Mercatorova i srodne kartografske projekcije

Tomić, Nikolina

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:335210

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nikolina Tomić

MERCATOROVA I SRODNE KARTOGRAFSKE PROJEKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Kartografske projekcije **2**
1.1 Uvod u kartografske projekcije 2
1.2 Podjela kartografskih projekcija 6
1.3 Karakteristike kartografskih projekcija 9

2 Normalni Mercator na sferi i srodne projekcije **11**
2.1 Mercatorova projekcija 11
2.2 Stereografska projekcija 21
2.3 Lambertova konformna konusna projekcija 24
2.4 Stereografska i Mercatorova projekcija kao granični slučajevi konusne projekcije 29

3 Svojstva povezana s Mercatorovom projekcijom **35**
3.1 Veza s kompleksnom funkcijom $\exp z$ 35
3.2 Mercatorova projekcija i krivulja traktrisa 39

4 Složenije varijante Mercatorove projekcije **42**
4.1 Transverzalni Mercator na sferi: TMS 42
4.2 Mercatorove projekcije na elipsoidu 48

Bibliografija **56**

Uvod

Temelj ovog rada je znanstvena disciplina koju nazivamo *kartografija*. Zadatak kartografije je grafički prikazati u ravnini prostornu stvarnost, odnosno pronaći najprikladniju vrstu kartografskog prikaza kako bi korisnik mogao dobiti što bolju predodžbu prostorne stvarnosti. Razne su podjele kartografije, a mi ćemo se baviti matematičkom kartografijom, odnosno kartografskim projekcijama.

U prvom poglavlju definirat će se opći pojmovi u kartografiji te će se navesti nekoliko podjela kartografskih projekcija i njihove karakteristike.

U drugom poglavlju bavit ćemo se polaznom točkom ovog rada, a to je Mercatorova karta koju je flamansko-njemački kartograf Gerardus Mercator dizajnirao 1569. godine. Mercator, rođen na području današnje Belgije, je koristio latinizirani oblik imena, a zapravo se vjerojatno zvao Gerhard Cremer. Svojim suvremenicima i kasnijim znanstvenicima je najbolje poznat po izradi karata i globusa jer je bio prvi koji je koristio pojam *atlas* kako bi opisao zbirku karata. Također je bio poznat po svojoj kaligrafiji te imenovanju Sjeverne Amerike kao takve na svojoj karti 1538. godine. U ostatku svijeta se njegovo ime povezuje s projekcijom koju je posebno izradio kako bi pomogao u plovidbi.
Zatim će se spomenuti i izvesti relacije stereografske projekcije koja naizgled nema veze s Mercatorovom projekcijom, ali će se utvrditi da su Mercatorova i stereografska projekcija granični slučajevi Lambertove konusne projekcije, koju ćemo također proučavati.

Nadalje, u trećem poglavlju će se pokazati neka zanimljiva svojstva koja povezuju Mercatorovu projekciju s drugim matematičkim pojmovima, odnosno konkretno će se izvesti veze s kompleksnom funkcijom $\exp z$ i s krivuljom traktrisom.

I na kraju, u četvrtom poglavlju izložit će se složenije varijante Mercatorove projekcije. Tako će se umjesto konstrukcije Normalnog Mercatora na sferi prikazati konstrukcija Transverzalnog Mercatora na sferi s ciljem postizanja veće preciznosti projiciranja čitave sfere.
Također će se ukratko opisati Mercatorove projekcije na elipsoidu pa ćemo se pobliže upoznati i s geometrijom elipsoida.

Poglavlje 1

Kartografske projekcije

1.1 Uvod u kartografske projekcije

Kartografska projekcija je način preslikavanja plohe sfere ili elipsoida, kojima se u kartografiji aproksimira ploha Zemlje, ostalih nebeskih tijela i nebeskog svoda, u ravninu. Opća svrha izučavanja kartografskih projekcija je stvaranje matematičke osnove za izradu karata i rješavanje teorijskih i praktičnih zadataka u kartografiji, geodeziji, geografiji, astronomiji, navigaciji i ostalim srodnim znanostima.

