ doprinosu

$$iV_2(WWW) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3)\Big(\frac{13}{4} C(f,2) C_2(G,2)\Big) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.81}$$

Treći dijagram na slici 5.14 sastavljen je od tri doprinosa jer se bozonska petlja može pojaviti na bilo kojoj od tri vanjske noge. Primijetimo i da svaki dijagram ima faktor $1/2$, zbog simetrije na zamjenu bozonskih linija u petljama. Dijagram ima strukturu oblika

$$iV_{3a}(WWW) = \int \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{S_{\mu\sigma_1\sigma_2} S_{\nu\sigma_1\rho\sigma_2}}{l^2(l-p_1)^2}, \tag{5.82}$$

pri čemu je $S_{\nu\sigma_1\rho\sigma_2}$ četverovrh za $W$ bozon, u ovom slučaju izraz

$$\begin{aligned} S_{\nu\sigma_1\rho\sigma_2} = -ig^2\big(&\epsilon^{dbc}\epsilon^{dd_1d_2}(g_{\nu\sigma_1}g_{\rho\sigma_2} - g_{\nu\sigma_2}g_{\rho\sigma_1}) \\ &+ \epsilon^{dbd_1}\epsilon^{dcd_2}(g_{\nu\rho}g_{\sigma_1\sigma_2} - g_{\nu\sigma_2}g_{\sigma_1\rho}) \\ &+ \epsilon^{dbd_2}\epsilon^{dcd_1}(g_{\nu\rho}g_{\sigma_2\sigma_1} - g_{\nu\sigma_1}g_{\sigma_2\rho})\big). \end{aligned} \tag{5.83}$$

Umnožak trovrha i četverovrha svede se na izraz proprorcionalan golom vrhu, što rezultira u $1/\epsilon$ doprinosu za prvi dijagram ovog tipa

$$iV_{3a}(WWW) = g\epsilon^{abc}(g_{\mu\nu}p_{1\rho} - g_{\mu\rho}p_{1\nu})\big(\frac{3}{2}(1 + C_2(f,2))C_2(G,2)\big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.84}$$

dok se ostala dva dijagrama dobiju cikličkom zamjenom

$$(a, \mu, p_1) \to (b, \nu, p_2) \to (c, \rho, p_3), \tag{5.85}$$

što u sumi daje ukupan doprinos

$$iV_3(WWW) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3)\Big(-\frac{3}{2}(1 + C(f,2))C_2(G,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.86}$$

Dijagram s tri duhova propagatora ponovno ima dva doprinosa, koji se razlikuju u smjeru petlje duhova. Dijagram na slici 5.14 ima amplitudu oblika

$$iV_4(WWW) = ig^3 \int \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\epsilon^{d_2d_3a}\epsilon^{d_1d_2b}\epsilon^{d_3d_1c}(l-p')_\mu (l-p)_\nu l_\rho}{l^2(l-p)^2(l-p')^2}, \tag{5.87}$$

i zajedno sa dijagramom u kojem je petlja suprotnog smjera zatvara $1/\epsilon$ član oblika

$$iV_4(WWW) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3)\Big(-\frac{1}{12}C(f,2)C_2(G,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.88}$$

Predzadnji dijagram na slici 5.14 ponovno se pojavljuje u tri varijante, na način da se skalarna petlja može pojaviti na bilo kojoj od tri vanjske noge. No, ako raspišemo Feynmanova pravila za ovaj dijagram, vidimo da je on u nazivniku neparan u $l$, odnosno iz vrha $V(\phi^\dagger W\phi)$ pojavljuje se faktor $(2l)^\mu$. Može se pokazati da ovaj dimenzijski integral iščezava, čime ni jedan od ova tri dijagrama ne doprinosi. Posljednji dijagram na slici 5.14 ima amplitudu oblika

$$iV_{6a}(WWW) = g^3 Tr(T^a T^b T^c) \int \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{(2l-p-p')_\mu (2l-p)_\nu (2l-p')_\rho}{l^2 (l-p)^2 (l-p')^2}. \quad (5.89)$$

Kada mu se pridruži drugi dijagram sa skalarnom petljom u suprotnom smjeru, zajedno doprinose sa $1/\epsilon$ članom:

$$iV_6(WWW) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3)\Big(\frac{1}{3}C(f,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \quad (5.90)$$

Zbrajanjem svih doprinosa dobijemo ukupan $1/\epsilon$ član koji glasi

$$\begin{aligned} iV(WWW) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3)\Big(&\frac{1}{3}C(f,2)(n_c+1) + \frac{13}{4}C(f,2)C_2(G,2) \\ &- \frac{3}{2}(1+C(f,2))C_2(G,2) - \frac{1}{12}C(f,2)C_2(G,2) + \frac{1}{3}C(f,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

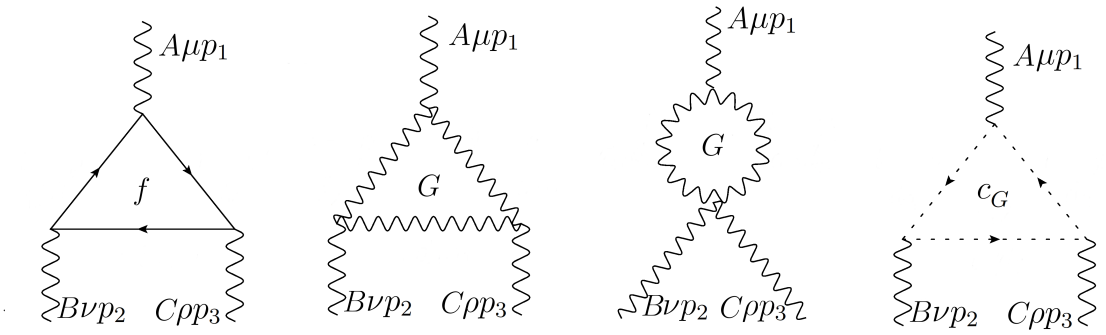
Izraz ćemo dodatno pojednostavniti uzimanjem da je Dykinov indeks za fundamentalnu reprezentaciju $C(f,2) = 1/2$, iz čega izdvajamo renormalizacijski faktor $(Z_1^{3W})^{-1}$,

$$(Z_1^{3W})^{-1} = 1 + \Big(\frac{1}{6}\big((n_c+1)n_f+1\big) - \frac{2}{3}C_2(G,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \quad (5.92)$$

Sljedeći je na redu vrh s tri gluona, trovrh $V(GGG)$. Dijagrami koji doprinose popravci ovog vrha prikazani su na slici 5.15. Impulse i dalje označavamo na isti način kao npr. na slici 5.14, a indekse u petljama numeriramo počevši od donjeg, u smjeru kazaljke sata. Svakako, kako poznamo doprinose za $V(WWW)$, popravke za trogluonski vrh bit će potpuno analogne, do na zamjene

$$\begin{aligned} &\epsilon^{abc} \to f^{ABC} \\ &C_2(G,2) \to C_2(G,3) \\ &C(f,2) \to C(f,3) \\ &g \to g_s \end{aligned} \quad (5.93)$$

odnosno do na razlike proizišle iz prelaska SU(2) algebre u SU(3) algebru, i razlike u jakostima vezanja. Prvi dijagram podrazumijeva kvarkove $q_L$, $u_R$ i $d_R$, i svaki od njih ima dva doprinosa, do na obrtanje fermionske linije. U njemu će se pojaviti faktor $4n_f/3$ koji proizlazi iz srukture $n_f(2+1+1)/3$ gdje faktor dva proizlazi iz $q_L$, a jedinice iz $u_R$ i $d_R$. Treći dijagram ima tri doprinosa, gdje se gluonska petlja može




Slika 5.15: Dijagrami popravke $GGG$ vrha

pojaviti na bilo kojoj vanjskoj nozi. Konačno, zadnji dijagram ima dva doprinosa, po jedan za svaki smjer petlje duhova. Analogne doprinose možemo odmah popisati koristeći prethodne rezultate:

$$iV_1(GGG) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3)\Big(\frac{4}{3}C(f,3)\Big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}n_f, \tag{5.94a}$$

$$iV_2(GGG) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3)\Big(\frac{13}{4}C(f,3)C_2(G,3)\Big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.94b}$$

$$iV_3(GGG) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3)\Big(-\frac{3}{2}(1+C(f,3))C_2(G,3)\Big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \tag{5.94c}$$

$$iV_4(GGG) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3)\Big(-\frac{1}{12}C(f,3)C_2(G,3)\Big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.94d}$$

što daje ukupan doprinos oblika

$$iV(GGG) \supseteq S_{\mu\nu\rho}(p_1,p_2,p_3)\Big(\frac{4}{3}n_fC(f,3)-\frac{2}{3}C_2(G,3)\Big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.95}$$

iz čega iščitavamo renormalizacijski faktor $(Z_1^{3G})^{-1}$,

$$(Z_1^{3G})^{-1} = 1+\Big(\frac{2}{3}n_f-\frac{2}{3}C_2(G,3)\Big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.96}$$

Prelazimo na korekciju vrha $V(\bar{c}_W W c_W)$, koji ima dva doprinosa prikazana na slici 5.16. Prvi je dijagram struktura

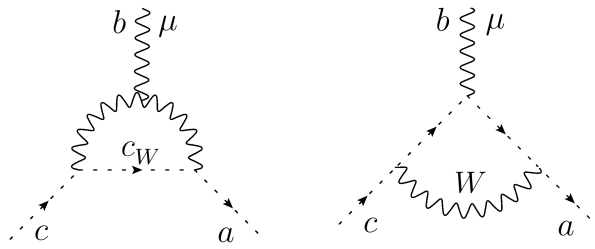
$$iV_1(\bar{c}_W W c_W) = -ig^2C(f,2)C_2(G,2)\int\frac{d^Dl\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{S_{\mu\nu\rho}(p'-p,l-p',-l+p)p'^\nu l^\rho}{l^2(l-p)^2(l-p')^2}, \tag{5.97}$$

koja sadrži $1/\epsilon$ član:

$$iV_1(\bar{c}_W W c_W) \supseteq gp'^\mu\epsilon^{abc}\Big((1-\frac{1}{D})C(f,2)C_2(G,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.98}$$

Drugi dijagram ima amplitudu:

$$iV_2(\bar{c}_W W c_W) = -ig^3C(f,2)C_2(G,2)\epsilon^{abc}\int\frac{d^Dl\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\frac{p'^\nu(-l+p')^\mu(-l+p)_\nu}{l^2(l-p)^2(l-p')^2}, \tag{5.99}$$




Slika 5.16: Dijagrami popravke $\bar{c}_W W c_W$ vrha

iz koje izdvajamo RGE relevantni član

$$iV_2(\bar{c}_W W c_W) \supseteq g p'^{\mu} \epsilon^{abc} \Big( \frac{1}{D} C(f,2) C_2(G,2) \Big) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.100}$$

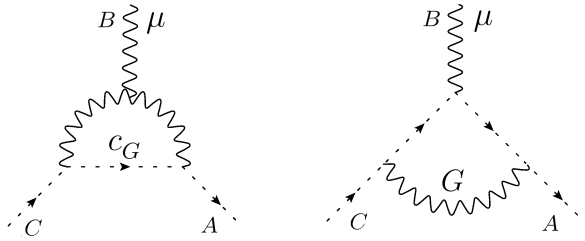
Oba dijagrama ukupno doprinose s

$$iV(\bar{c}_W W c_W) \supseteq g p'^{\mu} \epsilon^{abc} \Big( C(f,2) C_2(G,2) \Big) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.101}$$

iz čega proizlazi renormalizacijski faktor $(Z_1^{c_W})^{-1}$

$$(Z_1^{c_W})^{-1} = 1 + \Big( \frac{1}{2} C_2(G,2) \Big) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.102}$$

Korekcija vrha $V(\bar{c}_G G c_G)$ ima dva doprinosa prikazana na slici 5.17. Koristeći za-




Slika 5.17: Dijagrami popravke $\bar{c}_G G c_G$ vrha

mjene (5.93) i prethodni rezultat, možemo odmah popisati oba $1/\epsilon$ doprinosa koji glase

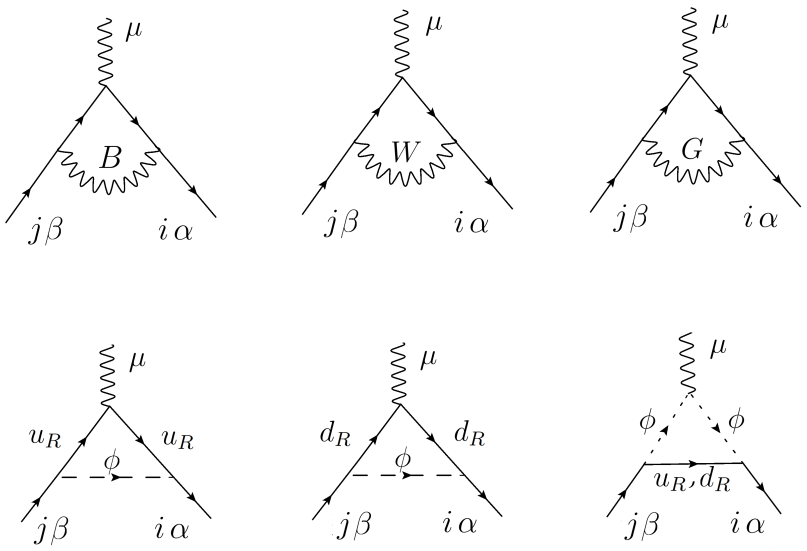
$$iV_1(\bar{c}_G G c_G) \supseteq g_s p'^{\mu} f^{ABC} \Big( (1 - \frac{1}{D}) C(f,3) C_2(G,3) \Big) \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.103a}$$

$$iV_2(\bar{c}_G G c_G) \supseteq g_s p'^{\mu} f^{ABC} \Big( \frac{1}{D} C(f,3) C_2(G,3) \Big) \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.103b}$$

Zbroj oba doprinosa i otklanjanje golog vrha daje renormalizacijski faktor $(Z_1^{c_G})^{-1}$,

$$(Z_1^{c_G})^{-1} = 1 + \Big( \frac{1}{2} C_2(G,3) \Big) \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.104}$$

Prelazimo na klasu trovrhova antifermion-bozon-fermion, oblika $V(\bar{f}Vf)$. Prateći lagranžijan (5.5), prvi vrh koji renormaliziramo je $V(\bar{q}_L B q_L)$, čiji su doprinosi prikazani na slici 5.18. Za ovaj primjer raspisat ćemo amplitudu svakog dijagrama i pripadajući $1/\epsilon$ doprinos dok ćemo doprinose za sve ostale vrhove ovog tipa popisivati analogno, pazeći na boje, SU(2) indekse, pripadajuće jakosti vezanja i reprezentaciju. Prvi dija-




