

Dopplerov efekt u ubrzanom sustavu i određivanje ubrzanja izvora zvuka

Prević, Fabijan

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:035598>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-25**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Fabijan Prević

DOPPLEROV EFEKT U UBRZANOM SUSTAVU I
ODREĐIVANJE UBRZANJA IZVORA ZVUKA

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: NASTAVNIČKI SMJER FIZIKE I INFORMATIKE

Fabijan Prević

Diplomski rad

**Dopplerov efekt u ubrzanom sustavu i
određivanje ubrzanja izvora zvuka**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Nikola Poljak

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2016.

Ovom se prigodom zahvaljujem svojim roditeljima i obitelji na velikoj i potpunoj podršci, kako inspirativnoj tako i financijskoj, kojom su mi omogućili ovaj prekrasni studij, kao i uzbudljive studentske dane.

Zahvaljujem se svom mentoru Nikoli Poljaku na iznimnoj susretljivosti, ležernoj dobroćudnosti te znatnoj profesionalnosti koju je samnom podijelio.

Također sam neizmjereno zahvalan Maji za svu radost i snagu koju mi je pružila, ali i za sve dragocjene doživljaje zajedništva, potpore i uzdignuća.

Konačno, zahvaljujem se svojim prijateljima na svem razumijevanju i veselju koje nas je uzajamno poticalo te neprimjetno, ali snažno bođrilo da nastavimo dalje.

Sažetak

Tijekom studija i u srednjoj školi Dopplerov efekt se obrađuje i matematički opisuje za specifičan slučaj kad se izvor zvuka i opažatelj gibaju konstantnim relativnim brzinama. U ovom diplomskom radu će se pokušati opisati slučaj kad ta brzina nije konstantna, već se mijenja u vremenu. Konkretnije; razmotrit će se slučaj kad izvor zvuka jednoliko ubrzava, a opažatelj miruje. U skladu s tim pokušat će se teorijski predvidjeti kako se frekvencija koju registrira opažatelj mijenja za vrijeme ubrzavanja izvora zvuka, a zatim isto i eksperimentalno provjeriti te usporediti teorijsko predviđanje s dobivenim eksperimentalnim podacima. Pri eksperimentalnoj realizaciji je za uzrok jednoliko ubrzanog gibanja odabrana isključivo jedna sila, naime, gravitacijska sila. Budući da neke sile poput otpora zraka i sl. nisu mogle biti eksperimentalno eliminirane, akceleracija izvora zvuka nije mogla biti jednaka akceleraciji slobodnog pada, odnosno $9,81 \text{ m/s}^2$, već je neizbježno morala biti nešto manja. Iz tog razloga se uz analizu zvuka provodila i analiza videozapisa akcelerirajućeg izvora zvuka, a iz koje je potom određena najvjerojatnija stvarna akceleracija izvora zvuka. Konačno, u ovom će se radu usporediti dobivene akceleracije izvora zvuka kao rezultati analiza videozapisa te zvučnog zapisa s pretpostavkom veće točnosti rezultata dobivenog analizom videozapisa te ocijeniti kakvoća analize Dopplerovog efekta za određivanje akceleracije jednoliko ubrzanog tijela.

The Doppler effect in an accelerated system and determining the acceleration of a sound source

Abstract

In secondary school and college physics courses the Doppler effect is studied and calculated in a specific case in which a sound source and observer are moving at a constant relative velocity. This thesis will try to describe the case in which the velocity is not constant but changes with time. More precisely, it will analyze the case of a uniformly accelerated sound source and a stationary observer. In accordance with that, the thesis will try to theoretically predict the changes in frequency measured by the observer during the acceleration of the sound source. This prediction will then be experimentally verified and the obtained data will be compared to the theoretical prediction. There is only one cause of uniformly accelerated motion of the sound source in our experimental setup: gravity. Considering the fact that air resistance and other disturbances could not be experimentally eliminated, inevitably the sound source acceleration had to be below the free fall acceleration of $9,81 \text{ m/s}^2$. For that reason, the video material with the falling sound source was examined alongside sound analysis to determine the most likely actual acceleration. Finally, this paper will compare the sound source accelerations obtained by both sound and video analyses, which accounts for greater accuracy of results, and evaluate the quality of the Doppler effect analysis for determining the acceleration of a uniformly accelerated body.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Teorijska razrada Dopplerovog efekta u ubrzanom sustavu	4
2.1	Slučaj akcelerirajućeg izvora zvuka i mirujućeg prijamnika	4
2.2	Slučaj akcelerirajućeg prijamnika i mirujućeg izvora zvuka	13
2.3	Teorijska predviđanja	14
3	Eksperimentalni postav	18
4	Analiza i eksperimentalni rezultati	22
4.1	Određivanje ubrzanja zvučnika videoanalizom	22
4.2	Određivanje ubrzanja zvučnika pomoću Dopplerovog efekta	24
4.3	Analiza grešaka	29
5	Metodička obrada teme	32
6	Zaključak	38
	Dodaci	39
A	Programski kod za programski jezik C namijenjen prevođenju wav datoteke u txt datoteku	39
B	Programski kod za analiziranje zvučnog zapisa u programskom jeziku R	42

1 Uvod

U fizici Dopplerov efekt označava pojavu pri kojoj dolazi do promjene frekvencije koju registrira opažač u odnosu na frekvenciju koju proizvodi izvor valova, a uslijed relativnog gibanja izvora u odnosu na opažača. Sam efekt dobio je ime po austrijskom znanstveniku Christianu Doppleru koji ga je opisao u svom radu *O obojenoj svjetlosti dvostrukih zvijezda i nekih drugih zvijezda na nebu (Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels)* iz 1842. Doppler u svom radu razmatra slučaj kad se tijelo koje emitira valove relativno giba u odnosu na opažača koji ih registrira. Njegov zaključak je da će opažač opažati valove manje valne duljine u slučaju da se izvor giba prema njemu dok će veće valne duljine opažati ako se izvor udaljava od njega. Isto će se događati i u obratnom slučaju kad izvor miruje, a opažač se giba. Kad se opažač giba prema izvoru on opaža valove manje valne duljine, a kad se od izvora udaljava on opaža veće valne duljine. Tome je tako jer je bitna samo relativna brzina izvora i opažača. Dakako, uz pretpostavku mirujućeg medija.

U pokušaju da dokaže nepostojanje Dopplerovog efekta nizozemski meteorolog Christoph Buys-Ballot ga je 1845. pokazao u slučaju zvučnih valova. Na dionici novootvorene pruge između Utrechta i Maarssena zasvirale su dvije skupine trubača dirigitane od strane nizozemskog meteorologa. Sa zadatkom da sviraju ton es jedna se skupina nalazila na tlu, dok se druga nalazila na otvorenom vagonu. Dok je vagon mirovao svirači su, svirajući isti ton, bili ugođeni. No, kad se vlak počeo gibati svirači su počeli primjećivati kako se visina tona onih drugih svirača povisila i to tim više što bi se brzina vagona više povećala. Međutim, kad bi se vagon počeo udaljavati od svirača na tlu ton bi se snizio [6]. Ustvari je tada bila opažena pojava svima nama poznata iz svakodnevnog života, a koju opažamo pri prolasku, primjerice, policijskog vozila s upaljenom sirenom. Ta promjena visine tona posljedica je promjene valne duljine, odnosno frekvencije zvučnih valova, a koju opisuje Dopplerov efekt.

Naravno, kao što se ovaj efekt pojavljuje u slučaju zvučnih valova tako je on prisutan i kod valova drugih vrsta, primjerice elektromagnetskih valova odnosno svjetlosti. Imajući na umu upravo Dopplerov efekt te promatrajući svjetlost koja dolazi s udaljenih zvijezda veliki i najznačajniji astronom dvadesetog stoljeća Edwin Hubble podastrio je pred znanstvenu zajednicu rezultate svojih astronomskih opažanja koji upućuju na širenje Svemira i zapravo su prvi dokaz teorije Velikog praska [6]. Iz ovog primjera je vidljivo da je Dopplerov efekt izuzetno značajan i općenito bitan u fizici pa se tako osim u astronomiji koristi i u medicinskoj fizici, primjerice pri ultrazvučnoj dijagnostici srca i krvnih žila, a kao zanimljivost neka bude spomenuto da se Dopplerovim efektom koriste šišmiši pri orijentaciji u letu [5].

Dopplerov efekt se može i matematički opisati, a to je već učinio i sam Doppler 1842. On je izveo formulu koja opisuje frekvenciju koju registrira opažač ako postoji relativno gibanje izvora zvuka i opažača. Prva situacija pri kojoj se efekt uočava je kad opažač miruje, a izvor zvuka se giba stalnom brzinom po spojnici izvor-opažač. Izvor

zvuka može se približavati opažaču kad opažatelj opažava povišenu frekvenciju ili udaljavati od opažatelja te u tom slučaju opažatelj opažava sniženu frekvenciju. Jednostavan je izvod formule koja opisuje frekvenciju koju opažatelj opažatelj. Uzmimo slučaj kad se izvor približava opažatelju nekom konstantnom brzinom v_i . Duljina između uzastopno emitiranih valnih fronti, odnosno valna duljina na onoj strani od izvora prema kojoj izvor putuje bit će kraća za put što ga izvor prijeđe u jednom titrajnom periodu koji je jednak $\frac{1}{f_i}$, pri čemu je f_i frekvencija zvuka koji izvor proizvodi. Dakle, smanjena valna duljina koja dolazi do opažatelja bit će $\lambda_0 - \frac{v_i}{f_i}$, pri čemu razlomak predstavlja put koji izvor prijeđe za vrijeme jednog titrajnog perioda. Iz formule za brzinu zvučnog vala $v_z = f\lambda$ dobivamo da je frekvencija koju opažatelj opažatelj jednaka omjeru brzine vala u sredstvu i valne duljine dolazećeg vala, odnosno $f_p = \frac{v_z}{\lambda}$, pri čemu f_p , kao što će biti i ubuduće u ovom radu, označava frekvenciju koju opažatelj opažatelj (indeks 'p' dolazi od riječi 'prijamnik'). Iz iste formule možemo izraziti valnu duljinu vala mirujućeg izvora dobivši $\lambda_0 = \frac{v_z}{f_i}$ kojom spomenuta smanjena valna duljina postaje $\frac{v_z}{f_i} - \frac{v_i}{f_i}$. Izlučimo li iz potonjeg izraza f_i te uvrstimo cijeli izraz kao smanjenu valnu duljinu u formulu za frekvenciju koju opažatelj opažatelj dobit ćemo $f_p = \frac{v_z}{\frac{1}{f_i}(v_z - v_i)}$, odnosno

$$f_p = \frac{v_z}{v_z - v_i} f_i. \quad (1.1)$$

Analognim bi se postupkom za slučaj udaljšavanja izvora zvuka od opažatelja dobio izraz

$$f_p = \frac{v_z}{v_z + v_i} f_i \quad (1.2)$$

za frekvenciju koju opažatelj opažatelj. Stopivši posljednje dvije jednadžbe u jednu dobije se općenitiji izraz

$$f_p = \frac{v_z}{v_z \mp v_i} f_i \quad (1.3)$$

u kojem predznak $-$ vrijedi za slučaj kad se izvor približava opažatelju, a predznak $+$ za slučaj kad se izvor udaljšava od opažatelja.

Također je jednostavan izvod za situaciju kad izvor miruje, a opažatelj se giba nekom konstantnom brzinom v_p . Tad se uz to što se zvučni val širi sredstvom još i opažatelj giba u odnosu na sredstvo. Relativna brzina zvučnog vala i opažatelja bit će vektorska razlika njihovih brzina, a njen iznos će biti $v_z + v_p$ ako su im smjerovi brzina suprotni, odnosno $|v_z - v_p|$ ako su im smjerovi jednaki. Drugim riječima, relativna brzina je $v_z \pm v_p$ gdje predznak $+$ vrijedi kad se opažatelj približava izvoru, a $-$ kad se udaljšava. Frekvencija koju opažatelj opažatelj će biti omjer brzine kojom val dolazi do opažatelja i valne duljine vala, $f_p = \frac{v_z \pm v_p}{\lambda}$. Valna duljina vala je jednaka omjeru brzine kojom se on širi u sredstvu i frekvencije svog izvora $\lambda = \frac{v_z}{f_i}$. Uvrstimo

li posljednji izraz u pretposljednji dobivamo $f_p = \frac{v_z \pm v_p}{\frac{v_z}{f_i}}$, odnosno

$$f_p = \frac{v_z \pm v_p}{v_z} f_i, \quad (1.4)$$

pri čemu predznak $+$ vrijedi kad se opažač približava izvoru, a $-$ kad se udaljava. Uzevši u obzir 1.3 i 1.4, slijedi:

$$f_p = \frac{v_z \pm v_p}{v_z \mp v_i} f_i, \quad (1.5)$$

pri čemu gornji predznaci vrijede u slučaju približavanja, a donji u slučaju udaljavanja. Ova formula vrijedi za slučaj kad se gibaju i izvor zvuka i opažač, a zove se *Dopplerova formula*.

Spomenimo da za vrlo općenit slučaj kad vektori brzina izvora i opažača više nisu kolinearni vrijedi najopćenitiji oblik Dopplerove formule

$$f_p = \frac{v_z - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_p}{v_z - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_i}, \quad (1.6)$$

pri čemu je $\vec{r}_0$ jedinični vektor usmjeren od izvora zvuka prema opažaču.

Primjetimo da svi opisani slučajevi vrijede isključivo za situacije kad su brzine izvora i opažača konstantne u vremenu, odnosno kad ni izvor zvuka ni opažač nemaju akceleraciju. Za slučaj kad brzina više nije konstantna, već se mijenja u vremenu vrijedit će potpuno izmjenjene formule, a one će se nadalje teorijski izvesti te zatim eksperimentalno provjeriti u ovom diplomskom radu.

2 Teorijska razrada Dopplerovog efekta u ubrzanom sustavu

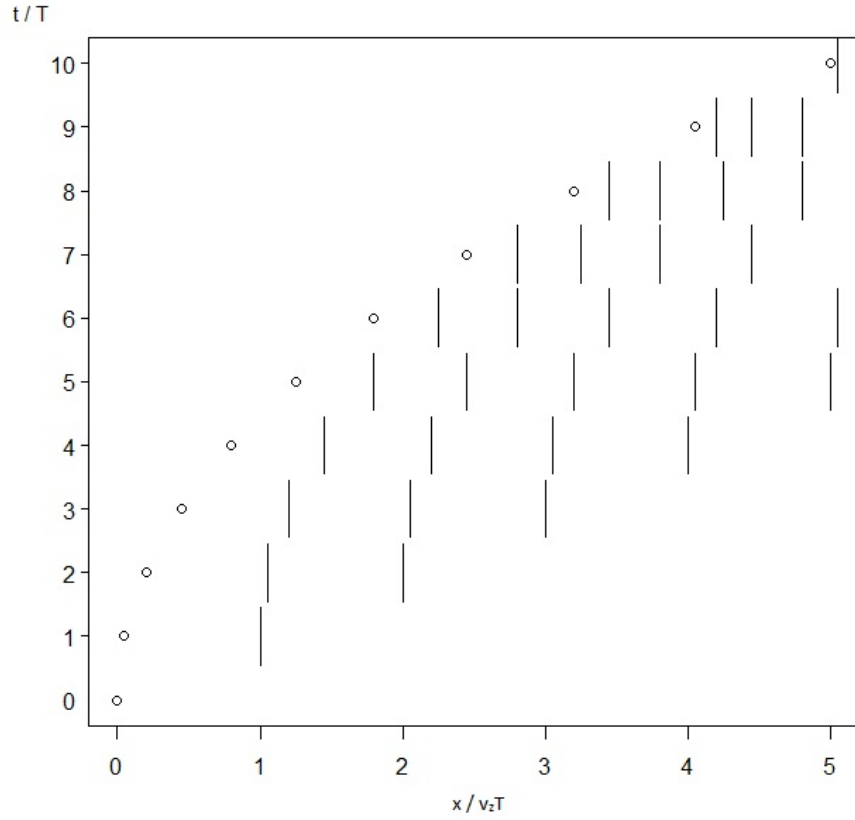
U ovom će se poglavlju teorijski razmotriti slučajevi u kojima ili izvor zvuka ili prijamnik (opažač) ima konstantnu akceleraciju, odnosno kreće se jednoliko ubrzano. Budući da je slučaj mirnog prijarnika (opažača) i akceleriranog izvora zvuka zanimljiviji (ali i opsežniji) za teorijsku razradu, kao i rezultat koji njome proizlazi, tom je slučaju pridodana veća pažnja te prepušten veći sadržajni prostor u odnosu na druge slučajeve. Isto tako, eksperiment koji je proveden i čiji podaci su analizirani spada u slučaj akcelerirajućeg izvora zvuka i mirnog prijarnika pa je to još jedan razlog pridavanja veće pažnje tom slučaju. Također će teorijska predviđanja, iz istog razloga, biti usmjerena isključivo prema navedenom specifičnom slučaju.