Za kartografsko preslikavanje važno je ustanoviti relacije između koordinata točaka na Zemlji, odnosno na elipsoidu ili sferi, i koordinata njihovih slika u projekciji. Te relacije najčešće se zadaju analitički, tj. osnovnim kartografskim jednadžbama

$$x = f_1(\varphi, \theta), \qquad y = f_2(\varphi, \theta),$$

gdje su φ i θ geografske koordinate na elipsoidu ili sferi, a x i y pravokutne koordinate u ravnini projekcije. Projekcija se još može zadati i tablicom koordinata ili opisom konstrukcije mreže meridijana i paralela, jer su točke na plohi elipsoida ili sfere određene upravo presjekom meridijana i paralela.

Jedan od glavnih ciljeva kartografa i matematičara koji su se bavili kartografskim projekcijama bio je dobiti projekciju s minimalnim izobličenjem (deformacijom). Hipotetska kartografska projekcija koja vjerno reproducira sve značajke originalne sfere bila bi savršeno ekvidistantna, tj. udaljenosti između svake dvije točke zadržale bi isti omjer na karti i sferi pa bi stoga i svi oblici bili sačuvani. No, na ravnoj karti ovo svojstvo jednostavno nije moguće, što se lako može vidjeti u točkama na rubu karte. Ako karta pokriva kontinent ili cijelu Zemlju izobličenja će biti izrazita, a ukoliko je regija veličine manjeg grada onda se izobličenje može jedva izmjeriti pomoću više projekcija, ali ipak može biti primjetno korištenjem neke druge projekcije.

Doslovno postoji beskonačan broj kartografskih projekcija koje se mogu izraditi, a objavljeno ih je nekoliko stotina te one često nose ime svog autora, npr. Mercatorova, Sansonova, Robinsonova.

Opći pojmovi u kartografiji

Definirajmo neke važne pojmove koje ćemo višekratno spominjati u ovom radu. Kako bi se utvrdio položaj točaka na Zemlji, javlja se potreba za uvođenjem geografskog koordinatnog sustava na sferi ili elipsoidu te se stoga na površinu Zemlje postavlja mreža meridijana i paralela.

Meridijan je linija na Zemljinoj sferi koja je dobivena presjekom te sfere poluravninom čiji se rubni pravac podudara s osi rotacije te sfere, odnosno s pravcem koji prolazi polovima Zemlje. Taj pravac također nazivamo i **obrtna (rotacijska) os**. Analogno definiramo meridijan na Zemljinom elipsoidu. Kao glavni meridijan je odabran Grinički meridijan koji je kao međunarodni standard postavljen 1884. godine. Ime je dobio po gradu Greenwich u Engleskoj, kroz koji prolazi, a najčešće ga zovemo **nulti ili početni meridijan**. Prema početnom meridijanu se određuje geografska duljina.

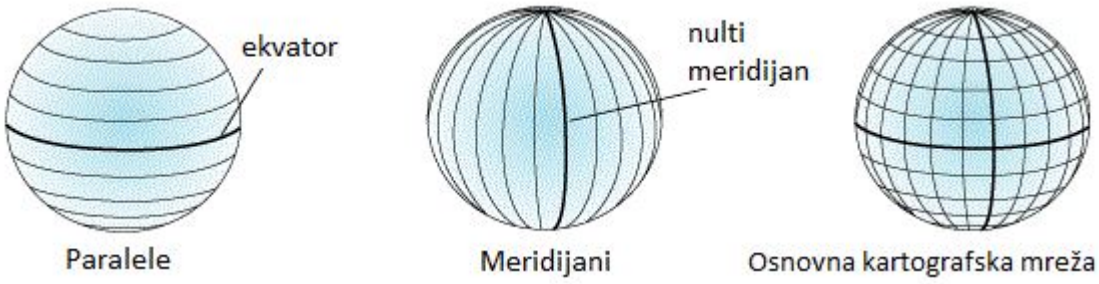
Geografsku duljinu (često se piše *geografska dužina*) definiramo kao kut između ravnine početnog meridijana i ravnine meridijana zadane točke, a označavamo s φ. Mjeri se od početnog meridijana od 0° do 180° prema istoku te od 0° do 180° prema zapadu. Time razlikujemo istočnu i zapadnu geografsku duljinu. Vrijednost tog kuta u smjeru istoka smatra se pozitivnom.