Slika 5.18: Dijagrami popravke $\bar{q}_L B q_L$ vrha

gram na slici 5.18 raspisan po Feynmanovim pravilima, uz izdvajanje konstanti ispred integrala, ima oblik

$$iV_1(\bar{q}_L B q_L) = -g'^3 \Upsilon^3_{q_L} \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\nu P_L(-\not{l} + \not{p}')\gamma^\mu P_L(-\not{l} + \not{p})\gamma_\nu P_L}{l^2(l-p)^2(l-p')^2}, \quad (5.105)$$

iz čega slijedi $1/\epsilon$ doprinos

$$iV_1(\bar{q}_L B q_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\Upsilon^2_{q_L}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \quad (5.106)$$

Ostala dva dijagrama imaju identičnu strukturu, a razlikuju se u konstantnim faktorima: svaki vrh $V(\bar{f}Vf)$, u slučaju da je $V$ ne-Abelov baždarni bozon, sadrži generator, koji će se s generatorom drugog vrha zatvoriti u Casimirovu invarijantu. Stoga su njihovi doprinosi

$$iV_2(\bar{q}_L B q_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}C_2(f,2)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \quad (5.107a)$$

$$iV_3(\bar{q}_L B q_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}C_2(f,3)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \quad (5.107b)$$

Ista struktura (identičan dimenzijski integral) javlja se i u naredna dva dijagrama sa Higgsovim propagatorom, do na razliku što se u $V(\bar{f}\phi f)$ umjesto $\delta_{ij}$ nalazi Yukawina

matrica $(Y_f)_{ij}$, odnosno imamo doprinose

$$iV_4(\bar{q}_L B q_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L} \delta_{\alpha\beta} \frac{\Upsilon_{u_R}}{\Upsilon_{q_L}} \frac{1}{2} (Y_u Y_u^\dagger)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.108a}$$

$$iV_5(\bar{q}_L B q_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L} \delta_{\alpha\beta} \frac{\Upsilon_{d_R}}{\Upsilon_{q_L}} \frac{1}{2} (Y_d Y_d^\dagger)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.108b}$$

gdje smo hipernaboje raspisali tako da zadovoljimo proporcionalnost do na goli vrh. Posljednji dijagram na slici 5.18 struktura je

$$iV_6(\bar{q}_L B q_L) = g' \Upsilon_\phi \delta_{\alpha\beta} (Y_u Y_u^\dagger)_{ij} \int \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\not{l} P_L (2l - p - p')^\mu}{l^2 (l-p)^2 (l-p')^2}, \tag{5.109}$$

što rezultira u $1/\epsilon$ članovima (za $u_R$ i $d_R$):

$$iV_6(\bar{q}_L B q_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L} \delta_{\alpha\beta} \frac{-\Upsilon_\phi}{\Upsilon_{q_L}} \frac{1}{2} (Y_u Y_u^\dagger)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.110a}$$

$$iV_7(\bar{q}_L B q_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L} \delta_{\alpha\beta} \frac{\Upsilon_\phi}{\Upsilon_{q_L}} \frac{1}{2} (Y_d Y_d^\dagger)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.110b}$$

Doprinos svih sedam dijagrama glasi

$$\begin{aligned} iV(\bar{q}_L B q_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L} \delta_{\alpha\beta} \Big( & \big( g'^2 \Upsilon_{q_L}^2 + g^2 C_2(f,2) + g_s^2 C_2(f,3) \big) \delta_{ij} \\ & + \frac{1}{2} (Y_u Y_u^\dagger + Y_d Y_d^\dagger)_{ij} \Big) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{5.111}$$

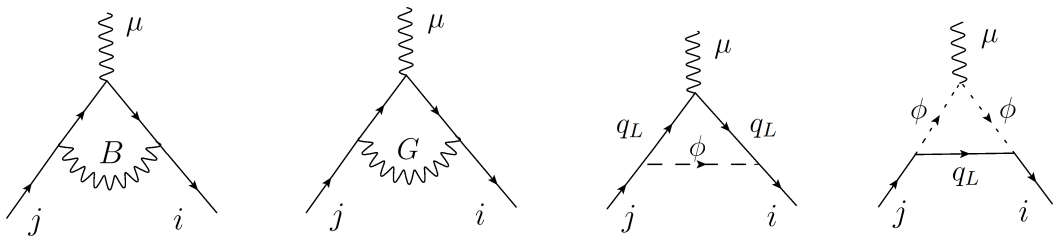
pri čemu smo koristitli činjenicu da je

$$\Upsilon_{u_R} - \Upsilon_\phi = \Upsilon_{d_R} + \Upsilon_\phi = \Upsilon_{q_L}, \tag{5.112}$$

što je zadnja četiri doprinosa dovelo u kompaktnu formu. Iz sume svih doprinosa izdvajamo renormalizacijski fakor:

$$(Z_1^{q_L B})^{-1}_{ij} = 1 + \Big( \big( g'^2 \Upsilon_{q_L}^2 + g^2 C_2(f,2) + g_s^2 C_2(f,3) \big) \delta_{ij} + \frac{1}{2} (Y_u Y_u^\dagger + Y_d Y_d^\dagger)_{ij} \Big) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.113}$$

Idući je na redu vrh oblika $V(\bar{u}_R B u_R)$. Dijagrami koji doprinose korekciji ovog vrha u najnižem redu računa smetnje prikazani su na slici 5.19. Rezultati su potpuno




Slika 5.19: Dijagrami popravke $\bar{u}_R B u_R$ vrha

analogni onima za $V(\bar{q}_L B q_L)$ vrh, uz činjenice da lijevi projektor u golom vrhu postaje

desni, mijenja se hipernaboj i izostavljamo SU(2) indekse, što rezultira odsuutstvom $\delta_{\alpha\beta}$. Uz pomoć prethodnih rezultata popisujemo doprinose:

$$iV_1(\bar{u}_R B u_R) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{u_R} \delta_{ij} \Upsilon_{u_R}^2 \frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.114a}$$

$$iV_2(\bar{u}_R B u_R) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{u_R} \delta_{ij} C_2(f,3) \frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.114b}$$

$$iV_3(\bar{u}_R B u_R) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{u_R} \frac{\Upsilon_{q_L}}{\Upsilon_{u_R}} (Y_u^\dagger Y_u)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.114c}$$

$$iV_4(\bar{u}_R B u_R) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{u_R} \frac{\Upsilon_{\phi}}{\Upsilon_{u_R}} (Y_u^\dagger Y_u)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.114d}$$

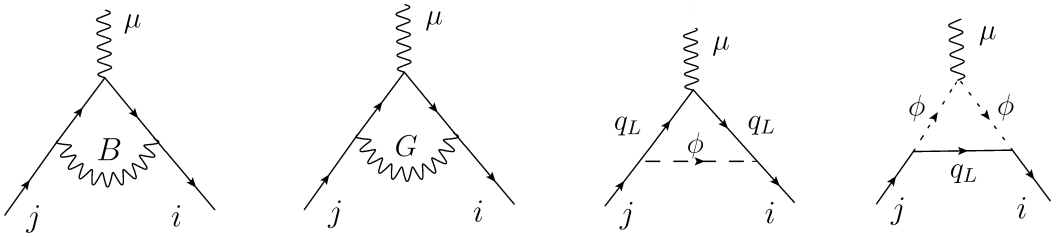
Primijetimo da u zadnja dva doprinosa nema faktora $1/2$, koji se pokratio s $\delta_{\alpha\alpha}$ koji se pojavljuje zbog Higgsa. Zbroj svih doprinosa, uz korištenje (5.112) iznosi

$$iV(\bar{u}_R B u_R) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{u_R} \Big( \delta_{ij} \big( g'^2 \Upsilon_{u_R}^2 + g_s^2 C_2(f,3) \big) + (Y_u^\dagger Y_u)_{ij} \Big) \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.115}$$

iz čega slijedi renormalizacijski faktor $(Z_1^{u_R B})_{ij}^{-1}$

$$(Z_1^{u_R B})_{ij}^{-1} = 1 + \Big( \delta_{ij} \big( g'^2 \Upsilon_{u_R}^2 + g_s^2 C_2(f,3) \big) + (Y_u^\dagger Y_u)_{ij} \Big) \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.116}$$

Dijagrami koji doprinose korekciji vrha $V(\bar{d}_R B d_R)$ prikazani su na slici 5.20. Dopri-




Slika 5.20: Dijagrami popravke $\bar{d}_R B d_R$ vrha

nosi su identični kao u prethodnom primjeru. To implicira da odmah znamo napisati renormalizacijski faktor, jer se mijenjaju jedino hipernaboj i Yukawina matrica. Renormalizacijski faktor $(Z_1^{d_R B})_{ij}^{-1}$ dakle glasi

$$(Z_1^{d_R B})_{ij}^{-1} = 1 + \Big( \delta_{ij} \big( g'^2 \Upsilon_{d_R}^2 + g_s^2 C_2(f,3) \big) + (Y_d^\dagger Y_d)_{ij} \Big) \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.117}$$

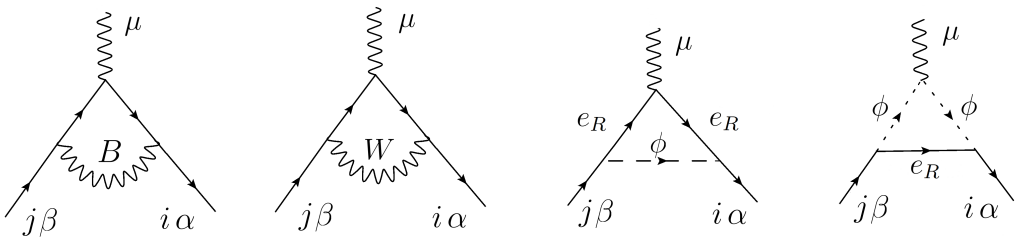
Prelazimo na interakcije $B$ bozona s leptonima. Korekcije na vrh $V(\bar{\ell}_L B \ell_L)$ prikazani su na slici 5.21. Uz minimalne zamjene u odnosu na rezultat za $V(\bar{q}_L B q_L)$, doprinosi glase:

$$iV_1(\bar{\ell}_L B \ell_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{\ell_L} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \Upsilon_{\ell_L}^2 \frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.118a}$$

$$iV_2(\bar{\ell}_L B \ell_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{\ell_L} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} C_2(f,2) \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.118b}$$

$$iV_3(\bar{\ell}_L B \ell_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{\ell_L} \delta_{\alpha\beta} \frac{\Upsilon_{e_R}}{\Upsilon_{\ell_L}} \frac{1}{2} (Y_e Y_e^\dagger)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.118c}$$

$$iV_4(\bar{\ell}_L B \ell_L) \supseteq -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{\ell_L} \delta_{\alpha\beta} \frac{\Upsilon_{\phi}}{\Upsilon_{\ell_L}} \frac{1}{2} (Y_e Y_e^\dagger)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.118d}$$

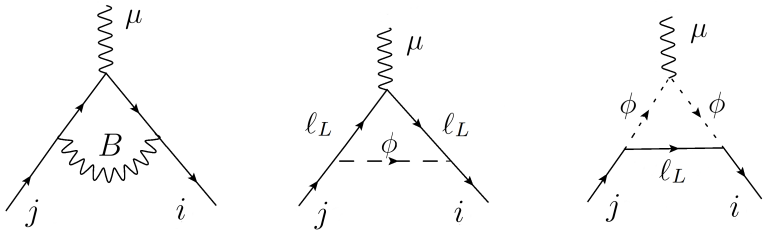



Slika 5.21: Dijagrami popravke $\bar{\ell}_L B \ell_L$ vrha

Zbroj svih doprinosa i otklanjanje golog vrha daje nam renormalizacijski faktor $(Z_1^{\ell_L B})^{-1}_{ij}$, koji glasi

$$(Z_1^{\ell_L B})^{-1}_{ij} = 1 + \Big(\delta_{ij}\big(g'^2 \Upsilon^2_{\ell_L} + g^2 C_2(f,2)\big) + \frac{1}{2}(Y_e Y_e^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.119}$$

Zadnji vrh sa $B$ bozonom koji nam preostaje je $V(\bar{e}_R B e_R)$, čija su tri doprinosa prikazana na slici 5.22. Prateći rezultate renormalizacije vrhova $V(\bar{u}_R B u_R)$ i $V(\bar{\ell}_L B \ell_L)$,




Slika 5.22: Dijagrami popravke $\bar{e}_R B e_R$ vrha

popisujemo doprinose:

$$iV_1(\bar{e}_R B e_R) \;\supseteq -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{e_R} \delta_{ij} \Upsilon^2_{e_R} \frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.120a}$$

$$iV_2(\bar{e}_R B e_R) \;\supseteq -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{e_R} \frac{\Upsilon_{\ell_L}}{\Upsilon_{e_R}} (Y_e^\dagger Y_e)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.120b}$$

$$iV_3(\bar{e}_R B e_R) \;\supseteq -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{e_R} \frac{-\Upsilon_{\phi}}{\Upsilon_{e_R}} (Y_e^\dagger Y_e)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.120c}$$

iz čega slijedi renormalizacijski faktor $(Z_1^{e_R B})^{-1}_{ij}$, koji glasi

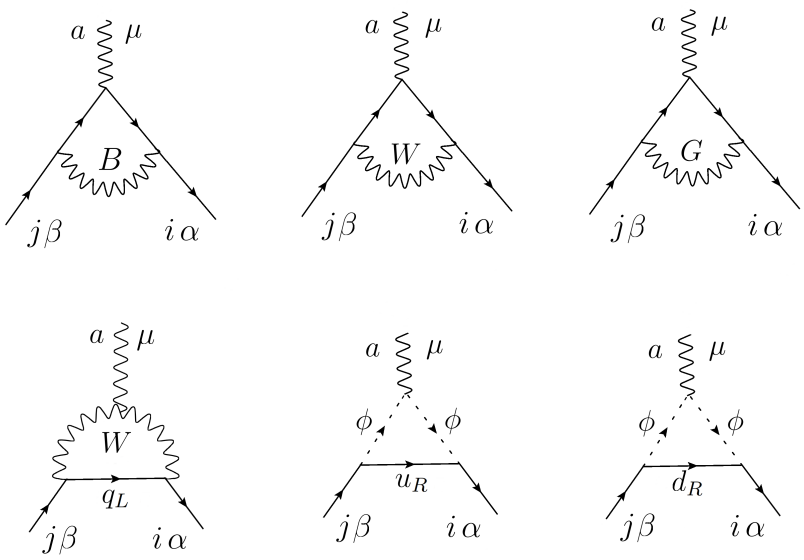
$$(Z_1^{e_R B})^{-1}_{ij} = 1 + \Big(\delta_{ij}\big(g'^2 \Upsilon^2_{e_R}\big) + (Y_e^\dagger Y_e)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.121}$$