2.1 Slučaj akcelerirajućeg izvora zvuka i mirujućeg prijarnika

Izvor zvuka se približava prijarniku

Zamislimo izvor zvučnih valova koji kreće iz mirovanja te ima akceleraciju a . Neka taj izvor proizvodi zvuk u vremenu konstantne frekvencije f_i i takav da se može opisati sinusoidom. Tad se periodična pojava zbijanja i razrijeđenja čestica zraka iz izvora emitira nakon svakog vremenskog intervala duljine jednog perioda T pri čemu vrijedi $T = \frac{1}{f_i}$. Proizvedeni zvuk se dalje širi kroz sredstvo brzinom v_z . Budući da je brzina zvuka u sredstvu konstantna u vremenu, a brzina izvora se tokom vremena povećava, razlika putova koje u jednom intervalu vremena T naprave jedna emitirana valna fronta i sam izvor zvuka biti će sve manja i manja kako vrijeme prolazi, odnosno kako izvor zvuka ima sve veću brzinu. Drugim riječima, valna duljina emitirajućeg zvučnog vala će se skraćivati u vremenu što će za posljedicu imati da se na prijarniku uočava zvuk u vremenu rastuće frekvencije. Naš zadatak je pronaći matematički izraz za frekvenciju zvuka detektiranog na prijarniku u ovisnosti o vremenu.

Najelementarnije, možemo promatrati opisanu problematiku u nekoliko prvih trenutaka od početka gibanja izvora pri čemu je emitirano tek nekoliko valnih duljina. Situacije tih nekoliko prvih trenutaka, točnije njih 11, prikazane su na slici 2.1. Na slici je, dakle, prikazano 11 trenutaka međusobno razmaknutih za jedan period T . Također se može prepoznati kružić koji predstavlja izvor te veći broj vertikalnih linija koje predstavljaju valne fronte. Situacija u vremenu $t = 0$ prikazana je na dnu slike dok je situacija u vremenu $t = 10T$ prikazana na vrhu slike, a sve situacije između tih dviju prikazane su na slici kronološkim redom prema gore. Kao što je već rečeno, ali kao što se i vidi na slici 2.1, svaka slijedeća stvorena valna duljina je kraća od časkom ranije stvorene valne duljine. Iznos, odnosno dužinu tek stvorene valne duljine u nekom trenutku izračunat ćemo kao razliku putova što su ih do tada prevalili zadnje



Slika 2.1: Izvor zvuka i emitirane valne fronte.

stvorena valna fronta i izvor zvuka. Za trenutak stvaranja ćemo dogovorno odabrati čas kad je u cijelosti završeno stvaranje valne duljine, a započinje stvaranje iduće. Za prvu valnu duljinu sa slike 2.1 bi taj trenutak bio $t = T$. Promatrajući sliku 2.1 može se zaključiti da je prva stvorena valna duljina dužine čiji je iznos jednak razlici puta koji je do trenutka $t = T$ prešla valna fronta emitirana u trenutku $t = 0$ i puta koji je u tom vremenskom intervalu prešao izvor zvuka. Budući da se valna fronta giba konstantnom brzinom zvuka v_z , a izvor zvuka jednoliko ubrzano, put koji je prešla prva valna fronta iznositi će $x_1 = v_z T$, a put koji je prešao izvor zvuka iznositi će $x_i = \frac{aT^2}{2}$. Prema tome, razlika tih putova, a koja je jednaka dužini prve stvorene valne duljine, iznositi će $\Delta x_{1,i} = \lambda_1 = v_z T - \frac{aT^2}{2}$. Za drugu stvorenu valnu duljinu razmatrat ćemo putove koje su do trenutka njena nastanka $t = 2T$ prevalili druga stvorena valna fronta i izvor zvuka. Za drugu stvorenu valnu frontu možemo smatrati da se ona gibala zajedno s izvorom do trenutka $t = T$ te potom jednoliko do trenutka $t = 2T$ brzinom v_z kroz sredstvo. Prema tome će put koji je druga stvorena valna fronta prevalila iznositi $x_2 = \frac{aT^2}{2} + v_z T$, dok će put koji je do tog trenutka prevalio izvor iznositi $x_i = \frac{a(2T)^2}{2}$. Jasno, razlika tih dvaju putova, odnosno dužina druge stvorene valne duljine bit će jednaka $\Delta x_{2,i} = \lambda_2 = \frac{aT^2}{2} + v_z T - \frac{a(2T)^2}{2}$. Sličnim zaključivanjem do-

bilo bi se za dužinu treće stvorene valne duljine $\Delta x_{3,i} = \lambda_3 = \frac{a(2T)^2}{2} + v_z T - \frac{a(3T)^2}{2}$. Promotri li se veći broj valnih duljina koje se stvaraju jedna za drugom lako se uočava stanovita pravilnost. Ona je, naime, vidljiva iz tablice 2.1. Iznos n -te stvorene valne

t	λ_n
$t = 0$	ne postoji niti jedna valna duljina
$t = T$	$\lambda_1 = v_z T - \frac{aT^2}{2}$
$t = 2T$	$\lambda_2 = \frac{aT^2}{2} + v_z T - \frac{a(2T)^2}{2}$
$t = 3T$	$\lambda_3 = \frac{a(2T)^2}{2} + v_z T - \frac{a(3T)^2}{2}$
$t = 4T$	$\lambda_4 = \frac{a(3T)^2}{2} + v_z T - \frac{a(4T)^2}{2}$
$t = 5T$	$\lambda_5 = \frac{a(4T)^2}{2} + v_z T - \frac{a(5T)^2}{2}$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$t = nT$	$\lambda_n = \frac{a[(n-1)T]^2}{2} + v_z T - \frac{a(nT)^2}{2}$

Tablica 2.1: Dužina n -te stvorene valne duljine.

duljine koja je, dakle, stvorena u trenutku završetka n -tog perioda zapravo je razlika putova koje su prevalili n -ta valna duljina i izvor zvuka do trenutka $t = nT$. Taj iznos jednak je $\lambda_n = \frac{a((n-1)T)^2}{2} + v_z T - \frac{a(nT)^2}{2}$, pri čemu prva dva pribrojnika predstavljaju put koji je do trenutka $t = nT$ prešla n -ta valna fronta dok zadnji pribrojnik negativnog predznaka predstavlja put koji je do istog trenutka prešao izvor zvuka. Sad se taj izraz može raspisati i prikazati jednostavnije kao

$$\lambda_n = v_z T + \frac{aT^2}{2}[(n-1)^2 - n^2] = v_z T + \frac{aT^2}{2}(n^2 - 2n + 1 - n^2) = v_z T + \frac{aT^2}{2}(-2n + 1)$$

$$\lambda_n = v_z T - \frac{aT^2}{2}(2n - 1). \quad (2.1)$$

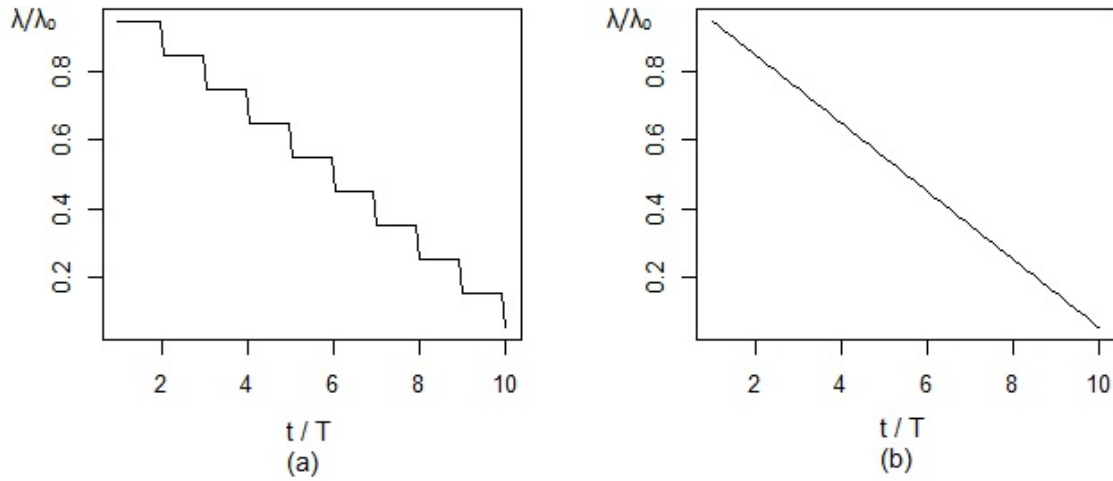
Jednadžba 2.1 daje dužinu n -te valne duljine te vrijedi u slučaju $n \geq 1$.

Funkcija λ_n je diskretna funkcija zato što je $n \in \mathbb{N}$. Ako se broj n želi prikazati pomoću veličine t tad je to moguće preko izraza $n = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$. Diskretna funkcija $\lambda(t)$ tad ima oblik

$$\lambda(t) = v_z T - \frac{aT^2}{2}(2 \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor - 1) \quad (2.2)$$

te vrijedi za $t \geq T$. Njeno ponašanje tijekom nekoliko perioda vidljivo je na slici 2.2.(a) te odgovara problematici prikazanoj na slici 2.1.

Budući da želimo dobiti kontinuiranu funkciju poput one prikazane na slici 2.2.(b)



Slika 2.2: Diskretna (a) i kontinuirana (b) funkcija $\lambda(t)$.

uzmimo da je n kontinuirana varijabla, odnosno $n = \frac{t}{T}$. Tad jednađžba 2.2 postaje

$$\lambda(t) = v_t T - \frac{aT^2}{2} \left(2\frac{t}{T} - 1 \right), \quad (2.3)$$

odnosno nakon što se iz zagrade izluči faktor $\frac{2}{T}$,

$$\lambda(t) = v_t T - aT \left(t - \frac{T}{2} \right). \quad (2.4)$$

Jednađžba 2.4 predstavlja ovisnost valne duljine o vremenu koja vrijedi za $t \geq T$ te koju opisuje pravac negativnog nagiba poput onog na slici 2.2.(b). Zaključili bismo da valna duljina zvuka u vremenu opada odnosno frekvencija zvuka u vremenu raste što je u skladu s očekivanim. Pa ipak, preuranjeno bi bilo donijeti zaključak da će na prijarniku biti detektiran zvuk valne duljine $\lambda(t)$ iz jednađžbe 2.4. Razlog tomu je što je emitiranom zvuku potrebno neko određeno vrijeme da doputuje do prijarnika, a to se vrijeme razlikuje od fronte do fronte. Stoga slijedi pitanje koje se nužno mora postaviti, a ono je u vezi naravi varijable vremena t , naime, što točno predstavlja vrijeme t ? Budući da smo jednađžbu 2.4 izveli iz jednađžbe 2.1 koja govori o dužinama upravo stvorenih valnih duljina, varijabla t iz jednađžbe 2.4 odnosi se na trenutak emisije pojedine valne duljine koji smo dogovorno izabrali kao onaj trenutak kad se ta valna duljina prvi put pojavila cjelovita. Da bi se stavio naglasak na tu značajnost dobro je zapisati jednađžbu 2.4 kao

$$\lambda(t_e) = v_z T - aT \left(t_e - \frac{T}{2} \right), \quad (2.5)$$

pri čemu je t_e vrijeme emisije. Drugim riječima, ova jednađžba opisuje dužinu onih valnih duljina koje se nalaze neposredno do izvora zvuka. Budući da je za nas od

interesa dužina onih valnih duljina koje su na mjestu prijarnika, morat ćemo pronaći izraz za funkciju $\lambda(t_d)$ pri čemu varijabla t_d predstavlja vrijeme detekcije zvuka. Vezu varijabli t_e i t_d pronalazimo u relaciji

$$t_d = t_e + t_z, \quad (2.6)$$

pri čemu je t_z vrijeme potrebno da zvuk doputuje od izvora do prijarnika. Ako se prijarnik nalazi na početnoj udaljenosti h od izvora onda zvuk emitiran u trenutku t_e mora prevaliti put od $h - \frac{at_e^2}{2}$ da bi došao do prijarnika. Budući da se zvuk jednoliko širi brzinom v_z vrijeme za koje zvuk dolazi od izvora do prijarnika iznositi će $t_z = \frac{1}{v_z}(h - \frac{at_e^2}{2})$. Sad se može izraziti t_e kao

$$t_e = t_d - t_z = t_d - \frac{1}{v_z}(h - \frac{at_e^2}{2}),$$

odnosno kao kvadratna jednadžba

$$\frac{at_e^2}{2v_z} - t_e + t_d - \frac{h}{v_z} = 0. \quad (2.7)$$

Riješivši kvadratnu jednadžbu 2.7 za t_e dobivamo rješenja:

$$t_{e1,2} = \frac{v_z}{a} \pm \frac{v_z}{a} \sqrt{1 - \frac{2a}{v_z}(t_d - \frac{h}{v_z})}. \quad (2.8)$$

Uvrstivši izraz 2.8 u 2.5 dobit ćemo traženu ovisnost $\lambda(t_d)$

$$\lambda_{1,2}(t_d) = v_z T - aT \left(\frac{v_z}{a} \pm \frac{v_z}{a} \sqrt{1 - \frac{2a}{v_z}(t_d - \frac{h}{v_z})} - \frac{T}{2} \right). \quad (2.9)$$

Izlučimo li iz zagrade član $\frac{v_z}{a}$ dobit ćemo

$$\lambda_{1,2}(t_d) = v_z T - v_z T \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2a}{v_z}(t_d - \frac{h}{v_z})} - \frac{aT}{2v_z} \right), \quad (2.10)$$

a izlučimo li $v_z T$ iz prva dva člana, ali i $\frac{1}{v_z}$ iz zagrade pod korijenom, dobit ćemo izraz

$$\lambda_{1,2}(t_d) = v_z T \left[1 - \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2a}{v_z^2}(v_z t_d - h)} - \frac{aT}{2v_z} \right) \right] \quad (2.11)$$

koji zatim postaje

$$\lambda_{1,2}(t_d) = v_z T \left(\mp \sqrt{1 - \frac{2a}{v_z^2}(v_z t_d - h)} + \frac{aT}{2v_z} \right). \quad (2.12)$$

Sad moramo odabrati pozitivan predznak ispred korijena iz razloga što valna duljina mora imati pozitivnu vrijednost pa nakon sređivanja dobivamo

$$\lambda(t_d) = v_z T \left(\sqrt{1 - \frac{2a}{v_z^2}(v_z t_d - h)} + \frac{aT}{2v_z} \right) \quad (2.13)$$

za dužinu valne duljine na mjestu prijamnika u trenutku detekcije. Budući da za frekvenciju zvučnog vala vrijedi $f(t) = \frac{v_z}{\lambda(t)}$ možemo napisati izraz za frekvenciju zvuka na mjestu prijamnika u trenutku detekcije zvuka:

$$f_p(t_d) = v_z \left[v_z T \left(\sqrt{1 - \frac{2a}{v_z^2} (v_z t_d - h)} + \frac{aT}{2v_z} \right) \right]^{-1}, \quad (2.14)$$

odnosno ako uvažimo relaciju $f_i = (T)^{-1}$

$$f_p(t_d) = f_i \left(\sqrt{1 - \frac{2a}{v_z^2} (v_z t_d - h)} + \frac{aT}{2v_z} \right)^{-1}. \quad (2.15)$$

Primijetimo da član $\frac{aT}{2v_z} = \frac{a}{2v_z f_i}$, primjerice u slučaju akceleracije slobodnog pada i frekvencije od 2000 Hz , ima vrijednost oko $\frac{a}{2v_z f_i} \sim \frac{1}{100000}$ pa se može zanemariti jer je njegov doprinos zbrajanjem upravo ništavan. Sad konačan izraz za frekvenciju zvuka na prijamniku u trenutku detekcije glasi

$$f_p(t_d) = f_i \left(\sqrt{1 - \frac{2a}{v_z^2} (v_z t_d - h)} \right)^{-1}. \quad (2.16)$$

Neka bude napomenuto da je zanemareni član $\frac{aT}{2v_z}$ posljedica dogovorno odabrane definicije trenutka emisije kao onog trenutka kada je valna duljina u cijelosti stvorena. U slučaju da se definicija tog trenutka odabere kao trenutak početka nastajanja valne duljine član $\frac{aT}{2v_z}$ bi u konačnom izrazu za frekvenciju bio suprotnog predznaka. Najzad, u slučaju odabira definicije trenutka emisije prema kojoj je to trenutak točno između dva zadnje navedena, član $\frac{aT}{2v_z}$ iščezava.