Paralela je linija (kružnica) na Zemljinoj sferi koja je dobivena presjekom te sfere ravninom koja je okomita na obrtnu os te sfere, odnosno na pravac koji prolazi polovima Zemlje. Analogno definiramo paralelu na Zemljinom elipsoidu. Glavna paralela je jednako udaljena od polova, te je ujedno i najveća paralela i nazivamo je **ekvator**. Ekvator dijeli Zemljinu sferu na sjevernu i južnu polutku, odnosno hemisferu. Prema ekvatoru se određuje geografska širina.

Geografsku širinu definiramo kao kut od ekvatorske ravnine do smjera normale na Zemljinu sferu kroz danu točku. Geografska širina može biti sjeverna ili pozitivna i južna ili negativna, a označavamo je s θ.

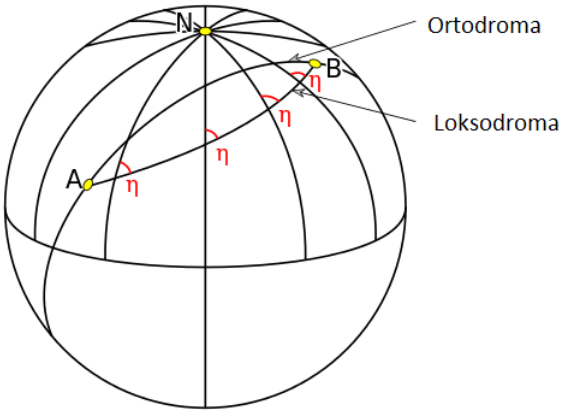
Osnovna kartografska mreža je predočena slikama meridijana i paralela. Najjednostavniji oblik kartografske mreže u danoj projekciji je **normalna kartografska mreža**.

Azimut je kut u točki promatranja između meridijana te točke i smjera prema drugoj točki ili drugim riječima kut između sjevera i pravca kretanja, orijentiran u smjeru kazaljke na satu. Liniju (krivulju) koja sve meridijane siječe pod istim azimutom nazivamo **loksodroma** (pogledaj sliku 1.2). Primjerice, kažemo da brod plovi po loksodromi kada na putu između dviju točaka stalno plovi u istom kursu. Na nekim kartama su loksodrome ravne linije, odnosno pravci.



Slika 1.1: Paralele, meridijani i osnovna kartografska mreža

Općenito, **geodetsku liniju** geometrijski interpretiramo kao najkraću spojnicu dviju točaka na plohi. Najkraću spojnicu dviju točaka na sferi nazivamo **ortodroma**. Na sferi su ortodrome lukovi velikih kružnica (pogledaj sliku 1.2). **Velika kružnica na sferi** je kružnica čije je središte ujedno i središte sfere, a dobiva se tako da se sfera presiječe ravninom kroz njezino središte. Kada se iz središta sfere projicira velika kružnica na neku ravninu, koja ne prolazi tim središtem, dobiva se pravac (vidi sliku 1.7).



Slika 1.2: Ortodroma i loksodroma na sferi

Koliko je umanjen prikaz na karti u odnosu na stvarne udaljenosti, pokazuje nam mjerilo. **Mjerilo duljina** je omjer diferencijala duljine luka u projekciji i diferencijala odgovarajućeg luka na plohi kojom se aproksimira Zemlja, odnosno na elipsoidu ili sferi. Na karti se mjerilo duljina mijenja od točke do točke, a u danoj točki se mijenja promjenom azimuta. Stoga razlikujemo mjerilo prema meridijanima, mjerilo prema paralelama, mjerilo prema glavnim pravcima.