Prelazimo na grupu vrhova sa $W$ bozonom. Prvi takav vrh, $V(\bar{q}_L W q_L)$ sastoji se od šest doprinosa prikazanih na slici 5.23. Prva tri doprinosa odmah možemo napisati koristeći rezultate za $V(\bar{q}_L B q_L)$ vrh:

$$iV_1(\bar{q}_L W q_L) \;\supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta} \delta_{ij} \Upsilon^2_{q_L} \frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.122a}$$

$$iV_2(\bar{q}_L W q_L) \;\supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta} \delta_{ij} \big(C_2(f,2) - \frac{1}{2}C_2(G,2)\big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.122b}$$

$$iV_3(\bar{q}_L W q_L) \;\supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta} \delta_{ij} \big(C_2(f,3)\big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.122c}$$




Slika 5.23: Dijagrami popravke $\bar{q}_L W q_L$ vrha

gdje smo u drugom izrazu koristili

$$T^b T^a T^b = \big(C_2(f,2) - \frac{1}{2} C_2(G,2)\big) T^a \tag{5.123}$$

Četvrti dijagram na 5.23 je struktura oblika

$$iV_4(\bar{q}_L W q_L) = ig^2 (T^b T^c)_{\alpha\beta} \int \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\nu P_L \not{l} \gamma_\rho P_L S^{\mu\nu\rho}(p'-p, l-p'-l+p)}{l^2 (l-p)^2 (l-p')^2}, \tag{5.124}$$

koja sadrži $1/\epsilon$ doprinos

$$iV_4(\bar{q}_L W q_L) \supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta} \delta_{ij} \big(\frac{3}{2} C_2(G,2)\big) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.125}$$

Doprinosi zadnja dva dijagrama ponovno su nam analogno poznati:

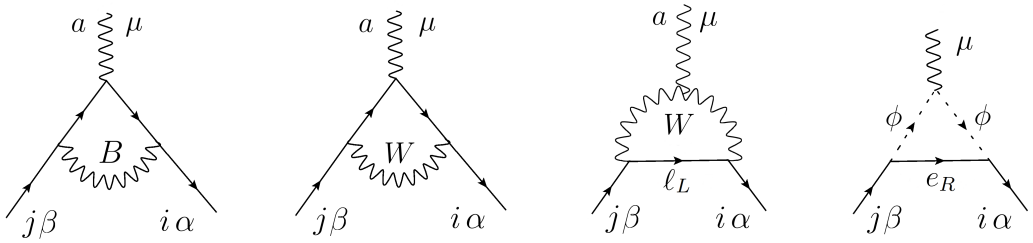
$$iV_5(\bar{q}_L W q_L) \supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (Y_u Y_u^\dagger)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.126a}$$

$$iV_6(\bar{q}_L W q_L) \supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (Y_d Y_d^\dagger)_{ij} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.126b}$$

Zbrajanjem svih doprinosa i odstranjivanjem golog vrha dobivamo renormalizacijski fakor $(Z_1^{q_L W})^{-1}_{ij}$,

$$\begin{aligned}(Z_1^{q_L W})^{-1}_{ij} = 1 + \Big( & \delta_{ij} \big( g'^2 \Upsilon^2_{q_L} + g^2 (C_2(f,2) + C_2(G,2)) + g_s^2 C_2(f,3) \big) \\ & + \frac{1}{2} (Y_u Y_u^\dagger + Y_d Y_d^\dagger)_{ij} \Big) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}.\end{aligned} \tag{5.127}$$

Dijagrami koji doprinose korekciji vrha $V(\bar{\ell}_L W \ell_L)$ prikazani su na slici 5.24. Svi




Slika 5.24: Dijagrami popravke $\bar{\ell}_L W \ell_L$ vrha

doprinosi analogni su onima u prethodnom primjeru i iznose

$$iV_1(\bar{\ell}_L W \ell_L) \supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta}\delta_{ij}\Upsilon^2_{\ell_L}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.128a}$$

$$iV_2(\bar{\ell}_L W \ell_L) \supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta}\delta_{ij}\big(C_2(f,2) - \frac{1}{2}C_2(G,2)\big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.128b}$$

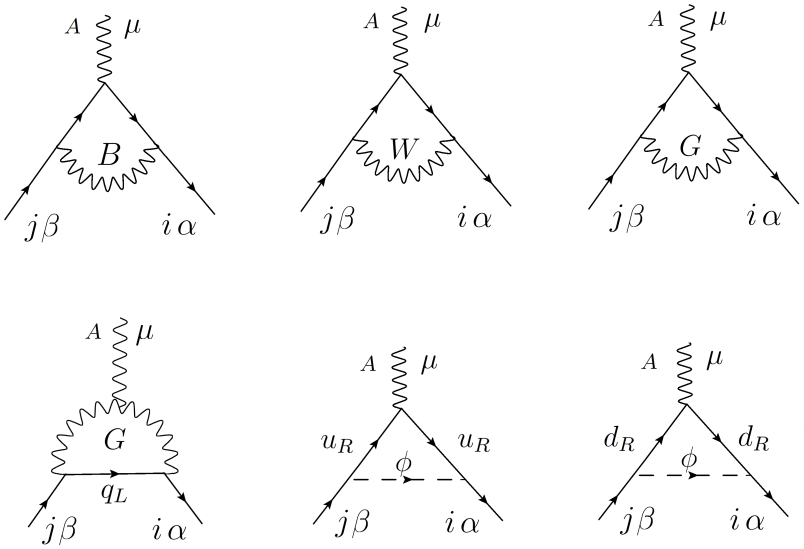
$$iV_3(\bar{\ell}_L W \ell_L) \supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta}\delta_{ij}\big(\frac{3}{2}C_2(G,3)\big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.128c}$$

$$iV_4(\bar{\ell}_L W \ell_L) \supseteq -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta}\frac{1}{2}(Y_e Y_e^\dagger)_{ij}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.128d}$$

Zbrajanje doprinosa i otklanjanje golog vrha daje renormalizacijski faktor $(Z_1^{\ell_L W})^{-1}_{ij}$,

$$(Z_1^{\ell_L W})^{-1}_{ij} = 1 + \Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon^2_{\ell_L} + g^2(C_2(f,2) + C_2(G,2))\big) + \frac{1}{2}(Y_e Y_e^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.129}$$

Iz klase antifermion-bozon-fermion interakcija preostalo je renormalizirati vrhove u kojima gluoni interagiraju s kvarkovima. Prvi takav vrh, oblika $V(\bar{q}_L G q_L)$, u najnižem redu računa smetnje sadrži šest doprinosa prikazanih na slici 5.25. Dopri-




Slika 5.25: Dijagrami popravke $\bar{q}_L G q_L$ vrha

nose iščitavamo iz rezultata renormalizacije za $V(\bar{q}_L W q_L)$ vrh, pri čemu se jednakost

(5.123) primjenjuje na trećem dijagramu:

$$iV_1(\bar{q}_L G q_L) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_L T^A \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\Upsilon^2_{q_L}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.130a}$$

$$iV_2(\bar{q}_L G q_L) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_L T^A \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\big(C_2(f,2)\big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.130b}$$

$$iV_3(\bar{q}_L G q_L) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_L T^A \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\big(C_2(f,3)-\frac{1}{2}C_2(G,3)\big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.130c}$$

$$iV_4(\bar{q}_L G q_L) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_L T^A \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\big(\frac{3}{2}C_2(G,3)\big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.130d}$$

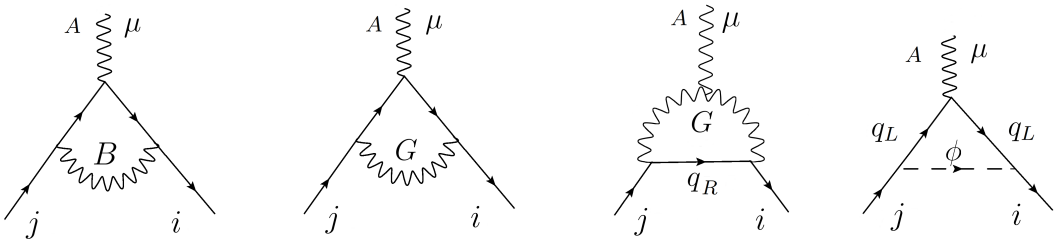
$$iV_5(\bar{q}_L G q_L) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_L T^A \delta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}(Y_u Y_u^\dagger)_{ij}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.130e}$$

$$iV_6(\bar{q}_L G q_L) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_L T^A \delta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}(Y_d Y_d^\dagger)_{ij}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.130f}$$

Iz zbroja doprinosa slijedi renormalizacijski faktor $(Z_1^{q_L G})^{-1}_{ij}$,

$$\begin{aligned}(Z_1^{q_L G})^{-1}_{ij} = 1+\Big(&\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon^2_{q_L}+g^2C_2(f,2)+g_s^2(C_2(f,3)+C_2(G,3))\big)\\&+\frac{1}{2}(Y_uY_u^\dagger+Y_dY_d^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}.\end{aligned} \tag{5.131}$$

Korekcije u prvom redu računa smetnje za vrhove $V(\bar{u}_R G u_R)$ i $V(\bar{d}_R G d_R)$ prikazane su na slici 5.26[9]. Doprinosi korekcija za $V(\bar{u}_R G u_R)$ glase:




Slika 5.26: Dijagrami popravke $\bar{u}_R G u_R$ i $\bar{d}_R G d_R$ vrhova

$$iV_1(\bar{u}_R G u_R) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_R T^A \delta_{ij}\Upsilon^2_{u_R}\frac{g'^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.132a}$$

$$iV_2(\bar{u}_R G u_R) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_R T^A \delta_{ij}\big(C_2(f,3)-\frac{1}{2}C_2(G,3)\big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.132b}$$

$$iV_3(\bar{u}_R G u_R) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_R T^A \delta_{ij}\big(\frac{3}{2}C_2(G,3)\big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.132c}$$

$$iV_4(\bar{u}_R G u_R) \supseteq -ig_s\gamma^\mu P_R T^A (Y_u^\dagger Y_u)_{ij}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.132d}$$

iz čega slijedi renormalizacijski faktor $(Z_1^{u_R G})^{-1}_{ij}$,

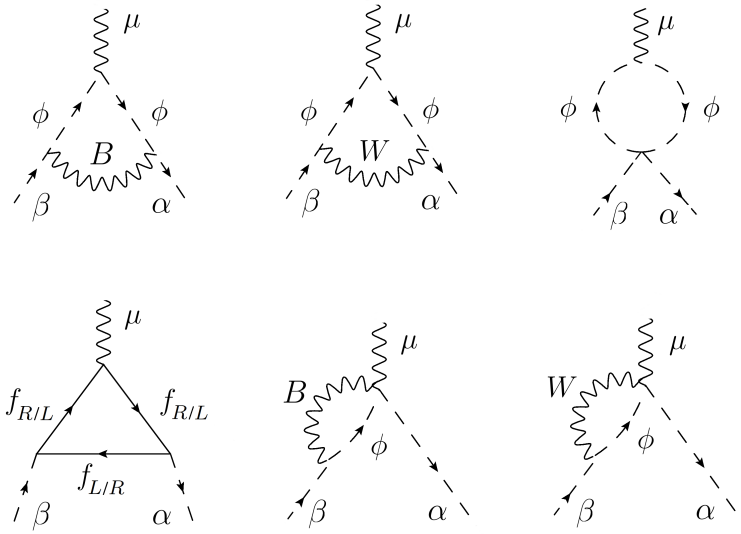
$$(Z_1^{u_R G})^{-1}_{ij} = 1+\Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon^2_{u_R}+g_s^2(C_2(f,3)+C_2(G,3)\big)+(Y_u^\dagger Y_u)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.133}$$

[9]Oznaka $q_R$ na trećem dijagramu podrazumijeva $u_R$ za vrh $V(\bar{u}_R G u_R)$ i $d_R$ za vrh $V(\bar{d}_R G d_R)$.

Zamjenom hipernaboja i Yukawine matrice slijedi renormalizacijski faktor $(Z_1^{d_R G})^{-1}_{ij}$,

$$(Z_1^{d_R G})^{-1}_{ij} = 1 + \Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon^2_{d_R} + g_s^2(C_2(f,3) + C_2(G,3)\big) + (Y_d^\dagger Y_d)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \quad (5.134)$$

Time je završena renormalizacija vrhova oblika $V(\bar{f}Vf)$. Iduća je na redu klasa oblika $V(s^\dagger Vs)$, odnosno interakcije Higgsovog bozona, skalara, sa baždarnim, vektorskim bozonima. Prvi takav vrh je oblika $V(\phi^\dagger B\phi)$. Svi dijagrami koji doprinose korekciji ovog vrha u prvom redu računa smetnje prikazani su na slici 5.27. Prvi i drugi



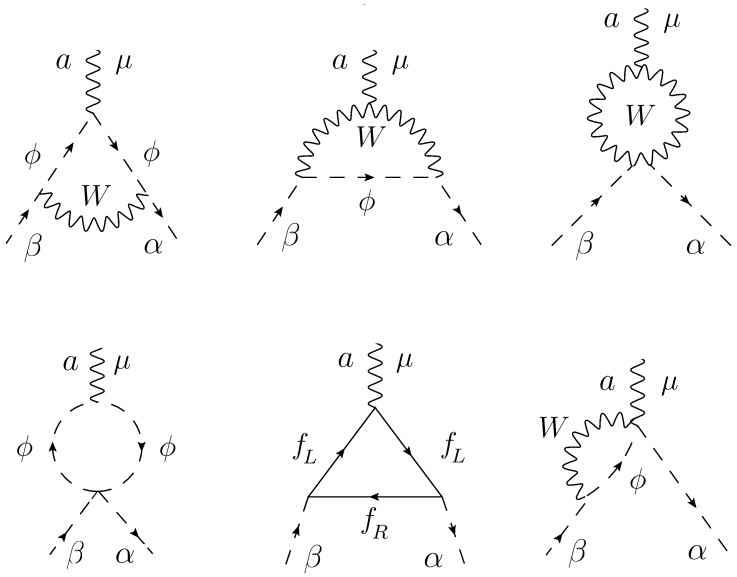

Slika 5.27: Dijagrami korekcije $\phi^\dagger B\phi$ vrha

dijagram sadrže već poznatu strukturu pa njihov doprinos slijedi analogno. Treći dijagram po redu u brojniku je neparan u impulsu, točnije sadržava $(l+p-p')^\mu$, stoga dimenzijski integral iščezava. Dijagrami s fermionskom petljom sadrže kombinacije kvarkovskskih dubleta s kvarkovskim singletima $q_L q_R q_R$ i $q_R q_L q_L$, i kombinacije leptonskih dubleta sa singletima $\ell_L e_R e_R$ i $e_R \ell_L \ell_L$, gdje je $q_R = u_R, d_R$, što daje ukupno šest doprinosa. Zadnja dva dijagrama na slici 5.27. sadrže po dva doprinosa jer se bozon-Higgs petlja može pojaviti na bilo kojoj od dvije Higgsove vanjske noge. Izračunom $1/\epsilon$ doprinosa za svaki član i njihovim zbrajanjem dobije se rezultat

$$\begin{aligned} iV(\phi^\dagger B\phi) \supseteq -ig'(p+p')^\mu \Upsilon_\phi \delta_{\alpha\beta}\Big( &- 2g'^2\Upsilon^2_\phi - 2g^2 C_2(f,2) \\ &+ Tr(n_c(Y_u Y_u^\dagger + Y_d Y_d^\dagger) + Y_e Y_e^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \end{aligned} \quad (5.135)$$

gdje trag potječe od fermionskih petlji. Otklanjanjem golog vrha dobijemo renormalizacijski faktor $(Z_1^{\phi B})^{-1}$:

$$(Z_1^{\phi B})^{-1} = 1 + \Big(-2g'^2\Upsilon^2_\phi - 2g^2 C_2(f,2) + Tr(n_c(Y_u Y_u^\dagger + Y_d Y_d^\dagger) + Y_e Y_e^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \quad (5.136)$$