Isti teorijski rezultat mogli smo dobiti kraćim i elegantnijim postupkom razmatrajući i pronalazeći izraz za brzinu izvora zvuka oblikovan kao ovisnost o vremenu detekcije zvuka. Zamislimo ponovno već opisanu situaciju kad izvor zvuka stalne frekvencije f_i kreće iz mirovanja imajući stalnu akceleraciju a . Neka kao i do sad vrijeme emisije zvuka bude t_e , vrijeme detekcije na prijamniku t_d , a vrijeme koje je potrebno da zvuk doputuje do prijamnika nakon što je emitiran t_z . Tad vrijedi relacija

$$t_d = t_e + t_z, \quad (2.17)$$

jer možemo smatrati da je zvuk jedan dio vremena putovao s izvorom zvuka te zatim samostalno kroz sredstvo nakon trenutka emisije. Početna udaljenost izvora zvuka i prijamnika h se ne mijenja u vremenu i ona je u svakom trenutku jednaka zbroju putova koje je zvuk prešao dok se gibao zajedno s izvorom i dok se gibao samostalno kroz sredstvo. Prema tome vrijedi

$$h = \frac{at_e^2}{2} + v_z t_z. \quad (2.18)$$

Do tražene funkcije $v_i(t_d)$ koja predstavlja brzinu izvora u trenutku emisije, ali izraženu preko ovisnosti o vremenu detekcije doći ćemo razmatranjem brzine kao funkcije vremena emisije za koju, budući da izvor zvuka do tog trenutka jednoliko ubrzava, vrijedi $v_i(t_e) = at_e$. Bit će potrebno pronaći izraz koji povezuje vrijeme emisije t_e i vrijeme detekcije t_d , a koji će se dobiti iz rješavanja jednadžbi 2.17 i 2.18. Izrazivši t_z iz jednadžbe 2.17 te uvrstivši taj izraz u jednadžbu 2.18 dobiva se

$$h = \frac{at_e^2}{2} + v_z(t_d - t_e), \quad (2.19)$$

odnosno kvadratna jednadžba

$$\frac{at_e^2}{2} - v_z t_e + v_z t_d - h = 0. \quad (2.20)$$

Rješenja jednadžbe 2.20 su

$$t_{e1,2} = \frac{v_z \pm \sqrt{v_z^2 - 2a(v_z t_d - h)}}{a}. \quad (2.21)$$

Sad možemo izraziti brzinu izvora u trenutku emisije preko ovisnosti o vremenu detekcije kao

$$v_{i1,2}(t_d) = a \frac{v_z \pm \sqrt{v_z^2 - 2a(v_z t_d - h)}}{a}, \quad (2.22)$$

odnosno

$$v_{i1,2}(t_d) = v_z \pm \sqrt{v_z^2 - 2a(v_z t_d - h)}. \quad (2.23)$$

Kad je izračunata brzina izvora ona se može uvrstiti u formulu Dopplerovog efekta 1.1 za računanje frekvencije kad se izvor približava prijamniku (opažaču). To učinivši dobivamo

$$f_{p1,2}(t_d) = \frac{v_z f_i}{v_z - v_z \mp \sqrt{v_z^2 - 2a(v_z t_d - h)}}, \quad (2.24)$$

odnosno

$$f_{p1,2}(t_d) = \frac{v_z f_i}{\mp \sqrt{v_z^2 - 2a(v_z t_d - h)}}. \quad (2.25)$$

Kako iznos frekvencije ne može biti negativan odabiremo pozitivan predznak te nakon što iz korijena izlučimo v_z i pokratimo ga s v_z iz brojnika dobivamo konačni izraz

$$f_{p1,2}(t_d) = \frac{f_i}{\sqrt{1 - \frac{2a}{v_z^2}(v_z t_d - h)}} \quad (2.26)$$

koji je identičan ranije izvedenom izrazu 2.16.

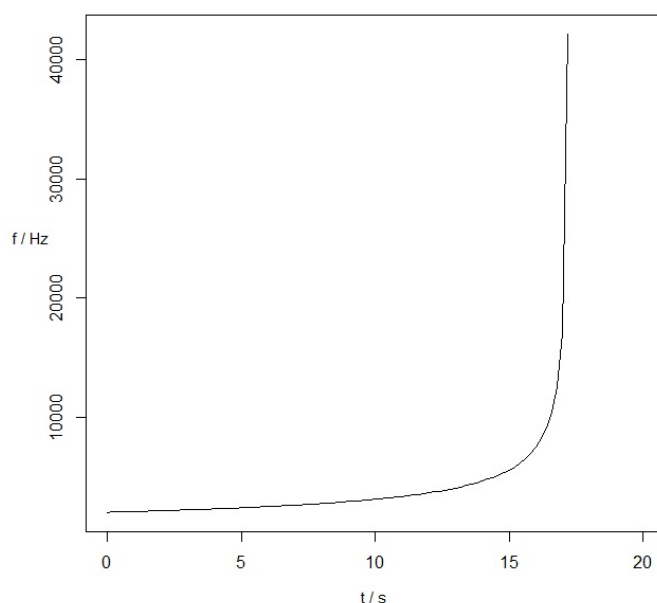
Razmotrimo ograničenja odnosno interval vrijednosti za koji funkcija 2.26 vrijedi i ima fizikalnog smisla. Promatrajući prvi stvoreni zvuk, odnosno onaj za koji vrijedi $t_e = 0$, zaključujemo da se relacija 2.17 mijenja u $t_d = t_z$, a kako se izvor zvuka u prvom trenutku nalazi na udaljenosti h od prijamnika vrijeme putovanja zvuka bit

će $t_z = \frac{h}{v_z}$, odnosno vrijeme detekcije prvog stvorenog zvuka bit će $t_d = \frac{h}{v_z}$. To je ujedno najmanja vrijednost koja se može uzeti za t_d u jednadžbi 2.26 tj. ona vrijedi za $t_d \geq \frac{h}{v_z}$. Nadalje, ako izvor zvuka prevali udaljenost h te se počne udaljavati od prijammnika tad bi se frekvencija na prijammniku trebala u vremenu snižavati što iz jednadžbe 2.26 nije moguće dobiti. Drugim riječima, jednadžba 2.26 ne vrijedi za vremena nakon tog događaja. Kako se izvor giba jednoliko ubrzano iz relacije $h = \frac{at_d^2}{2}$ dobivamo da će on prevaliti udaljenost h nakon $t_d = \sqrt{\frac{2h}{a}}$. Dakle, jednadžba 2.26 vrijedi za vremena $t_d \leq \sqrt{\frac{2h}{a}}$ što u kombinaciji sa prethodnim ograničenjem daje interval $\frac{h}{v_z} \leq t_d \leq \sqrt{\frac{2h}{a}}$. U slučaju velike akceleracije a ili dugog intervala vremena moguće je da brzina izvora preraste brzinu zvuka u sredstvu. U kojem trenutku će to biti može se izračunati iz jednadžbe 2.23 ako se brzina izvora izjednači s v_z . Računom dobivamo

$$t_d = \frac{v_z}{2a} + \frac{h}{v_z} \quad (2.27)$$

za trenutak kad izvor dostigne brzinu zvuka, ali izražen preko varijable t_d . Dakle, jednadžba 2.26 ima još jedno ograničenje, a to je da vrijedi u vremenu prije izračunatog trenutka, odnosno za $t_d \leq \frac{v_z}{2a} + \frac{h}{v_z}$. Ovisno je o veličinama a , h i v_z koje će gornje ograničenje od dva pokazana ranije nastupiti. U slučaju eksperimenta provedenog u sklopu ovog diplomskog rada to ograničenje je $t_d \leq \sqrt{\frac{2h}{a}}$.

Za kraj teorijskog opisa ovog slučaja preostaje funkciju 2.26 grafički prikazati te je to i učinjeno na slici 2.3 za neke odabrane vrijednosti a i v_z . Kao najprirodniji odabir za vrijednost akceleracije a je uzeta vrijednost akceleracije slobodnog pada odnosno $a = 9,81 \text{ m/s}^2$, dok je za vrijednost v_z uzet iznos brzine zvuka u zraku pri temperaturi od 11°C , odnosno $v_z = 338 \text{ m/s}$. S grafičkog prikaza funkcije 2.26 na slici 2.3 vidljivo je da vrijednost funkcije vrlo brzo raste kako se brzina izvora približava brzini zvuka. Konačno, za trenutak kada brzina izvora postane jednaka brzini zvuka funkcija ima točku singulariteta, odnosno nazivnik njenog razlomka postane jednak ničici. Za sve dalje trenutke vrijednost pod korijenom je negativna pa funkcija nema realnih rješenja kao što je i vidljivo sa slike 2.3.



Slika 2.3: Iznos frekvencije na prijamniku, odnosno vrijednost funkcije 2.26 za prvih 20 s slobodnog pada izvora frekvencije 2000 Hz.

Izvor zvuka se udaljava od prijamnika

Da bi teorijska razrada slučaja akcelerirajućeg izvora zvuka i mirujućeg prijamnika bila u potpunosti provedena razmotrimo ukratko i situaciju kad se izvor zvuka konstantne frekvencije udaljava od prijamnika jednoliko ubrzano krenuvši iz stanja mirovanja. Neka se izvor zvuka frekvencije f_i nalazi na udaljenosti d_0 od prijamnika te se iz mirovanja počne gibati jednoliko ubrzano akceleracijom a . Tada će se na prijamniku opažati u vremenu sve manja frekvencija kako se brzina izvora zvuka u vremenu povećava. Ponovno će vrijediti relacija 2.17 samo će se sada, logično, veličina t_z , koja opisuje vrijeme potrebno da zvuk prijeđe put od izvora zvuka do prijamnika u trenutku emisije zvuka, rasti s povećanjem vremena emisije. Drugim riječima, što se zvuk kasnije emitira to će izvor zvuka biti udaljeniji od prijamnika i emitirani će zvuk morati prevaliti veći put. Taj put iznosi $d_0 + \frac{at_e^2}{2}$, odnosno vrijeme da ga zvuk prevali gibajući se konstantnom brzinom v_z iznosi

$$t_z = \frac{1}{v_z} \left(d_0 + \frac{at_e^2}{2} \right). \quad (2.28)$$

Koristeći se relacijom 2.17 dobivamo $t_z = t_d - t_e$, što možemo uvrstiti u prethodni izraz 2.28 i dobiti kvadratnu jednadžbu

$$\frac{at_e^2}{2} + v_z t_e + d_0 - v_z t_d = 0 \quad (2.29)$$

s pripadajućim rješenjima

$$t_{e1,2} = \frac{-v_z \pm \sqrt{v_z^2 - 2a(d_0 - v_z t_d)}}{a}, \quad (2.30)$$

koja možemo iskoristiti za brzinu izvora zvuka

$$v_i = at_e = -v_z + \sqrt{v_z^2 - 2a(d_0 - v_z t_d)}, \quad (2.31)$$

pri čemu smo ispred korijena odabrali pozitivan predznak znajući da se brzina izvora u vremenu mora povećavati. Konačno možemo dobiveni izraz za brzinu izvora u trenutku emisije u ovisnosti o vremenu detekcije 2.31 uvrstiti u formulu za Dopplerov efekt 1.2. Dobivamo:

$$f_p(t_d) = \frac{v_z}{v_z - v_z + \sqrt{v_z^2 - 2a(d_0 - v_z t_d)}} f_i$$

$$f_p(t_d) = \frac{v_z}{\sqrt{v_z^2 + 2a(v_z t_d - d_0)}} f_i$$

te naposljetku

$$f_p(t_d) = \frac{f_i}{\sqrt{1 + \frac{2a}{v_z^2}(v_z t_d - d_0)}} \quad (2.32)$$

za izraz za frekvenciju na prijamniku u ovom opisanom slučaju. Vidljivo je da vrijednost funkcije 2.32 opada u vremenu. Primijetimo da ova funkcija nema ograničenja osim da vrijedi za $t_d \geq \frac{d_0}{v_z}$, što je vrijeme potrebno da prvi proizvedeni zvuk stigne na prijamnik.

2.2 Slučaj akcelerirajućeg prijamnika i mirujućeg izvora zvuka

Unatoč tomu što je za ovaj diplomski rad od najvećeg interesa već razrađeni slučaj akcelerirajućeg izvora zvuka i mirujućeg prijamnika koji se s vremenom približavaju, iz razloga što se bitno razlikuju, zanimljivo je usporediti matematički opis frekvencije na prijamniku sa slučajem kad se prijamnik giba dok izvor zvuka miruje, a koji ćemo u ovom potpoglavlju kratko izvesti. U ovom je slučaju stvar bitno jednostavnija zato što se razmatra brzina prijamnika u trenutku detekcije zvuka u ovisnosti o vremenu detekcije zvuka za razliku od slučaja prošlog potpoglavlja kad se tražila i razmatrala brzina izvora u trenutku emisije zvuka u ovisnosti o vremenu detekcije zvuka. To se može objasniti na sljedeći način. Naime, u ovom slučaju je uzrok Dopplerovog efekta brzina prijamnika u odnosu na sredstvo te se taj efekt obistinjava pri doticaju zvuka i prijamnika, odnosno na mjestu prijamnika i radi prijamnika. Iz toga proizlazi zaključak da je za razmatranje bitna brzina prijamnika u trenutku detekcije zvuka. S druge strane, u slučaju predstavljenom u prethodnom potpoglavlju uzrok Dopplerovog efekta je brzina izvora zvuka u odnosu na sredstvo, ali se taj efekt obistinjavao pri samoj emisiji zvuka te ostajao zapisan u sredstvu da bi kao poremećaj u sredstvu

putovao do prijamnika gdje je bio detektiran. Zbog toga se tad razmatrala brzina izvora zvuka u trenutku emisije zvuka. Prema rečenom, za slučaj ovog potpoglavlja tražena brzina prijamnika u trenutku detekcije zvuka biti će

$$v_p(t_d) = at_d$$

što se nadalje može uvrstiti u formulu 1.4 za Dopplerov efekt. Dobiva se

$$f_p(t_d) = \frac{v_z \pm at_d}{v_z} f_i \quad (2.33)$$

te je to konačan opis frekvencije na prijamniku za slučaj akcelerirajućeg prijamnika gdje pozitivan predznak $+$ odabiremo za približavanje izvora i prijamnika u vremenu, a negativan predznak $-$ za njihovo udaljšavanje. Jasno je da je funkcija 2.33 pravac koeficijenta nagiba $\frac{af_i}{v_z}$ koji je pozitivan ili negativan ovisno o situaciji te odsječka na ordinati f_i .