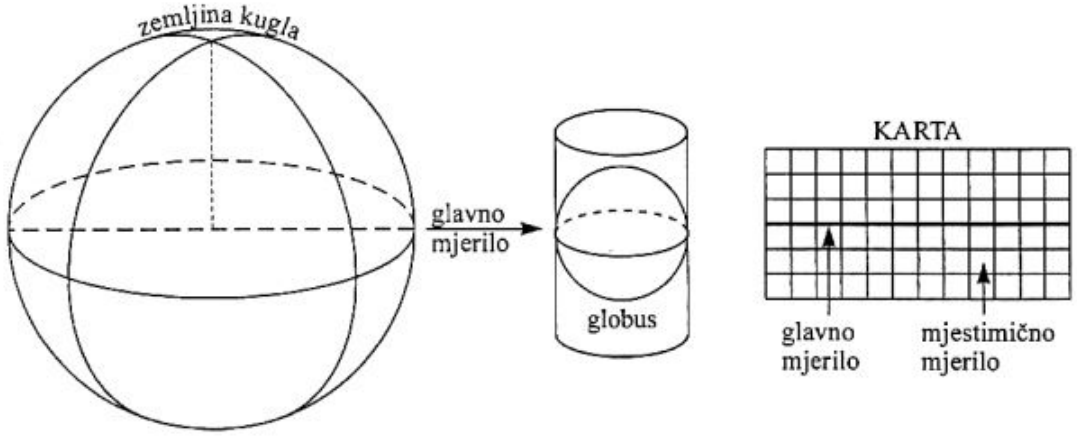
Glavni pravci su dva okomita pravca u bilo kojoj točki na plohi, kojom se u kartografiji aproksimira ploha Zemlje, te njima odgovarajući okomiti pravci u projekciji uzduž kojih mjerilo duljina ima najveću i najmanju vrijednost. Ako u nekoj točki u određenome pravcu nema deformacija duljina, mjerilo duljina jednako je jedinici.

Budući da mjerilo ne može imati istu vrijednost u svakoj točki karte, razlikujemo glavno i mjestimično mjerilo.

Glavno ili opće mjerilo je ispisano na karti, a možemo ga zamisliti kao mjerilo u kojem Zemljinu plohu prvo smanjimo, a zatim preslikavamo u ravninu. Karakteristika glavnog mjerila je da ne može nakon projiciranja ostati sačuvano na cijeloj karti, već samo uzduž nekih karakterističnih linija ili u nekim točkama, a to ovisi o vrsti projekcije.

Mjerila u ostalim točkama karte nazivamo **mjestimična ili lokalna mjerila**. Mjestimično mjerilo može varirati s položajem ili sa smjerom.

Primjerice, ako je glavno mjerilo 1 : 1000000, mjestimična mjerila mogu biti 1 : 998000, 1 : 1010000 i slično.



Slika 1.3: Glavno i mjestimično mjerilo na karti

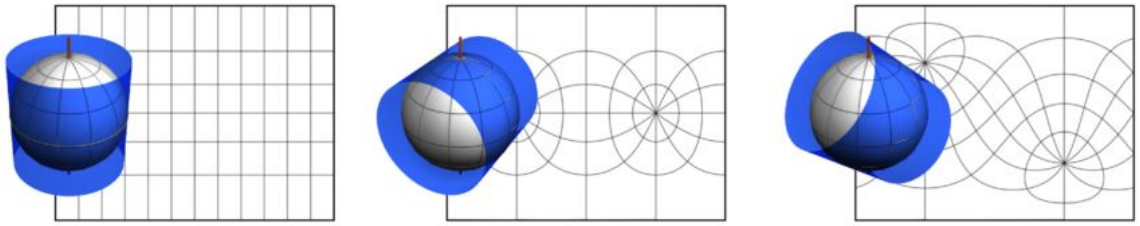
Na slici 1.3, glavno mjerilo je uzeto duž ekvatora, a mjestimično mjerilo duž neke druge paralele.

1.2 Podjela kartografskih projekcija

Razlikujemo nekoliko podjela kartografskih projekcija.

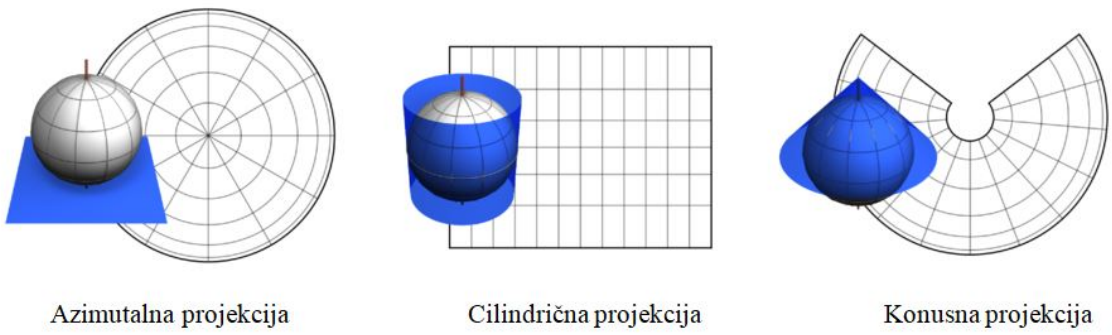
Po svojstvima preslikavanja projekcije se dijele na konformne, ekvivalentne, ekvidistantne i uvjetne projekcije.
Konformna projekcija čuva kutove. U konformnim je projekcijama mjerilo duljina u svakoj točki jednako u svim smjerovima, pa je u tim projekcijama sačuvana sličnost beskonačno malih likova.
Ekvivalentna projekcija čuva površine, odnosno u svakoj je točki mjerilo površina jednako jedinici, tj. u niti jednoj točki nema deformacije površina.
Ekvidistantna projekcija čuva duljine u određenom smjeru. Kod ekvidistantnih projekcija je uzduž jednoga glavnog pravca u svakoj točki mjerilo duljina jednako jedinici, odnosno u svakoj točki postoji smjer uzduž kojega nema deformacije dužina.
Uvjetna projekcija nije ni ekvivalentna, ni konformna, ni ekvidistantna. Kod te se projekcije sfera ili elipsoid preslikava u ravninu pod nekim posebnim uvjetima.