Slika 5.28: Dijagrami korekcije $\phi^\dagger W \phi$ vrha

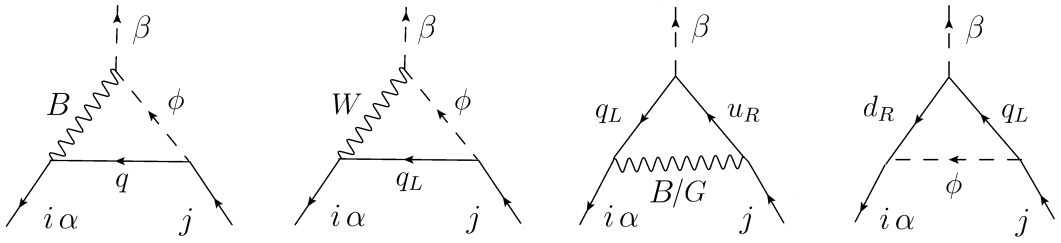
Zadnji bozonsko-skalarni vrh, oblika $V(\phi^\dagger W \phi)$ u prvom redu računa smetnje sadrži korekcije prikazane na slici 5.28. Računi za prva dva dijagrama analogni su prethodnim slučajevima. Treći dijagram po redu u brojniku sadrži faktor $\epsilon^{abc}\{T^a, T^b\}$ čime njegov doprinos iščezava. Četvrti dijagram zbog neparnog impulsa u brojniku amplitude također iščezava. Dijagram s fermionskom petljom sadrži kombinacije dva fermionska dubleta sa singletima, posebno za kvarkove i leptone, što rezultira trima doprinosima. Zadnji dijagram sadrži četiri doprinosa: do na zamjenu smjera petlje bozon-skalar i do na permutaciju petlje po Higgsovim vanjskim nogama. Svi RGE relevantni doprinosi zatvaraju strukturu

$$\begin{aligned} iV(\phi^\dagger W \phi) \supseteq -ig(p+p')^\mu T^a_{\alpha\beta}\Big( &-2g'^2\Upsilon^2_\phi + g^2(C_2(G,2) - 2C_2(f,2)) \\ &+ Tr(n_c(Y_u Y_u^\dagger + Y_d Y_d^\dagger) + Y_e Y_e^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{5.137}$$

što daje renormalizacijski faktor $(Z_1^{\phi W})^{-1}$:

$$(Z_1^{\phi W})^{-1} = 1 + \Big(-2g'^2\Upsilon^2_\phi + g^2(C_2(G,2) - 2C_2(f,2)) + Tr(n_c(Y_u Y_u^\dagger + Y_d Y_d^\dagger) + Y_e Y_e^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.138}$$

Posljednje su na redu interakcije fermiona s Higgsovim poljem, što će rezultirati renormalizacijom Yukawinih vezanja. Prvi na redu je vrh oblika $V(\bar{q}_L \phi^c u_R)$. Svi doprinosi korekciji ovog dijagrama prikazani su na slici 5.29. Prvi dijagram sastoji se od dva doprinosa, gdje se u petljama redom nalaze kombinacije $q_L B \phi$ i $u_R \phi B$. Treći dijagram sastoji se također od dva doprinosa, za $B$ i $G$ bozon u petlji. Svi doprinosi




Slika 5.29: Dijagrami korekcije $\bar{q}_L \phi^c u_R$ vrha

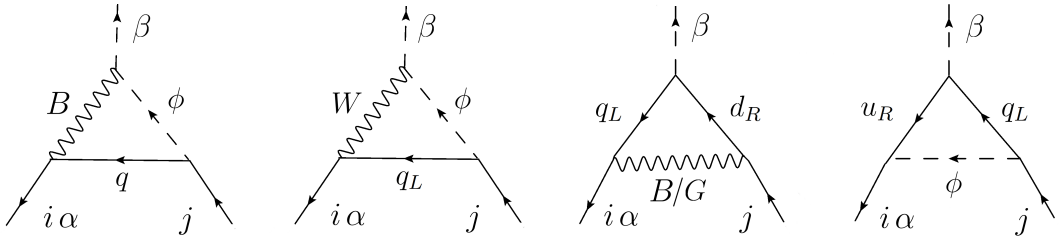
zajedno zatvaraju $1/\epsilon$ član oblika:

$$\begin{aligned} iV(\bar{q}_L \phi^c u_R) \supseteq \Big( & \delta_{ik}(g'^2(4\Upsilon_{q_L}\Upsilon_{u_R} + \Upsilon_\phi^2) + g^2 C_2(f,2) \\ & + 4g_s^2 C_2(f,3)) + (Y_d Y_d^\dagger)_{ik} \Big)(-i(Y_u)_{kj}\epsilon_{\alpha\beta} P_R) \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{5.139}$$

iz čega slijedi renormalizacijski faktor $(Z_1^{q_L \phi u_R})^{-1}_{ij}$:

$$\begin{aligned} (Z_1^{q_L \phi u_R})^{-1}_{ij} = 1 + \Big( & \delta_{ij}(g'^2(4\Upsilon_{q_L}\Upsilon_{u_R} + \Upsilon_\phi^2) + g^2 C_2(f,2) + 4g_s^2 C_2(f,3)) \\ & + (Y_d Y_d^\dagger)_{ij} \Big) \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{5.140}$$

Doprinosi korekciji vrha $V(\bar{q}_L \phi d_R)$ prikazani su na slici 5.30. Doprinosi su potpuno




Slika 5.30: Dijagrami korekcije $\bar{q}_L \phi d_R$ vrha

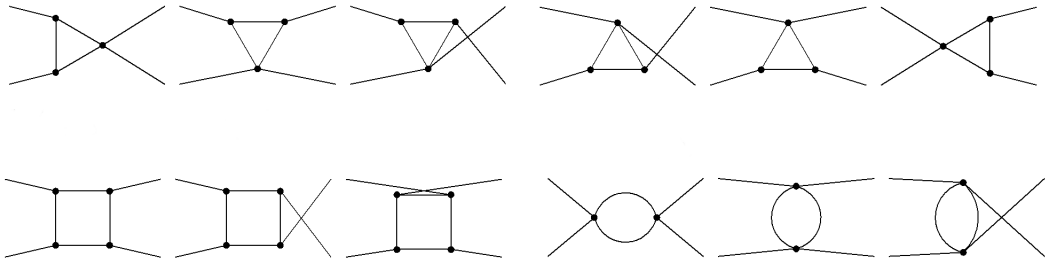
analogni prethodnom rezultatu, iz čega odmah možemo napisati renormalizacijski faktor $(Z_1^{q_L \phi d_R})^{-1}$:

$$\begin{aligned} (Z_1^{q_L \phi d_R})^{-1}_{ij} = 1 + \Big( & \delta_{ij}(g'^2(4\Upsilon_{q_L}\Upsilon_{d_R} + \Upsilon_\phi^2) + g^2 C_2(f,2) + 4g_s^2 C_2(f,3)) \\ & + (Y_u Y_u^\dagger)_{ij} \Big) \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{5.141}$$

Zadnji trovrh standardnog modela oblika je $V(\bar{\ell}_L \phi e_R)$. Njegov renormalizacijski faktor odmah možemo napisati iz prethodnog rezultata, uzimajući u obzir da leptoni ne interagiraju jakom silom i da je desni elektron jedini mogući leptonski singlet. Renormalizacijski faktor $(Z_1^{\ell_L \phi e_R})^{-1}$ dakle glasi

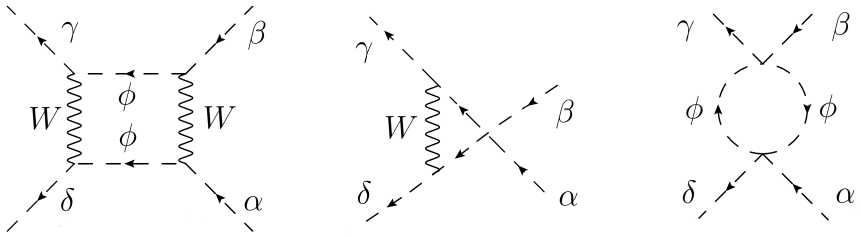
$$(Z_1^{\ell_L \phi e_R})^{-1}_{ij} = 1 + \Big( \delta_{ij}(g'^2(4\Upsilon_{\ell_L}\Upsilon_{e_R} + \Upsilon_\phi^2) + g^2 C_2(f,2)) \Big) \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.142}$$

Yukawina vezanja sadrže i hermitski konjugirane članove. Doprinosi za takve vrhove razlikuju se od prethodno izračunatih u činjenici da su goli vrhovi u gornjim dijagramima također hermitski konjugati golih vrhova koji se pojavljuju u korekcijama za hermitski konjugirane članove. Stoga su i renormalizacijski faktori (koji su u ovom slučaju matrice (vidi 5.25)) također hermitski konjugati. Njihov skalarni faktor proporcionalnosti je identičan.
Preostaje nam izračunati korekcije za Higgsov četverovrh $V(\phi\phi\phi\phi)$, ili skraćeno $V(4\phi)$, koji će nam omogućiti izračun $\beta$-funkcije za vezanje $\lambda$. Za popis dijagrama potrebno je razmotriti kakva je topologija četverovrha, prikazana na slici 5.31. Na-



Slika 5.31: Toplogija četverovrha

kon što nam je poznata toplogija popišemo sve dijagrame s četiri Higgsove vanjske noge. Dijagrame konstruiramo tako da su propagatori u petljama dopušteni golim vrhovima standarnog modela. Na slici 5.32 prikazan je po jedan primjer za dijagram s četiri propagatora (eng. *box diagram*), dijagram sa tri propagatora (eng. *triangle diagram*) i dijagram s dva propagatora. Provođenjem standardne procedure, raspisom




Slika 5.32: Primjeri doprinosa korekcijama četverovrha za Higgsov bozon

Feynmanovih pravila, korištenjem relacija za umnoške generatora (vidi Dodatak C) i izdvajanjem $1/\epsilon$ člana dijagrami s redom četiri, tri i dva propagatora daju doprinose:

$$iV_{\square}(4\phi) \supseteq \quad i(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) f_{\square} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.143a}$$

$$iV_{\triangle}(4\phi) \supseteq \quad i(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) f_{\triangle} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.143b}$$

$$iV_{\bigcirc}(4\phi) \supseteq \quad i(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) f_{\bigcirc} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.143c}$$

gdje su $f$ skalarni faktori za svaku klasu dijagrama oblika

$$f_{\square} = -2Tr(n_c((Y_u Y_u^\dagger)^2 + (Y_d Y_d^\dagger)^2) + (Y_e Y_e^\dagger)^2) + 2g'^4\Upsilon_\phi^4 \tag{5.144a}$$
$$+g'^2 g^2 \Upsilon_\phi^2 (2 - \tfrac{2}{N}) + g^4(\tfrac{N+1}{4} - \tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{2N^2}),$$
$$f_{\triangle} = -4g'^4\Upsilon_\phi^4 - 2g'^2 g^2 \Upsilon_\phi^2 (2 - \tfrac{2}{N}) - g^4(\tfrac{N+1}{2} - \tfrac{2}{N} + \tfrac{1}{N^2}) \tag{5.144b}$$
$$-4g'^2\Upsilon_\phi^2\lambda - 4g^2\lambda(\tfrac{N}{2} - \tfrac{1}{2N}),$$
$$f_{\bigcirc} = 4g^4(\tfrac{N+1}{2} - \tfrac{2}{N} + \tfrac{1}{N^2}) + 8g'^2 g^2 \Upsilon_\phi^2 (1 - \tfrac{1}{N}) + 8g'^4\Upsilon_\phi^4 + 24\lambda^2. \tag{5.144c}$$

Otklanjanjem golog vrha oblika $-2i\lambda(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$, uvrštavanjem $N = 2$ i zbrajanjem svih doprinosa dobijemo renormalizacijski faktor $(Z_1^{4\phi})^{-1}$:

$$\begin{aligned}(Z_1^{4\phi})^{-1} = 1 + \Big( &- 12\lambda + \frac{3}{2}g^2 + 2g'^2\Upsilon_\phi^2 \\ &+ \frac{1}{\lambda}\big( - 3g'^4\Upsilon_\phi^4 - \frac{3}{2}g^2 g'^2\Upsilon_\phi^2 - \frac{9}{16}g^4 \\ &+ Tr(n_c((Y_u Y_u^\dagger)^2 + (Y_d Y_d^\dagger)^2) + (Y_e Y_e^\dagger)^2)\big)\Big)\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\epsilon}.\end{aligned} \tag{5.145}$$

U ovoj fazi imamo dovoljno informacija za izračun $\beta$-funkcija za tri konstante vezanja standardnog modela te za Yukawina vezanja i Higgsovo vezanje $\lambda$. Integracijom ćemo nakon toga izračunati efektivne konstante vezanja standardnog modela i ispitati mogućnost ujedinjenja. Prije samog izvoda za renormalizacijske grupne jednadžbe provjerit ćemo točnost renormalizacijskih faktora iz Slavnov-Taylorovih identiteta za standardni model (5.32).