2.3 Teorijska predviđanja

Nakon što su u ovom poglavlju izvedene formule za Dopplerov efekt u ubrzanom sustavu možemo razmotriti koju frekvenciju na prijamniku one predviđaju za okvirnu situaciju eksperimenta koji je kasnije proveden za potrebe ovog diplomskog rada. Eksperiment je osmišljen tako da se izvor zvuka ubrzava gravitacijskom silom te približava mirnom prijamniku koji tad bilježi frekvenciju. Drugim riječima, zamišljeni eksperiment propituje jednadžbu 2.26. Zbog potreba analize spomenuta funkcija 2.26 može se razviti u Taylorov red:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n. \quad (2.34)$$

Za vrijednost oko koje razvijamo funkciju 2.26, odnosno za vrijednost varijable t_0 bez ustezanja možemo odabrati $t_0 = 0$ zato što nezavisna varijabla t u funkciji 2.26 pri realnoj provedbi eksperimenta neće poprimati velike vrijednosti. Razlog tomu je što će izvor zvuka koji slobodno pada prevaliti visinu h s koje je ispušten za kratko vrijeme, primjerice, za oko jednu sekundu u slučaju da je ispušten s visine $h = 5$ m. Stoga, izračunajmo nekoliko prvih članova pri razvoju funkcije 2.26 u Taylorov red oko nule. Najprije je potrebno izračunati derivacije funkcije 2.26 prema pravilima deriviranja složene funkcije te potom za njihov argument uvrstiti t_0 . Računamo:

$$\begin{aligned} f'_p(t) &= f_i \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{2a}{v_z^2} (v_z t_d - h) \right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2a}{v_z} \right) \\ f'_p(t) &= f_i \frac{a}{v_z} \left(1 - \frac{2a}{v_z^2} (v_z t_d - h) \right)^{-\frac{3}{2}}, \\ f''_p(t) &= f_i \frac{a}{v_z} \left(-\frac{3}{2} \right) \left(1 - \frac{2a}{v_z^2} (v_z t_d - h) \right)^{-\frac{5}{2}} \left(-\frac{2a}{v_z} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$f_p''(t) = f_i \frac{3a^2}{v_z^2} \left(1 - \frac{2a}{v_z^2} (v_z t_d - h) \right)^{-\frac{5}{2}}, \quad (2.36)$$

odnosno

$$f_p'(t_0) = f_i \frac{a}{v_z} \left(1 + \frac{2a}{v_z^2} h \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.37)$$

$$f_p''(t_0) = f_i \frac{3a^2}{v_z^2} \left(1 + \frac{2a}{v_z^2} h \right)^{-\frac{5}{2}}. \quad (2.38)$$

Ako uzmemo u obzir da je razlomak u zagradi puno manji od jedan tj. $\frac{2a}{v_z^2} h \sim \frac{1}{10000}$, a što je istina za slučaj slobodnog pada izvora zvuka s visine od 5 m, onda doprinos tog razlomka možemo u potpunosti zanemariti te time dobivamo bitno jednostavnije izraze

$$f_p'(t_0) \simeq f_i \frac{a}{v_z} \quad (2.39)$$

i

$$f_p''(t_0) \simeq f_i \frac{3a^2}{v_z^2}. \quad (2.40)$$

Prema formuli za Taylorov razvoj funkcije u red 2.34 jednačba 2.26 postaje

$$f_p(t_d) \simeq f_i + f_i \frac{a}{v_z} t_d + f_i \frac{3a^2}{2v_z^2} t_d^2 + \dots = f_i \left(1 + \frac{a}{v_z} t_d + \frac{3a^2}{2v_z^2} t_d^2 + \dots \right) \quad (2.41)$$

što se može aproksimirati sa samo prva dva člana pribrojnika budući da, kao što je već rečeno, varijabla t_d tokom eksperimenta neće poprimati velike vrijednosti pa će pogotovo t_d^2 imati malu vrijednosti, a i vrijedi $\frac{3a^2}{2v_z^2} \sim \frac{1}{1000}$. Time dobivamo konačan aproksimativan oblik jednačbe 2.26 usklađen s karakterom eksperimenta provedenim za potrebe ovog diplomskog rada:

$$f_p(t_d) \approx f_i + f_i \frac{a}{v_z} t_d. \quad (2.42)$$

Ova ovisnost frekvencije na prijarniku o vremenu je linearna, odnosno funkcija 2.42 je pravac koeficijenta nagiba $f_i \frac{a}{v_z}$ te odsječka na ordinati f_i . Pri eksperimentalnoj obradi podataka bi se, dakle, pretpostavilo da izmjerene vrijednosti frekvencije na prijarniku prikazane u ovisnosti o vremenu slijede linearnu ovisnost, odnosno leže na pravcu.

Zanimljivo je primijetiti da se aproksimativni oblik jedne druge formule za frekvenciju na prijarniku, koja se dobije ako se ne razlikuju vremena detekcije i emisije zvuka, odnosno ako se za brzinu izvora zvuka uzima brzina koju je izvor imao u vrijeme detekcije zvuka, ne razlikuje od jednačbe 2.42. Naime, ta se druga formula brzo izvede prostim uvrštavanjem brzine koju je izvor zvuka imao u trenutku detekcije u jednačbu 1.1. Time se dobije izraz

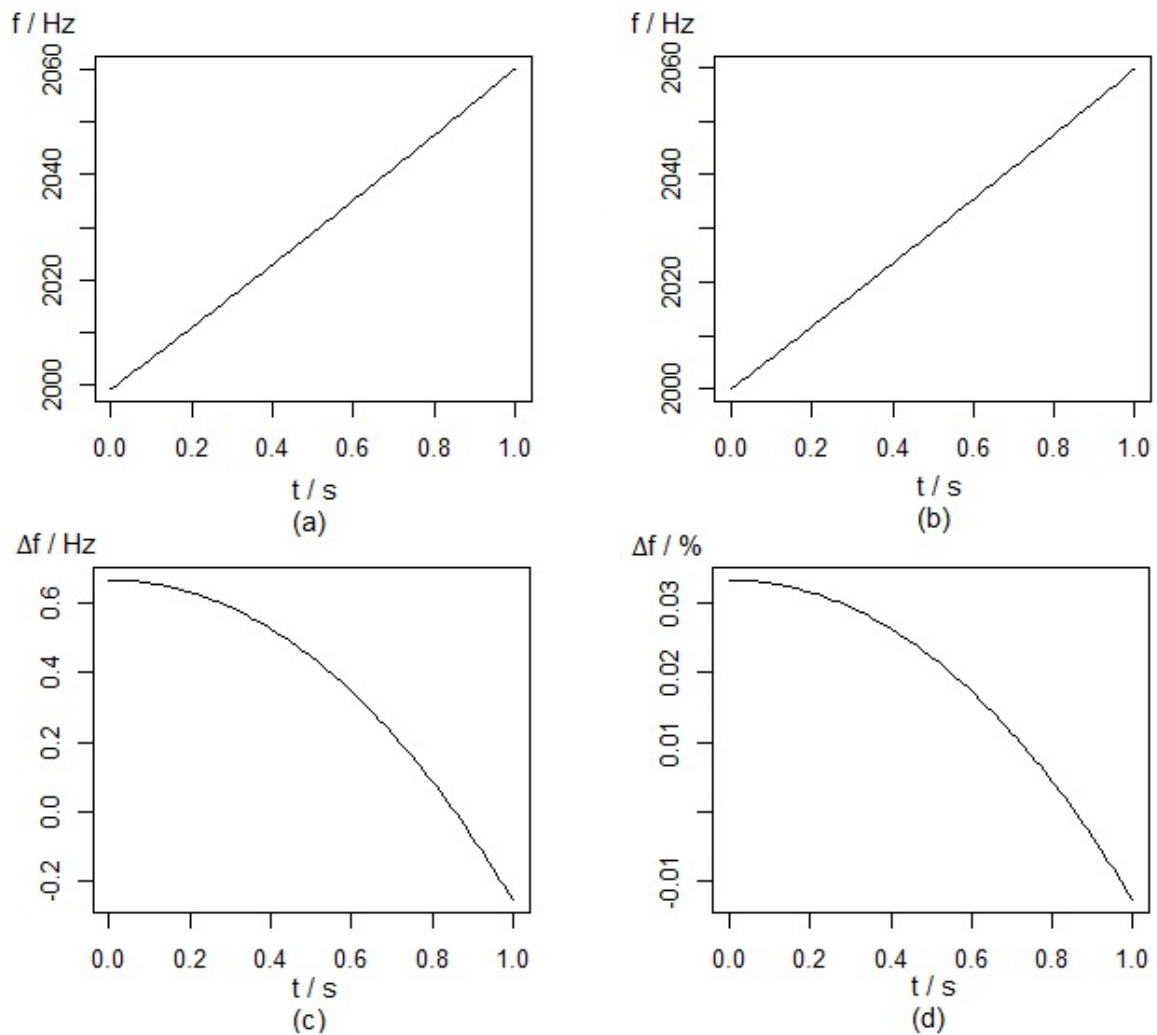
$$f_p(t_d) = \frac{v_z}{v_z - at_d} f_i \quad (2.43)$$

koji u aproksimativnom obliku postaje

$$f_p(t_d) \approx f_i + f_i \frac{a}{v_z} t_d, \quad (2.44)$$

što je identično izrazu 2.42.

Zgodna je grafička usporedba jednadžbi 2.26 i 2.43 za odabrane parametre koji su okvirno usklađeni s karakteristikama eksperimenta padajućeg izvora zvuka. Na slici 2.4 prikazane su funkcije 2.26 kao slika 2.4.(a) i 2.43 kao slika 2.4.(b) dok je na slici 2.4.(c) prikazana njihova razlika u hercima, a na slici 2.4.(d) njihova razlika u postocima. Vidljivo je da je razlika dviju funkcija, naime 2.26 i 2.43, zanemariva te se unutar prve sekunde dotične dvije funkcije razlikuju za najviše 0,035 %. Da je vremenski interval veći bila bi veća i razlika između vrijednosti funkcija pa neka bude navedeno da se vrijednosti dviju funkcija u petnaestoj sekundi razlikuju za 100 %. Na slici 2.4 dvije funkcije opisuju slučaj kad frekvencija akcelerirajućeg izvora zvuka



Slika 2.4: Vrijednost funkcija 2.26 (a) i 2.43 (b) za interval od jedne sekunde i izvor stalne frekvencije $f = 2000\text{Hz}$. (c) prikazuje njihovu razliku u hercima, dok (d) pokazuje razliku u postocima.

iznosi $f_i = 2000$ Hz. Vidljivo je da obje funkcije liče na pravac, odnosno da obje ovisnosti nalikuju linearnoj ovisnosti frekvencije na prijamniku o vremenu. Uostalom, da je pri aproksimativnom obliku tome tako i pokazano je u 2.42. Preostaje odrediti koeficijent pravca iz jednadžbe 2.42. On se može jednostavno izračunati ako za frekvenciju izvora, primjerice, odaberemo 2000 Hz, za a akceleraciju slobodnog pada te za brzinu zvuka vrijednost 340 m/s. Za ove parametre koji okvirno opisuju i uvjete eksperimenta koji će se provesti koeficijent nagiba pravca ispada $k = 57,7$ Hz/s. Budući da se dotični koeficijent može dobiti iz analize eksperimentalnih podataka iz dobivenog koeficijenta se potom može izračunati akceleracija izvora zvuka kao $a = \frac{kv_z}{f_i}$. Izračunata akceleracija bi na taj način bila dobivena iz analize Dopplerovog efekta što je i prioritetni zadatak ovog diplomskog rada te bi se mogla usporediti s najvjerojatnijom vrijednosti akceleracije izvora zvuka tokom eksperimenta, a koja će biti dobivena analizom videozapisa. U sljedećim je poglavljima, stoga, opisan eksperimentalni postav te proveden i analiziran eksperiment čija je svrha odrediti akceleraciju izvora zvuka što će se i ostvariti obradom eksperimentalnih podataka sadržanih u zvučnom zapisu koji, zapravo, predstavlja zapis Dopplerovog efekta u ubrzanom sustavu.

3 Eksperimentalni postav

U ovom će poglavlju biti opisani svi elementi eksperimentalnog postava koji su pridonijeli što kvalitetnijem i preciznijem mjerenju pri izvođenju već spomenutog eksperimenta. Također će biti objašnjena i svrha svakog pojedinog elementa. Korišteni elementi su:

1. uređaji i računalna oprema

- prijenosno računalo
- zvučnik
- mikrofoni
- audio produžni kabel, jack utikač
- audio produžni kabel, rca utikač
- web kamera
- fotoaparat

2. programska oprema

- Audacity (<http://www.audacityteam.org/>)
- MyCam (<http://mycam.en.softonic.com/>)
- Windows Media Player (<http://windows.microsoft.com/en-us/windows/windows-media>)

3. ostala oprema

- konopac
- dvije grede
- metar
- kartonske kutije za jaja

Elementi eksperimentalnog postava prikazani su na slici 3.1

Eksperimentom se nastojalo izmjeriti frekvenciju na prijamniku za vrijeme padanja izvora zvuka. Za tu potrebu programski je generiran sinusoidalni ton stalne frekvencije 2000 Hz pomoću besplatnog programskog alata Audacity. Taj je tonski zapis reproduciran na zvučniku koji je s prijenosnim računalom bio povezan audio produžnim kablom. Zvučnik je bio postavljen na visinu 3,88 m od tla gdje ga je asistent, stojeći na balkonu, pridržavao rukom. S prijenosnim je računalom također bio povezan i mikrofoni pomoću audio produžnog kabla čije se postolje nalazilo na tlu u točki koja leži na pravcu ortogonalnom na ravninu tla točno ispod zvučnika. Visina iznad tla do koje je dosežao sam mikrofoni iznosila je 0,28 m. Samo prijenosno



Slika 3.1: Elementi eksperimentalnog postava.

računalo bilo je postavljeno na položaj udaljen na oko 5 m u smjeru okomitom na spojnicu mikrofona-zvučnik, a s kojeg je bio praćen tijekom cijelog eksperimenta. Prikaz eksperimenta iz te perspektive vidljiv je na slici 3.2.

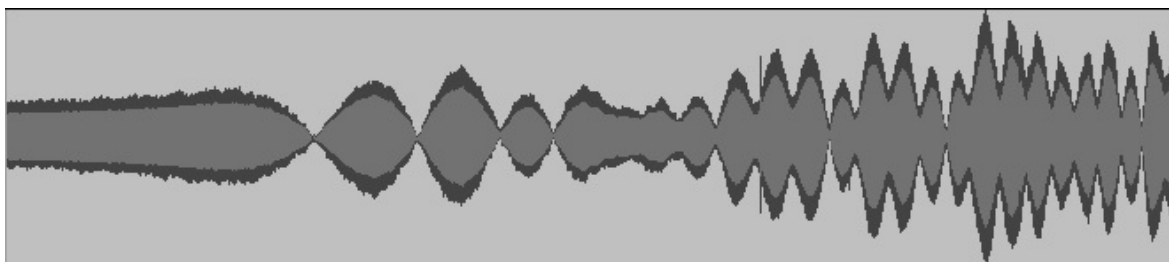
Bilo je planirano da se zvučnik ispusti sa spomenute visine te se mikrofonom jednostavno zabilježi zvučni zapis. No, kako je predviđeno da će pri analizi izmjerenih podataka biti potrebno odrediti početni trenutak, odnosno trenutak kada je izvor zvuka krenuo iz mirovanja, eksperiment je zabilježen i videozapisom pomoću web kamere ugrađene u prijenosno računalo. Na taj se način, budući da su pri videozapisu slikovni i zvučni zapis usklađeni unutar jedne datoteke, može odrediti trenutak kad je izvor zvuka krenuo iz mirovanja promatrajući slikovni dio videozapisa te time ujedno odrediti taj trenutak za izolirani zvučni zapis uzet iz videozapisa. Za snimanje eksperimenta web kamerom ugrađenom u prijenosno računalo koristio se besplatni programski alat MyCam, dok je za prevođenje videozapisa u isključivo zvučni zapis korištena usluga s internetske adrese <http://www.zamzar.com/convert/avi-to-wav/>. Uz snimanje eksperimenta web kamerom vršeno je i snimanje eksperimenta kamerom fotoaparata iz razloga što je rezolucija videozapisa nastalog korištenjem web kamere preslaba za analizu videozapisa, dakle, zbog postizanja bolje rezolucije videozapisa eksperimenta. Fotoaparat se praktički nalazio na istom mjestu kao i prijenosno računalo, odnosno web kamera. Zvučnik koji se ispuštao s visine 3,88 m bio je, uz to što je s prijenosnim računalom spojen audio produžnim kabelom, zavezan konopcem koji je spriječavao oštećenje zvučnika pri njegovu padu.