Mnoge kartografske projekcije mogu se zadati tako da se promatrana ploha (sfera, površina elipsoida) najprije preslika na neku razvojnu (razmotljivu) plohu kao što je cilindrična ili konusna (stožasta) ploha, a zatim se ta pomoćna ploha "razmota"u ravnini i time se dobije konačna slika. S obzirom na način kako je spomenuta pomoćna razvojna ploha postavljena u odnosu na Zemljinu plohu, razlikujemo uspravnu, poprečnu i kosu projekciju.
Uspravna (normalna) projekcija je ona kod koje se os simetrije pomoćne plohe podudara s obrtnom osi sfere ili elipsoida.
Poprečna (transverzalna) projekcija je ona kod koje je os simetrije pomoćne plohe okomita na obrtnu os sfere ili elipsoida.
Kosa projekcija je ona kod koje je kut među navedenim osima bilo koji kut između 0° i 90°.



Slika 1.4: Uspravna, poprečna i kosa projekcija

Po obliku mreže meridijana i paralela uspravnih projekcija dijele se na konusne, cilindrične, azimutalne, pseudokonusne, pseudocilindrične, polikonusne i ostale projekcije.
Konusna ili stožasta projekcija je ona kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao pravci koji se sijeku u jednoj točki, pod kutovima proporcionalnim odgovarajućim razlikama geografskih duljina, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku slika meridijana.
Cilindrična ili valjkasta projekcija je ona kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao međusobno paralelni pravci na razmaku proporcionalnom odgovarajućim razlikama geografskih duljina, a paralele također kao pravci okomiti na meridijane, i to na udaljenostima koje ovise o uvjetu preslikavanja.
Azimutalna projekcija je ona projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao pravci koji se sijeku u jednoj točki, pod kutovima jednakim odgovarajućim razlikama geografskih duljina, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku meridijana.



Slika 1.5: Azimutalna, cilindrična i konusna projekcija

Pseudokonusna projekcija je ona projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem na srednjem meridijanu.
Pseudocilindrična projekcija je ona projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, a paralele kao međusobno paralelni pravci okomiti na srednji meridijan.
Polikonusna projekcija je ona projekcija kod koje se meridijani uspravne projekcije preslikavaju kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, a paralele kao lukovi ekscentričnih kružnica sa središtima na srednjem meridijanu.

Kao posebna skupina kartografskih projekcija često se izdvajaju **geodetske projekcije**, tj. projekcije za potrebe državne izmjere.



Slika 1.6: Pseudokonusna, pseudocilindrična i polikonusna projekcija

Vratimo se na već spomenute konformne projekcije koje čuvaju kutove. U konformnim je projekcijama mjerilo duljina u svakoj točki jednako u svim smjerovima, pa je u tim projekcijama sačuvana sličnost beskonačno malih likova.

Za mnoge aplikacije preslikavanja, kao što su topografija i određene vrste navigacije, konformnost ili vjernost oblika je najvažniji uvjet. Na križanju bilo koje dvije linije na karti, kut između njih je isti kao kut između tih linija na sferi. Posebno, svaka paralela mora sijeći svaki meridijan pod pravim kutom. Konformnost je strogo lokalno svojstvo, tj. ne očekuje se da će kutovi i oblici biti očuvani daleko iznad točke sjecišta. U stvari, ravne linije na sferi obično su zakrivljene duž ravnine, i obrnuto.