## 5.5 Provjera i popis renormalizacijskih faktora standardnog modela

Sada kada nam je poznata vrijednost gotovo svih renormalizacijskih faktora za standardni model uvrstimo ih u relacije (5.32), pri tom koristeći razvoj

$$(1 + x)^{\pm m} \approx 1 \pm mx. \tag{5.146}$$

Rezultati slijede:

$$\begin{aligned}
&(Z_3^W)^{-1} Z_1^{3W} \\
&= (Z_2^{cW})^{-1} Z_1^{cW} = (Z_{2i}^{q_L})^{-1} Z_{1i}^{q_L W} \\
&= (Z_{2i}^{\ell_L})^{-1} Z_{1i}^{\ell_L W} = (Z_2^{\phi})^{-1} Z_1^{\phi W} \\
&= (Z_2^{\phi})^{-1/2} (Z_1^{\phi 2W})^{1/2}, \\
&= 1 - C_2(G,2) \tfrac{g^2}{(4\pi)^2} \tfrac{1}{\epsilon}
\end{aligned} \tag{5.147a}$$

$$\begin{aligned}
&(Z_3^G)^{-1} Z_1^{3G} \\
&= (Z_2^{cG})^{-1} Z_1^{cG} = (Z_{2i}^{q_L})^{-1} Z_{1i}^{q_L G} \\
&= (Z_{2i}^{u_R})^{-1} Z_{1i}^{u_R G} = (Z_{2i}^{d_R})^{-1} Z_{1i}^{d_R G}, \\
&= 1 - C_2(G,3) \tfrac{g_s^2}{(4\pi)^2} \tfrac{1}{\epsilon}
\end{aligned} \tag{5.147b}$$

$$\begin{aligned}
&(Z_{2i}^{q_L})^{-1} Z_{1i}^{q_L B} = (Z_{2i}^{u_R})^{-1} Z_{1i}^{u_R B} \\
&= (Z_{2i}^{d_R})^{-1} Z_{1i}^{d_R B} = (Z_{2i}^{\ell_L})^{-1} Z_{1i}^{\ell_L B} \\
&= (Z_{2i}^{e_R})^{-1} Z_{1i}^{e_R B} = (Z_2^{\phi})^{-1} Z_1^{\phi B} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.147c}$$

Primijetimo da iz relacija (5.32) nužno slijedi

$$(Z_3^W)^{-1/2} (Z_1^{4W})^{1/2} = 1 - C_2(G,2) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.148a}$$

$$(Z_3^G)^{-1/2} (Z_1^{4G})^{1/2} = 1 - C_2(G,3) \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.148b}$$

$$(Z_2^{\phi})^{-1/2} (Z_1^{\phi 2B})^{1/2} = 1 \tag{5.148c}$$

što implicira rezultate za renormalizacijske faktore četverovrhova $(Z_1^{4W})^{-1}$, $(Z_1^{4G})^{-1}$ i $(Z_1^{\phi 2B})^{-1}$:

$$(Z_1^{4W})^{-1} = 1 + \frac{1}{3}(C(f,2)(n_f(n_c+1)+1) + C_2(G,2)) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.149a}$$

$$(Z_1^{4G})^{-1} = 1 + \frac{1}{3}(4C(f,3)n_f + C_2(G,3)) \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \tag{5.149b}$$

$$(Z_1^{\phi 2B})^{-1} = 1 + \Big( Tr(n_c(Y_{u,d} Y_{u,d}^{\dagger}) + Y_e Y_e^{\dagger}) - 2(g^2 C_2(f,2) + g'^2 \Upsilon_{\phi}^2) \Big) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5.149c}$$

Može se pokazati da isti rezultati slijede iz eksplicitnog računa.
Prije računanja renormalizacijskih grupnih jednadžbi popišimo sve rezultate za renormalizacijske faktore standardnog modela:

$$Z_3^B = 1 - \frac{1}{3} \Big( n_c n_f (2\Upsilon_{q_L}^2 + \Upsilon_{u_R}^2 + \Upsilon_{d_R}^2) + n_f (2\Upsilon_{\ell_L}^2 + \Upsilon_{e_R}^2) + 2\Upsilon_{\phi}^2 \Big) \frac{g'^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon},$$

$$
\begin{aligned}
Z_3^W &= 1+\left(\frac{5}{3}C_2(G,2)-\frac{1}{3}C(f,2)\Big(1+n_f(1+n_c)\Big)\right)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
Z_3^G &= 1+\left(\frac{5}{3}C_2(G,3)-\frac{4}{3}C(f,3)n_f\right)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
Z_2^{c_W} &= 1+\frac{1}{2}C_2(G,2)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
Z_2^{c_G} &= 1+\frac{1}{2}C_2(G,3)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_2^{q_L})_{ij} &= 1-\left(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon_{q_L}^2+g^2C_2(f,2)+g_s^2C_2(f,3)\big)+\frac{1}{2}(Y_{u,d}Y_{u,d}^\dagger)_{ij}\right)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_2^{u_R})_{ij} &= 1-\big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon_{u_R}^2+g_s^2C_2(f,3))+(Y_u^\dagger Y_u)_{ij}\big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_2^{d_R})_{ij} &= 1-\big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon_{d_R}^2+g_s^2C_2(f,3))+(Y_d^\dagger Y_d)_{ij}\big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_2^{\ell_L})_{ij} &= 1-\big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon_{\ell_L}^2+g^2C_2(f,2))+\frac{1}{2}(Y_eY_e^\dagger)_{ij}\big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_2^{e_R})_{ij} &= 1-\Big(\big(\delta_{ij}(g'^2\Upsilon_{e_R}^2)+(Y_e^\dagger Y_e)_{ij}\big)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
Z_2^{\phi} &= 1-\Big(Tr(n_c(Y_{u,d}Y_{u,d}^\dagger)+Y_eY_e^\dagger)-2(g^2C_2(f,2)+g'^2\Upsilon_\phi^2)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{\phi\mu})^{-1} &= 1+\Big(C_2(f,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\\
(Z_1^{3W})^{-1} &= 1+\left(\frac{1}{6}\big((n_c+1)n_f+1\big)-\frac{2}{3}C_2(G,2)\right)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{3G})^{-1} &= 1+\Big(\frac{2}{3}n_f-\frac{2}{3}C_2(G,3)\Big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{c_W})^{-1} &= 1+\Big(\frac{1}{2}C_2(G,2)\Big)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{c_G})^{-1} &= 1+\Big(\frac{1}{2}C_2(G,3)\Big)\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{q_LB})_{ij}^{-1} &= 1+\Big(\big(g'^2\Upsilon_{q_L}^2+g^2C_2(f,2)+g_s^2C_2(f,3)\big)\delta_{ij}+\frac{1}{2}(Y_{u,d}Y_{u,d}^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{u_RB})_{ij}^{-1} &= 1+\Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon_{u_R}^2+g_s^2C_2(f,3)\big)+(Y_u^\dagger Y_u)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{d_RB})_{ij}^{-1} &= 1+\Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon_{d_R}^2+g_s^2C_2(f,3)\big)+(Y_d^\dagger Y_d)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{\ell_LB})_{ij}^{-1} &= 1+\Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon_{\ell_L}^2+g^2C_2(f,2)\big)+\frac{1}{2}(Y_eY_e^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{e_RB})_{ij}^{-1} &= 1+\Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon_{e_R}^2\big)+(Y_e^\dagger Y_e)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{q_LW})_{ij}^{-1} &= 1+\Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon_{q_L}^2+g^2(C_2(f,2)+C_2(G,2))+g_s^2C_2(f,3)\big)+\frac{1}{2}(Y_{u,d}Y_{u,d}^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{\ell_LW})_{ij}^{-1} &= 1+\Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon_{\ell_L}^2+g^2(C_2(f,2)+C_2(G,2))\big)+\frac{1}{2}(Y_eY_e^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(Z_1^{q_L G})^{-1}_{ij} &= 1 + \Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon^2_{q_L} + g^2 C_2(f,2) + g_s^2(C_2(f,3) + C_2(G,3))\big) + \frac{1}{2}(Y_{u,d}Y^\dagger_{u,d})_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{u_R G})^{-1}_{ij} &= 1 + \Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon^2_{u_R} + g_s^2(C_2(f,3) + C_2(G,3)\big) + (Y_u^\dagger Y_u)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{d_R G})^{-1}_{ij} &= 1 + \Big(\delta_{ij}\big(g'^2\Upsilon^2_{d_R} + g_s^2(C_2(f,3) + C_2(G,3)\big) + (Y_d^\dagger Y_d)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{\phi B})^{-1} &= 1 + \Big( - 2g'^2\Upsilon^2_{\phi} - 2g^2 C_2(f,2) + Tr(n_c(Y_{u,d}Y^\dagger_{u,d}) + Y_e Y_e^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{\phi W})^{-1} &= 1 + \Big( - 2g'^2\Upsilon^2_{\phi} + g^2(C_2(G,2) - 2C_2(f,2)) + Tr(n_c(Y_{u,d}Y^\dagger_{u,d}) + Y_e Y_e^\dagger)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{q_L\phi u_R})^{-1}_{ij} &= 1 + \Big(\delta_{ij}(g'^2(4\Upsilon_{q_L}\Upsilon_{u_R} + \Upsilon^2_\phi) + g^2 C_2(f,2) + 4g_s^2 C_2(f,3)) + (Y_d Y_d^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{q_L\phi d_R})^{-1}_{ij} &= 1 + \Big(\delta_{ij}(g'^2(4\Upsilon_{q_L}\Upsilon_{d_R} + \Upsilon^2_\phi) + g^2 C_2(f,2) + 4g_s^2 C_2(f,3)) + (Y_u Y_u^\dagger)_{ij}\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{\ell_L\phi e_R})^{-1}_{ij} &= 1 + \Big(\delta_{ij}(g'^2(4\Upsilon_{\ell_L}\Upsilon_{e_R} + \Upsilon^2_\phi) + g^2 C_2(f,2))\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{4\phi})^{-1} &= 1 + \Big( - 12\lambda + \frac{3}{2}g^2 + 2g'^2\Upsilon^2_\phi + \frac{1}{\lambda}\big( - 3g'^4\Upsilon^4_\phi - \frac{3}{2}g^2 g'^2\Upsilon^2_\phi - \frac{9}{16}g^4\\
&+ \quad Tr(n_c(Y_u Y_u^\dagger)^2 + n_c(Y_d Y_d^\dagger)^2 + (Y_e Y_e^\dagger)^2)\Big)\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{4W})^{-1} &= 1 + \frac{1}{3}(C(f,2)(n_f(n_c+1)+1) + C_2(G,2))\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{4G})^{-1} &= 1 + \frac{1}{3}(4C(f,3)n_f + C_2(G,3))\frac{g_s^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},\\
(Z_1^{\phi 2B})^{-1} &= 1 + \Big(Tr(n_c(Y_{u,d}Y^\dagger_{u,d}) + Y_e Y_e^\dagger) - 2(g^2 C_2(f,2) + g'^2\Upsilon^2_\phi)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon},
\end{aligned}
$$

gdje je uvedena pokrata $Y_{u,d}Y^\dagger_{u,d} = Y_u Y_u^\dagger + Y_d Y_d^\dagger$. Za renormalizacijske faktore u matričnoj formi 1 predstavlja $\delta_{ij}$.

## 5.6 RGEs i efektivne konstante vezanja za standardni model

Sada kada su nam poznate veze između golih i renormaliziranih konstanti vezanja, kao i renormalizacijski faktori standardnog modela, možemo izračunati $\beta$-funkcije i efektivne konstante vezanja, te ispitati mogućnost ujedinjenja parametara teorije. Krećemo s trima osnovnim konstantama, jakostima vezanja $g'$, $g$ i $g_s$, koje ćemo redom nazvati $g_1$, $g_2$ i $g_3$, radi kasnije lakše usporedbe s literaturom, uz napomenu da na U(1) konstantu vezanja $g'$ uvodimo reskaliranje [15]

$$g_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}g'. \tag{5.151}$$

Vraćamo se na relacije (5.26), (5.27) i (5.28), gdje ćemo izračunati prvi umnožak renormalizacijskih faktora. Svi ostali daju isti rezultat, kao što je dokazano u prethodnom poglavlju. Računat ćemo faktore za najniži red $a_i^{(1)}$ pri čemu je

$$g_{i,B}\mu^{-\epsilon} = g_i + a_i^{(1)}\frac{g_i^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} + ... \tag{5.152}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} g'_B\mu^{-\epsilon} &= (Z_{2i}^{q_L})^{-1}(Z_3^B)^{-1/2}Z_1^{q_L B}g' \\ &= g' + \frac{1}{6}\Big(n_c n_f(2\Upsilon_{q_L}^2 + \Upsilon_{u_R}^2 + \Upsilon_{d_R}^2) + n_f(2\Upsilon_{\ell_L}^2 + \Upsilon_{e_R}^2) + 2\Upsilon_\phi^2\Big)\frac{g'^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \\ &= g' + (\frac{1}{12} + \frac{5}{9}n_f)\frac{g'^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_B\mu^{-\epsilon} &= (Z_3^W)^{-3/2}Z_1^{3W}g \\ &= g + \Big( -\frac{11}{6}C_2(G,2) + \frac{1}{6}C(f,2)\Big(1 + n_f(1+n_c)\Big)\Big)\frac{g^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \\ &= g + (-\frac{43}{12} + \frac{1}{3}n_f)\frac{g^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{sB}\mu^{-\epsilon} &= (Z_3^G)^{-3/2}Z_1^{3G}g_s \\ &= g_s + (-\frac{11}{6}C_2(G,3) + \frac{2}{3}C(f,3)n_f)\frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \\ &= g_s + (-\frac{11}{2} + \frac{1}{3}n_f)\frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \end{aligned}$$

iz čega proizlaze faktori $a_i^{(1)}$, gdje oznaka $(1)$ stoji za prvi red računa smetnje:

$$a_1'^{(1)} = \frac{1}{12} + \frac{5}{9}n_f, \tag{5.154a}$$

$$a_2^{(1)} = -\frac{43}{12} + \frac{1}{3}n_f, \tag{5.154b}$$

$$a_3^{(1)} = -\frac{11}{2} + \frac{1}{3}n_f, \tag{5.154c}$$

gdje je $a_1'^{(1)} = 3/5a_1^{(1)}$ u skladu sa reskaliranjem (5.151). Sve gole, reskalirane konstante vezanja imaju istu strukturu do na razlike u faktorima $a_i$. Stoga možemo potpuno općenito izvesti $\beta$-funkciju do prvog reda:

$$\begin{aligned} &g_{i,B}\mu^{-\epsilon} = g_i + a_i^{(1)}\frac{g_i^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big|_{\mu\frac{d}{d\mu}} \\ &-\epsilon(g_{i,B}\mu^{-\epsilon}) = \beta_i - \epsilon g_i + a_i^{(1)}\frac{3g_i^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}(\beta_i - \epsilon g_i) \\ &-\epsilon(g_i + a_i^{(1)}\frac{g_i^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}) = \beta_i - \epsilon g_i + a_i^{(1)}\frac{3g_i^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}(\beta_i - \epsilon g_i) \end{aligned} \tag{5.155}$$

Sakupljanjem članova uz $\epsilon^0$ dobije se općenita $\beta$-funkcija do prvog reda:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{g_i^3}{(4\pi)^2}(3a_i^{(1)} - a_i^{(1)}), \\ \beta_i &= 2a_i^{(1)}\frac{g_i^3}{(4\pi)^2}. \end{aligned} \tag{5.156}$$

Iz prethodnog izraza slijede $\beta$-funkcije za tri konstante vezanja standardnog modela:

$$\beta_1 = (\frac{1}{10} + \frac{2}{3}n_f)\frac{g'^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.157a}$$

$$\beta_2 = \big(-\frac{43}{6}+\frac{2}{3}n_f\big)\frac{g^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.157b}$$

$$\beta_3 = \big(-11+\frac{2}{3}n_f\big)\frac{g_s^3}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.157c}$$