Slika 3.2: Eksperimentalni postav netom prije ispuštanja zvučnika. Vidljiv je zvučnik kojeg pridržava asistent na visini 3,88 m te mikrofona na tlu oko kojeg su poslagane kartonske kutije za jaja.

U neposrednoj blizini izvođenja eksperimenta bile su postavljene dvije grede, jedna vertikalno te druga horizontalno, u svrhu preciznijeg provođenja analize videozapisa. Vertikalna greda vidljivo je obilježavala visinu od tla u nekoliko točaka pravca ortogonalnog na ravninu tla, dok je horizontalna greda postavljena u vodoravni položaj na visini 3,88 m.

Mjerenja su provedena više puta, a za prvih mjerenja je ustvrđen nezanemariv efekt refleksije zvuka od tla vidljiv na slici 3.3. Budući da reflektirani zvuk i zvuk odašiljan iz zvučnika dolaze istovremeno do zvučnika oni interferiraju. Za različite udaljenosti između zvučnika i tla čvorovi stojnog vala će nastajati i nestajati, dok će zbog sve veće brzine izvora zvuka, odnosno povećane frekvencije, čvorovi mijenjati svoj položaj tijekom vremena. Primijetimo da se frekvencije dvaju valova, odašlanog i



Slika 3.3: Zvučni zapis obilježen efektom interferencije zbog refleksije zvuka od tla.

reflektiranog, razlikuju za mali iznos na mjestu mikrofona iz razloga što je reflektirani zvučni val nastao u nešto ranijem trenutku nego odaslani val s kojim interferira, odnosno kad je izvor zvuka imao nešto manju brzinu. Sve su to uzroci nastanka efekta vidljivog na slici 3.3. Kako je opisani efekt nepoželjan jer otežava analizu zvučnog zapisa, refleksija se eliminirala na način da se na tlu oko mikrofona postavio veći broj kartonskih kutija za jaja koje su prigušivale reflektirani zvuk tijekom eksperimenta. Podaci koji su prikupljeni nakon provedbe eksperimenta bili su, u konačnici, pohranjeni u dva videozapisa. Jedan je služio za obradu slike, odnosno određivanje akceleracije izvora zvuka videoanalizom, dok je drugi u sebi sadržavao zvučni zapis namijenjen za analizu ubrzanja izvora zvuka preko Dopplerovog efekta. U idućem je koraku prikupljene podatke bilo potrebno analizirati te ih međusobno usporediti. Dakako, to je i učinjeno te izloženo u idućem poglavlju.

4 Analiza i eksperimentalni rezultati

U ovom poglavlju, dvjema različitim metodama, dobivena su te prikazana dva različita eksperimentalna rezultata za ubrzanje zvučnika koji jednoliko ubrzava, a od kojih prvi ima referentni značaj. Na samom početku ovog poglavlja navedimo programsku opremu koja se koristila za analizu eksperimentalnih podataka:

- Tracker
- Movie Maker
- programski jezik C
- programski jezik R

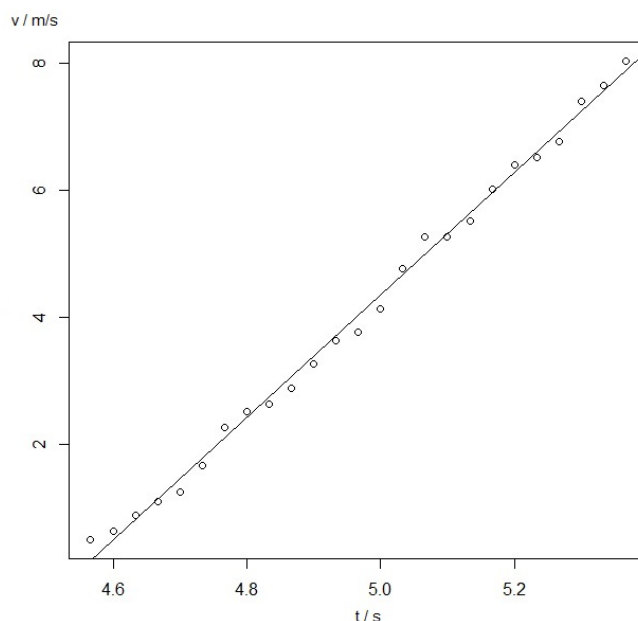
Bitniji programski kodovi prepisani su u dodacima na kraju ovog diplomskog rada od kojih je programski kod za programski jezik C preuzet je s interneta [3] uz minimalne promjene, dok je programski kod za programski jezik R u potpunosti napisan u sklopu ovog diplomskog rada.

4.1 Određivanje ubrzanja zvučnika videoanalizom

S obzirom da je izvor zvuka pri izvedbi eksperimenta pušten da slobodno pada, izvjesno je da je imao određeno ubrzanje jer je na njega djelovala stalna gravitacijska sila. Za ubrzanje izvora zvuka će se pretpostaviti da je stalno u vremenu. Osim gravitacijske sile, na izvor zvuka, odnosno zvučnik, djelovale su i sila otpora zraka te sile napetosti konopca odnosno audio kabela. Iz tih se razloga za ubrzanje zvučnika ne može uzeti poznata akceleracija slobodnog pada od $9,81\text{m/s}^2$, već ju je potrebno izmjeriti, odnosno odrediti interval vrijednosti u kojem se najvjerojatnije nalazi. To će se napraviti pomoću programa Tracker koji nudi mogućnost određivanja položaja i brzina praćenog objekta (u našem slučaju zvučnika) u vrlo bliskim trenucima međusobno udaljenim 33 tisućinke sekunde [2] [4]. Programom Tracker dobivene su vrijednosti brzina zvučnika u svakom pojedinom trenutku pada. Budući da se radi o jednoliko ubrzanom gibanju, iznosi brzina u v -t grafu trebali bi ležati na pravcu, dok nagib tog pravca predstavlja ubrzanje. Stoga je nad dobivenim vrijednostima brzina provedena metoda najmanjih kvadrata što je prikazano na slici 4.1. Spomenuta metoda najmanjih kvadrata nad dotičnim podacima ostvarena je pomoću besplatnog programskog jezika R, a neka usput bude spomenuto da je pomoću istog programskog jezika izrađena i većina slika uvrštenih u ovaj diplomski rad. Rezultat za ubrzanje zvučnika koji se dobiva na opisani način glasi

$$a = (9,6 \pm 0,1)\text{m/s}^2. \quad (4.1)$$

Dakle, za najvjerojatnije stvarno ubrzanje zvučnika tijekom eksperimenta možemo smatrati da se nalazi negdje u intervalu vrijednosti iz rezultata 4.1. Prema tome, rezultat 4.1 će se uzimati kao referentni rezultat te će se valjanost rezultata dobivenog



Slika 4.1: Prikaz brzine zvučnika u ovisnosti o vremenu pada. Podaci su dobiveni pomoću programa Tracker. Vrijednost varijable t na grafu ne počinje od $t = 0$ zato što je izvor zvuka ispušten nekoliko sekundi nakon početka snimanja.

analizom Dopplerovog učinka mjeriti prema slaganju s rezultatom 4.1.

Primijetimo da je u grafu sa slike 4.1 prikazano 25 točaka. Iz toga proizlazi da je u programu Tracker obrađeno 26 položaja zvučnika jer je za jedan iznos brzine potrebno odrediti dva položaja u prostoru ako je poznat vremenski interval za koji je zvučnik prevalio udaljenost između ta dva položaja. Iz navedenog se može zaključiti da je eksperiment trajao oko 860 ms. Pomoću formule za udaljenost koju prijeđe jednoliko ubrzano tijelo koje kreće iz mirovanja, odnosno

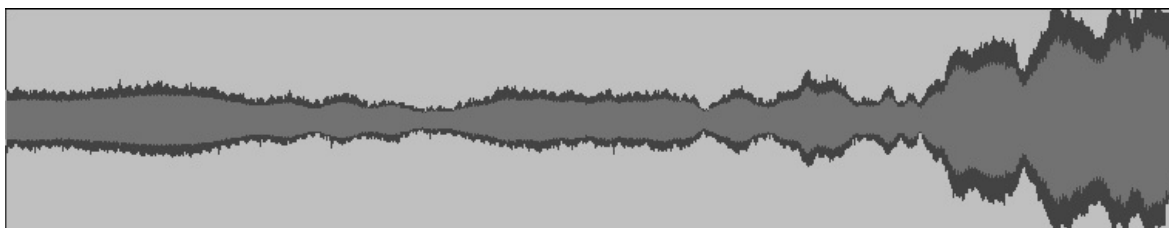
$$s = \frac{at^2}{2}, \quad (4.2)$$

može se izračunati koliki put je tijelo prevalilo za zadane parametre vremena i ubrzanja. Za vrijednosti od 26/30 s i $9,6 \text{ m/s}^2$ proizlazi da je tijelo prevalilo put od $3,6 \text{ m}$ što je prikladan rezultat budući da se mikrofona nalazio na visini $0,28 \text{ m}$ od tla, dok je zvučnik ispušten s visine $3,88 \text{ m}$ od tla. Napomenimo kako je preciznost ovog računa nešto slabija iz razloga što je brzina tijela pri kraju eksperimenta dosta velika, točnije oko 8 m/s , što znači da za jedan vremenski interval od 33 ms prevali put od otprilike 27 cm pa nije precizno određen trenutak kad zvučnik počinje usporavati uslijed porasta sile napetosti konopca. Suprotno tome, rezultat 4.1 je pouzdan iz razloga što je dobiven iz podataka dobivanih tokom cijelog eksperimenta pa konačni rezultat nema tako visoku osjetljivost na rubne podatke kao što je to maločas bio slučaj.

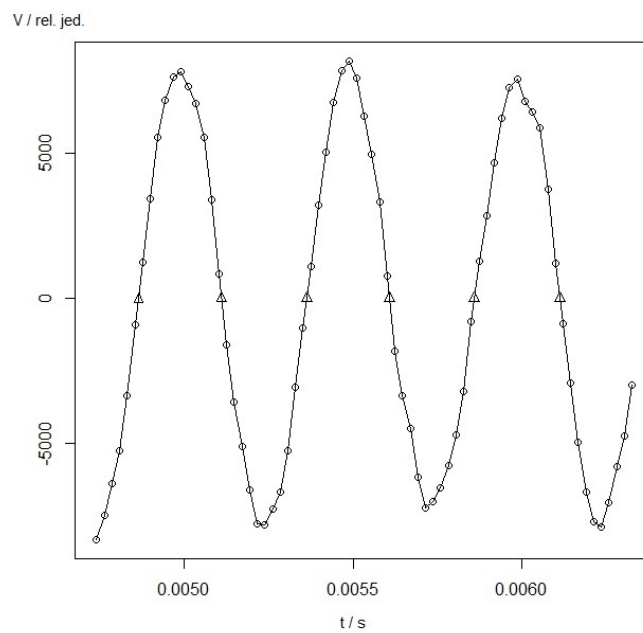
4.2 Određivanje ubrzanja zvučnika pomoću Dopplerovog efekta

Kao što je već rečeno, podaci koji će se analizirati nalaze se na zvučnoj traci videozapisa. U svrhu omogućenja analize videozapisa, odnosno datoteka avi, je konvertirana u datoteku wav. Vizualni prikaz te wav datoteke nalazi se na slici 4.2. U početnom trenutku, odnosno u $t = 0$ na zvučnoj snimci, izvor zvuka je krenuo iz mirovanja. Ta usklađenost je postignuta promatranjem videozapisa. Primijetimo da je oblik zvučnog zapisa sa slike 4.2 mnogo manje oblikovan efektom interferencije zbog refleksije zvuka od tla nego što je to zvučni zapis sa slike 4.1. Eliminacija nepoželjnog efekta postignuta je postavljanjem kartonskih kutija za jaja uokolo postolja mikrofona. Općenito je zvučni zapis zapravo skup velikog broja podataka koji sadržavaju vrijednost elongacije za svaki pripadni trenutak u zapisu. Zato je bitno znati brzinu odnosno frekvenciju uzimanja podataka na mikrofону. U našem slučaju je to 44100 puta u sekundi, odnosno napon na mikrofону koji je posljedica prisutstva zvuka mjeri se otprilike svake 23 milijutinke sekunde. Kako je dotični zvučni zapis dužine 830 ms u njemu je zapisano 36603 podataka od kojih svaki sadrži dvije informacije: vremenski trenutak i elongaciju zvuka za taj trenutak. Pomoću programskog koda za programski jezik C koji je pridružen u dodacima na kraju rada iz zvučnog zapisa su izvađeni svi dotični podaci te postavljeni u dva stupca txt datoteke. Dva stupca u toj tekstualnoj datoteci predstavljaju 36603 koordinate u x-t grafu pri čemu se na osi x postavljaju vrijednosti elongacije, a na osi t vremena. Nadalje su ti podaci obrađeni u programskom jeziku R pomoću programskog koda koji je napisan za potrebe ovog rada te koji je također pridružen u dodacima na kraju rada, dok će sada biti objašnjen algoritam tog programskog koda.

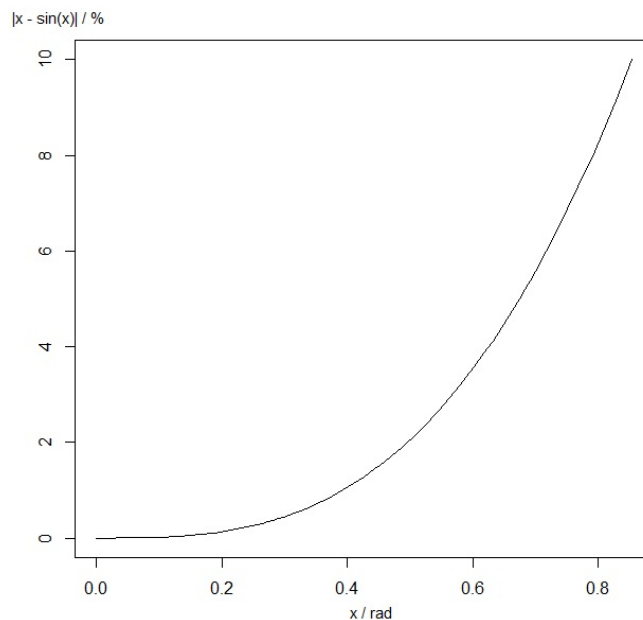
Obrada dva stupca podataka iz stvorene txt datoteke je za cilj imala izračunavanje valne duljine zvuka za svaki pripadni trenutak iz zvučnog zapisa. Budući da je snimani zvučni signal bio sinusoidalni unutar programskog koda je odabran postupak kojim se podaci, odnosno međusobno susjedne točke u x-t grafu, spajaju dužinama. To je ilustrirano na slici 4.3. Svrha tako stvorene funkcije koja nalikuje na sinusoidu je da se odrede njene nultočke. Opisani postupak je procijenjen zadovoljavajućim iz razloga što sinusoida za vrijednosti nezavisne varijable u blizini svojih nultočki nalikuje na pravac. Zapravo, vrijednosti pravca i sinusoide se za područje nezavisne varijable od 0° do 28° razlikuju za manje od 2 % kao što je vidljivo sa slike 4.4. Algoritam programskog koda izračunava sve nultočke novonastale funkcije te ih sprema



Slika 4.2: Zvučna traka videozapisa eksperimenta.