1.3 Karakteristike kartografskih projekcija

Prilikom odabira kartografske projekcije u obzir se najčešće uzimaju sljedeće karakteristike:

1. **Površina**

   Mnoge kartografske projekcije su konstruirane tako da primjerice novčić bilo koje veličine na jednom dijelu karte, pokriva točno istu površinu Zemlje kao taj isti novčić na bilo kojem drugom dijelu karte. Oblici, kutovi i razmjeri na ovakvim kartama na većini dijelova nisu sačuvani, ali obično postoje neki dijelovi karte jednake površine koji su konstruirani da zadrže ta obilježja pravilno ili barem vrlo približno.

2. **Oblik**

   Najčešće i najvažnije kartografske projekcije su u većini slučajeva konformne ili ortomorfne [1] u kojima su uglavnom oko svake točke na karti lokalni kutovi ispravno prikazani. Iako su velika područja prikazana izobličeno, male su značajke u biti pravilno oblikovane. Važna posljedica konformnosti je da je lokalno mjerilo u svakom smjeru oko svake točke konstantno, a budući da su lokalni kutovi točni, meridijani presijecaju paralele pod pravim kutom na konformnoj projekciji, kao i na Zemlji.

3. **Mjerilo**

   Nijedna kartografska projekcija ne prikazuje na cijeloj karti točno mjerilo, ali na karti obično postoji jedna ili više linija na kojima mjerilo ostaje istinito. Prikladnim odabirom položaja tih linija, pogreške mjerila se mogu svesti na minimum, iako neke pogreške mogu i dalje ostati velike, a to ovisi o veličini područja koje se projicira te o projekciji.

4. **Smjer**

   Dok konformne karte daju lokalno pravilne smjerove u bilo kojoj točki, postoji jedna često korištena skupina kartografskih projekcija, zvana azimutalne projekcije, u kojima su smjerovi ili azimuti svih točaka na karti pravilno prikazani s obzirom na središte.

5. **Posebna svojstva**

   Neke kartografske projekcije pružaju posebne karakteristike koje ni jedna druga projekcija ne pruža. Primjerice, Mercatorova projekcija sve linije konstantnog smjera prikazuje kao pravce. Nadalje, u Gnomonskoj projekciji (centralnoj projekciji iz

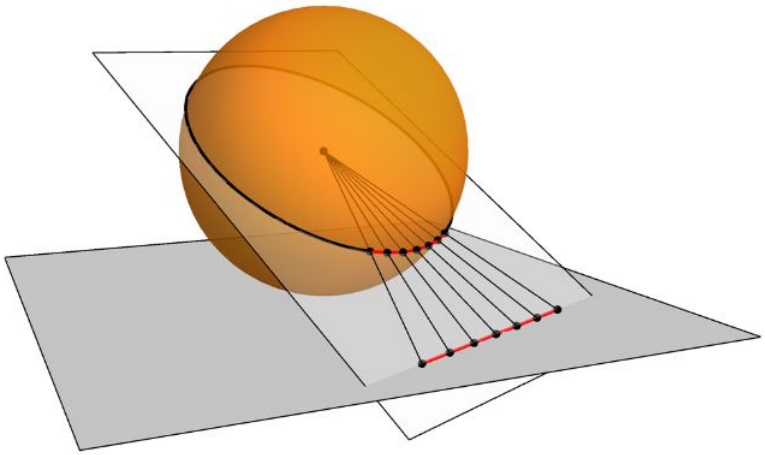
[1] Projekcija u kojoj je mjerilo isto u svim smjerovima i svim točkama tako da se vrlo mala područja prikazuju ispravnim oblikom i kutovi su očuvani.

središta sfere) su sve velike kružnice, odnosno najkraći putovi između točaka na sferi, prikazane kao pravci (vidi sliku 1.7). U stereografskoj projekciji se sve velike i male kružnice prikazuju kao kružnice na karti.

6. **Metoda konstrukcije**

   U danima prije lake dostupnosti računala i programa za crtanje, jednostavnost konstrukcije je bila od velike važnosti. S pojavom računala i džepnih kalkulatora, može se gotovo rutinski rukovati s vrlo kompliciranim formulama kao što se u prošlosti moglo s tek vrlo jednostavnim projekcijama.