Na skali energije $\mu$ konstante vezanja evoluirat će u skladu s jednadžbom [15]

$$\frac{dg_i}{dln\mu} = -b_i\frac{g_i^3}{(4\pi)^2}, \tag{5.158}$$

gdje su $b_i$ definirani svojim beta funkcijama $\beta_i$:

$$b_1 = -\frac{1}{10}-\frac{2}{3}n_f, \tag{5.159a}$$

$$b_2 = \frac{43}{6}-\frac{2}{3}n_f, \tag{5.159b}$$

$$b_3 = 11-\frac{2}{3}n_f. \tag{5.159c}$$

Rezultati se poklapaju s literaturom [16], no možemo ih provjeriti poznavajući činjenicu da za SU(N) grupu spomenuti koeficijenti imaju oblik [15]

$$b_N = \frac{11}{3}N-\frac{1}{3}n_{f_L}-\frac{1}{6}n_s, \tag{5.160}$$

gdje je $n_{f_L}=2n_f$ broj lijevih fermiona, a $n_s$ broj skalara koji se vežu na baždarne bozone. Za U(1) grupu simetrija koeficijent je općenito

$$b_1 = -\frac{2}{3}\sum_f t_f^2-\frac{1}{3}\sum_s t_s^2, \tag{5.161}$$

gdje su $t_i$ skalarni i fermionski naboji teorije. U izrazu (5.160) zanimljivo je primijetiti da, kada su $n_{f_L}$ i $n_s$ dovoljno mali, odnosno kad je $N$ dovoljno velik, koeficijent $b_N$ je pozitivan, što rezultira smanjenjem konstante vezanja kako skala raste, što je, kako smo već vidjeli, obilježje asimptotske slobode. Efekt asimptotske slobode drastično se povećava s porastom $N$.
Integriranjem inverza $\beta$-funkcije, pri čemu je donja granica poznata eksperimentalna vrijednost $\mu_0=m_Z$, te izražavanjem konstanti vezanja preko $\alpha_i=g_i^2/4\pi$, dobijemo općenito ponašanje parametara teorije s energijom koje glasi

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_i^{-1}(m_Z)+\frac{b_i}{2\pi}ln\frac{\mu}{m_Z}. \tag{5.162}$$

Za grafički prikaz evolucije konstanti vezanja potrebno je povezati konstante $\alpha_i$ s njihovim fizikalnim vrijednostima. Vrijede veze [16]:

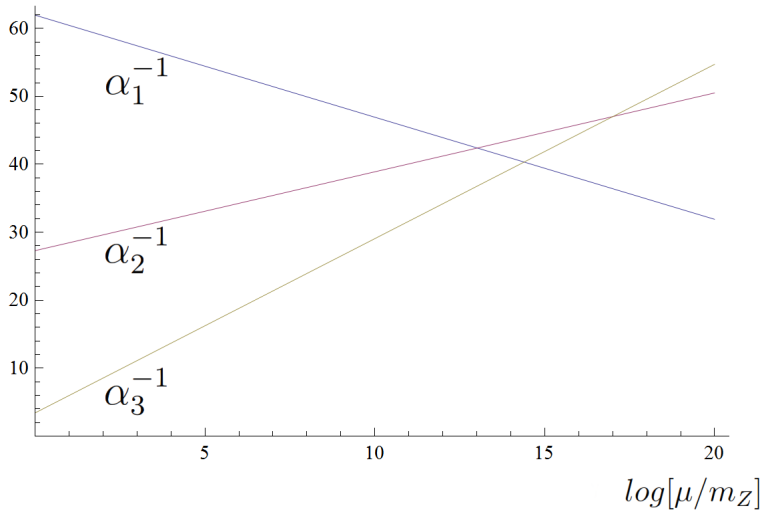
$$\alpha_1^{-1}(m_Z) = \frac{3}{5}\frac{cos^2\theta_W(m_Z)}{\alpha(m_Z)}, \tag{5.163a}$$

$$\alpha_2^{-1}(m_Z) = \frac{sin^2\theta_W(m_Z)}{\alpha(m_Z)}, \tag{5.163b}$$

što uvrštavanjem poznatih eksperimentalnih vrijednosti na skali mase Z bozona $m_Z$ [17] daje približne numeričke vrijednosti:

$$\alpha_1^{-1}(m_Z) = 59.0131, \tag{5.164a}$$
$$\alpha_2^{-1}(m_Z) = 29.5449, \tag{5.164b}$$
$$\alpha_3^{-1}(m_Z) = 8.4388. \tag{5.164c}$$

Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti za $\alpha_i^{-1}$ i izračunatih koeficijenata $b_i$ u jednadžbu (5.162) dobijemo graf prikazan na slici 5.33. Kao što je vidljivo na grafu, na skalama $10^{13} - 10^{17}$ GeV-a nalazi se tzv. trokut ujedinjenja. Iako sve tri konstante vezanja na nižim skalama konvergiraju jedna drugoj, u okviru standardnog modela ne postoji točka u kojoj su sve tri vrijednosti konstanti jednake. Na detaljniju razradu ovog problema i njegovu diskusiju u kontekstu drugih modela poput minimalnog supersimetričnog standardnog modela (MSSM) vratit ćemo se kasnije, nakon izračuna $\beta$-funkcija za Yukawina vezanja i Higgsov sektor.




Slika 5.33: Ovisnost konstanti vezanja standardnog modela o skali $\mu$

Prelazimo na izračun $\beta$-funkcija za Yukawina vezanja. Polazeći od poznatih relacija

$$(Z_2^\phi)^{1/2}\big((Z_2^{q_L\dagger})^{1/2}(Y_{dB})(Z_2^{d_R})^{1/2}\big)_{ij} = (Z_1^{q_L\phi d_R}(Y_d))_{ij}\mu^\epsilon, \tag{5.165a}$$
$$(Z_2^\phi)^{1/2}\big((Z_2^{q_L\dagger})^{1/2}(Y_{uB})(Z_2^{u_R})^{1/2}\big)_{ij} = (Z_1^{q_L\phi u_R}(Y_u))_{ij}\mu^\epsilon, \tag{5.165b}$$
$$(Z_2^\phi)^{1/2}\big((Z_2^{\ell_L\dagger})^{1/2}(Y_{eB})(Z_2^{e_R})^{1/2}\big)_{ij} = (Z_1^{\ell_L\phi e_R}(Y_e))_{ij}\mu^\epsilon, \tag{5.165c}$$

rapisujemo ih tako da gola vezanja i parametar skale prebacimo na lijevu stranu, čime se dobije

$$(Y_{dB})_{ij}\mu^{-\epsilon} = \big((Z_2^\phi)^{-1/2}(Z_2^{q_L\dagger})^{-1/2}(Z_1^{q_L\phi d_R}Y_d(Z_2^{d_R})^{-1/2}\big)_{ij} = (Y_d)_{ij} + (a_d^{(1)})_{ij}\frac{1}{\epsilon},$$
$$(Y_{uB})_{ij}\mu^{-\epsilon} = \big((Z_2^\phi)^{-1/2}(Z_2^{q_L\dagger})^{-1/2}(Z_1^{q_L\phi u_R}Y_u(Z_2^{u_R})^{-1/2}\big)_{ij} = (Y_u)_{ij} + (a_u^{(1)})_{ij}\frac{1}{\epsilon},$$
$$(Y_{eB})_{ij}\mu^{-\epsilon} = \big((Z_2^\phi)^{-1/2}(Z_2^{\ell_L\dagger})^{-1/2}(Z_1^{\ell_L\phi e_R}Y_e(Z_2^{e_R})^{-1/2}\big)_{ij} = (Y_e)_{ij} + (a_e^{(1)})_{ij}\frac{1}{\epsilon}.$$

Uvrštavanjem renormalizacijskih faktora, Casimirove invarijante i vrijednosti hipernaboja za koeficijente uz $1/\epsilon$ dobiju se rezultati

$$(a_d^{(1)})_{ij} = \Big(\tfrac{1}{2}Y_2(S) + \tfrac{3}{4}(Y_dY_d^\dagger - Y_uY_u^\dagger) - \tfrac{1}{8}g_1^2 - \tfrac{9}{8}g_2^2 - 4g_3^2\Big)(Y_d)_{ij}\tfrac{1}{(4\pi)^2}, \quad (5.167a)$$

$$(a_u^{(1)})_{ij} = \Big(\tfrac{1}{2}Y_2(S) + \tfrac{3}{4}(Y_uY_u^\dagger - Y_dY_d^\dagger) - \tfrac{17}{40}g_1^2 - \tfrac{9}{8}g_2^2 - 4g_3^2\Big)(Y_u)_{ij}\tfrac{1}{(4\pi)^2}, \quad (5.167b)$$

$$(a_e^{(1)})_{ij} = \Big(\tfrac{1}{2}Y_2(S) + \tfrac{3}{4}Y_eY_e^\dagger - \tfrac{9}{8}g_1^2 - \tfrac{9}{8}g_2^2\Big)(Y_e)_{ij}\tfrac{1}{(4\pi)^2}, \quad (5.167c)$$

gdje je $Y_2(S)$ struktura oblika

$$Y_2(S) = Tr(n_c(Y_uY_u^\dagger + Y_dY_d^\dagger) + Y_eY_e^\dagger). \quad (5.168)$$

Koeficijenti $a_i$ u Yukawinim vezanjima imaju složenu ovisnost o parametrima koji ovise o skali, stoga ćemo ih raspisati kao:

$$a_i^{(1)} = c_{1i}g_i^2Y_i + c_2Y_dY_d^\dagger Y_i + c_3Y_uY_u^\dagger Y_i + c_4Y_eY_e^\dagger Y_i, \quad (5.169)$$

gdje smo radi preglednosti zapisa ispustili matrične indekse. $\beta$-funkcija ovisi o svim konstantama vezanja preko [6]

$$\beta_k(x) = \sum_\ell \rho_\ell x_\ell \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x_\ell} - \rho_k a_k^{(1)}(x), \quad (5.170)$$

odnosno primijenjeno na naš slučaj (gdje je $\rho_i = 1$ za vezanja tri polja)

$$\beta_i = g_i\frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial g_i} + Y_i\frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial Y_i} + \big(Y_d\frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial Y_d} + Y_u\frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial Y_u} + Y_e\frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial Y_e} + h.c.\big) - a_i^{(1)}. \quad (5.171)$$

Uvrštavanjem izraza (5.169) dobijemo

$$\beta_i = 2c_{1i}g_i^2Y_i + a_i^{(1)} + 2c_2Y_dY_d^\dagger Y_i + 2c_3Y_uY_u^\dagger Y_i + 2c_4Y_eY_e^\dagger Y_i - a_i^{(1)} = 2a_i^{(1)}, \quad (5.172)$$

iz čega direktno slijede $\beta$-funkcije na nivou jedne petlje za Yukawina vezanja

$$\beta_d = \Big(Y_2(S) + \frac{3}{2}(Y_dY_d^\dagger - Y_uY_u^\dagger) - \frac{1}{4}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_3^2\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \quad (5.173a)$$

$$\beta_u = \Big(Y_2(S) + \frac{3}{2}(Y_uY_u^\dagger - Y_dY_d^\dagger) - \frac{17}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_3^2\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \quad (5.173b)$$

$$\beta_e = \Big(Y_2(S) + \frac{3}{2}Y_eY_e^\dagger - \frac{9}{4}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}, \quad (5.173c)$$

koje se u potpunosti slažu s literaturom [16].

U Higgsovom sektoru izvrijednit ćemo $\beta$-funkciju za vezanje četiri Higgsa $\lambda$ i $\beta$-funkciju za vakuumsku očekivanu vrijednost skalarnog polja $v$. Polazimo od relacije koja veže golu i renormaliziranu konstantu vezanja $\lambda$,

$$(Z_2^\phi)^2\lambda_B = Z_1^{4\phi}\lambda\mu^{2\epsilon}, \quad (5.174)$$

odnosno prebacivanjem gole konstante vezanja i faktora skale na jednu stranu

$$\lambda_B\mu^{-2\epsilon} = (Z_2^\phi)^{-2}Z_1^{4\phi}\lambda = \lambda + a_\lambda^{(1)}\frac{1}{\epsilon}. \quad (5.175)$$

Uvrštavamo renormalizacijske faktore i reskaliramo $g'$:

$$\begin{aligned}\lambda_B\mu^{-2\epsilon} = 1 + \Big(&2\lambda Y_2(S) - \frac{3}{5}\lambda g_1^2 - 3\lambda g_2^2 + 12\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda g_2^2 - \frac{3}{10}\lambda g_1^2 \\ &+ \frac{27}{400}g_1^4 + \frac{9}{40}g_1^2 g_2^2 + \frac{9}{16}g_2^4 - H(S)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\end{aligned} \tag{5.176}$$

gdje je $H(S) = Tr(n_c(Y_u Y_u^\dagger)^2 + n_c(Y_d Y_d^\dagger)^2 + (Y_e Y_e^\dagger)^2)$, iz čega slijedi koeficijent $a_\lambda^{(1)}$

$$a_\lambda^{(1)} = \Big(2\lambda Y_2(S) - H(S) + 12\lambda^2 + \frac{27}{400}g_1^4 + \frac{9}{16}g_2^4 + \frac{9}{40}g_1^2 g_2^2 - \frac{9}{10}\lambda g_1^2 - \frac{9}{2}\lambda g_2^2\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}. \tag{5.177}$$

Izvodimo $\beta$-funkciju iz [6]:

$$\beta_\lambda = \sum_\ell \rho_\ell x_\ell \frac{\partial a_\lambda^{(1)}}{\partial x_\ell} - \rho_\lambda a_\lambda^{(1)} = (4-2)a_\lambda(1) = 2a_\lambda^{(1)}, \tag{5.178}$$

jer je $\lambda$ vezanje četiri polja za koje vrijedi $\rho_\lambda = 2$. Iz prethodnog izraza direktno slijedi $\beta$-funkcija za Higgsovu konstantu $\lambda$ na nivou jedne petlje:

$$\beta_\lambda = \Big(24\lambda^2 - \lambda(\frac{9}{5}g_1^2 + 9g_2^2) + \frac{9}{4}(\frac{3}{50}g_1^4 + \frac{1}{2}g_2^4 + \frac{1}{5}g_1^2 g_2^2) + 4\lambda Y_2(S) - 2H(S)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.179}$$

Izraz se slaže s literaturom, gdje je za direktnu provjeru potrebno uzeti u obzir da se normalizacija vezanja $\lambda$ u [16] razlikuje od one korištene u ovom radu za faktor $\lambda^{[16]}/2 = \lambda$.