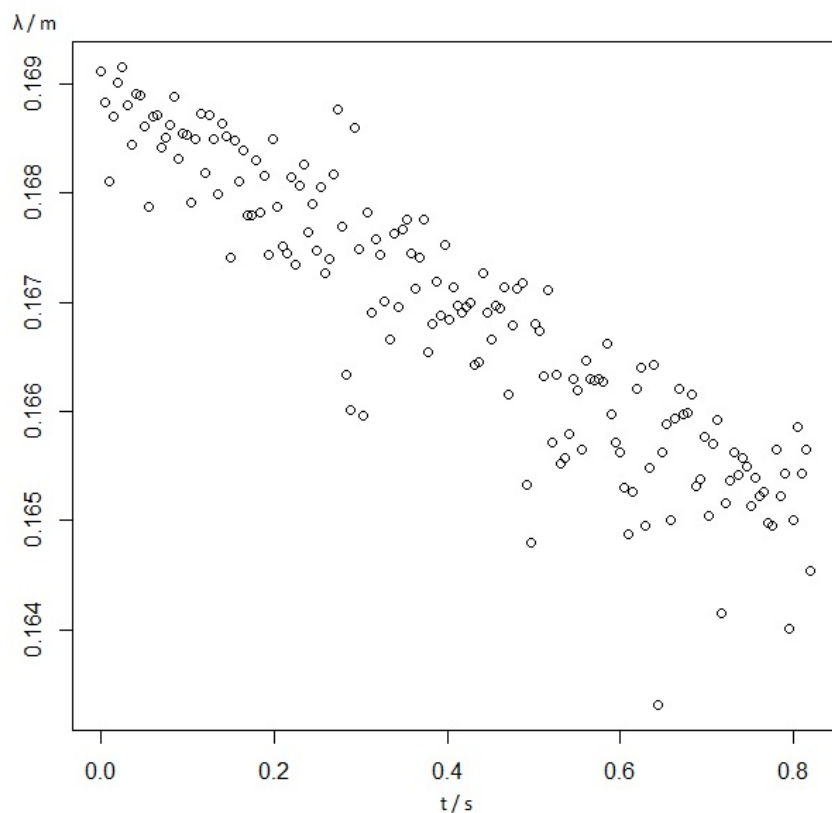
Slika 4.3: Postupak spajanja koordinata dužinama. Kružići pokazuju svaku pojedinu koordinatu pročitanu iz tekstualne datoteke, a trokutići prikazuju izračunate nultočke. Na ordinati su navedene vrijednosti napona izmjerenih na mikrofONU za pripadni trenutak, a iskazane su u relativnim jedinicama koje su proporcionalne naponu.



Slika 4.4: Razlika funkcija x i $\sin(x)$ za otprilike prvu osminu perioda ($\pi/4$).

u memoriju. Nakon što su sve nultočke izračunate lako je odrediti valne duljine za

svaki pripadni trenutak jer je poznato da su one jednake udaljenostima između svih neparnih odnosno parnih nultočaka. Neka bude napomenuto kako je u programskom algoritmu za trenutak pripadan svakoj valnoj duljini odabran trenutak kojem odgo- vara početak pojedine valne duljine. Da bi rezultat bio veće točnosti izračunata je srednja vrijednost svakih deset valnih duljina. Ta srednja vrijednost je, dakle, repre- zentant valne duljine zvuka u pojedinom trenutku. Tih srednjih vrijednosti odnosno podataka o vrijednostima valnih duljina u vremenu ima 168. Dobiveni graf ovisnosti valne duljine zvuka o vremenu u kojem se izvor zvuka gibao jednoliko ubrzano kre- nuvši iz mirovanja u trenutku $t = 0$ prikazan je na slici 4.5. Vidljivo je da se dužina valnih duljina smanjuje kako vrijeme prolazi, odnosno kako izvor zvuka ima sve veću brzinu. To je u skladu s predviđanjem. Primijetimo da je valna duljina zvuka tijekom eksperimenta između 16,5 cm i 17 cm te da zbog toga na mjestu mikrofona, odnosno na visini od 28 cm od tla, neće biti čvorova stacionarnog vala. Na mjestu mikrofona se može pojaviti nepoželjna interferencija malo niže frekventnog reflektiranog zvuka i malo više frekventnog odaslanog zvuka, no ona je spriječena spomenutim kartonskim kutijama za jaja. Nakon što su dobivene vrijednosti valnih duljina zvuka za pripadna vremena izračunata je ovisnost frekvencije zvuka u vremenu prema poznatoj relaciji



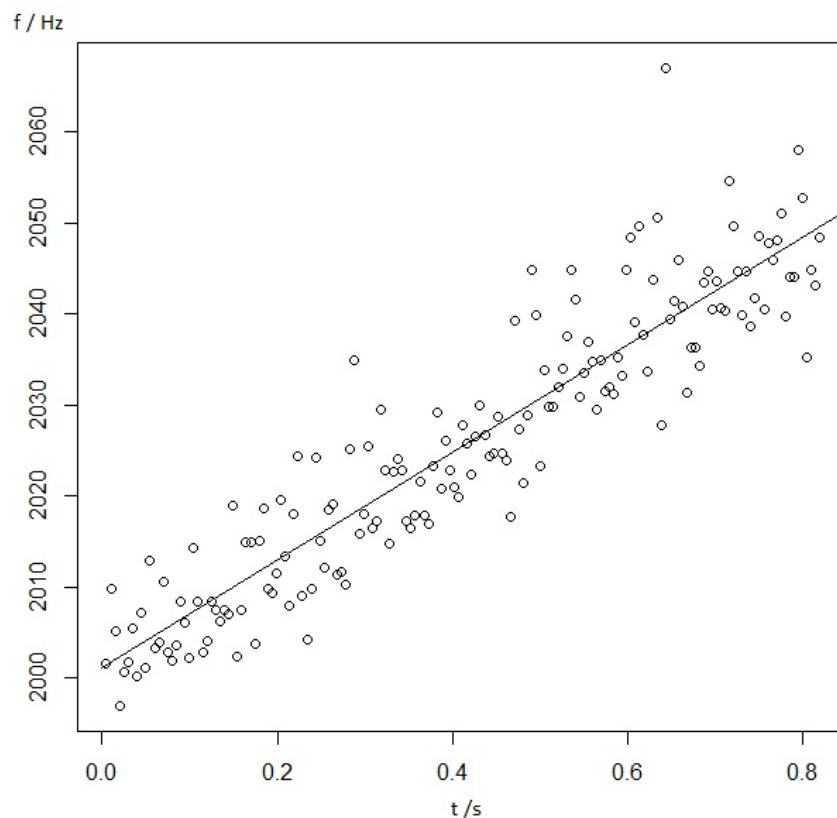
Slika 4.5: Prikaz izmjerenih valnih duljina zvuka u vremenu padanja izvora zvuka.

$$f(t) = \frac{v_z}{\lambda(t)}. \quad (4.3)$$

Ovisnost frekvencije zvuka o vremenu u kojem se izvor zvuka giba jednoliko ubrzano, a koja se u sklopu glavnog zadatka ovog rada i eksperimenta tražila, prikazana je na slici 4.6. Vidljivo je da frekvencija zvuka u vremenu raste te je to u skladu s predviđanjima. U programskom jeziku R je izračunat i koeficijent korelacije za točke na f-t grafu sa slike 4.6, a koji govori o povezanosti dviju varijabli. Za naše eksperimentalne podatke pokazala se visoka pozitivna korelacija, odnosno za koeficijent korelacije dobiveno je

$$r = 0,92. \quad (4.4)$$

Ta informacija kazuje da su podaci visoko korelirani te ima smisla pretpostaviti linearnu ovisnost. Stoga je nad podacima o frekvenciji zvuka provedena i metoda najmanjih kvadrata kojom se pronalazi pravac $y = kt + y_0$ koji najbolje opisuje ovisnost frekvencije zvuka o vremenu. Tim postupkom dobiveni su koeficijent pravca te odsječak na ordinati uz pripadne neodređenosti.



Slika 4.6: Ovisnost frekvencije zvuka jednoliko ubrzanog izvora zvuka o vremenu pada zvučnika. Jednadžba pravca je $y = kt + y_0$ pri čemu je $k = 59 \text{ Hz/s}$ i $y_0 = 2001,1 \text{ Hz}$.

Njihove vrijednosti su:

$$k = (59 \pm 2) Hz/s, \quad (4.5)$$

$$y_0 = (2001, 1 \pm 0, 9) Hz. \quad (4.6)$$

To su ujedno vrijednosti koje su rezultat provedenog eksperimenta. Vrijednost koeficijenta pravca bliska je onoj izračunatoj u potpoglavlju "Teorijska predviđanja", no potrebno je još preciznije odrediti parametre za uspoređivanje sad kad su poznate eksperimentalne specifičnosti. Naime, teorijskom razradom ovog slučaja dobiveno je da, pri određenoj aproksimaciji, frekvencija na prijammniku stoji u linearnoj ovisnosti o vremenu pri čemu je koeficijent pravca jednak

$$k = \frac{af_i}{v_z}, \quad (4.7)$$

a odsječak na ordinati

$$y_0 = f_i. \quad (4.8)$$

U ovom stadiju analize poznata je vrijednost akceleracije izvora zvuka jer je izmjerena videoanalizom. Budući da je temperatura zraka za vrijeme izvođenja eksperimenta iznosila $11^\circ C$ brzina zvuka je iznosila 338 m/s. Jedina preostala varijabla je frekvencija izvora f_i . Zvuk frekvencije 2000 Hz i sinusoidalnog oblika bio je puštan na izvor zvuka. No, preuranjeno bi bilo reći da je zvuk upravo te frekvencije proizlazio iz zvučnika. Stoga je napravljen još jedan kratki eksperiment koji je provjerio frekvenciju izlaznog zvuka koji mikrofoni bilježi kad izvor zvuka miruje, odnosno frekvenciju f_i . Mikrofon je bio postavljen na udaljenost 65 cm od zvučnika koji je mirovao te je zabilježio zvučni zapis. Taj je zvučni zapis pretvoren u tekstualnu datoteku pomoću programskog koda za jezik C, a koji je priložen u dodacima. Zatim je analiziran pomoću programskog koda za jezik R, a koji je također priložen u dodacima na kraju rada. Srednja vrijednost frekvencije zvuka mirnog zvučnika s pripadnom pogreškom iznosi

$$f_i = (2001, 05 \pm 0, 09) Hz. \quad (4.9)$$

Sad su prikupljeni svi potrebni podaci da bi se odredila vrijednost koeficijenta pravca koja će se usporediti s eksperimentalno dobivenom vrijednosti tog koeficijenta. Prema 4.7 za koeficijent pravca se, s pripadnim neodređenostima, dobiva:

$$k = (56, 8 \pm 0, 6) Hz/s. \quad (4.10)$$

To je referentni rezultat za koji se pretpostavlja veća točnost, a s kojim uspoređujemo rezultat dobiven iz eksperimenta padanja zvučnika. Usporedimo li rezultat 4.5 s rezultatom 4.10 i 4.6 s 4.9 možemo primijetiti da se rezultati, odnosno intervali vrijednosti poklapaju. Budući da se unutar jedne standardne devijacije referentni rezultati u potpunosti preklapaju sa sebi korespondirajućim eksperimentalnim rezultatima možemo zaključiti da su rezultati konzistentni i valjani, odnosno da je eksperiment

uspješno proveden polučivši ispravne rezultate.

Kad je izračunat koeficijent nagiba pravca k , pomoću izraza

$$a = \frac{kv_z}{f_i}, \quad (4.11)$$

izvedenog u potpoglavlju "Teorijska predviđanja", može se odrediti ubrzanje izvora zvuka te ga usporediti s ubrzanjem 4.1 koje je rezultat analize videozapisa. Eksperimentalnim rezultatima se, konačno, za ubrzanje izvora zvuka dobiva:

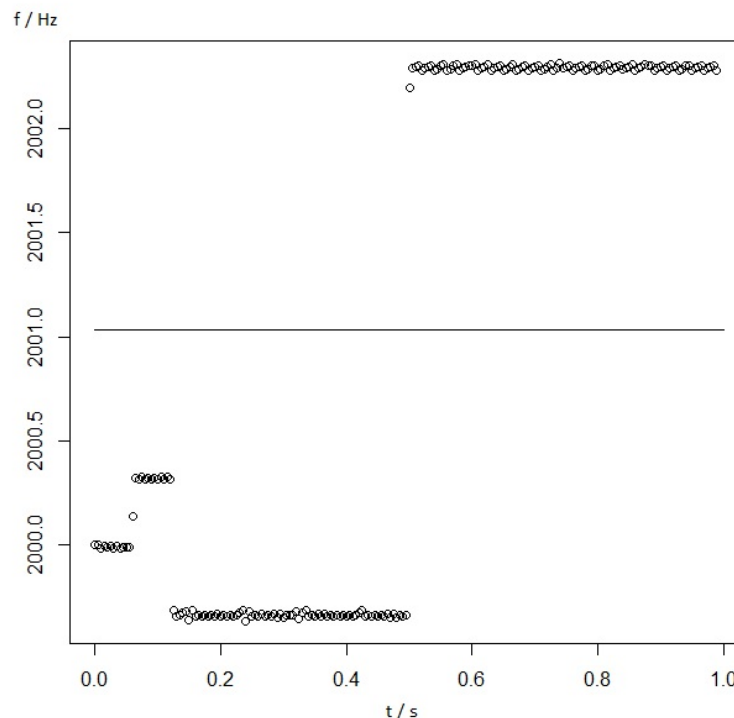
$$a = (10,0 \pm 0,3)m/s^2. \quad (4.12)$$

Dobiveni krajnji rezultat malo je većeg iznosa nego što bi trebao biti ako primijetimo da je stvarna akceleracija izvora zvuka mogla biti isključivo manja od vrijednosti 9,81 m/s² jer se praktički radilo o slobodnom padu. Interval vrijednosti dobivenog rezultata 4.12 i interval vrijednosti rezultata 4.1, koji se uzima kao referentni rezultat, u potpunosti se preklapaju unutar jedne standardne devijacije tako da ih se može ocijeniti kao konzistentne. Preciznost mjerenja je velika te relativna pogreška iznosi 3%.

