# Teorijski modeli prema eksperimentalnoj realizaciji anyona

**Štrkalj, Antonio**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:680714

*Rights / Prava:* In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-03-29**

*Repository / Repozitorij:*

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Antonio Štrkalj

# Teorijski modeli prema eksperimentalnoj realizaciji anyona

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

**Antonio Štrkalj**

Diplomski rad

# Teorijski modeli prema eksperimentalnoj realizaciji anyona

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2016.

Hvala roditeljima i bratu na beskrajnoj podršci i razumijevanju kroz čitav studij.
Hvala profesorima i kolegama s faksa na motivirajućoj, prijateljskoj atmosferi i spremnosti na pomoć u svakom trenutku. Hvala Nives na silnim razgovorima, potpori i inspiraciji.
Hvala profesoru Buljanu na predloženoj temi koja me fascinirala od samog početka, hvala na vođenju kroz ovo istraživanje i strpljenju kad je riječ o pitanjima. Veliko hvala Teni Dubček na nebrojenim raspravama, prijedlozima i korisnim komentarima. Uz njih dvoje, bilo je pravo zadovoljstvo raditi ovaj rad.

## Sažetak

Za razliku od trodimenzionalnog prostora u kojem mogu egzistirati samo fermioni i bozoni, u dvodimenzionalnom svijetu možemo imati kvazičestice koje zadovoljavaju drugačiju statistiku. Prilikom zamjene dvije identične kvazičestice, valna funkcija dobiva fazni faktor $e^{i\pi\alpha}$ gdje je $\alpha$ realni broj između $0$ i $1$. Stoga one nisu niti fermioni niti bozoni, već ih nazivamo anyonima. U ovom radu uveli smo pojam anyona preko jednostavnog primjera cilindara s tokom magnetskog polja $\Phi$ i česticom naboja $q$. To je najjednostavniji primjer anyona i njega je razmatrao Wilczek [5]. Jedini poznati efekt u prirodi koji pokazuje anyonska pobuđenja je kvantni Hallov efekt. Ostalih eksperimentalnih realizacija nema. Današnja istraživanja su usmjerena na mnogočestične sustave sa anyonskim pobuđenjima. Ovaj rad je različit od takvih pristupa jer su promatrane samo dvije čestice na koje smo nametnuli interakciju koja daje topološku fazu nakon zamjene čestica. Prva razmatrana interakcija je obična dipol-dipol za koju smo pokazali da ne daje topološku fazu. Njenom modifikacijom, izbacujući ovisnost o udaljenosti čestica iz interakcije, dobili smo topološku fazu nakon zamjene čestica, odnosno anyone. Pokazali smo da anyoni dobiveni takvom interakcijom nisu slobodni, već interagiraju potencijalom ovisnim o vanjskom magnetskom polju $B$ i udaljenosti između čestica.

# Theoretical models towards experimental realization of anyons


## Abstract

In three-dimensional space we can find only two types of particles regarding their statistics, fermions and bosons. When we restrict the system to two dimensions, different statistics can be obtained which is not necessarily purely fermionic or bosonic. Particles obeying that statistics are called anyons. Exchanging two identical anyons, wave function gets a phase factor $e^{i\pi\alpha}$ where $\alpha$ can be any real number between $0$ and $1$. First we discuss the simplest model of anyons, originally discussed by Wilczek [5], where anyons are flux-tubes with magnetic flux $\Phi$ and charge $q$. The only known example of anyonic excitations in nature is fractional quantum Hall effect and no other experimental realization of anyons is achieved up to this date. Most of research is based on many-body systems with anyonic excitations, while this work has a different approach. We were using only two spin particles with imposed interaction to get topological phase after exchanging two identical particles. First interaction we considered was dipol-dipol interaction, not showing s topological phase. Modifying interaction by neglecting the dependency on distance between particles, we observed the topological phase. Anyons emerging from modified model are not free but interact via a potential which depends on external magnetic field $B$ and the distance between anyons.

# Sadržaj

**1 Uvod** **1**

**2 Berryjeva faza** **2**
2.1 Izvod Berryjeve faze . . . . . 2
2.2 Svojstva Berryjeve faze . . . . . 3
2.3 Primjer spina u magnetskom polju . . . . . 5
2.4 Aharonov-Bohm efekt i geometrijska faza . . . . . 6

**3 Frakcionalna statistika i anyoni** **9**
3.1 Wilczekovi anyoni . . . . . 9
3.2 Ne-Abelovi anyoni . . . . . 11
3.3 Anyoni u prirodi . . . . . 12
3.3.1 Kvantni Hallov efekt . . . . . 12
3.4 Posebnost dvodimenzionalnih sustava . . . . . 14

**4 Rezultati** **16**
4.1 Dipol-dipol interakcija . . . . . 18
4.1.1 Kvantiziranje interakcije . . . . . 18
4.1.2 Svojstveni problem i rezultati za fazu . . . . . 21
4.2 Modificirana interakcija . . . . . 23

**5 Zaključak** **26**

**Dodaci** **27**

**A Adijabatski teorem** **27**

**B Matrice tenzorskih umnožaka** **28**

# 1 Uvod

Svakom fizičaru je poznato da u prirodi postoje dvije vrste čestica s obzirom na njihovu statistiku, to su fermioni i bozoni. U dvodimenzionalnom svijetu uz određene uvjete možemo imati i (kvazi)čestice sa frakcionalnom statistikom, odnodno (kvazi)čestice koje nisu niti čisto fermioni niti bozoni. Njih nazivamo anyonima.

Anyone dijelimo na dvije vrste, Abelove i ne-Abelove. Potonji se javljaju u sustavima s degeneracijom. Jedna od glavnih motivacija za istraživanje anyona je njihova potencijalna primjena u kvantnim računalima. Ne-Abelovi anyoni su topološki izolirani od okoline i smetnje u obliku interakcije s okolinom ne uvode dekoherenciju u sustav. Sustav pripremljen u jednom stanju ostaje u tom stanju sve dok ga mi kontrolirano ne prevedemo u neko drugo stanje zamjenom dvaju identičnih anyona. Velika kontrola i otpornost na dekoherenciju izazvanu okolinom čine anyonske sustave idealnim kandidatima za kvantna računala.

U ovom radu koncentrirati ćemo se na realizaciju Abelovih anyona pomoću sustava od dvije čestice sa nametnutom interakcijom koja daje željeno anyonsko ponašanje. To je drugačiji pristup u odnosu na dosadašnja teorijska istraživanja koja su se bavila mnogočestičnim sustavima sa kvazičestičnim anyonskim pobuđenjima. Krajnji cilj istraživanja je dobiti teorijski model koji bi davao anyone i bio realizabilan u sustavima ultrahladnih atoma.

U prvom poglavlju počinjemo s pričom o fazama u kvantnoj fizici i analiziramo takozvanu Berryjevu fazu. Nakon izvoda i pokazivanja svojstava Berry faze prolazimo kroz dva primjera: spina u magnetskom polju i Aharonov-Bohm efekta. U drugom poglavlju se bavimo frakcionalnom statistikom, pokazujemo povezanost spina i statistike. Koristimo baždarnu transformaciju kojom sa rješavanja Schrödingerove jednadžbe za nabijenu česticu u vektorskom potencijalu prelazimo na rješavanje jednadžbe za slobodne anyone. Kratko je objašnjeno što su ne-Abelovi anyoni i koji je primjer anyonskih pobuđenja kojeg možemo naći u prirodi. Također, raspravili smo zašto se anyoni pojavljuju u dvodimenzionalnim sustavima, ali ne i u trodimenzionalnim te smo objasnili što je uzrok tome. U trećem poglavlju predstavljamo rezultate našeg istraživanja. Promatrali smo modele s dipol-dipol interakcijom i njezinom modifikacijom.

# 2 Berryjeva faza

M. V. Berry u radu objavljenom 1984. godine [1] opisuje što se dešava sa kvantnim sustavom koji se nalazi u nekom svojstvenom stanju hamiltonijana $H(\vec{R})$, kada ga adijabatski transportiramo po krivulji $C$ varirajući parametre $\vec{R}$ o kojima hamiltonijan $H(\vec{R})$ ovisi. Sustav tada uz dobro nam poznatu dinamičku fazu, dobiva i geometrijsku fazu.

Uzmimo dakle sustav kojemu hamiltonijan $H$ ovisi o nekim parametrima $\vec{R} = \{X_i\}$. Mijenjajući parametre $\vec{R}$ mijenjamo i hamiltonijan te njegova svojstvena stanja. Ukoliko je promjena adijabatska, sustav će ostati u istom stanju čitavo vrijeme, kako je opisano u *Dodatku A*. Evolucija sustava između vremena $t = 0$ i $t = T$ može biti opisana kao gibanje po krivulji $\vec{R}$ u parametarskom prostoru. Ako je $\vec{R}(0) = \vec{R}(T)$, putanja je zatvorena krivulja. Da bi adijabatska aproksimacija vrijedila, vremenski interval $T$ mora biti dovoljno velik.

## *2.1 Izvod Berryjeve faze*

Stanje sustava $|\psi(t)\rangle$ evoluira u vremenu prema Schrödingerovoj jednadžbi

$$H(\vec{R}(t))|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle. \tag{2.1}$$

Neka je u početku sustav bio u jednom od svojstvenih stanja hamiltonijana, $|\psi(0)\rangle = |n(\vec{R}(0))\rangle$, koje zadovoljava

$$H(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle \tag{2.2}$$

gdje su $|n(\vec{R})\rangle$ svojstvena stanja hamiltonijana u svakom trenutku. Pretpostavljajući adijabatsku evoluciju sustava, za rješenje (2.1) možemo pisati kao

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\Phi(t)}|n(\vec{R}(t))\rangle \tag{2.3}$$

te fazu $\Phi(t)$ odrediti stavljajući rješenje nazad u (2.1). Dobivamo jednadžbu

$$-\hbar\dot{\Phi} + i\hbar\langle n(\vec{R})|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n(\vec{R})\rangle = E_n(\vec{R}) \tag{2.4}$$

gdje $\vec{R}$ također ovisi o $t$, ali ćemo to radi preglednosti ispuštati iz zapisa imajući vremensku ovisnost na umu. Jednadžbu moramo integrirati od početnog trenutka $t = 0$ do konačnog $t = T$ stavljajući rubni uvjet $\Phi(0) = 0$:

$$\Phi(T) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_n(\vec{R})\mathrm{d}t + i\int_0^T \langle n(\vec{R})|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n(\vec{R})\rangle\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Prvi član prepoznajemo kao uobičajenu dinamičku fazu

$$\phi_d = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_n(\vec{R})\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Pomoću lančanog deriviranja, podintegralnu jezgru drugoga člana raspisujemo kao

$$\langle n(\vec{R})|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n(\vec{R})\rangle = \frac{\mathrm{d}\vec{R}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n(\vec{R})\rangle \tag{2.7}$$

te nam integral prelazi sa integrala po vremenu u integral po zatvorenoj putanji $C$

$$i\int_0^T \mathrm{d}t\langle n(\vec{R})|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n(\vec{R})\rangle = i\oint_C \mathrm{d}\vec{R}\,\langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n(\vec{R})\rangle \tag{2.8}$$

ukoliko je $\vec{R}(T)=\vec{R}(0)$. Faza takvog oblika je poznata kao geometrijska ili Berryjeva faza i označavati ćemo je s $\gamma_n$:

$$\gamma_n(C) = i\oint_C \mathrm{d}\vec{R}\,\langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n(\vec{R})\rangle. \tag{2.9}$$

Rješenje Schrödingerove jednadžbe u konačnom zapisu je

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_n(\vec{R}(t'))\mathrm{d}t'}\cdot e^{i\gamma_n(t)}\cdot|n(\vec{R}(t))\rangle. \tag{2.10}$$