Vakuumsku očekivanu vrijednost Higgsovog polja izvodimo iz renormalizacijskog faktora vlastite energije Higgsovog polja

$$\begin{aligned}Z_2^\phi &= 1 - \Big(Tr(n_c(Y_{u,d}Y_{u,d}^\dagger) + Y_e Y_e^\dagger) - 2(g^2 C_2(f,2) + g'^2\Upsilon_\phi^2)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \\ &= 1 - \Big(Y_2(S) - \frac{3}{10}g_1^2 - \frac{3}{2}g_2^2\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\end{aligned} \tag{5.180}$$

Po uzoru na [6] uvodimo anomalnu dimenziju skalarnog polja i zadržavamo se na prvom polu:

$$\gamma_\phi^{(1)} = \frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}lnZ_2^\phi = \frac{1}{2}(Z_2^\phi)^{-1}\mu\frac{d}{d\mu}Z_2^\phi. \tag{5.181}$$

Nadalje deriviramo renormalizacijski faktor koristeći lančano pravilo:

$$\gamma_\phi^{(1)} Z_2^\phi = \frac{1}{2}\sum_\ell \mu\frac{dx_\ell}{d\mu}\frac{\partial a_\phi^{(1)}}{\partial x_\ell}\frac{1}{\epsilon}, \tag{5.182a}$$

$$\gamma_\phi^{(1)}\big(1 + a_\phi^{(1)}\frac{1}{\epsilon}\big) = \frac{1}{2}\sum_\ell \big(\beta_\ell - \rho_\ell x_\ell \epsilon\big)\frac{\partial a_\phi^{(1)}}{\partial x_\ell}\frac{1}{\epsilon}. \tag{5.182b}$$

Anomalna dimenzija slijedi izdvajanjem člana uz nultu potenciju $\epsilon$-a,

$$\gamma_\phi^{(1)} = -\frac{1}{2}\sum_\ell \rho_\ell x_\ell \frac{\partial a_\phi^{(1)}}{\partial x_\ell} = \Big(\frac{1}{2}Y_2(S) - \frac{3}{2}(\frac{1}{5}g_1^2 + g_2^2)\Big)\frac{1}{(4\pi)^2}, \tag{5.183}$$

pri čemu vakuumska očekivana vrijednost evoluira u skladu sa jednadžbom [16],

$$\frac{dlnv}{dln\mu} = \gamma_{\phi}^{(1)}. \tag{5.184}$$

Time je završena renormalizacija konstanti vezanja standardnog modela na nivou jedne petlje. Doprinosi viših redova računa smetnje postaju bitno kompleksniji za direktan izračun, pa se problem rješava uporabom računalnih programa, od kojih su mnogi razvijeni upravo za ovu svrhu. Rezultati za $\beta$-funkcije standardnog modela potpuno su poznati na nivou dvije petlje [16] dok su neki poznati na tri [18] [19], pa čak i na nivou četiri petlje [20]. Teorijski izračuni korekcija u tom smislu prate sve preciznije eksperimentalne rezultate i obrnuto. Naglasak se stavlja na izračun korekcija onih procesa koji su osjetljiviji na uključivanje viših redova (kao primjerice Higgsova masa).

## *5.7 MSSM i ujedinjenje konstanti vezanja*

Standardni model matematički je samokonzistentna i renormalizabilna teorija, kao što smo pokazali na nivou jedne petlje. Svakako, danas ga shvaćamo kao efektivnu teoriju polja relevantnu na manjim skalama energije. Kako je već spomenuto, standardni model nije implementirao sve opservirane fenomene poput neutrinskih oscilacija, tamne tvari i barionske asimetrije svemira. Neki od teorijskih problema su hijerarhija mase i stabilnost Higgsovog potencijala. Nadalje, poznavajući ponašanje konstanti vezanja standardnog modela na različitim skalama energije i uvrštavajući poznate eksperimentalne vrijednosti na skali Z bozona, vidjeli smo da ne postoji vrijednost energije na kojoj su sve tri konstante jednake. Ova činjenica sama po sebi nije jak argument poput gore navedenih protiv valjanosti standardnog modela budući da je diskutabilno da bi li teorija koja valjano opisuje prirodu zaista trebala biti jedinstvena. Ipak, uzimajući u obzir primjere poput ujedinjenja elektromagnetizma i elektroslabe sile, razumno je pretpostaviti da bi ujedinjenje interakcija bilo svojstvo koje bi išlo u prilog nekoj teoriji.
Prirodna ekstenzija standardnog modela je tzv. minimalni supersimetrični standardni model. Iako do današnjeg dana nemamo eksperimentalnu potvrdu postojanja supersimetrija, njihovo uvođenje objasnilo bi većinu gore navedenih otvorenih problema. S druge strane, supersimetrije se temelje na izuzetno jakim teorijskim argumentima. Iz teorije polja dobro je poznato da čestice koje poštuju Bose-Einsteinovu statistiku zadovoljavaju određene komutacijske relacije, a one koje poštuju Fermi-Diracovu statistiku antikomutacijske relacije. Iz tog su razloga konstruirane generalizirane Lieve algebre koje sadrže komutatore i antikomutatore, koje nazivamo superalgebre ili gradirane Lieve algebre [21]. Razlog zašto se supersimetrični modeli smatraju dobrim kandidatima za fizikalne teorije leži velikim dijelom u Haag-Sohnius-Lopuszanski teoremu koji kaže da je supersimetrična algebra jedina gradirana Lieva algebra simetrija S-matrice konzistentna s relativističkom kvantnom teorijom polja.

Uključivanje minimalnog broja supersimetričnih čestica u standardni model rezultiralo je minimalnim supersimetričnim standardnim modelom (MSSM). Svakoj čestici SM-a pridružen je njezin superpartner: svakom fermionu pridružen je njegov bozon i obrnuto. Dodatno, uveden je zbog holomorfnosti superpotencijala još jedan Higgsov dublet. U prethodnom poglavlju izračunali smo koeficijente $b_i$ koji određuju ponašanje efektivnih konstanti vezanja:

$$b_1^{SM} = -\frac{1}{10} - \frac{2}{3}n_f = -\frac{41}{10}, \tag{5.185a}$$

$$b_2^{SM} = \frac{43}{6} - \frac{2}{3}n_f = \frac{19}{6}, \tag{5.185b}$$

$$b_3^{SM} = 11 - \frac{2}{3}n_f = 7. \tag{5.185c}$$

Po uzoru na općenite relacije za SM (5.159) uvodimo [15]

$$b_1^{MSSM} = -\frac{1}{2}n_f - \frac{3}{10}n_s, \tag{5.186a}$$

$$b_N^{MSSM} = 3N - \frac{1}{2}n_f - \frac{1}{6}n_s, \tag{5.186b}$$

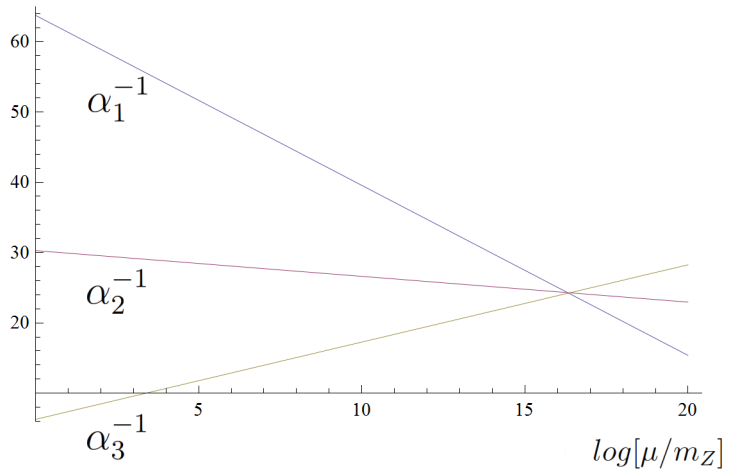
iz čega poznavajući čestični sastav MSSM-a izvodimo

$$b_1^{MSSM} = -\frac{1}{2}n_f - \frac{3}{10}n_s = -\frac{33}{5}, \tag{5.187a}$$

$$b_2^{MSSM} = 6 - \frac{1}{2}n_f - \frac{1}{2}n_s = -1, \tag{5.187b}$$

$$b_3^{MSSM} = 9 - \frac{1}{2}n_f = 3. \tag{5.187c}$$

Uvrštavanjem eksperimentalnih vrijednosti iz [17] za $sin^2\theta_W(m_Z)$ i $\alpha(m_Z)$ i uvrštavajući ih u (5.163), te vrijednosti za $\alpha_s(m_Z)$, ispitujemo evoluciju konstanti vezanja prema općenitom rezultatu (5.162). Pripadajući graf prikazan je na slici 5.34.




Slika 5.34: Ovisnost konstanti vezanja MSSM-a o skali $\mu$

U MSSM-u ujedinjenje konstanti vezanja prirodno proizlazi iz teorije na $m_U \approx 10^{16}$ GeV-a. Sada postavljamo pitanje koja natkrivajuća grupa stoji iza jedinstvene vrijednosti konstante vezanja na toj skali. Ovakva nastojanja objedinjena su pod kraticom GUT (eng. *Grand Unified Theories*). Jedan od najpoznatijih kandidata za GUT je Georgi-Glashow SU(5) model uveden 1974. Unatoč činjenici da je SU(5) razuman kandidat, sam model pretpostavio je raspad protona i predvidio pogrešnu vrijednost za $sin^2\theta_W$ [22]. Spomenimo još da je reskaliranje (5.151) proizišlo iz pretpostavke da je standardni model dio neke natkrivajuće grupe, zbog čega svi generatori moraju biti normalizirani na isti način; to implicira da normalizacija generatora hipernaboja nije proizvoljna. Teorijski pokušaji pronalaska natkrivajuće grupe rezultirali su velikim brojem modela, bilo da se radi o grupi koja natkriva SU(5), kao što je primjerice SO(10), dok su s druge strane uvedene supersimetrije. Pokušaj implementiranja gravitacije doveo je do razvoja teorije struna. Svakako, ispostavilo se da se u modelima koji zahtijevaju ujedinjenje nužno moraju uvoditi novi stupnjevi slobode, koji se moraju eksperimentalno potvrditi. U teorijskom smislu takve teorije trebale bi objasniti mehanizme lomljenja simetrija i reproducirati fiziku na eksperimentu dostupnim skalama.

# 6 Zaključak

U perturbativnoj kvantnoj teoriji polja javljaju se UV-divergencije, koje predstavljaju parametrizaciju ovisnosti o kvantnim fluktuacijama na visokim prijenosima impulsa. Nakon otkrića UV-divergencija smatralo se da ih se može eliminirati tek promjenom fundamentalnih fizikalnih principa; nakon gotovo dvadeset godina uvedena je renormalizacija koja je davala konačne i fizikalne rezultate, apsorbirajući divergencije u redefiniciju fizikalnih veličina. Nakon tehničkog ovladavanja renormalizacijom smatralo se da je riječ o *ad hoc* proceduri čija kredibilnost leži isključivo u činjenici da reproducira fizikalne rezultate. Tek je uvođenjem renormalizacijske grupe renormalizacija dobila status samokonzistentnog mehanizma koji veže fiziku na različitim skalama. Renormalizacija teoriju održava fizikalnom tako da promjenu skale kompenzira promjenom parametara teorije. Naizgled tehnički zahvati otklanjanja beskonačnosti u principu poštuju načelo da se u izračunu procesa na nekoj energiji moraju isključiti stupnjevi slobode koji doprinose tek na višim energijama.

Renormalizacijska grupa primjenjena je na QED, QCD i SM. Divergencije su se tretirale renormaliziranom perturbacijskom teorijom; nakon razdvajanja lagranžijana na renormalizirani dio i dio sa kontračlanovima te postavljanja renormalizacijskih uvjeta, divergentni doprinosi tretirali su se dimenzionalnom regularizacijom, u MS-shemi. Primjenom renormalizirane perturbacijske teorije na QED, QCD i SM pronašle su se veze između golih i renormaliziranih parametara teorije te Wardovi identiteti za Abelove i Slavnov-Taylorovi identiteti za Yang-Millsove teorije. Izračunale su se korekcije na nivou jedne petlje za dijagrame vlastitih energija i vrhova. Sve navedene teorije su renormalizabilne; bez obzira na složenost struktura u amplitudama, ispostavilo se da su korekcije bez iznimke proporcionalne svojim strukturama u nultom redu računa smetnje. Izračunale su se $\beta$-funkcije za ove modele i pronašle ovisnosti konstanti vezanja o energiji. U standardnom modelu to uključuje tri osnovne konstante vezanja, Yukawin i Higgsov sektor.

Ispitala se mogućnost ujedinjenja u standardnom modelu. Evolucijom triju osnovnih konstanti vezanja ispostavilo se da ne postoji točka ujedinjenja, nego trokut na $10^{13} - 10^{17}$ GeV-a. Postupak je ponovljen za minimalni supersimetrični standardni model, koji sadrži točku ujedinjenja na otprilike $10^{16}$ GeV-a.

Standardni model, iako matematički konzistentna i renormalizabilna teorija, spada u klasu efektivnih teorija polja. Zbog činjenice da ne uključuje sve opservirane fenomene, shvaća se kao niskoenergetski limes neke fundamentalnije teorije, ili drugim riječima grupa $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ dio je neke veće, natkrivajuće grupe. Osim odgovora na pitanje o kojoj se grupi radi, potrebno je i objasniti mehanizme loma simetrije koji točno reproduciraju standardni model u limesu niskih energija. Kakva god bila buduća nastojanja, renormalizacijska grupa i dalje ostaje metoda od ključne važnosti za testiranje novih modela i ekstenzija na fiziku visokih energija.

# Dodaci

## Dodatak A Osnovni alati u računanju amplituda

### *A.1 Feynmanova parametrizacija*

U računu amplituda često se pojavljuju više potencije propagatora u nazivniku koje se svode na jednostavnije izraze koje je lako integrirati po pravilu Feynmanove parametrizacije [5]

$$\frac{1}{A_1...A_n} = (n-1)! \int_0^1 ... \int_0^1 dx_1...dx_n \frac{\delta(x_1 + ... + x_n - 1)}{(x_1A_1 + ... + x_nA_n)^n}. \tag{A.1}$$

### *A.2 Wickova rotacija*

Wickovu rotaciju potrebno je provesti jer podintegralni izraz u prostoru Minkowskog nema simetriju nulte i ostalih komponenti impulsa. Jedan od načina je da redefiniramo integraciju u euklidskom prostoru uvodeći

$$l^2 = -l_E^2, \tag{A.2a}$$

$$d^4l = id^4l_E, \tag{A.2b}$$

te se granice integracije prebace u interval $(-\infty, \infty)$.

### *A.3 Dimenzionalna regularizacija*

Ideja dimenzionalne regularizacije jest izračunati Feynmanov dijagram kao analitičku funkciju dimenionalnosti $D$, gdje će za dovoljno mali $D$ integrali s petljama konvergirati i vrijedi Wardov identitet [4]. Konačni izrazi moraju biti dobro definirani u limesu $D \to 4$.

Integrali s neparnim brojem 4-impulsa $l$ s nepokontrahiranim indeksom u brojniku iščezavaju za nazivnike parne u 4-impulsu ako se integrira po simetričnim intervalima integracije, što je svojstvo koje eliminira određene članove koji se pojavljuju u računima.