4.3 Analiza grešaka

Dakle, iz nekog razloga analizom Dopplerovog efekta za izvor zvuka koji se giba jednoliko ubrzano krenuvši iz mirovanja dobivena je nešto veća vrijednost ubrzanja tog izvora nego što je dobivena metodom videoanalize za koju se, uz dobivenu veću preciznost, pretpostavlja i veća točnost mjerenja. Mogući uzrok malo povećane vrijednosti krajnjeg rezultata može se skrivati u mnogim karakteristikama eksperimenta i obrade podataka. Najviše poteškoća pri izvođenju eksperimenta uzrokovano je raznim i neizbježnim refleksijama zvuka od okolnih površina. Najveća i najefektivnija refleksija zvuka je refleksija od tla, stoga se ona morala nekako umanjiti da bi zvučni zapis bio upotrebljiv pri analizi. To je postignuto postavljanjem kartonskih kutija za jaja uokolo prijamnika. Pa ipak, pri eksperimentalnoj provedbi ostale su prisutne sve ostale refleksije, doduše manjeg značaja. Moguće je da su upravo one dodatno izobličile signal na prijammniku. Uostalom, svi realni uvjeti, uključujući i nesavršenost tehnologije, doprinjeli su neidealnom obliku resultantnog zvučnog zapisa. Dakle, moguće je da je blago i neizbježno izobličeni zvučni zapis, odnosno nesavršenost realnih uvjeta eksperimenta, uzrok malo povećane vrijednosti krajnjeg rezultata o ubrzanju izvora zvuka. Pa ipak, uz sve opisane nesavršenosti, krajnji rezultat uopće nije loš, već je vrlo blizu stvarne vrijednosti ubrzanja izvora zvuka. Drugi uzrok nešto veće vrijednosti krajnjeg rezultata može se skrivati u nesavršenosti algoritma programskog koda kojim je zvučni zapis analiziran. Za provjeru kvalitete rada programskog koda analiziran je zvučni zapis savršenog sinusoidalnog tona frekvencije 2000 Hz koji je generiran pomoću besplatnog programskog alata Audacity. Iznenadujuće je da nakon

analize takvog savršenog zvučnog zapisa rezultat koji programski kod daje za njegovu frekvenciju nije očekivanih 2000 Hz već nešto više, točnije $(2001,03 \pm 0,09)$ Hz. Taj rezultat je srednja vrijednost svih, programskim kodom izračunatih, frekvencija tijekom jedne sekunde savršenog zvučnog zapisa sinusoidalnog tona. Sve izračunate frekvencije, kao i njihova srednja vrijednost, vidljive su na slici 4.7. Sad je jasno da je nesavršenost algoritma programskog koda još jedan mogući razlog malo povećanog krajnjeg rezultata. Ipak, napomenuo bih kako je za princip računanja nultočki u zvučnom zapisu, a pomoću kojih se nadalje izračunavaju valne duljine odnosno frekvencije, odabran postupak koji se može činiti najprikladnijim. To je postupak spajanja koordinatnih točaka na x-t grafu upravo dužinama, a što se doima ispravnim načinom iz razloga što se sinusoidna funkcija u blizini svoje nultočke ponaša kao pravac što se može zaključiti ako se razmotri slika 4.4. Sve u svemu, oba opisana moguća uzroka povećanja krajnjeg rezultata, odnosno eksperimentalne i programske nesavršenosti, ne utječu na krajnji rezultat toliko da on bude značajno promijenjen. Kao što je već bilo komentirano, referentni i eksperimentalni rezultati se preklapaju unutar dvije standardne devijacije što ukazuje na to da su eksperiment i obrada dobivenih podataka uspješno provedeni. Konačno, procijenjujući kvalitetu dobivanja ubrzanja izvora zvuka metodom analize Dopplerovog efekta možemo zaključiti da ona daje vrlo do-



Slika 4.7: Obrada savršenog zvučnog zapisa sinusoidalnog tona frekvencije 2000 Hz. Programski algoritam za srednju vrijednost frekvencije tog signala, uz pripadnu neodređenost, daje $f = (2001,03 \pm 0,09)$ Hz.

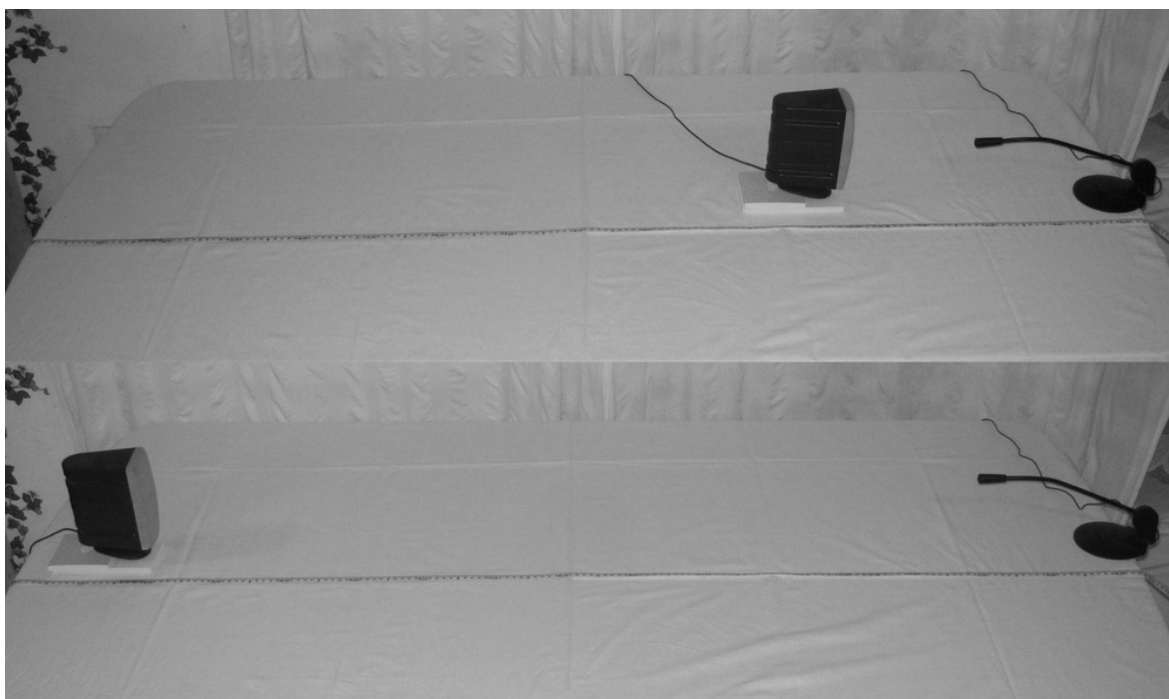
bre rezultate, ako za izvrsne rezultate pretpostavimo rezultate dobivene metodom analize videozapisa.

5 Metodička obrada teme

Kao što je već napomenuto u uvodnoj riječi ovog rada, Dopplerov efekt se u školi obrađuje i matematički opisuje za slučaj kad se izvor zvuka i/ili opažač gibaju brzinom koja je stalna u vremenu. Stoga će se u ovom poglavlju obraditi Dopplerov efekt za taj slučaj te razmotriti jedan mogući način kako bi se on mogao obraditi i prikazati učenicima.

Za poticanje motivacije o ovoj temi nastavnik može na početku sata pokrenuti video snimku automobila koji proizvodi zvuk trubeći te velikom brzinom prolazi pokraj opažača <https://www.youtube.com/watch?v=a3RfULw7aAY>. Zatim nastavnik upita cijeli razred je li nešto primijetio. Ako je potrebno nastavnik predloži da se obrati pozornost na visinu tona trube te upita ima li kakve promjene po tom pitanju. Očekuje se da se u uvodnom dijelu sata zaključi kako se visina tona mijenja ako se izvor zvuka koji proizvodi taj ton giba u odnosu na opažača. Nastavnik može ispričati povijesnu anegdotu koja je opisana u "Uvodu" ovog rada.

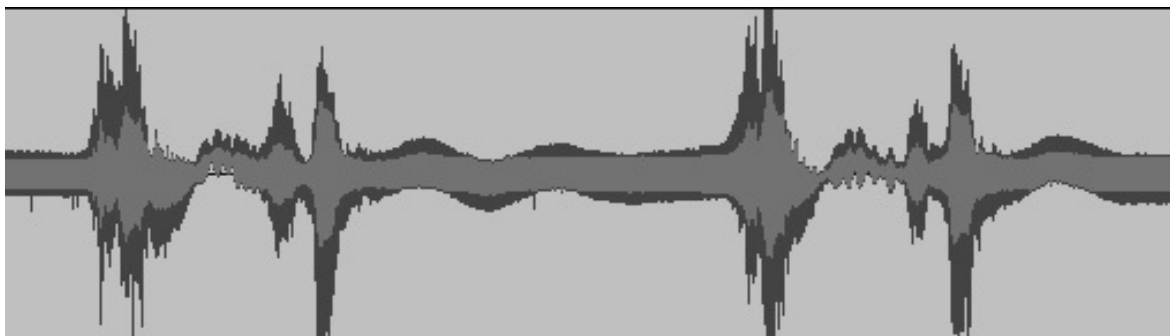
Kad je uočena pojava Dopplerovog efekta te naznačeno što to je, nastavnik predloži da se provede eksperiment u kojem će se Dopplerov efekt izmjeriti. Za tu svrhu nastavniku su od računalne opreme potrebni računalo, mikrofoni i zvučnik te besplatni programski alat Audacity od programske opreme. Nastavnik prije sata treba u programskom alatu Audacity generirati ton od primjerice 2000 Hz te ga pohraniti kao wav datoteku kako bi je upotrijebio pri pokusu. Također, nastavnik treba prije sata pripremiti postav eksperimenta koji je vidljiv na slici 5.1. Postav bi trebao biti vidljiv cijelom razredu, a to se može postići tako da ga se postavi na povišeni stol. Postav je slijedeći: od mikrofona koji je postavljen na stolu kredom se označe dva položaja, je-



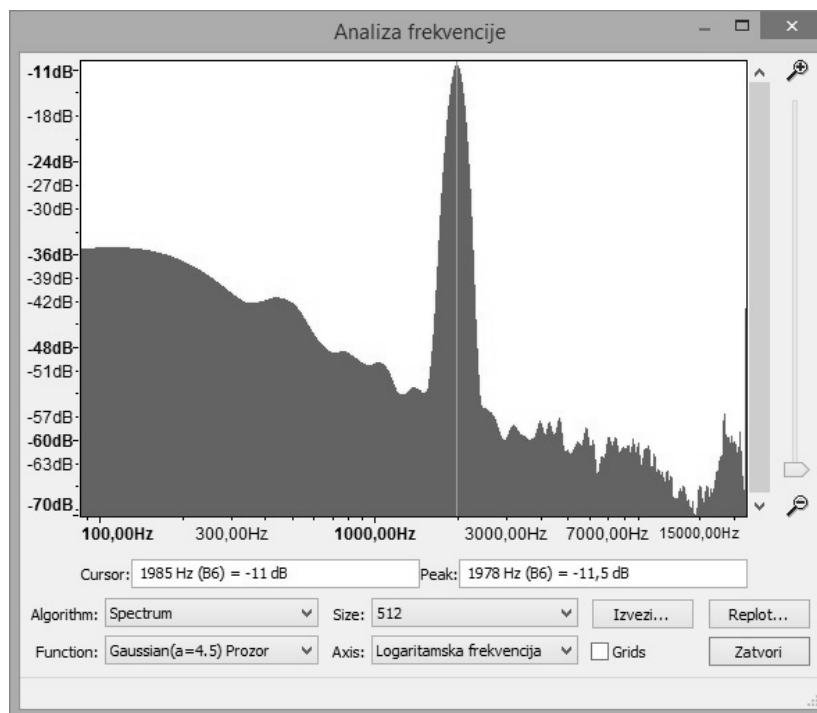
Slika 5.1: Eksperimentalni postav prikazan u prvom te zatim u drugom položaju.

dan na 20 cm i drugi na 120 cm od mikrofona. Na ta dva položaja će nastavnik rukom prenositi zvučnik koji proizvodi ranije generirani ton. U početku pokusa zvučnik je postavljen na prvi položaj odnosno 20 cm. Rezultat eksperimenta će biti zvučni zapis na kojem će se moći prepoznati Dopplerov efekt. Pomoću programskog alata Audacity zvučni zapis će se snimiti i analizirati. Nastavnik sada opiše cijelom razredu sve dijelove eksperimentalnog postava te je time sve spremno za izvođenje pokusa. Nastavnik može odabrati dobrovoljca koji će mu asistirati pri izvođenju pokusa. Potrebno je na zvučniku pustiti ton 2000 Hz te započeti snimanje u Audacityju. Zatim učenik dobrovoljac izgovori "sad" te vrlo brzo rukom premjesti zvučnik iz prvog položaja na drugi položaj, odnosno s 20 cm na 120 cm udaljenosti od mikrofona. Časkom nakon što je zvučnik premješten učenik dobrovoljac izgovori "stop". Nakon toga učenik dobrovoljac ponovno izgovori "sad" te potom vrati zvučnik u prvi položaj odnosno na udaljenost 20 cm od mikrofona nakon čega izgovori "stop", a nastavnik zaustavi snimanje. Time je pokus izveden i snimljen je zvučni zapis na kojem se čuje ton koji ima sniženu frekvenciju za vrijeme udaljavanja zvučnika od mikrofona te povišenu frekvenciju za vrijeme približavanja zvučnika i mikrofona. Područja promijenjenih frekvencija omeđena su izgovorenim riječima. Tako snimljeni zapis prikazan je na slici 5.2.

Programski alat Audacity nudi opciju mjerenja frekvencije na način da prikaže graf ovisnosti glasnoće o frekvenciji zvuka. Za frekvenciju koja se, između svih u zvučnom zapisu, najviše čuje možemo smatrati da je frekvencija koju opažatelj opaža. To mjerenje frekvencije nije precizno, ali može poslužiti za kvalitativan opis pojave Dopplerovog efekta. Dovoljno je samo označiti kratki vremenski interval na zvučnoj snimci u kojem se zvučnik udaljavao od mikrofona te odabrati opciju analiziranja frekvencije. Tim postupkom, kao što je vidljivo na slici 5.3, za frekvenciju zvuka na mikrofona dobiveno je 1978 Hz što pokazuje da ona doista manja. Istim postupkom, samo za drugi dio zvučnog zapisa, odnosno za slučaj približavanja zvučnika mikrofona, dobiveno je 2021 Hz. Time se u razredu može pokazati da je frekvencija koju opažatelj opaža snižena u slučaju udaljavanja zvučnika i mikrofona odnosno povišena u slučaju njihovog približavanja. Uostalom, dobiveni zvučni zapis se učenicima može



Slika 5.2: Zvučni zapis kao rezultat eksperimenta. Vidljiva su mjesta četiri riječi izgovorene tijekom eksperimenta koja omeđuju dva područja promijenjenih frekvencija.



Slika 5.3: Mjerenje frekvencije pomoću alata programa Audacity.

i ponovno emitirati te će svima biti uočljivo da se frekvencija za trenutke gibanja zvučnika mijenja.