## *2.2 Svojstva Berryjeve faze*

Pokažimo nekoliko važnih svojstava geometrijske faze (2.9) [3]. Prvo svojstvo je da je ona realna ukoliko su stanja normirana $\left(\langle n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = 1\right)$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_{\vec{R}}(\langle n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle) &= 0\\ \langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}n(\vec{R})\rangle = -\langle\vec{\nabla}_{\vec{R}}n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle &= -\left(\langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}n(\vec{R})\rangle\right)^*\\ \mathrm{Re}\left[\langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}n(\vec{R})\rangle\right] &= 0\end{aligned} \tag{2.11}$$

stoga je $\gamma_n = i\oint_C \mathrm{d}\vec{R}\langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}n(\vec{R})\rangle$ realno. Drugo svojstvo $\gamma_n$ je invarijantnost na dodavanje faze svojstvenom vektoru $|n(t)\rangle$. Provedimo dakle baždarnu transformaciju $|n(t)\rangle \to |n'(t)\rangle = e^{i\alpha(t)}|n(t)\rangle$ i izračunajmo geometrijsku fazu $\gamma_n'$

$$\begin{aligned}\gamma_n' &= i\int\langle n'(t)|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|n'(t)\rangle\mathrm{d}t = i\int\mathrm{d}t\langle n(t)|e^{-i\alpha(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{i\alpha(t)}\,|n(t)\rangle\right)\mathrm{d}t\\ &= i\int\mathrm{d}t\left(\langle n(t)|\dot{n}(t)\rangle + i\dot{\alpha}(t)\right) = \gamma_n - \int_0^T\dot{\alpha}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ukoliko je baza svojstvenih vektora jednoznačna, što znači da se stanje u početnom i krajnjem trenutku mogu razlikovati samo za cjelobrojne umnoške od $2\pi$, tada vrijedi: $\alpha(T)-\alpha(0) = \int_0^T\dot{\alpha}\;\mathrm{d}t = 2\pi n$, odnosno $\gamma_n'$ i $\gamma_n$ su isti do na član koji ne doprinosi promjeni valne funkcije $2\pi n$; $n\in\mathbb{Z}$.

**Transformacija na integral po površini**

Direktno računanje $|\vec{\nabla}_{\vec{R}}\, n\rangle$ zahtjeva lokalnu jednoznačnu bazu $|n\rangle$ i može biti zahtjevno. Zato je korisno nekada prijeći sa računanja integrala po krivulji $C$ (2.9) u parametarskom prostoru na računanje integrala po površini čija je granica $C$. Transformacija između krivuljnog i površinskog integrala se može lagano napraviti u 3 dimenzije koristeći Stokesov teorem, a za više dimenzija trebamo koristiti teoriju diferencijalnih formi i 2-forme što nije tema ovoga rada.

Upotrijebimo Stokesov teorem u tri dimenzije:

$$\begin{aligned}\gamma_n(C) &= i\int_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\times\langle n|\vec{\nabla}n\rangle = i\int_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\langle\vec{\nabla}n|\times|\vec{\nabla}n\rangle \\ &= i\int_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\sum_{m\neq n}\langle\vec{\nabla}n|m\rangle\times\langle m|\vec{\nabla}n\rangle\end{aligned} \tag{2.13}$$

$\mathrm{d}\vec{S}$ predstavlja element površine u parametarskom prostoru. Ograničenje u sumi, $m \neq n$, je opravdano jer smo pokazali kako je $\langle n|\vec{\nabla}n\rangle$ imaginarno za normirane vektore, tada je $\langle\vec{\nabla}n|n\rangle\times\langle n|\vec{\nabla}n\rangle$ čisto realno što znači da bi faza $\gamma_n$ sadržavala imaginarni dio. To se kosi sa ranije pokazanim svojstvom da je $\gamma_n$ čisto realna veličina. Ostale elemente u sumi ćemo dobiti primjenjujući gradijent na obje strane stacionarne Schrödingerove jednadžbe (2.2) i množeći ih sa $\langle m|$:

$$\vec{\nabla}(H|n\rangle) = (\vec{\nabla}H)|n\rangle + H|\vec{\nabla}n\rangle = \left(\vec{\nabla}E_n\right)|n\rangle + E_n|\vec{\nabla}n\rangle \tag{2.14}$$

$$\langle m|\vec{\nabla}H|n\rangle = E_n\langle m|\vec{\nabla}n\rangle - \langle m|H|\vec{\nabla}n\rangle = (E_n - E_m)\langle m|\vec{\nabla}n\rangle$$

$$\langle m|\vec{\nabla}n\rangle = \frac{\langle m|\vec{\nabla}H|n\rangle}{E_n - E_m}.$$

Dobili smo Berryjevu fazu kao

$$\gamma_n = -\int_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{V}_n(\vec{R}) \tag{2.15}$$

u kojoj integral ide po površini plohe $S$, a $\vec{V}_n$ označava pokratu:

$$\vec{V}_n(\vec{R}) = \mathrm{Im}\sum_{m\neq n}\frac{\langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}H(\vec{R})|m(\vec{R})\rangle\times\langle m(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}H(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle}{(E_m(\vec{R}) - E_n(\vec{R}))^2}. \tag{2.16}$$

Prednost rada sa $\vec{V}_n(\vec{R})$ je u tome što ne moramo imati stanja $|n\rangle$ i $|m\rangle$ koja su jednoznačna u $\vec{R}$. Dodavanje proizvoljne faze na stanja $|n\rangle$ neće utjecati na $\vec{V}_n(\vec{R})$ što vidimo uspoređujući (2.15) sa prvom jednakosti u (2.13). Usporedbom je vidljivo da je $\vec{V}$ rotacija od $\langle n|\vec{\nabla}n\rangle$. $\langle n|\vec{\nabla}n\rangle$ ovisi o izboru faze za stanje $|n\rangle$: $|n\rangle \to e^{i\alpha(\vec{R})}|n\rangle \Rightarrow \langle n|\vec{\nabla}n\rangle \to \langle n|\vec{\nabla}n\rangle + i\vec{\nabla}\alpha(\vec{R})$, no rotacija toga će eliminirati $i\vec{\nabla}\alpha(\vec{R})$, odnosno $\vec{\nabla}\times i\vec{\nabla}\alpha(\vec{R}) = 0$.

Može se pokazati da je (2.15) jednozačna faza i ne ovisi o površini po kojoj integriramo već samo o krivulji $C$ koja je granica te površine. Dokaz se može naći u dodacima Berryjevog originalnog članka [1].

## 2.3 Primjer spina u magnetskom polju

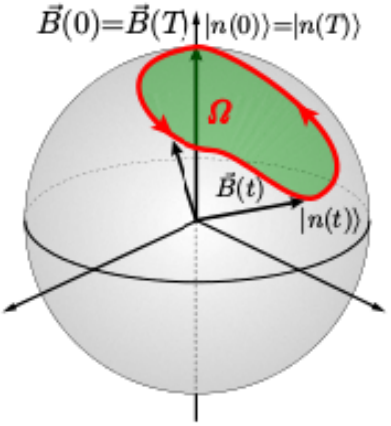
Zamislimo česticu spina $s$ u magnetskom polju $\vec{B}$. Hamiltonijan interakcije spina i polja je

$$H(\vec{B}) = -\kappa \vec{s} \cdot \vec{B} \tag{2.17}$$

gdje je $\kappa$ konstanta koja sadrži giromagnetski omjer. Sustav ima $2s+1$ energijskih stanja čije energije možemo prikazati kao

$$E_n(\vec{B}) = -\kappa\, B\, n \tag{2.18}$$

gdje je $n$ cijeli broj između $-s$ i $+s$ i označava projekciju spina na os magnetskog polja. U slučaju kada je $|\vec{B}| = 0$, tada imamo $2s+1$ degeneraciju nivoa energije $E = 0$. Komponente magnetskog polja $\vec{B}$ su nam parametri $\vec{R}$ iz prijašnjih analiza. Promotrimo nakupljanje geometrijske faze $\gamma_n$ koju sustav dobiva kada $\vec{B}$ mijenjamo po proizvoljnoj krivulji $C$.




Slika 2.1: Krivulja $C$ po kojoj mijenjamo magnetsko polje $B$ je označena crveno. Zeleno je označen prostorni kut $\Omega$ kojeg krivulja zatvara. U ovom slučaju je krivulja $C$ na sferi u parametarskom prostoru jer magnetsko polje ne mijenja iznos već samo smjer. Kada bi polje mijenjalo i iznos, krivulja ne bi bila na sferi, ali nam je bitan samo kut koji zatvara s ishodištem pa bi je morali projecirati na sferu i vidjeti koliki je $\Omega$. Slika je preuzeta iz [3].

Vektor $\vec{V}_n(\vec{B})$ je dan sa

$$\vec{V}_n(\vec{B}) = \frac{1}{B^2}\mathrm{Im}\sum_{m\neq n}\frac{\langle n, s(\vec{B})|\hat{s}|m, s(\vec{B})\rangle \times \langle m, s(\vec{B})|\hat{s}|n, s(\vec{B})\rangle}{(m-n)^2}. \tag{2.19}$$

Privremeno ćemo okrenuti $z$-os u smjeru polja $\vec{B}$ kako bismo izračunali potrebne matrične elemente

$$\begin{aligned}
(\hat{s}_x + i\hat{s}_y)|n, s\rangle &= [s(s+1) - n(n+1)]^{1/2}\,|n+1, s\rangle, \\
(\hat{s}_x - i\hat{s}_y)|n, s\rangle &= [s(s+1) - n(n-1)]^{1/2}\,|n-1, s\rangle, \\
\hat{s}_z|n, s\rangle &= n|n, s\rangle.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Vidljivo je da interakcija mješa samo stanja sa $m = n \pm 1$. Sa ovako okrenutim koordinatnim sustavom imamo

$$\begin{aligned}\vec{V}_{z,n} =& \frac{1}{B^2}\mathrm{Im}[\langle n|s_x|n+1\rangle\langle n+1|s_y|n\rangle - \langle n|s_y|n+1\rangle\langle n+1|s_x|n\rangle \\ &+ \langle n|s_x|n-1\rangle\langle n-1|s_y|n\rangle - \langle n|s_y|n-1\rangle\langle n-1|s_x|n\rangle] = \frac{n}{B^2}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Prebacujući se u nerotirani sustav, imamo završno rješenje

$$\vec{V}_n(\vec{B}) = n\frac{\vec{B}}{B^3}. \tag{2.22}$$

Integriravši to po površini $S$ kako nam nalaže izraz (2.15) dobivamo da je geometrijski faktor određen prostornim kutem $\Omega(C)$ koji $C$ zatvara sa ishodištem

$$\exp\left[i\,\gamma_n(C)\right] = \exp\left[-i\,n\,\Omega(C)\right]. \tag{2.23}$$

Geometrijska faza ovisi o projekciji spina $n$, ne o samom spinu $s$. Ukoliko magnetsko polje adijabatski mijenjamo tako da vektorom $\vec{B}$ u ravnini prebrišemo kut od $2\pi$ i prostorni kut bude $\Omega = 2\pi$ tada će nam čestice s polucijelobrojnom projekcijom spina $n$ davati fazni faktor $-1$, a one sa cijelobrojnom projekcijom $n$ će davati fazni faktor $+1$. Znamo da su čestice sa polucijelobrojnim spinom fermioni, a one cijelobrojnog spina bozoni[1]. To će nam biti kasnije korisno u razmatranju anyona. No tu valja biti oprezan jer ukoliko vektor $\vec{B}$ mijenjamo na neki drugi način, opisujući njime krivulju sa slike 2.1 naprimjer, prostorni kut $\Omega$ i geometrijska faza će biti drugačiji te nećemo moći tvrditi da su fermioni nužno prikupili fazni faktor $-1$, a bozoni $+1$.