Iako se prethodno navedene karakteristike trebaju uzeti u obzir prilikom odabira kartografske projekcije, one nisu tako očite pri prepoznavanju projekcije. Primjerice, ako regija prikazana na karti nije mnogo veća od Sjedinjenih Američkih Država, čak i iskusno oko često ne može razlikovati da li se radi o ekvivalentnoj ili konformnoj projekciji. Potrebno je provesti mjerenja kako bi se otkrile male razlike u razmaku ili mjestu meridijana i paralela, ili napraviti druge provjere. Vrsta konstrukcije kartografske projekcije se lakše prepoznaje s iskustvom ako se radi o projekciji koja spada u jednu od uobičajenih kategorija.



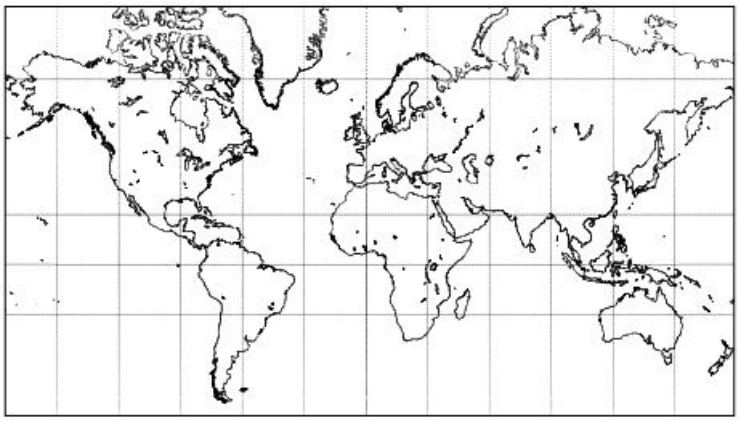
Slika 1.7: Gnomonska projekcija

Poglavlje 2

Normalni Mercator na sferi i srodne projekcije

2.1 Mercatorova projekcija

Najpoznatija Mercatorova karta je upravo ona iz 1569. s nazivom “Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium ementate accommadata”, odnosno u prijevodu ”Novi i proširenі opis Zemlje s ispravcima za uporabu u plovidbi” (slika 2.1). Karta je izvorno dizajnirana za potrebe navigacije te se i dalje koristi u te svrhe, a korisna je i za ucrtavanje meteoroloških ili oceanografskih podataka.

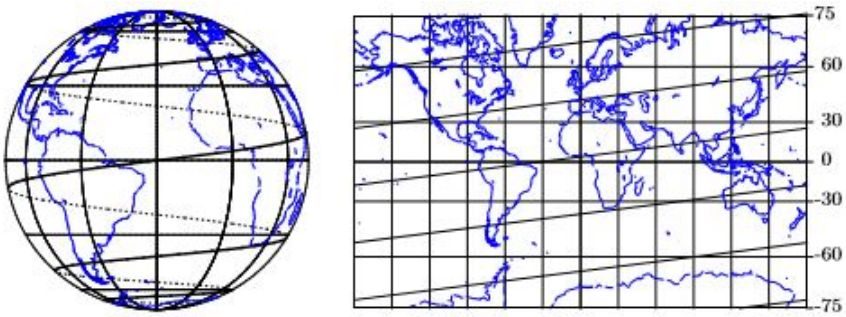


Slika 2.1: Mercatorova karta

Glavna navigacijska značajka Mercatorove projekcije se nalazi u činjenici da je plovidba između dvije točke prikazana kao ravna linija na karti ako brod plovi pod konstantnim kutom s obzirom na sjever, odnosno konstantnim azimutom.

Na pravokutnoj karti, orijentacija istok-zapad je obično vodoravan smjer, a orijentacija sjever-jug je vertikalan smjer. Linije konstantnog azimuta ne moraju nužno odgovarati ravnim crtama. Takvu liniju nazivamo loksodroma te je definiramo kao liniju na rotacijskoj plohi koja sve meridijane siječe pod istim kutom.

Mercatorova karta je dizajnirana tako da sve linije jednakog azimuta α na sferi, gledano od sjevera u smjeru kretanja kazaljke na satu, postanu ravne linije kuta α na karti. Upravo zbog toga je lako ucrtati ili iščitati o smjeru putovanja, morskim strujama, vjetru i ostalim podacima.