Nakon što je kvalitativno obrađena pojava Dopplerovog efekta nastavnik predloži da se ona zajednički obradi i matematički. Prvo se razmatra slučaj kad se izvor zvuka giba, a opažač miruje. Brzina zvuka u zraku je konstantna te jednaka umnošku frekvencije zvuka i valne duljine zvuka, odnosno

$$v_z = f\lambda. \quad (5.1)$$

Iz potonje relacije može se izraziti f_p , odnosno frekvenciju koju opaža opažač, kao

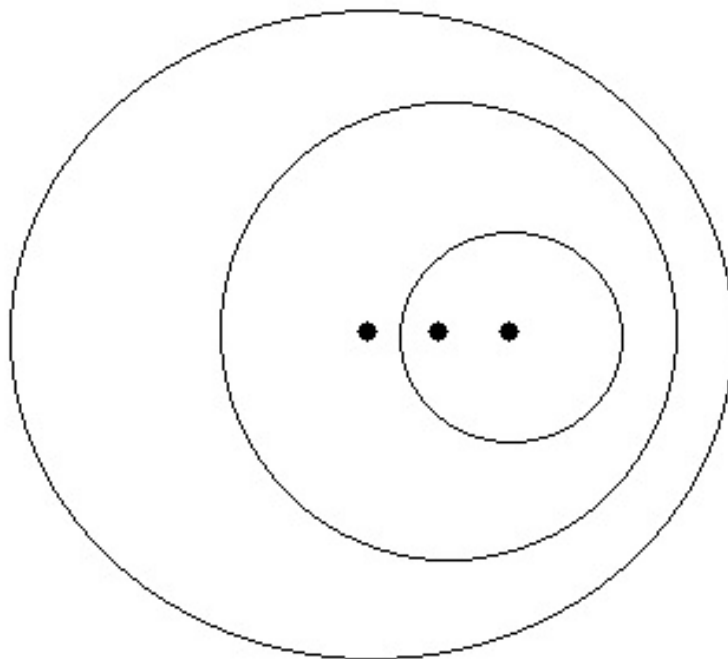
$$f_p = \frac{v_z}{\lambda}. \quad (5.2)$$

Zatim učenici crtaju u bilježnice izvor zvuka tijekom par trenutaka odnosno perioda dok se on giba konstantnom brzinom po pravcu te proizvodi zvuk koji se opisuje valnim frontama oblika kružnice tako da je vidljivo da se one šire iz izvora koji se giba. Taj shematski prikaz vidljiv je na slici 5.4. Nastavnik obilazi učenike i pomaže im pri crtanju ispravnog shematskog prikaza. Nakon što je taj prikaz dovršen nastavnik može upitati učenike kakav zvuk dolazi do opažača kojem izvor ide ususret te očekivati odgovor da taj zvuk ima manju valnu duljinu. Nadalje, nastavnik zatraži od učenika da izvedu izraz za tu smanjenu valnu duljinu. Ona je, dakako, jednaka

$$\lambda = \lambda_0 - v_i T, \quad (5.3)$$

odnosno

$$\lambda = \frac{v_z}{f_i} - \frac{v_i}{f_i}, \quad (5.4)$$



Slika 5.4: Izvor zvuka koji se giba stalnom brzinom po pravcu i valne fronte zvuka koji on proizvodi.

pri čemu je $f_i = T^{-1}$ frekvencija izvora, T vremenski period za koji se emitira jedna valna fronta, a v_i brzina izvora zvuka. Konačno, kad je izveden izraz za smanjenu valnu duljinu zvuka, učenici je mogu uvrstiti u izraz za frekvenciju koju opaža opažlač, a koju su dobili na početku računa. Time će dobiti konačan izraz

$$f_p = \frac{v_z}{v_z - v_i} f_i \quad (5.5)$$

za frekvenciju koju opaža opažlač kada se izvor zvuka giba prema njemu konstantnom brzinom. Dovoljno je da učenici zajedno s nastavnikom prokomentiraju kako je valna duljina zvuka s druge strane crteža veća, a što opisuje slučaj kada se izvor zvuka udaljava od opažlača te će u relaciji 5.3 umjesto znaka minus biti znak plus. To će uzrokovati malu izmjenu u konačnom izrazu za frekvenciju koju opaža opažlač, odnosno

$$f_p = \frac{v_z}{v_z + v_i} f_i. \quad (5.6)$$

Slučaj kad se opažlač giba prema izvoru zvuka, dok izvor miruje, još je jednostavniji. Tad se može smatrati da je brzina kojom zvuk putuje efektivno veća te da je njezin iznos jednak $v_z + v_p$ pri čemu je v_p brzina opažlača. Jednostavno se ta efektivno veća brzina po istom postupku uvrsti u 5.2 što, uz izraz za valnu duljinu

$$\lambda = \frac{v_z}{f_i}, \quad (5.7)$$

rezultira konačnim izrazom za frekvenciju koju opaža opažlač kad se on približava

mirujućem izvoru zvuka

$$f_p = \frac{v_z + v_i}{v_z} f_i. \quad (5.8)$$

Učenici će opaziti da je u slučaju kada se opažač udaljava od izvora efektivna brzina zvuka manja odnosno da je za taj slučaj konačan izraz za frekvenciju koju opaža opažač

$$f_p = \frac{v_z - v_i}{v_z} f_i. \quad (5.9)$$

Dobiveni izrazi mogu se ujediniti u jedan izraz

$$f_p = \frac{v_z \pm v_p}{v_z \mp v_i} f_i, \quad (5.10)$$

pri čemu gornji predznaci vrijede u slučaju približavanja izvora i opažača, a donji u slučaju njihovog udaljavanja. Ova formula vrijedi za slučaj kad se gibaju i izvor zvuka i opažač, a zove se Dopplerova formula. Nakon zapisivanja Dopplerove formule nastavnik treba diskutirati s učenicima u kojim se slučajevima koriste koji predznaci.

Ovime su izvedene i opisane formule za Dopplerov efekt pomoću kojih će učenici moći rješavati zadatke vezane uz ovu fizikalnu pojavu. Napomenuo bih kako nije realno očekivati da se sve gore opisano može interaktivno obraditi unutar jednog školskog sata. Najmanje bi bila potrebna dva sata. Također, interaktivni izvod Dopplerove formule primjereniji je matematičkim gimnazijama nego ostalim školama za koje se sugerira da izvod izostane, a veći naglasak stavi na konceptualno razumijevanje Dopplerove pojave.

Za završnicu blok sata iz fizike koji obrađuje ovu temu predlaže se rješavanje zadataka koji su vezani uz pojavu Dopplerovog efekta, a nekoliko zadataka navedeno je u tekstu ispod.

Zadatak 1.

Automobil prestiže kamion te neprestano trubi. Kakvu će frekvenciju vozač kamiona čuti nakon što ga je automobil prestigao u odnosu na frekvenciju koju je čuo dok je automobil bio iza njega? (Rj. kako automobil ima veću brzinu od kamiona, oni se nakon prestizanja udaljuju te vozač kamiona čuje nižu frekvenciju)

Zadatak 2.

Izvor emitira zvuk frekvencije 800 Hz te miruje. Približava mu se opažač brzinom 75% manjom od brzine zvuka. Ako je brzina zvuka $v_z = 340$ m/s, koju frekvenciju opaža opažač? (Rj. $f_p = 1000$ Hz)

Zadatak 3.

Radarskim valovima čija je frekvencija 2000 MHz kontrolira se brzina automobila. Kolika je razlika u frekvenciji upadnog vala i reflektiranog vala na automobilu koji se približava brzinom 72 km/h? (Rj. $\Delta f = 267$ Hz)

Zadatak 4.

Kad mu se približava avion, čovjek mjeri frekvenciju avionskog motora 1 kHz. Kad se avion udaljava on mjeri 2,5 puta manju frekvenciju. Ako je brzina zvuka $v_z = 330$ m/s, odredi brzinu aviona. (Rj. $v_i = 141,43$ m/s)

6 Zaključak

Glavni zadatak ovog diplomskog rada bio je teorijski razmotriti Dopplerov efekt koji opažač opaža kad se izvor zvuka prema njemu giba jednoliko ubrzano po pravcu te provedbom eksperimenta usporediti eksperimentalne rezultate s teorijskim. Teorijskim razmatranjem ustanovljeno je da će frekvencija koju opaža opažač rasti u vremenu. Matematički opis ovisnosti frekvencije o vremenu je kompliciran, ali zbog kratkog vremena gibanja izvora zvuka, budući da se radi o slobodnom padu zvučnika, ovisnost frekvencije o vremenu aproksimativno postaje linearna, a obilježavaju ju koeficijent nagiba pravca k i odsječak na ordinati y_0 . Iz koeficijenta k moguće je izračunati akceleraciju izvora zvuka te se zato provedenim eksperimentom izmjerio taj koeficijent. Ipak, koeficijent k se nije mogao teorijski precizno izračunati zbog nedovoljnog poznavanja akceleracije izvora zvuka tijekom eksperimenta. Naime, bilo je poznato da je akceleracija izvora zvuka oko $9,81 \text{ m/s}^2$, ali ona je bila malo manja uslijed djelovanja sila koje se nisu mogle eliminirati. Stoga je ona izmjerena analizom videozapisa za koju se pretpostavlja velika točnost. Time su zapravo dobivena dva eksperimentalna rezultata od kojih je rezultat dobiven videoanalizom bio referentni. Dobiveni rezultati se preklapaju unutar jedne standardne devijacije što se smatra dobrim ishodom eksperimenta. Akceleracija izvora zvuka izmjerena Dopplerovim efektom iznosi $(10,0 \pm 0,3) \text{ m/s}^2$, dok je za istu videoanalizom dobiven rezultat $(9,6 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$. Taj rezultat procijenjen je vrlo dobrim.

Budući da je provedba eksperimenta polučila dobre rezultate u ovom je radu pokazano slaganje između teorijskog predviđanja i eksperimentalnih rezultata. Pa ipak, bilo bi zanimljivo eksperimentom provjeriti istu ovisnost frekvencije koju opaža opažač o vremenu, ali za duži vremenski interval. Na taj bi se način moglo provjeriti da li je ispravna formula koja se, primjerice, koristi u članku [3], ali i drugdje. Razlika dviju formula za Dopplerov efekt u ubrzanom sustavu zanemariva je kad se pojava događa u tako kratkom vremenskom intervalu kao što je to bilo u eksperimentu koji je proveden u sklopu ovog rada. To je uočljivo sa slike 2.4. Vrijednosti tih funkcija razlikuju se za 100 % nakon 15 s za što je potrebna visina od preko 1 km, ako se radi o slobodnom padu kao što je bilo u eksperimentu iz ovog rada. Dakle, za takvo testiranje trebalo bi osmisлити neki drugačiji eksperiment.

U astronomiji se Dopplerovim efektom određuju brzina i smjer gibanja zvijezda. Budući da je 2011. dodijeljena Nobelova nagrada za fiziku za otkriće iz 1998. o ubrzanom širenju svemira [1], značajnost Dopplerovog efekta u ubrzanom sustavu je velika. Iz tog bi razloga bilo posebno zanimljivo osmisлити i provesti eksperiment u kojem bi se provjerila ovisnost frekvencije na prijammiku o vremenu gibanja akcelerirajućeg izvora.

Dodaci

Dodatak A Programski kod za programski jezik C namijenjen prevođenju wav datoteke u txt datoteku

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

struct WavHeader
{
    char Riff[4];
    long wfChunkSize;
    char Wave[4];
    char fmt[4];
    long fChunkSize;
    short wFormatTag;
    short Channels;
    long SampleRate;
    long BytesPerSec;
    short BlockAlign;
    short BitsPerSample;
    char data[4];
    long DataSize;
};

void WaveToASCII(char *FileIn, char *FileOut)
{
    struct WavHeader w;
    FILE *in, *out;
    unsigned char bit8;
    short bit16;
    int ret;
    float t;

    in = fopen(FileIn, "rb");
    if (in == NULL)
        return;
```

```

out = fopen(FileOut , "wt");
if (out == NULL)
    return;

fread(&w, sizeof(w), 1, in);
printf("Rate=%ld, bits=%d\n",w.SampleRate , w.BitaPerSample);

t = 0.0;
do
{
    if (w.BitaPerSample == 8)
    {
        ret = fread(&bit8 , sizeof(bit8),1,in);
        if (ret ==1)
        {
            fprintf(out, "%e %d\n",t,bit8);
            t += 1.0 / (float)w.SampleRate;
        }
    }
    else if (w.BitaPerSample == 16)
    {
        ret = fread(&bit16 , sizeof(bit16),1,in);
        if (ret ==1)
        {
            fprintf(out, "%e %d\n",t,bit16);
            t += 1.0 / (float)w.SampleRate;
        }
    }
}
while(ret == 1);
fclose(in);
fclose(out);
}

int main(int argc , char *argv[])
{
    if (argc != 3)
    {
        printf("los unos");
    }
}

```

```
        return (1);  
    }  
  
    WaveToASCII(argv[1],argv[2]);  
  
    return (0);  
}
```

Dodatak B Programski kod za analiziranje zvučnog zapisa u programskom jeziku R

```
data = read.table("podacim.txt")
x = data$V1
y = data$V2

n = nrow(data)

#funkcija za crtanje, pretpostavlja da su u x i y spremljene
#koordinate, a u nul nultocke
nacrtaj = function(od, do, nultocke = TRUE)
{
  x1 = x[od:do]
  y1 = y[od:do]
  plot(x1,y1, type = "l")

  if(nultocke == TRUE)
  {
    abline(h = 0, col = "green")
    for(i in 1:length(nul))
    {
      if(nul[i] >= x[od] & nul[i] <= x[do])
        abline(v = nul[i], col = "red")
    }
  }
}

#funkcija koja crta vrijednosti lambdi na pripadnim vremenima
crtajlambdu = function()
{
  x1 = tp
  y1 = lambdad
  plot(x1, y1, type = "p")
}

#crtamo prosjek svakih d tocaka
crtajfrekvenciju = function()
{
```

```

    x1 = t
    y1 = frek
    plot(x1, y1, type = "p")
}

# racunamo nultocke
nul = vector()

for(i in 1:n)
{
    if(y[i] == 0) #ako je tocka nultocka samo ju stavimo
        nul = c(nul, x[i])
    else if(i <= n-1) #ako nije gledamo dali se izmedu
    {
        #nje i iduce mijenja predznak
        if(y[i]* y[i+1] < 0) #razlicitog predznaka su
        {
            #i niti jedan nije 0
            k = (y[i+1] - y[i])/(x[i+1]-x[i]) #linearno
            nultocka = x[i] - y[i]/k #smo spojili tocke
            nul = c(nul, nultocka)
        }
    }
}

#u nul su spremljenje nultocke

m = length(nul)/2

lambda = vector()
lambda = rep(0, m-1)

#racunamo razmake izmedu svih nultocki
for(i in 1:(m-1))
{

    if(i > 1)
    {
        lambda[i] = nul[(i-1)*2+2]-nul[(i-1)*2]
    }
    else if (i == 1)
    {
        lambda[1] = nul[2]
    }
}

```

```

    }
}

#racunamo prosjek svakih d
d = 10
lambdad = vector()
lambdad = rep(0, m/d-1)
t = vector()
t = rep(0, m/d-1)

i = 1
for(j in 1:(m/d-1))
{
    suma = 0
    t[j] = nul[2*i]
    for(i in (((j-1)*d)+1):(j*d))
    {
        suma = suma + lambda[i]
    }
    lambdad[j] = suma/d
}

#racunamo frekvenciju
md = length(lambdad)
frek = rep(0, md-1)
tp = t
t = rep(0,md-1)

for(i in 1:md-1)
{
    frek[i] = 1/lambdad[i+1]
    t[i] = tp[i+1]
}

lambdad = lambdad*338
crtajlambdu()
crtajfrekvenciju()

#racuna i crta pravac pomocu metode najmanjih kvadrata

rez = lsfit(t, frek)

```

```

b = rez$coef["X"]
e = rez$coef["Intercept"]

x1 = c(0,0)
y1 = c(0,0)
for(i in 0:1)
{
    x1[i+1] = i
    y1[i+1] = e + b*i
}

points(x1, y1, type = "l")

#racuna i ispisuje linearni koeficijent korelacije
print(cor(frek, t))

#racunamo koeficijent pravca i odsjecak na ordinati
#uz pripadne neodredenosti preko metode najmanjih kvadrata

n = length(frek)

sxy = 0
sx = 0
sy = 0
sx2 = 0
sy2 = 0

x = t
y = frek

for(i in 1:n)
{
    sxy = sxy + x[i]*y[i]
    sx = sx + x[i]
    sy = sy + y[i]
    sx2 = sx2 + x[i]^2
    sy2 = sy2 + y[i]^2
}

a = (n*sxy - sx*sy)/(n*sx2 - sx^2)
bb = (sx2*sy - sx*sxy)/(n*sx2 - sx^2)

```

```

Ma = (((n*sy2 - sy^2)/(n*sx2 - sx^2) - a^2)/(n-2))^(1/2)
Mb = Ma*(sx2/n)^(1/2)

```

```

cat("k =", a, "+-", Ma, "\n")
cat("b =", bb, "+-", Mb, "\n")

```

```

#racuna i ispisuje ubrzanje izvora

```

```

g = 338*a/2000
gmax = 338*(a+Ma)/2000
gmin = 338*(a-Ma)/2000

```

```

cat("a =", g, "+-", gmax-g, "\n")

```

Literatura

- [1] Aczel, A. Božja jednađžba. 1. izd. Zagreb: Izvori 2001.
- [2] Batulija, D. Metodička obrada periodičkih gibanja analizom video zapisa. Diplomski rad. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet, 2011.
- [3] Bensky, T. J. Computer sound card assisted measurements of the acoustic Doppler effect for accelerated and unaccelerated sound sources, http://digitalcommons.calpoly.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1006&context=phy_fac. Pristupljeno 4. travnja 2016.
- [4] Margetić, N. Metodička obrada gibanja analizom video zapisa. Diplomski rad. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet, 2011.
- [5] Paar, V. Fizika 3, udžbenik za treći razred gimnazije. 3. izd. Zagreb: Školska knjiga, 2008.
- [6] Singh, S. Veliki prasak. 1. izd. Iv. Gorica: Mozaik knjiga 2007.