## *2.4 Aharonov-Bohm efekt i geometrijska faza*

Zamislimo tanku zavojnicu kroz koju teče struja stvarajući magnetsko polje unutar zavojnice, dok je vani ono jednako nuli [2]. Zavojnica nam samo daje polje i svi ostali efekti sa njom su zanemareni. Dva snopa elektrona od kojih svaki prolazi sa druge strane zavojnice, kako je prikazano na slici 2.2a, će prikupiti drugačije faze što se vidi iz interferencijske slike kada snopove projeciramo na platno. Magnetsko polje izvan zavojnice je nula, ali vektorski potencijal $\vec{A}$ nije i on će utjecati na faze elektrona koji prolaze kraj zavojnice. Utjecaj na jedan i drugi snop neće biti isti jer jedan od snopova ide u smjeru $\vec{A}$, a drugi suprotno, pošto silnice potencijala $\vec{A}$ "kruže" oko zavojnice. To su prvi opisali Aharonov i Bohm [2] pokazujući da valna funkcija čestice naboja $q$ koja prolazi kraj zavojnice dobiva fazu $\exp\left(\frac{q}{\hbar}\int \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\right)$.

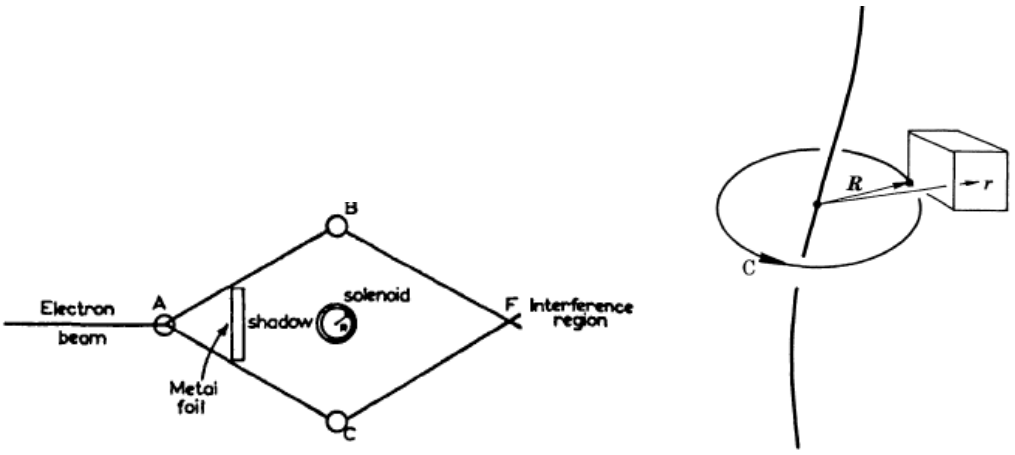
[1] Ako je spin $s$ cijelobrojan, onda će i njegove projekcije $n$ biti cijelobrojne. Analogno vrijedi i za polucijelobrojne spinove $s$.

[2] Ustvari ne moramo imati zavojnicu, ona je tu samo kako bi intuitivnije predočili situaciju. Bitno je da imamo prostor u kojem ima polja dok izvan tog prostora polje isčezava.

Pokazat ćemo da je faza koju su dobili Aharonov i Bohm upravo Berryjeva faza. Na poziciji $\vec{R}$ izvan zavojnice postoji vektorski potencijal $\vec{A}(\vec{R})$ koji zadovoljava

$$\oint_C \vec{A}(\vec{R}) \cdot \mathrm{d}\vec{R} = \Phi \tag{2.24}$$

gdje je $C$ krivulja oko zavojnice, a $\Phi$ tok magnetskog polja kroz nju. Neka se kvantni sustav kojeg ćemo promatrati sastoji od čestica naboja $q$ smještenih u kutiju kako je prikazano na slici 2.2b.




(a) (b)

Slika 2.2: a) Shematski prikaz eksperimenta za demonstraciju interferencije sa vektorskim potencijalom. Slika je preuzeta iz [2]. b) Aharonov-Bohm efekt na primjeru čestica u kutiji koju transportiramo oko zavojnice s tokom $\Phi$. Slika je preuzeta iz [1].

Kada kroz zavojnicu ne bi bilo toka polja ($\vec{A} = 0$), hamiltonijan bi ovisio o položaju $\vec{r}$ i konjugiranom momentu $\vec{p}$

$$H = H(\vec{p}, \vec{r} - \vec{R}). \tag{2.25}$$

Valne funkcije su tada oblika $\psi_n(\vec{r} - \vec{R})$ i energije $E_n$ ne ovise o $\vec{R}$. Sa uključenim poljem, svojstvena jednadžba je

$$H\left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}), \vec{r} - \vec{R}\right) |n(\vec{R})\rangle = E_n |n(\vec{R})\rangle. \tag{2.26}$$

i rješenja dobivaju fazni faktor

$$\langle \vec{r} | n(\vec{R}) \rangle = \exp\left[\frac{iq}{\hbar} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}')\right] \cdot \psi_n(\vec{r} - \vec{R}). \tag{2.27}$$

Vektorski potencijal ne utječe na energije.

Uzmimo sada sustav čestica i transportirajmo ga oko zavojnice za puni krug. Sustav će skupiti fazu koju možemo izračunati prema (2.9)

$$\begin{aligned}\langle n(\vec{R})|\vec{\nabla}_{\vec{R}}\,|n(\vec{R})\rangle &= \iiint \mathrm{d}^3\vec{r}\,\psi_n^*(\vec{r}-\vec{R})\,\left(\frac{-iq}{\hbar}A(\vec{R})\,\psi_n(\vec{r}-\vec{R})+\vec{\nabla}_{\vec{R}}\,\psi_n(\vec{r}-\vec{R})\right)\\ &= -\frac{i\,q}{\hbar}\vec{A}(\vec{R}).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Drugi član je nula iz istih razloga kao i u poglavlju 1.2, zbog normiranosti valne funkcije $\psi_n$. Geometrijska faza je neovisna o $|n\rangle$ i o obliku krivulje $C$ po kojoj premiještamo sustav čestica:

$$\gamma(C) = \frac{q}{\hbar}\oint_C \vec{A}(\vec{R})\cdot \mathrm{d}\vec{R} = \frac{q\Phi}{\hbar}. \tag{2.29}$$

Pokazali smo da je faza koju sustav prikuplja zbog utjecaja vektorskog potencijala $\vec{A}$, koju su prvi diskutirali Aharonov i Bohm [2], ista geometrijska faza o kojoj piše i Berry.

U ovom primjeru uočavamo još jednu važnu stvar, a to je analogija između $\mathrm{Im}\langle n|\vec{\nabla}\,n\rangle$ i magnetskog vektorskog potencijala $\vec{A}$. Tu analogiju ćemo koristiti kasnije u izgradnji modela anyonskog sustava sa dvije čestice.

# 3 Frakcionalna statistika i anyoni

Poznato je da čestice posjeduju intrinsični angularni moment koji nije posljedica rotacije oko neke osi. Takav moment se naziva spin. Spin igra veliku ulogu u karakteriziranju čestice i njezinom ponašanju. Čestice prema spinu možemo podijeliti u dvije vrste, one sa polucjelobrojnim spinom i one sa cjelobrojnim spinom. Pauli je u svom članku [4] pokazao da čestice polucjelobrojnog spina zadovoljavaju Fermi-Dirac statistiku i one su fermioni, a one cjelobrojnog spina Bose-Einstein statistiku i zovemo ih bozonima. U trodimenzionalnom svijetu u kojem živimo nalazimo samo te dvije vrste čestica, bozone i fermione.

Ukoliko imamo dvije identične čestice u prostoru i zamjenimo im mjesta dva puta tako da se vratimo u početni položaj, valna funkcija mora biti ista kao i prije zamjene. Taj zahtjev može biti ostvaren kroz dva slučaja, prvi je da nakon prve zamjene čestica valna funkcija dobije minus predznak, a drugi da se nakon prve zamjene čestica valna funkcija ne promjeni. Neka je $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ valna funkcija te dvije identične čestice, tada će za fermione vrijediti prvi slučaj

$$\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = -\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \tag{3.1}$$

a za bozone drugi

$$\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \tag{3.2}$$

Predznake ispred valnih funkcija možemo zapisati pomoću eksponencijalnih faktora $e^{i\alpha\pi}$ gdje ćemo $\alpha$ zvati statističkim faktorom jer određuje statistiku opisivanih čestica. Za fermione je očito $\alpha = 1$, a za bozone $\alpha = 0$. Prirodno se nameće pitanje možemo li imati čestice ili kvazičestice koje imaju statistički faktor $\alpha$ između 0 i 1? Takve bi (kvazi)čestice bile nešto između fermiona i bozona. Njih je prvi ozbiljnije krenuo istraživati Frank Wilczek [5] i nazvao ih anyonima[3].

## *3.1 Wilczekovi anyoni*

Zamislimo jednostavan primjer beskonačnog cilindra unutar kojeg postoji magnetsko polje paralelno s glavnom osi cilindra. Neka čestica naboja $q$ kruži oko cilindra po njegovom plaštu. Cilindar i naboj koji kruži po plaštu čine jednu kvazičesticu neobičnih svojstava.

Izvan cilindra nema magnetskog polja, ali postoji vektorski potencijal koji možemo izračunati pomoću $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ i za ovaj primjer on ima samo azimutalnu komponentu [4]

$$A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi r} \tag{3.3}$$

[3] eng. anyons

[4] Pošto je cilindar beskonačan, postavit ćemo koordinatni sustav tako da je z os u smjeru glavne osi cilindra, a time i magnetskog polja.

gdje je $\Phi$ tok magnetskog polja kroz unutrašnjost cilindra. Schrödingerova jednadžba za nabijenu česticu u magnetskom polju je [5]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\,\vec{A}\right)^2 \psi(\vec{r},t) \tag{3.4}$$

Uobičajeno je eliminirati $\vec{A}$ baždarnom transformacijom

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Lambda = \frac{\Phi\phi}{2\pi}. \tag{3.5}$$

$\Lambda$ je periodična funkcija u kutu $\phi$ sa periodom $2\pi$. Schrödingerova jednadžba se sada pojednostavljuje

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\vec{r},t) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\psi'(\vec{r},t) \tag{3.6}$$

Ova transformacija se odražava na valnu funkciju nabijene čestice tako da joj dodaje fazni faktor $e^{iq\Lambda}$ pa će nova valna funkcija biti

$$\psi'(\phi) = e^{iq\,\Phi\phi/2\pi}\,\psi(\phi). \tag{3.7}$$

Pošto je $\psi(\phi)$ periodična s periodom od $2\pi$, za transformiranu valnu fukciju će vrijediti

$$\psi'(\phi+2\pi) = e^{i\frac{q\Phi}{2\pi}(\phi+2\pi)}\psi(\phi+2\pi) = e^{iq\Phi}\,e^{iq\,\Phi\phi/2\pi}\,\psi(\phi) = e^{iq\Phi}\psi'(\phi). \tag{3.8}$$

Dozvoljene angularne valne funkcije su $\psi(\phi) \sim e^{im\phi}$ pa je $m = \text{cijeli broj} + \frac{q\Phi}{2\pi}$ i taj rezultat interpretiramo kao spektar orbitalnog momenta [5]. Tok $\Phi$ može biti proizvoljnog iznosa pa angularni moment nije nužno polucjelobrojan ili cjelobrojan [6].

Baždarnom transformacijom smo olakšali rješavanje Schrödingerove jednadžbe koja je sada identična jednadžbi za slobodnu česticu, ali pod cijenu uvođenja neuobičajenih rubnih uvjeta na valnu funkciju, odnosno neuobičajenog spektra angularnog momenta. Transformacijom smo problem gibanja nabijene čestice u polju sveli na problem gibanja slobodne kvazičestice (tok + naboj), anyona.