Vrijede kontrakcije

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D, \tag{A.3a}$$

$$\int d^4l l_\mu l_\nu = \int d^4l \frac{1}{D} l^2 g_{\mu\nu} \tag{A.3b}$$

Za integrale koji proizlaze iz dimenzionalne regularizacije vrijede jednakosti [4]

$$\int \frac{d^Dl_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \Big(\frac{1}{\Delta}\Big)^{n-\frac{D}{2}}, \tag{A.4}$$

$$\int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{l_E^2}{(l_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(n-1-\frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \Big(\frac{1}{\Delta}\Big)^{n-1-\frac{D}{2}}, \tag{A.5}$$

te se $\Gamma$-funkcija razvija preko [5]

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!}\Big(\frac{1}{\epsilon} + 1 + ... + \frac{1}{n} - \gamma\Big) \tag{A.6}$$

i pomoću

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma. \tag{A.7}$$

Za izračun beta funkcija u obzir se uzima samo doprinos $1/\epsilon$, odnosno pol prvog reda.

# Dodatak B Feynmanova pravila

U ovom dodatku popisat ćemo Feynmanova pravila relevantna za izračun dijagrama s jednom petljom, što uključuje propagatore i vrhove. Svi propagatori baždarnih bozona dani su u Feynmanovom baždarenju, primjerice za fotonski propagator

$$iD_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2}\Big(g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big), \quad \xi_{FG} = 1. \tag{B.8}$$

Svaka fermionska petlja sadrži (-). Općenito ćemo bozonske (uključujući duhove) i fermionske propagatore označavati redom s $D$ i $S$, a vrhove sa $V(a, ...)$. Vanjske linije vrha numeriramo obrnuto od kazaljke na satu.

## *B.1 Kvantna elektrodinamika (QED)*

Zadani su redom fotonski i fermionski propagator te jedini vrh:

$$D_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}, \tag{B.9a}$$

$$S_e(\not{p}) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}, \tag{B.9b}$$

$$V(\bar{e}\gamma e) = -ie\gamma^\mu. \tag{B.9c}$$

## *B.2 Kvantna kromodinamika (QCD)*

Propagatori gluona, duha i kvarka zadani su sa

$$D^{ab}_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}\delta^{ab}, \tag{B.10a}$$

$$D^{ab}(p) = \frac{i}{p^2}\delta^{ab}, \tag{B.10b}$$

$$S_q(\not{p}) = \frac{i}{\not{p}-m}, \tag{B.10c}$$

dok su vrhovi zadani sa

$$
\begin{aligned}
V(\bar{q}gq) &= -ig\gamma^{\mu}T^{a}, && \text{(B.11a)}\\
V(\bar{c}gc) &= gp^{\mu}f^{abc}, && \text{(B.11b)}\\
V(ggg) &= gf^{abc}\big(g_{\mu\nu}(p_2-p_1)_{\rho} && \text{(B.11c)}\\
&\quad +g_{\nu\rho}(p_3-p_2)_{\mu}+g_{\rho\mu}(p_1-p_3)_{\nu}\big),\\
V(gggg) &= -ig^2\big(f^{abc}f^{ade}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) && \text{(B.11d)}\\
&\quad +f^{abd}f^{ace}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})\\
&\quad +f^{abe}f^{acd}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}-g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})\big).
\end{aligned}
$$

## *B.3 Standardni model (SM)*

U standardnom modelu zanemarujemo mase propagatora. Slijede propagatori za baždarne bozone, duhove i Higgsa:

$$
\begin{aligned}
D^{B}_{\mu\nu}(k) &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}, && \text{(B.12a)}\\
D^{W,ab}_{\mu\nu}(k) &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}\delta^{ab}, && \text{(B.12b)}\\
D^{G,AB}_{\mu\nu}(k) &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}\delta^{AB}; && \text{(B.12c)}\\
D^{c_W}_{ab}(p) &= \frac{i\delta_{ab}}{p^2}, && \text{(B.12d)}\\
D^{c_G}_{AB}(p) &= \frac{i\delta_{AB}}{p^2}; && \text{(B.12e)}\\
D^{\phi}_{\alpha\beta}(p) &= \frac{i\delta_{\alpha\beta}}{p^2}. && \text{(B.12f)}
\end{aligned}
$$

Fermionski propagatori redom za kvarkove i leptone dani su sa

$$
\begin{aligned}
S^{ij,\alpha\beta}_{q_L}(\not{p}) &= P_L\frac{i}{\not{p}}P_R\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}, && \text{(B.13a)}\\
S^{ij}_{u_R}(\not{p}) &= P_R\frac{i}{\not{p}}P_L\delta_{ij}, && \text{(B.13b)}\\
S^{ij}_{d_R}(\not{p}) &= P_R\frac{i}{\not{p}}P_L\delta_{ij}; && \text{(B.13c)}\\
S^{ij,\alpha\beta}_{\ell_L}(\not{p}) &= P_L\frac{i}{\not{p}}P_R\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}, && \text{(B.13d)}\\
S^{ij}_{e_R}(\not{p}) &= P_R\frac{i}{\not{p}}P_L\delta_{ij}. && \text{(B.13e)}
\end{aligned}
$$

Vrhovi samointerakcija SU(2) i SU(3) baždarnih bozona glase:

$$
\begin{aligned}
V(3W) &= g\epsilon^{abc}\big(g_{\mu\nu}(p_2-p_1)_{\rho}+g_{\nu\rho}(p_3-p_2)_{\mu}+g_{\rho\mu}(p_1-p_3)_{\nu}\big), && \text{(B.14a)}\\
V(3G) &= g_s f^{ABC}\big(g_{\mu\nu}(p_2-p_1)_{\rho}+g_{\nu\rho}(p_3-p_2)_{\mu}+g_{\rho\mu}(p_1-p_3)_{\nu}\big), && \text{(B.14b)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(4W) = -ig^2 \quad & \big(\epsilon^{abc}\epsilon^{ade}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \\
& +\epsilon^{abd}\epsilon^{ace}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}) \\
& +\epsilon^{abe}\epsilon^{acd}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})\big), \qquad \text{(B.15a)} \\
V(4G) = -ig_s^2 \quad & \big(f^{ABC}f^{ADE}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \\
& +f^{ABD}f^{ACE}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}) \\
& +f^{ABE}f^{ACD}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})\big). \qquad \text{(B.15b)}
\end{aligned}
$$

Vrhovi baždarnih bozona s duhovima i fermionima zadani su Feynmanovim pravilima:

$$
\begin{aligned}
V(\bar{c}_W W c_W) &= gp^\mu \epsilon^{abc}, && \text{(B.16a)} \\
V(\bar{c}_G G c_G) &= gp^\mu g^{ABC}, && \text{(B.16b)} \\
V(\bar{q}_L B q_L) &= -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{q_L}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}, && \text{(B.16c)} \\
V(\bar{q}_L W q_L) &= -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta}\delta_{ij}, && \text{(B.16d)} \\
V(\bar{q}_L G q_L) &= -ig_s\gamma^\mu P_L T^A\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}, && \text{(B.16e)} \\
V(\bar{u}_R B u_R) &= -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{u_R}\delta_{ij}, && \text{(B.16f)} \\
V(\bar{u}_R G u_R) &= -ig_s\gamma^\mu P_R T^A\delta_{ij}, && \text{(B.16g)} \\
V(\bar{d}_R B d_R) &= -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{d_R}\delta_{ij}, && \text{(B.16h)} \\
V(\bar{d}_R G d_R) &= -ig_s\gamma^\mu P_R T^A\delta_{ij}, && \text{(B.16i)} \\
V(\bar{\ell}_L B \ell_L) &= -ig'\gamma^\mu P_L \Upsilon_{\ell_L}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}, && \text{(B.16j)} \\
V(\bar{\ell}_L W \ell_L) &= -ig\gamma^\mu P_L T^a_{\alpha\beta}\delta_{ij}, && \text{(B.16k)} \\
V(\bar{e}_R B e_R) &= -ig'\gamma^\mu P_R \Upsilon_{e_R}\delta_{ij}. && \text{(B.16l)}
\end{aligned}
$$

Vrhovi Higgsovog bozona s fermionima dani su sa

$$
\begin{aligned}
V(\bar{q}_L \phi u_R) &= -i(Y_u)_{ij} P_R \epsilon_{\alpha\beta}, && \text{(B.17a)} \\
V(\bar{q}_L \phi d_R) &= -i(Y_d)_{ij} P_R \delta_{\alpha\beta}, && \text{(B.17b)} \\
V(\bar{\ell}_L \phi e_R) &= -i(Y_e)_{ij} P_R \delta_{\alpha\beta}. && \text{(B.17c)}
\end{aligned}
$$

Za vrhove samointerakcije Higgsovog bozona i interakcije Higgsa s baždarnim bozonima vrijede pravila:

$$
\begin{aligned}
V(2\phi) &= i\mu^2\delta_{\alpha\beta}, && \text{(B.18a)} \\
V(4\phi) &= -2i\lambda(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}), && \text{(B.18b)} \\
V(\phi^\dagger B \phi) &= -ig'\Upsilon_\phi (p_1 + p_2)^\mu \delta_{\alpha\beta}, && \text{(B.18c)} \\
V(\phi^\dagger W \phi) &= -ig(p_1 + p_2)^\mu T^a_{\alpha\beta}, && \text{(B.18d)} \\
V(\phi^\dagger B B \phi) &= 2ig'^2 \Upsilon^2_\phi g_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}, && \text{(B.18e)} \\
V(\phi^\dagger W B \phi) &= 2igg'\Upsilon_\phi g_{\mu\nu} T^a_{\alpha\beta}, && \text{(B.18f)}
\end{aligned}
$$

$$V(\phi^\dagger WW\phi) \quad = 2ig^2 g_{\mu\nu}(T^a T^b)_{\alpha\beta}. \tag{B.18g}$$

Za trovrhove samointerakcije baždarnih bozona svi su impulsi ulazni. Za vrhove duhova s baždarnim bozonima $p$ je impuls izlaznog duha. Za interakcije Higgsa s baždarnim bozonima $p_1$ je impuls izlaznog Higgsa.

# Dodatak C SU(N) algebra

SU(N) generatori općenito zadovoljavaju komutacijsku relaciju

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \tag{C.19}$$

gdje su $f^{abc}$ izabrane da budu realne, antisimetrične strukturne konstante normalizirane prema uvjetu

$$f^{acd}f^{bcd} = C_2(G,N)\delta^{ab}. \tag{C.20}$$

Faktor $C_2(G,N) = N$ je svojstvena vrijednost Casimirove invarijante za regularnu reprezentaciju. U izrazu

$$T^a T^a = C_2(f,N) = \frac{N^2-1}{2N}, \tag{C.21}$$

faktor $C_2(f,N)$ je svojstvena vrijednost Casimirove invarijante za fundamentalnu reprezentaciju. Za tragove generatora vrijede relacije:

$$Tr(T^a) = 0, \tag{C.22a}$$
$$Tr(T^a T^b) = C(f)\delta^{ab}, \tag{C.22b}$$
$$Tr(T^a, T^b, T^c) = \tfrac{i}{2}C(f)f^{abc}, \tag{C.22c}$$
$$Tr([T^a, T^b]T^c) = iC(f)f^{abc}. \tag{C.22d}$$

$C(f)$ je Dykinov indeks za fundamentalnu reprezentaciju i iznosi $1/2$. Regularna reprezentacija dimenzije $N^2-1$ je definirana matricama $(T^a)^{bc} = -if^{abc}$. Strukturne konstante zadovoljavaju Jacobijev identitet:

$$f^{abe}f^{cde} + f^{ace}f^{dbe} + f^{ade}f^{bce} = 0 \tag{C.23}$$

Za SU(2) za generatore, u fundamentalnoj reprezentaciji, biramo tri Paulijeve, a za SU(3) osam Gell-Mannovih matrica.

# Literatura


[1] Pascual P. ; Tarrach R. *Lecture Notes in Physics; QCD: Renormalization for the Practioner*
1st ed. Munich : Springer 1984

[2] Weinberg, S. *The Quantum Theory of Fields, Volume II, Modern Aplications*
1st ed. New York: Cambridge University Press 1996

[3] Weinberg, S. *The Quantum Theory of Fields, Volume I, Foundations*
1st ed. New York: Cambridge University Press 1995

[4] Peskin M. ; Schroeder D. *An Introduction To Quantum Field Theory*
Addison-Wesley 1995

[5] Radovanović, V. *Problem Book in Quantum Field Theory*
2nd Edition: Springer 2008

[6] Machacek ; Vaughn: *Two-loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory I. Wave Function Renormalization*
Nucl. Phys. B 222(1983) 83

[7] F. Bloch ; A. Nordsieck. *Note on the Radiation Field of the Electron*
Phys. Rev. 52 (1937) 54

[8] Weinberg, S. *Infrared photons and gravitons*
Phys.Rev. 140 (1965) B516-B524

[9] The L3 Collaboration. *Measurement of the Running of the Fine-Structure Constant*
Phys.Lett.B476:40-48 (2000)

[10] Ilakovac A. *Skripta iz kolegija Kvantna teorija polja*
http://www.phy.pmf.unizg.hr/∼ailakov/ (5.7.2016.)

[11] Muta T. *Foundations of Quantum Chromodynamics*
1st ed. Singapore: World Scientific 1987

[12] Flicker F. *Faddeev-Popov ghosts*
http://www.felixflicker.com/pdf/Ghosts.pdf (13.7.2016.)

[13] Deur A. ; Brodsky S. ; de Teramond G. *The QCD Running Coupling*
http://arxiv.org/pdf/1604.08082v2.pdf (30.7.2016.)

[14] Teubner T. *The Standard Model*
http://www.ppd.stfc.ac.uk/ppd/resources/pdf/StandardModel09.pdf
(3.8.2016.)

[15] Peskin M. *Beyond The Standard Model*
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9705479v1 (21.8.2016.)

[16] Ramond P. et al. *Renormalization group study of the standard model and its extensions: The standard model*
Phys. Rev. D 46(1992), 3945

[17] Particle Data Group. *Physical Costants*
http://pdg.lbl.gov/2014/reviews/rpp2014-rev-phys-constants.pdf
(22.8.2016.)

[18] Bednyakov A. V. ; Pikelnera A. F. ; Velizhaninb V. N. *Anomalous dimensions of gauge fields and gauge coupling beta-functions in the Standard Model at three loops*
arXiv:1210.6873 (2013)

[19] Mihaila L. N. ; Salomon J. ; Steinhauser M. *Renormalization constants and beta functions for the gauge couplings of the Standard Model to three-loop order*
http://arxiv.org/pdf/1208.3357.pdf (30.8.2016.)

[20] Kataev A. L. ; Molokoedov V. S. *The four-loop renormalization group QCD and QED ß-functions in the V-scheme and their analogy with the Gell-Mann–Low function in QED and QCD*
arXiv:1504.06571 (2015)

[21] Wess J. ; Bagger J . *Supersymmetry and Supergravity*
Revised Edition: Princeton University Press 1992

[22] Georgi H: ; Glashow S. L. *Unity of All Elementary-Particle Forces*
Phys. Rev. Lett. 32, 438 (1974)