### Dva anyona

Uzet ćemo da su elektrostatske sile između dva Wilczekova anyona (cilindra s magnetskim poljem i naboja koji kruže oko njih) male, odnosno gledamo granicu kada $q$ ide u nulu. Elektrostatski efekti se mogu tretirati perturbativno. Zanimat će nas kako međusobno gibanje između dva anyona utječe na njihovu valnu funkciju. Svaki anyon ima naboj $q$ i giba se u polju drugog anyona. Ako dvočestičnu valnu funkciju $\Psi$

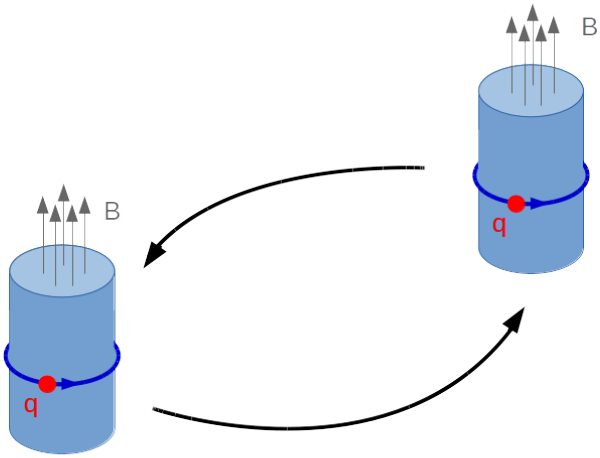
[5] Stavili smo da su prirodne konstante jednake jedinici, $\hbar = 1$. $\vec{p}$ označava kanonski impuls i $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$

[6] U prirodi je magnetski tok također kvantiziran, ali na puno finijoj skali. Elementarni kvant toka je $\Phi_0 = \frac{h}{e} \approx 10^{-15}$ Wb.

izrazimo u koordinatama centra mase $R, \theta$ i relativnih koordinata $r, \varphi$, uvjet analogan (3.8) postaje

$$\Psi(R, \theta; r, \varphi + 2\pi) = e^{4\pi i \Delta}\, \Psi(R, \theta; r, \varphi) \tag{3.9}$$

sa $\Delta \equiv \dfrac{q\Phi}{2\pi}$ kao dodatnim angularnim momentom [5].




Slika 3.1: Dva cilindra sa magnetskim poljima unutar njih oko kojih kruži čestica naboja $q$ su najjednostavniji prikaz anyona. Zamjena ovakvih kvazičestica (cilindar + naboj) će dati fazu $e^{i\pi\alpha}$ koja ne mora biti čisto bozonska ili fermionska već nešto između.

Kada imamo dva identična anyona situacija postaje nešto kompliciranija. Ako se jedan anyon pomiče, osjetit će potencijal drugog anyona kroz član $q\vec{v} \cdot \vec{A}$ u Lagrangianu i ta interakcija je dugodosežna jer $\vec{A}$ nikad ne isčezava. Možemo eliminirat tu dugodosežnu interakciju koristeći baždarnu transformaciju kao i prije, ali opet pod cijenu uvođenja neobičnih rubnih uvjeta, odnosno faznog faktora u valnoj funkciji. Nakon baždarne transformacije, zamjena dvaju čestica će davati

$$\Psi(R, \theta; r, \phi + \pi) = e^{2\pi i \Delta} \Psi(R, \theta; r, \phi) \tag{3.10}$$

stoga za $\Delta = 0$ efektivno imamo bozone, a za $\Delta = \frac{1}{2}$ fermione [5].

Spin anyona je $s_a = (\text{cijeli broj}) + \Delta + s_q$ gdje je $s_q$ spin nabijene čestice $q$. Fazni faktor koji valna funkcija dobije kada se ta dva identična anyona zamjene je $\exp(2\pi i s_a)$ i ako angularni dio valne funkcije ovisi kao $\exp(i\, m\, \phi)$ tada je

$$m = (\text{parni cijeli broj}) + 2\Delta. \tag{3.11}$$

## *3.2 Ne-Abelovi anyoni*

Anyonske valne funkcije u prošlom poglavlju su nakon zamjene dva identična anyona dobivale jednostavnu fazu, bile bi množene skalarom $e^{i\alpha\pi}$. Stanje $\Psi$ bi do na tu fazu ostalo nepromjenjeno. Vidjet ćemo da se takvi anyoni zovu Abelovi.

Ako sustav sa $N$ kvazičestica na fiksiranim pozicijama $R_1, R_2, ..., R_N$ posjeduje set od $n$ degeneriranih nivoa, faza više ne mora biti abelovska. Degeneracija se tipično događa kada postoji simetrija za neki od parametara o kojima hamiltonijan ovisi. Možemo naći ortonomiranu bazu seta degeneriranih nivoa $\psi_a, a = 1, 2, ..., n$. Zamjena dvije kvazičestice $1$ i $2$ će dati

$$\psi_a \to \hat{T}^{\alpha}_{ab} \psi_b. \tag{3.12}$$

$\hat{T}$ je $n \times n$ unitarna matrica koja miješa stanja kako vidimo iz gornje jednadžbe. Drugačijom zamjenom, npr. kvazičestica $1$ i $3$, ćemo imati

$$\psi_a \to \hat{T}^{\beta}_{ab} \psi_b \tag{3.13}$$

i u koliko te dvije matrice $\hat{T}^{\alpha}$ i $\hat{T}^{\beta}$ ne komutiraju $\hat{T}^{\alpha}_{ab}\hat{T}^{\beta}_{bc} \neq \hat{T}^{\beta}_{ab}\hat{T}^{\alpha}_{bc}$ tada su kvazičestice ne-Abelovi anyoni. Nekomutativnost matrica $\{\hat{T}^i\}$ koje opisuju zamjenu kvazičestica za sve moguće putanje zamjene kvazičestica povlači postojanje neabelovskog ponašanja anyona [6]. Pošto je matrica $\hat{T}$ kod anyona u prošlom poglavlju običan kompleksni broj, komutacijska relacija će uvijek biti zadovoljena, zato su ti anyoni Abelovi.

U opisanim ne-Abelovskim sustavima sa degeneriranim nivoima, prilikom zamjene dvaju kvazičestica, sustav se ne mora vratiti u isto stanje u kojem je bio. Pošto je energija degeneriranih nivoa jednaka, sustav može preći u neko drugo stanje degeneriranog seta nivoa. To daje interesantnu moguću primjenu ovakvih sustava. Naime, kod niskih temperatura, za energetski niskoležeće degeneracije jedini način za provođenje netrivijalnih unitarnih transformacija je međusobna zamjena kvazičestica odnosno kruženje jednih oko drugih. Nikakva lokalna perturbacija ne može imati matrične elemente koji su različiti od nule na prostoru degeneriranih stanja [7]. To fantastično svojstvo znači da su stanja izolirana od utjecaja okoline i okolina ne može uništiti pripremljeno stanje. Time se otvara put ka eksperimentalnoj realizaciji kvantnih računala. Trenutno najveći problem kod kvantnih računala je dekoherencija pripremljenih stanja zbog utjecaja okoline, što bi kod sustava s ne-Abeovim anyonima bilo vješto izbjegnuto.

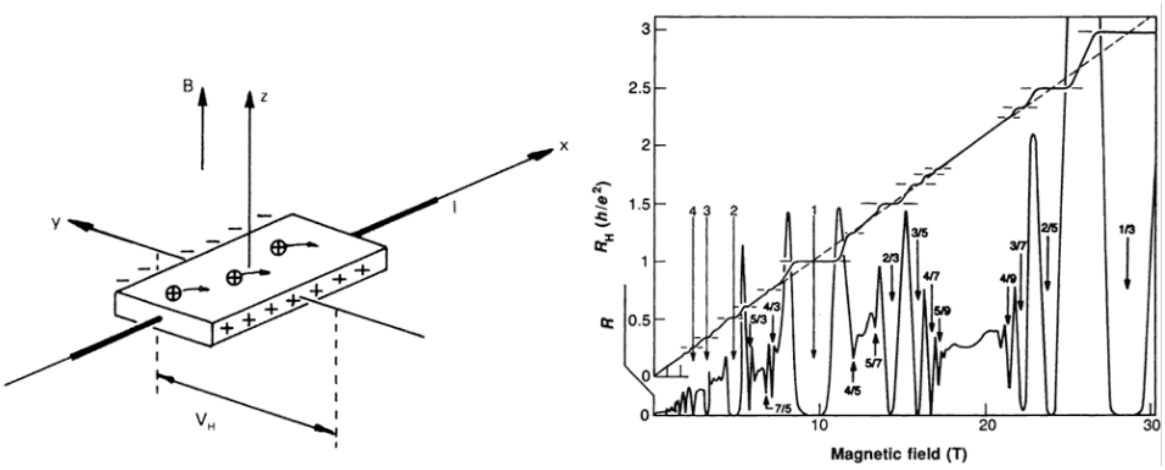
## *3.3 Anyoni u prirodi*

Anyonski sustavi nisu česti u prirodi, točnije poznat je samo jedan slučaj u kojem se vide anyonska pobuđenja, to je kvantni Hallov efekt. Iako teorijski modeli postoje [8], niti jedan nije eksperimentalno realiziran. U ovom poglavlju opisat ćemo detaljnije kvantni Hallov efekt.

### 3.3.1 Kvantni Hallov efekt

U dvodimenzionalnom vodiču kojim teče struja i koji se nalazi u magnetskom polju $\vec{B}$ okomitom na ravninu vodiča kako je prikazano na slici 3.2a, javlja se transverzalni

napon $V_H$. Ova pojava je poznata kao Hallov efekt. Elektroni se gibaju u magnetskom polju i na njih djeluje Lorentzova sila što za posljedicu ima njihovo nakupljanje duž osi okomite na struju i magnetsko polje, y osi na slici 3.2a. Uz napon $V_H$, javlja se i transverzalni Hallov otpor koji ovisi o jakosti polja $B$, koncentraciji nosilaca naboja $n_e$ i naboju tih nosilaca $e$ [10]: $R_H = \frac{B}{e\,n_e}$. Hallov otpor je linearno ovisan o magnetskom polju za mala polja.




(a) (b)

Slika 3.2: a) Princip Hallovog eksperimenta. Struja teče u smjeru x osi, magnetsko polje je u smjeru z osi i javlja se transverzalni napon $V_H$ između točaka različitih y koordinata. b) Kvantni Hallov efekt. Na visokim poljima javljaju se platoi u grafu i Hallov otpor $R_H$ više ne ovisi linearno o $B$. Na grafu je prikazana i ovisnost longitudinalnog otpora $R$ o polju koji pada na platoima. Strelicama su označeni $\nu$. Preuzeto sa [9]

Primjenimo li dovoljno jako polje $B$ i snizimo temperaturu na svega nekoliko kelvina ($T < 4$K), Hallov otpor počinje pokazivati kvantizirano stepeničasto ponašanje kao što je prikazano na slici 3.2b. Ova pojava se naziva kvantni Hall efekt (QHE).

Mjerenja su pokazala da u režimu visokih polja i niske temperature otpor ne ovisi o vrsti materijala i jakosti polja.

$$R_H = \frac{h}{e^2}\frac{1}{\nu} \tag{3.14}$$

gdje je $h$ Plancova konstanta i $\nu$ cijeli broj[7]. QHE se može objasniti pomoću jednočestičnih Landauovih stanja. Rješavanjem problema elektrona u xy ravnini i u magnetskom polju $B$ u smjeru z osi, za energijski spektar dobivamo

$$E = \hbar\omega_C\left(\frac{1}{2} + n\right) \tag{3.15}$$

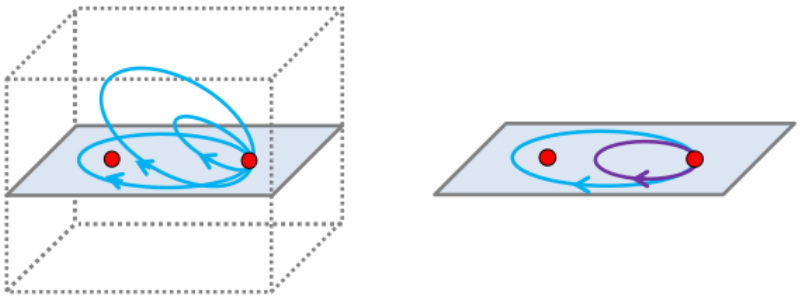
gdje je $n = 0, 1, 2, 3...$, a $\omega_C = \frac{eB}{m_e}$ je ciklotronska frekvencija. Inače kontinuirani spektar slobodnog elektrona, u magnetskom polju cijepa se na diskretne ekvidistantne

[7]Ovakav QHE sa cjelobrojnim $\nu$ se naziva cjelobrojni QHE.

nivoe velike degeneracije. U realnim sustavima, zbog prisustva nečistoća, ti nivoi nisu delta funkcije već imaju određenu širinu. Svako stanje je $N_L = \frac{e}{h}BL_xL_y$ degenerirano [11], gdje su $L_x, L_y$ dimenzije sustava. Pojačavanjem polja $B$ povećava se ciklotronska frekvencija i udaljenost među nivoima se povećava. Za faktor $\nu$, popunjeno je prvih $\nu$ stanja u sustavu i povećanje magnetskog polja ne igra ulogu u Hallovom otporu sve dok energijski nivo ne prijeđe preko fermijeve energije. Svaki put kada se zbog udaljavanja energijskih nivoa povećanjem magnetskog polja desi da nivo pređe preko nivoa fermijeve energije, pojavi se stepenica u $R_H - B$ grafu. Na platou se nivo fermijeve energije nalazi između Landauovih nivoa, u području gdje su lokalizirana stanja, pa se vidi pad longitudinalnog otpora u vodiču.

Za još viša magnetska polja, mjerenjem je ustanovljeno postojanje platoa koji odgovaraju racionalnim faktorima $\nu = \frac{p}{q}$, gdje su $p$ i $q$ mali cijeli brojevi. To je neobjašnjivo pomoću teorije jednočestičnih Landauovih stanja i ukazuje na višečestičan fenomen. Elektronske interakcije cijepaju Landauova stanja i dolazi do ne cjelobrojnih faktora $\nu$. Jedan od modela pomoću kojih se opisuje ovakav racionalni QHE je model kompozitnih fermiona, kvazičestca koje su vezana stanja elektrona i magnetskog toka $2k\frac{h}{e}$ gdje je $k$ cijeli broj. Zbog intrinsičnog magnetskog toka, kvazičestice vide manje polje od vanjskog polja $B$ i efektivna Landauova stanja postaju gušća sa manje elektrona. Smanjuje se i degeneracija pojedinog nivoa jer je $N_L \sim B$ pa je manje kvazičestica dovoljno da popuni Landauov nivo. Racionalni QHE je moguće opisivati kao cjeobrojni QHE u kojem sudjeluju kvazičestice kompozitnih fermiona. Da se pokazati da su takva pobuđenja, kompozitni fermioni, zapravo anyoni sa statističkim faktorom $\alpha = \nu$.

## 3.4 Posebnost dvodimenzionalnih sustava



Slika 3.3: Transformacije putanje u tri dimenzije (lijevo) i u dvije dimenzije (desno). U tri dimenzije svaku putanju možemo svesti u točku bez prolaska kroz drugu česticu. U dvije dimenzije to nije moguće. Preuzeto iz [12].

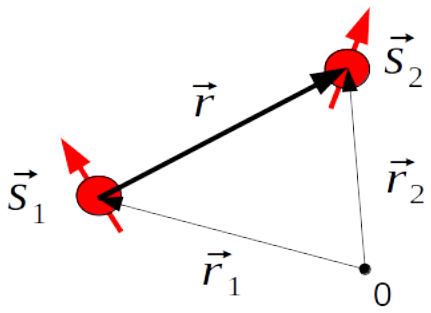
Osvrnuvši se na dosadašnje teorijske i eksperimentalne primjere, vidimo da se anyonska pobuđenja, odnosno anyoni, javljaju u sustavima sa jednom reduciranom dimenzijom, efektivno dvodimenzionalnim sustavima. U primjeru Wilczekovih anyona,

pomicanje beskonačnih cilindara duž njihovih osi ne igra nikakvu ulogu u promjeni faze valne funkcije, jedino međusoban pomak između dva cilindra okomit na njihove osi (kruženje jednog cilindra oko drugog) daje fazu [8]. Kod frakcionalnog QHE vidimo da se pobuđenja koja smo poistovjetili s anyonskim dešavaju u efektivno dvodimenzionalnom sustavu.

Postoji i jednostavan topološki argument za nepostojanje anyona u tri dimenzije. Dvostruku zamjenu čestica možemo prikazati kao kruženje jedne čestice oko druge. Na slici 3.3 je pokazano kako je u tri dimenzije putanju jedne čestice oko druge uvijek moguće kontinuirano deformirati u jednu točku. Takva trivijalna transformacija ne može davati fazu valnoj funkciji što znači da valna funkcija mora ostati ista nakon transformacije. Upravo iz tog razloga imamo samo dvije moguće statistike, bozonsku ($\alpha = 0$) i fermionsku ($\alpha = 1$). S druge strane, u dvije dimenzije nije moguće svaku putanju kontinuirano deformirati u točku bez da prođemo kroz drugu česticu.

[8] Osi cilindara su paralelne inače ih ne bi mogli okružiti jedan oko drugog bez da se presjeku.

# 4 Rezultati




Slika 4.1: Dvije čestice spina $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$. Udaljenost između čestica je $\vec{r}$.

Za početak generalno promotrimo primjer dvije čestice sa proizvoljnim spinovima $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ (slika 4.1). Budući da nemamo nikakvih vanjskih utjecaja na ta dva spina, translacijska invarijantnost nam osigurava da interakcija između njih neće ovisiti o apsolutnim položajima $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, već samo o vektoru međusobne udaljenosti $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Interakcija ne mora biti centralno simetrična pa ne možemo staviti samo apsolutnu vrijednost te udaljenosti [9]. Hamiltonijan sustava će biti

$$H = \frac{\vec{p}_1{}^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2{}^2}{2m} + H_{12}(\vec{r}, s_1, s_2) \tag{4.1}$$

gdje su $\vec{p}_{1,2} = -i\hbar\vec{\nabla}_{1,2}$, količine gibanja čestica, a $H_{12}(\vec{r}, s_1, s_2)$ hamiltonijan interakcije. Za bazu ćemo uzeti svojstvena stanja interakcije koja dobijemo rješavanjem svojstvenog problema

$$H_{12}|\chi_i\rangle = E_i|\chi_i\rangle \tag{4.2}$$

gdje je $|\chi_i\rangle \equiv |\chi_i(\vec{r})\rangle$[10]. Svako stanje možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora baze

$$|\Psi\rangle = \sum_i \psi_i(\vec{r})|\chi_i\rangle. \tag{4.3}$$

Pogledajmo sada kako pojedini članovi punog hamiltonijana (4.1) djeluju na $|\Psi\rangle$.

$$\vec{\nabla}_1|\Psi\rangle = \sum_i \Big[(\vec{\nabla}_1\psi_i)|\chi_i\rangle + \psi_i\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle\Big] = \sum_i(\vec{\nabla}_1\psi_i)|\chi_i\rangle + \sum_{i,j}\psi_i|\chi_j\rangle\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle \tag{4.4}$$

Iskoristili smo svojstvo potpunosti $\sum_j |\chi_j\rangle\langle\chi_j| = \hat{\mathbb{1}}$.

[9] Trenutno nećemo specifirati interakciju između dva spina te zbog očuvanja općenitosti primjera nećemo postavljati nikakva ograničenja na interakciju, to ćemo napraviti kasnije.

[10] Napominjemo ovisnost o $\vec{r}$ kako ne bismo ispustili neke članove pri korištenju prostornih derivacija kroz daljnji račun.

Još jednom primjenom operatora $\vec{\nabla}_1$ na gornji izraz dobivamo

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_1^2|\Psi\rangle =& \sum_i (\vec{\nabla}_1^2\psi_i)|\chi_i\rangle \\ &+ \sum_{i,j}\left[2(\vec{\nabla}_1\psi_i)|\chi_j\rangle\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle + \psi_i\vec{\nabla}_1|\chi_j\rangle\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle + \psi_i|\chi_j\rangle\,\vec{\nabla}_1\left(\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle\right)\right] \\ =& \sum_i (\vec{\nabla}_1^2\psi_i)|\chi_i\rangle + 2\sum_{i,j}(\vec{\nabla}_1\psi_i)|\chi_j\rangle\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle \\ &+ \sum_{i,j,k}\psi_i|\chi_k\rangle\langle\chi_k|\vec{\nabla}_1|\chi_j\rangle\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle + \sum_{i,j}\psi_i|\chi_j\rangle\,\vec{\nabla}_1\left(\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle\right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Potpuno analogan postupak ide za $\vec{\nabla}_2^2|\Psi\rangle$. Sada ćemo projicirati gornji izraz za $\vec{\nabla}_1^2|\Psi\rangle$ na osnovno stanje $|\chi_l\rangle$ uzimajući da su vektori baze okomiti $\langle\chi_a|\chi_b\rangle = \delta_{a,b}$

$$\begin{aligned}\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1^2|\Psi\rangle =& \vec{\nabla}_1^2\psi_l + 2\sum_i \vec{\nabla}_1\psi_i\,\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle + \sum_{i,j}\psi_i\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_j\rangle\,\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle \\ &+ \sum_i \psi_i\,\vec{\nabla}_1\left(\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_i\rangle\right).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Uz aproksimaciju $\psi_{i\neq l} \approx 0$ izraz postaje

$$\begin{aligned}\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1^2|\Psi\rangle =& \vec{\nabla}_1^2\psi_l + 2\vec{\nabla}_1\psi_l\,\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle + \sum_j \psi_l\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_j\rangle\,\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle + \psi_l\,\vec{\nabla}_1\left(\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle\right) \\ =& \vec{\nabla}_1^2\psi_l + 2\vec{\nabla}_1\psi_l\,\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle + \sum_j \psi_l|\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle|^2\,(1-\delta_{j,l}) + \psi_l|\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle|^2 \\ &+ \psi_l\,\vec{\nabla}_1\left(\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Iz sume u trećem članu smo izdvojili slučaj kada je $j = l$ kako bismo dobili završni pojednostavljeni izraz:

$$\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1^2|\Psi\rangle = \left(\vec{\nabla}_1 + \langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle\right)^2\psi_l + \sum_j \psi_l|\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle|^2\,(1-\delta_{j,l}). \tag{4.8}$$

Analogno dobivamo i za $\vec{\nabla}_2^2|\Psi\rangle$ uz zamjenu $\vec{\nabla}_1^2 \to \vec{\nabla}_2^2$.

Koristeći $\langle\chi_l|\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\psi_l \equiv \dot{\psi}_l$ , $\langle\chi_l|H_{12}|\chi_l\rangle = E_l$ i ubacujući gore dobivene izraze u Schrödingerovu jednadžbu

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle \tag{4.9}$$

gdje je $H$ puni hamiltonijan 4.1, množeći obje strane sa $\langle\chi_l|$ dobivamo jednadžbu

$$\begin{aligned}i\hbar\,\dot{\psi}_l =& -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla}_1 + \langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle\right)^2\psi_l - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla}_2 + \langle\chi_l|\vec{\nabla}_2|\chi_l\rangle\right)^2\psi_l \\ &- \frac{\hbar^2}{2m}\sum_j \psi_l|\langle\chi_j|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle|^2\,(1-\delta_{j,l}) - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_j \psi_l|\langle\chi_j|\vec{\nabla}_2|\chi_l\rangle|^2\,(1-\delta_{j,l}) + E_l\,\psi_l.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Uvedimo pokrate:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{21} &\equiv i\hbar\langle\chi_l|\vec{\nabla}_1|\chi_l\rangle \\ \vec{A}_{12} &\equiv i\hbar\langle\chi_l|\vec{\nabla}_2|\chi_l\rangle \\ W_{12} &\equiv \sum_{\alpha=1,2}\sum_j |\langle\chi_j|\vec{\nabla}_\alpha|\chi_l\rangle|^2\,(1-\delta_{j,l})\,.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Završna jednadžba za koeficijente $\psi_l$ je

$$i\hbar\,\dot{\psi}_l = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_1 - \vec{A}_{21}\right)^2\psi_l + \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_2 - \vec{A}_{12}\right)^2\psi_l + E_l\,\psi_l - \frac{\hbar^2}{2m}W_{12}\,\psi_l \tag{4.12}$$

Ako promotrimo strukturu jednadžbe (4.12), vidjet ćemo sličnosti sa Schrödingerovom jednadžbom za nabijenu česticu u magnetskom polju (3.4). Nemamo nabijene čestice, ali interakcija može dati umjetni vektorski potencijal $\vec{A}_{ij}$ [13] koji stvaraju obje čestice. Čestica $1$ se giba u vektorskom potencijalu koji stvara čestica $2$ i obrnuto. Radi provedbe identične analize kao i u poglavlju 3.1 kako bismo baždarnom transformacijom problem sveli na anyone, zahtjevamo da (4.12) i (3.4) budu iste do na članove koji ne utječu na izbor faze valne funkcije.

Prva dva člana u jednadžbi su kinetički dio hamiltonijana i njih imamo u (3.4). Treći član nam ne predstavlja problem jer energija ne ovisi o izboru faze valne funkcije i uvijek možemo pomaknuti ishodište energije stavljajući da je energija osnovnog stanja $E_l = 0$. Četvrti član je kompliciraniji jer sadrži ne trivijalan $W_{12}$ koji ovisi o vrsti interakcije, odnosno o njezinim svojstvenim stanjima. $W_{12}$ predstavlja sintetički potencijal.

Važno svojstvo koje mora biti zadovoljeno kako bismo mogli zaključiti da neka interakcija daje anyone jest da faza bude topološka, ne smije ovisiti o putanji kojom mijenjamo dvije kvazičestice i da bude različita od bozonske i fermionske. Iz analiza u poglavlju 3.1 zaključujemo da mora vrijediti

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}_{ij} = 0. \tag{4.13}$$

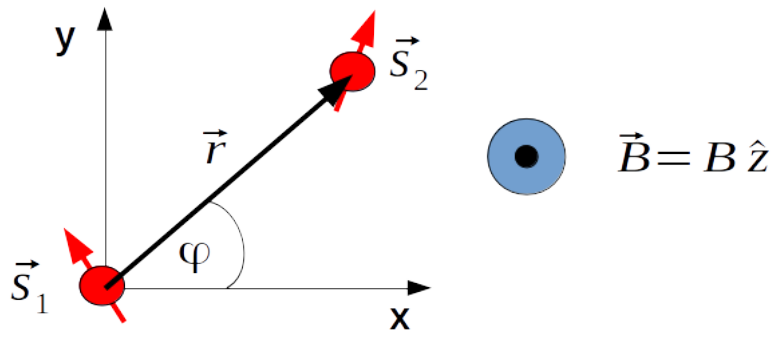
## *4.1 Dipol-dipol interakcija*

### 4.1.1 Kvantiziranje interakcije

Za početak uzmimo dipol-dipol interakciju između dvije čestice magnetskih momenata $\vec{m}_1 = \mu_B\frac{g}{\hbar}\vec{s}_1$ i $\vec{m}_2 = \mu_B\frac{g}{\hbar}\vec{s}_2$ gdje je $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$, $g$ je giromagnetski faktor, a $\vec{s}_{1,2}$ su spinovi čestica. Uz uključeno vanjsko magnetsko polje $\vec{B}$, hamiltonijan interakcije je

$$H_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1\cdot\hat{r})(\vec{m}_2\cdot\hat{r})}{r^3} - \vec{m}_1\vec{B} - \vec{m}_2\vec{B} \tag{4.14}$$

Prvu česticu smo bez gubitka općenitosti stavili u ishodište kako je prikazano na slici 4.2. Radit ćemo u polarnom sustavu jer je zbog simetrije problema tako lakše integrirat fazu kasnije kada budemo gledali zamjenu čestica, odnosno rotaciju jedne oko druge.




Slika 4.2: Dvije čestice bez naboja, spina $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ u vanjskom magnetskom polju $\vec{B}$. Čestice se nalaze u ravnini xy, a polje je u smjeru z osi. Udaljenost između čestica je $\vec{r}$.

Za početak moramo dobiti matricu hamiltonijana $H_{12}$. Gledat ćemo spinove $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ koji su opisani $2 \times 2$ Paulijevim matricama. Hilbertov prostor spinova prve i druge čestice zasebno je dvodimenzionalan te će nam za opis sustava od dva spina ukupan prostor biti četverodimenzionalan, odnosno matrica hamiltonijana će biti $4 \times 4$. Matrice spinova ćemo množiti tenzorski i raditi u bazi stanja:

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\,;\; |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\,;\; |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\,;\; |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{4.15}$$

gdje $|\uparrow\downarrow\rangle$ stanje označava da je prvi spin u smjeru polja $\vec{B}$, a drugi u suprotnom smjeru i analogno za ostala stanja. Spinovi čestica su proporcijalni Paulijevim matricama, $\vec{s}_{1,2} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}_{1,2}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\,;\; \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\,;\; \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Dobit ćemo pojedine djelove hamiltonijana $H_{12}$ i potom ih zbrojiti u ukupni hamiltonijan. Prvi član u brojniku je tenzorski umnožak dva magnetska momenta koji je do na konstante proporcijalan umnošku paulijevih matrica

$$\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_2 = \sigma_{1x} \otimes \sigma_{2x} + \sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y} + \sigma_{1z} \otimes \sigma_{2z} \tag{4.17}$$

Matrice tenzorskih umnožaka su zapisane u Dodatku B. Prvi član u brojniku hamiltonijana interakcije je

$$\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = \frac{\mu_B^2 g^2}{4} \sum_{\alpha=x,y,z} \sigma_{1\alpha} \otimes \sigma_{2\alpha} = \frac{\mu_B g^2}{4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 2 & 0\\0 & 2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Uz korištenje oznaka polarnog sustava naznačenih na slici 4.2, imamo

$$\vec{\sigma}_i \cdot \hat{r} = \cos\varphi \cdot \sigma_{ix} + \sin\varphi \cdot \sigma_{iy} \tag{4.19}$$

odnosno

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) = \cos^2\varphi\, \sigma_{1x} \otimes \sigma_{2x} + \sin^2\varphi\, \sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y} + \sin\varphi\cos\varphi\, (\sigma_{1x} \otimes \sigma_{2y} + \sigma_{1y} \otimes \sigma_{2x})\,. \tag{4.20}$$

Matrica drugog člana uu brojniku je

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) =& \frac{\mu_B^2 g^2}{4}\cos^2\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\mu_B^2 g^2}{4}\sin^2\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\mu_B^2 g^2}{4}\cdot 2i\cos\varphi\sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \frac{\mu_B^2 g^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-2i\varphi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ e^{2i\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Kada je vanjsko magnetsko polje u smjeru z osi, $\vec{B} = B_z\hat{z}$, posljednja dva člana u $H_{12}$ su

$$\vec{m}_1\vec{B} - \vec{m}_2\vec{B} = \frac{\mu_B g}{\hbar}\left(-s_{1z}B_z - s_{2z}B_z\right) = \mu_B g\, B_z \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

$s_{1z}, s_{2z}$ kao i matrice iz ostalih predkoraka možemo naći u Dodatku B.

Zbrajajući (4.18), (4.21) i (4.22) uz dodavanje predfaktora iz (4.14), dobivamo konačnu matricu hamiltonijana

$$H_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_B^2 g^2}{4}\frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3e^{-2i\varphi} \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -3e^{2i\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu_B g\, B_z \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

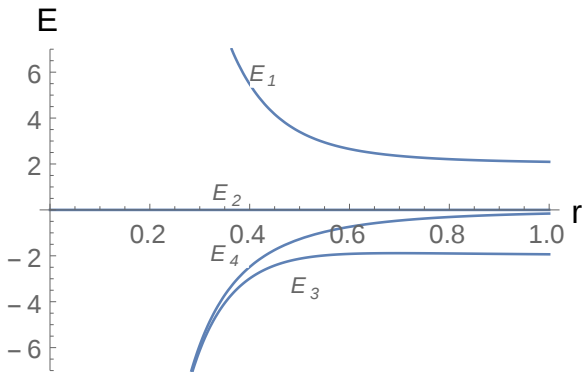
Od sada nadalje, račun ćemo pojednostavniti tako da koristimo sljedeće vrijednosti konstanti: $\mu_0 = 1$, $\mu_B = 1$, $g = 2$.

### 4.1.2 Svojstveni problem i rezultati za fazu

Kako bismo izračunali fazu koju sustav dobije zamjenom dvije čestice, moramo dijagonalizirati hamiltonijan interakcije (4.23) da dobijemo svojstvene vektore. Dijagonalizacija daje 4 energije sustava

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{1}{2\pi r^3} \\ E_2 &= 0 \\ E_3 &= \frac{1-\sqrt{9+64\pi^2B^2r^6}}{4\pi r^2} \\ E_4 &= \frac{1+\sqrt{9+64\pi^2B^2r^6}}{4\pi r^2} \end{aligned} \tag{4.24}$$

čija je ovisnost o radijusu prikazana na slici 4.3.




Slika 4.3: Energije dobivene dijagonalizacijom (4.23).

Svojstveni vektori su

$$|\chi_1'\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ |\chi_2'\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\tag{4.25}$$

$$|\chi_3'\rangle = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2i\varphi}}{3}\left(8\pi Br^3+\sqrt{9+64\pi^2B^2r^6}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ |\chi_4'\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2i\varphi}}{3}\left(-8\pi Br^3+\sqrt{9+64\pi^2B^2r^6}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

uz norme

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ N_{3,4} &= \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9+8\pi Br^3\left(8\pi Br^3 \pm \sqrt{9+64\pi^2B^2r^6}\right)}}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

U računu ćemo koristiti normirane vektore i pisati ih bez crtice: $|\chi_i\rangle = N_i|\chi_i'\rangle$. Lako je vidljivo da su vektori okomiti i vrijedi $\langle\chi_i|\chi_j\rangle = \delta_{ij}$.

Fazu ćemo računati integrirajući sintetički vektorski potencijal $\vec{A} = i\langle\chi|\vec{\nabla}|\chi\rangle$ po putanji kojom druga čestica okruži oko prve koja se nalazi u ishodištu. Tražimo da faza bude topološka što znači da ta putanja može biti proizvoljna i faza nesmije ovisiti o izboru putanje. Prva dva vektora $|\chi_1\rangle$ i $|\chi_2\rangle$ u sebi ne sadrže ovisnosti o $r$ i $\varphi$ te će biti $\vec{A} = \langle\chi_{1,2}|\vec{\nabla}\chi_{1,2}\rangle = 0$, odnosno $\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$. Stoga moramo uzeti jedan od preostala dva vektora. Uzeli smo osnovno stanje s energijom $E_3$ i vektorom $|\chi_3\rangle$. $\vec{A}$ će imati dvije komponente

$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\varphi\hat{\varphi} \tag{4.27}$$

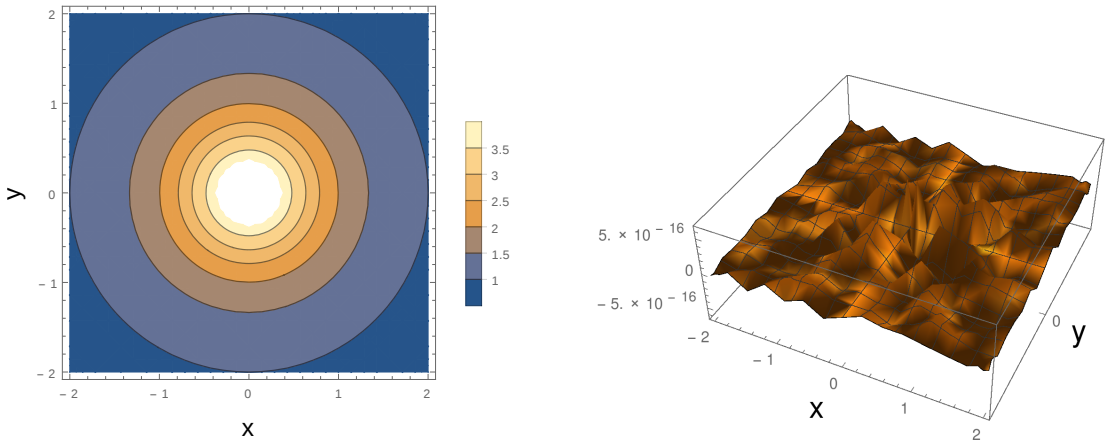
Pomoću programa *Mathematica* smo izračunali $A_r = i\langle\chi_3|\frac{\partial}{\partial r}|\chi_3\rangle$ i $A_\varphi = \frac{i}{r}\langle\chi_3|\frac{\partial}{\partial\varphi}|\chi_3\rangle$. Radijalni dio sintetičkog vektorskog potencijala iščezava

$$A_r = 0. \tag{4.28}$$

Kutni dio ima samo realni dio kako je i za očekivati

$$A_\varphi = \frac{1}{r} + \frac{8B\pi r^2}{\sqrt{9 + 64\pi^2\, B^2\, r^6}}. \tag{4.29}$$

Na slici 4.4 je prikazan rezultat za $A_\varphi$. Vidimo da on sadrži samo realni dio što je za očekivati jer njegovom integracijom po putanji ćemo dobiti fazu koja mora biti realna.

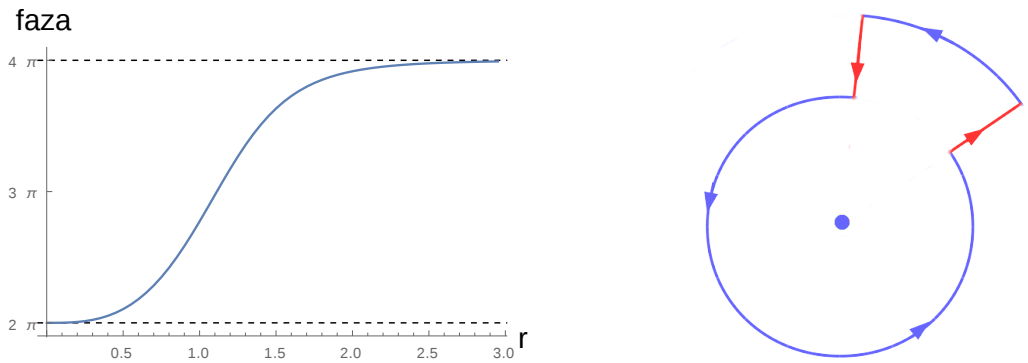



(a) Re$[A_\varphi]$ (b) Im$[A_\varphi]$

Slika 4.4: a) Realni dio komponente $A_\varphi$. b) Imaginarni dio komponente $A_\varphi$. Slika je posljedica numeričkog šuma koji je puno redova veličina manji od Re$[A_\varphi]$ te možemo tvrditi da je Im$[A_\varphi] = 0$. Za obje slike korišteno je $B = 1$.

Da bismo dobili fazu koju sustav prikupi dvostrukom zamjenom čestica $1$ i $2$, integrirat ćemo dobiveni $\vec{A}$ po najjednostavnijoj putanji, kružnici radijusa $r$

$$\gamma = \oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi} r\, A_\varphi(r)\mathrm{d}\varphi. \tag{4.30}$$




(a) (b)

Slika 4.5: a) Izračunata faza $\oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ za dvostruku zamjenu čestica, ili ekvivalentno, kruženje jedne čestice oko druge po kružnici radijusa $r$ za različite radijuse. Korišteno je $B = 1$. b) Jedna od mogućih putanja koja nije čista kružnica. Faza prikupljena na crvenim djelovima je nula.

Rezultat faze u ovisnosti o radijusu kružnice je prikazan na slici 4.5a. Vidimo da faza nije ista za sve radijuse putanja koje su kružnice. Ako izaberemo putanju kao na slici 4.5b, crveni dijelovi neće davati doprinos fazi jer je $A_r = 0$ te nam ostaje samo prikupljanje faze na plavim dijelovima. Udaljavajući izdvojeni dio od ostatka kružnice, mjenjat ćemo i ukupnu prikupljenu fazu što znači da ona ovisi o obliku putanje i nije topološka.

Dolazimo do zaključka da za opisani sustav sa dipol-dipol interakcijom ne dobivamo topološku fazu, a samim time ni anyonsko ponašanje.

## 4.2 Modificirana interakcija

Prošli primjer nam nije dao željeni rezultat, ali nam je pružio koristan uvid u ponašanje faze kada interakcija ovisi o udaljenosti među česticama. Sada ćemo interakciju modificirati na način da maknemo ovisnost o $r$. Hamiltonijan postaje

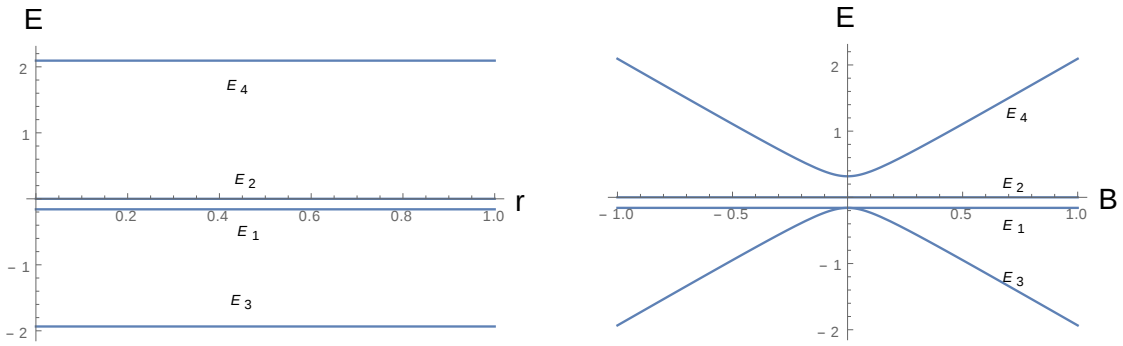
$$H_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})\right) - \vec{m}_1\vec{B} - \vec{m}_2\vec{B}. \tag{4.31}$$

Pošto je $r$ samo varijabla u izvodima iz prošlog poglavlja, možemo ga ispustiti i rezultati za matricu hamiltonijana, njezine svojstvene vektore i energije će biti istog oblika kao i u (4.23), (4.24), (4.25) samo bez $r$.

Na slici 4.6 su prikazani energijski nivoi u ovisnosti o radijusu i o vanjskom magnetskm polju $B$. Vidimo da je $E_3$ ostala najniža energija.

Izračunali smo vektorski potencijal $\vec{A}$ za ovu interakciju. Radijalni dio vektorskog potencijala je nula jer deriviramo po $r$ svojstveni vektor koji u sebi ne sadrži $r$

$$A_r = 0. \tag{4.32}$$




(a) (b)

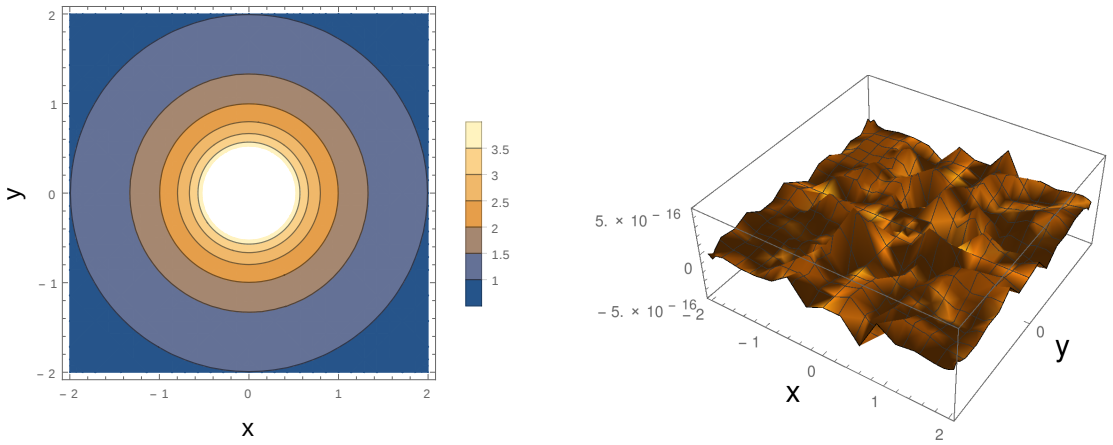
Slika 4.6: a) Energije u ovisnosti o $r$ za modificirani hamiltonijan (4.31). Korišteno je $B = 1$. b) Energije u ovisnosti o vanjskom magnetskom polju $B$.

Kutni dio postaje

$$A_\varphi = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{8B\pi}{\sqrt{9 + 64\pi^2 B^2}}\right). \tag{4.33}$$

$A_\varphi$ ostaje realan te tako osigurava dobivanje realne faze $\gamma$, kako i treba biti. Grafički prikaz $A_\varphi$ možemo vidjeti na slici 4.7. Primjetimo da je ovisnost o $r$ kod $A_\varphi$ posljedica polarnog sustava u kojem radimo gdje derivacija po kutu ima predfaktor, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$. To znači da će se prilikom integriranja po putanji u tom istom polarnom sustavu $\frac{1}{r}$ pokratiti sa $r$ koji se nalazi pod integralom i faza neće biti funkcija od udaljenosti čestica

$$\gamma \neq f(r). \tag{4.34}$$



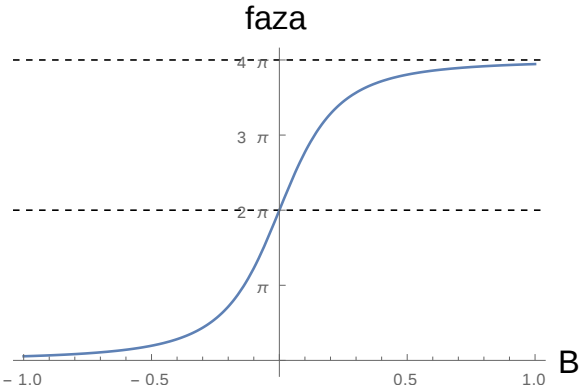

(a) Re$[A_\varphi]$ (b) Im$[A_\varphi]$

Slika 4.7: a) Realni dio komponente $A_\varphi$. b) Imaginarni dio komponente $A_\varphi$. Slika je posljedica numeričkog šuma koji je puno redova veličina manji od Re$[A_\varphi]$ te možemo tvrditi da je Im$[A_\varphi] = 0$. Za obje slike korišteno je $B = 1$.

Integriravši $\vec{A}$ po kružnici kao u (4.30) dobivamo

$$\gamma = \int_0^{2\pi} rA_\varphi \mathrm{d}\varphi = 2\pi \left(1 + \frac{4B\pi}{\sqrt{9 + 64\pi^2 B^2}}\right). \tag{4.35}$$

Ponašanje $\gamma$ u ovisnosti o vanjskom magnetskom polju $B$ je prikazano na slici 4.8.




Slika 4.8: Faza $\gamma$ u ovisnosti o jakosti vanjskog magnetskog polja $B$. Radi se o fazi koju sustav dobije dvostrukom zamjenom čestica.

Pošto faza ne ovisi o $r$, izborom bilo koje zatvorene putanje kruženja jedne čestice oko druge dobivamo istu fazu. To znači da je faza topološka. Vidimo da kontrolom vanjskog polja $B$ možemo dobiti bilo koju fazu između $2\pi$ i $4\pi$ za pozitivna, odnosno $0$ i $2\pi$ za negativna polja. Za jednostruku zamjenu dvije čestice bi dobili interval od $0$ do $\pi$ za negativna i $\pi$ do $2\pi$ za pozitivna polja no ta dva intervala su ekvivalentna jer je $e^{i\cdot 2\pi} = e^{i\cdot 0}$ [11]. Kada je $B = 0$ imamo fazu $\pi$ nakon zamjene čestica i čestice su obični fermioni. Na visokim poljima faza je $2\pi$ i čestice se ponašaju kao bozoni. Za polja koja nisu prejaka ili preslaba imamo fazu koja nije niti čisto fermionska niti bozonska već anyonska.

Možemo zaključiti da ovaj model sa interakcijom oblika (4.31) uistinu daje anyone. Modificirana dipol-dipol interakcija stvara sintetičko međudjelovanje između dvaju čestica koje je vektorskog tipa, $\vec{A}_{12/21}$. To vektorsko međudjelovanje je zaslužno za topološku fazu, odnosno dobivanje anyona.

Ali sada ostaje pitanje jesu li ti anyoni slobodni? Prisjetimo li se jednadžbe (4.12) i njezine analize, vidimo da nam preostaje još izračunati skalarni sintetički potencijal $W_{12}$. Stanja interakcije $|\chi\rangle$ ne ovise o radijusu pa od gradijenta ostane samo parcijalna derivacija po kutu. Kratak račun nam daje

$$W_{12} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{18}{64\pi^2 B^2 + 9}. \tag{4.36}$$

Potencijal nije nula i u jednadžbi (4.12) preživi zadnji član što znači da dobiveni anyoni nisu slobodni nego međudjeluju skalarnim potencijalom $W_{12}$ koji pada sa $\frac{1}{r^2}$.

[11] Za bozone možemo reći da im je faza nakon zamjene dvaju identičnih čestica $0$ ili $2\pi$.

# 5 Zaključak

U ovom radu koncentrirali smo se na model anyona koji bi se sastojao od dvije čestice sa interakcijom koja daje anyonsku fazu. Pokazali smo da čista dipol-dipol interakcija ne daje topološku fazu odnosno anyone. Modifikacijom te iste dipol-dipol interakcije tako što smo maknuli ovisnost o udaljenosti čestica $r$, dobili smo fazu koja je topološka. Faza je ovisna o vanjskom magnetskom polju $B$ koje možemo kontrolirati i tako mijenjati statistički parametar $\alpha$ kontinuirano iz fermionskog u bozonski. Zaključujemo da takva interakcija između dviju čestica u xy ravnini sa homogenim magnetskim poljem u smjeru z osi daje anyone. Izračunali smo da su čestice sa modificiranom dipol-dipol interakcijom anyoni koji međudjeluju potencijalom $W_{12} \sim \frac{1}{r^2}$.

Zbog velike mogućnosti kontrole parametara, ultrahladni atomski sustavi su danas široko upotrebljivan način simulacije brojnih kvantnih efekata i interakcija. Zamisao je koristiti takve sustave za eksperimentalnu realizaciju dobivenog anyonskog modela. No već u prvim koracima nailazimo na značajne zapreke. Postoje dva velika problema kod realizacije našeg teorijskog modela iz poglavlja 4.2. Prvi je nepostojanje takve dipol-dipol interakcije koja u sebi ne sadrži ovisnost o $r$, a drugi je da dipol-dipol interakcija nije ostvariva u sustavima ultrahladnih atoma. Postoje realizacije člana hamiltonijana koji ovisi o umnošcima dvaju spinova $\vec{m}_1\vec{m}_2 \sim \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$ [14], ali ne i člana $(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})$. Eksperimentalna realizacija cijele modificirane interakcije iz poglavlja 4.2 ne postoji i daljnje istraživanje će ići dijelom u smjeru eksperimentalnog simuliranja takve interakcije.

# Dodaci

## Dodatak A Adijabatski teorem

Ukoliko se sustav nalazi u nekom svojstvenom stanju vrementski ovisnog hamiltonijana $H(t)$, on će ostati u tom stanju u svakom vremenskom trenutku ukoliko se $H(t)$ mijenja dovoljno sporo. Ova zanimljiva tvrdnja se zove adijabatski teorem [15]. Primjetimo da nam teorem ne ograničava veličinu promjene, već samo njezinu brzinu. Odnosno mijenjajući varijabe možemo značajno promijeniti $H(t)$ i njegova svojstvena stanja, ali dokle god to radimo dovoljno sporo, u vremenu puno dužem od karakterističnih vremena sustava, sustav će ostati u istom stanju u kojem je bio prije promjene.

Neka je sustav u nekom stanju $|\psi(0)\rangle$ i neka je ono u $t = 0$ svojstveno stanje hamiltonijana $H$, $|\psi(0)\rangle = |n_0\rangle$.

$$H(t)|n_t\rangle = E_n(t)|n_t\rangle \tag{A.1}$$

Imamo potpunu bazu stanja $\{|n_t\rangle\}$ sa energijama $\{E_n(t)\}$ za koje pretpostavimo da nisu degenerirane. Schrödingerova jednadžba je

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle \tag{A.2}$$

i iz nje dobivamo vremensku evoluciju stanja. $|\psi(t)\rangle$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora baze

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(t')\mathrm{d}t'}|n_t\rangle \tag{A.3}$$

koja mora zadovoljavati (A.2). Stavljajući tako raspisan $|\psi(t)\rangle$ u (A.2) i množeći obje strane jednadžbe sa svojstvenim vektorom $\langle l_t|$ dobivamo jednadžbu za koeficijente $c(t)$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_l(t')\mathrm{d}t'}c_l(t)E_l(t) = i\hbar\dot{c}_l(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_l(t')\mathrm{d}t'} + c_l(t)E_l(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_l(t')\mathrm{d}t'} \\ + i\hbar\sum_m c_m(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_m(t')\mathrm{d}t'}\langle l_t|\dot{m}_t\rangle \end{aligned} \tag{A.4}$$

iz koje slijedi

$$\dot{c}_l(t) = -\sum_m c_m(t)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t [E_m(t')-E_l(t')]\mathrm{d}t'}\langle l_t|\dot{m}_t\rangle \tag{A.5}$$

Uzeli smo da su vektori baze ortogonalni u svakom trenutku, $\langle m_t|n_t\rangle = \delta_{mn}$. Koristeći

stacionarnu Schrödingerovu jednadžbu (A.1) dobivamo preklop $\langle l_t|\dot{m}_t\rangle$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\Big| \qquad H(t)|m_t\rangle &= E_m(t)|m_t\rangle \\
\langle l_t|\cdot\Big| \qquad \dot{H}(t)|m_t\rangle + H(t)|\dot{m}_t\rangle &= \dot{E}_m(t)|m_t\rangle + E_m(t)|\dot{m}_t\rangle \\
\langle l_t|\dot{H}(t)|m_t\rangle + E_l(t)\langle l_t|\dot{m}_t\rangle &= E_m(t)\langle l_t|\dot{m}_t\rangle \\
\langle l_t|\dot{m}_t\rangle &= \frac{\langle l_t|\dot{H}(t)|m_t\rangle}{E_m(t)-E_l(t)}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Vraćajući dobiveni preklop u (A.5) izlazi konačna jednadžba za koeficijente $\dot{c}(t)$

$$\dot{c}_l(t) = -\langle l_t|\dot{l}_t\rangle + \sum_m c_m(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t [E_m(t')-E_l(t')]\mathrm{d}t'} \frac{\langle l_t|\dot{H}(t)|m_t\rangle}{E_m(t)-E_l(t)}. \tag{A.7}$$

Prvi član mijenja $c_l$ kroz vrijeme, ali ne miješa doprinose ostalih stanja, odnosno koeficijenata $c_m$ što znači da ne može prevesti sustav u neko drugo stanje. Drugi član sadrži ostale koeficijente $c_m$ pod sumom što za posljedicu može imati promjenu stanja. Kako bismo to spriječili moramo tražiti da drugi član bude mali odnosno da vrijedi

$$\left|\frac{\langle l_t|\dot{H}(t)|m_t\rangle}{E_m(t)-E_l(t)}\right| \ll 1. \tag{A.8}$$

Matrični element vremenske promjene hamiltonijana mora biti puno manji od razmaka između enegijskih nivoa sustava. Ukoliko to vrijedi, ispunjen je uvjet adijabatskog teorema te će sustav ostati u istom stanju čitavo vrijeme.

# Dodatak B Matrice tenzorskih umnožaka

Matrice tenzorskih umnožaka u bazi $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$:

$$\sigma_{1x}\otimes\sigma_{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_{1y}\otimes\sigma_{2y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_{1z}\otimes\sigma_{2z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

$$\sigma_{1x}\otimes\sigma_{2y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \sigma_{1y}\otimes\sigma_{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

$$s_{1z} = s_z(1) \otimes \mathbb{1}(2) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

$$s_{2z} = \mathbb{1}(1) \otimes s_z(2) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

# Literatura


[1] M. V. Berry : Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45-57, (1984)

[2] Y. Aharonov , D. Bohm : Significance of Electromagnetic Potential in the Quantum Theory // Phys. Rev. **115**, 485, (1959)

[3] S. Filipp: New Aspects of the Quantum Geometric Phase. Doktorski rad. Beč: Technischen Universität Wien, 2006.

[4] W. Pauli : The Connection Between Spin and Statistics // Phys. Rev. **58**, 716, (1940)

[5] F. Wilczek : Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles // Phys. Rev. Lett. **49**, 957, (1982)

[6] F. Wilczek : Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical System // Phys. Rev. Lett. **52**, 2111, (1984)

[7] C. Nayak et al. : Non-Abelian anyons and topological quantum computation // Rev. Mod. Phys. **80**, 1083, (2008)

[8] A. Kitaev : Anyons in exactly solved model and beyond // Ann. Phys. **321**, 2, (2005)

[9] Press Release: The 1998 Nobel Prize in Physics `http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1998/press.html`, 19.6.2016.

[10] D.J. Griffiths : Introduction to Classical Electrodynamics, 5. poglavlje: Prentice-Hall, 1999.

[11] J. Solyom : Fundamentals of the Physics of Solids, Volume II (22. poglavlje), Volume III (32. poglavlje): Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

[12] K. Kustura : Slobodna ekspanzija anyona iz osnovnog stanja u potencijalu harmoničkog oscilatora. Seminarski rad. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet, 2015.

[13] J. Dalibard, G. Juzeliunas, P. Öhberg :Artificial gauge potentials for neutral atoms // Rev. Mod. Phys. **83**, 1523, (2011)

[14] S. Trotzky et al. :Time-Resolved Observation and Control of Superexchange Interactions with Ultracold Atoms in Optical Lattices // Science **319**, 295, (2008)

[15] A. Messiah : Quantum mechanics, vol. 2. Amsterdam : North-Holland, 1962.