Slika 2.2: Loksodroma na sferi i u Mercatorovoj projekciji

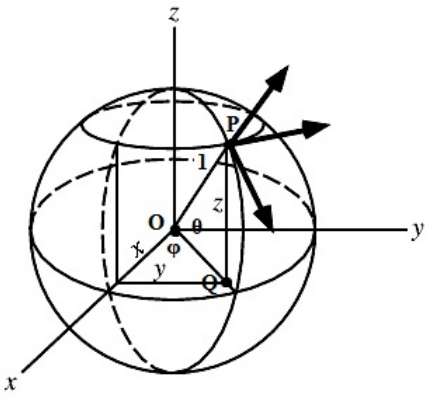
Dakle, Mercatorova ideja je bila projiciranje sfere na ravninu uz očuvanje sljedećih svojstava:

- smjer sjever-jug je vertikalan smjer,
- smjer istok-zapad je vodoravan smjer pri čemu je očuvana duljina ekvatora,
- sve linije jednakog azimuta na sferi su ravne linije na karti.

Zbog jednostavnosti pretpostavimo da je zadana sfera polumjera 1. Iz prva dva uvjeta Mercatorove ideje slijedi da se slika sfere nalazi u traci širine 2π jer je toliki opseg velike kružnice koja leži u ekvatorskoj ravnini.
Nadalje, meridijani su projicirani na vertikalne linije, a paralele na vodoravne linije pa preostaje odrediti razmak između paralela.

Parametrizirajmo jediničnu sferu. Neka je P točka na sferi pa iz toga slijedi da je $|OP| = 1$. Primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu OQP imamo da je

$$\cos\theta = \frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{|OQ|}{1} = |OQ|,$$



Slika 2.3: Parametrizacija jedinične sfere

a iz trokuta OXQ imamo da je

$$\cos\varphi = \frac{|OX|}{|OQ|} = \frac{x}{\cos\theta}$$

odnosno

$$x = \cos\varphi\cos\theta.$$

Nadalje, primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu OYQ dobivamo da je

$$\sin\varphi = \frac{|OY|}{|OQ|} = \frac{y}{\cos\theta}$$

pa je

$$y = \sin\varphi\cos\theta.$$

Preostalu varijablu z možemo odrediti primjenom trigonometrije na pravokutni trokut OQP te dobivamo da je

$$\sin\theta = \frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{z}{1}$$

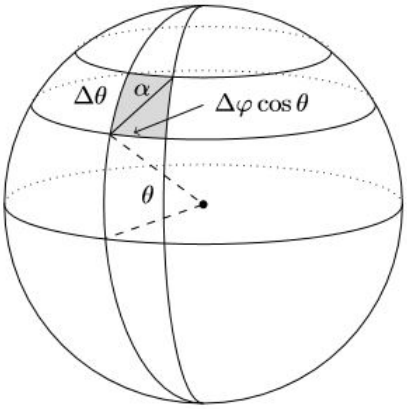
odnosno

$$z = \sin\theta.$$

Dakle, imamo da je:

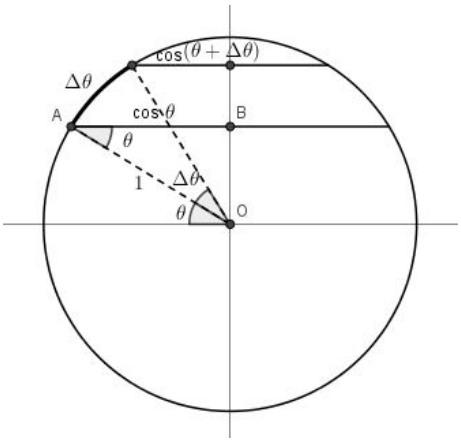
$$x = \cos\varphi\cos\theta, \qquad y = \sin\varphi\cos\theta, \qquad z = \sin\theta,$$

gdje je $\varphi \in [-\pi, \pi]$ duljina, a $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je širina. Za matematičke svrhe je pogodnije mjeriti duljinu i širinu u radijanima nego u stupnjevima.
U ravnini smo uveli pravokutni koordinatni sustav gdje je $u = u(\varphi, \theta)$ vodoravni smjer i $v = v(\varphi, \theta)$ je vertikalni smjer.



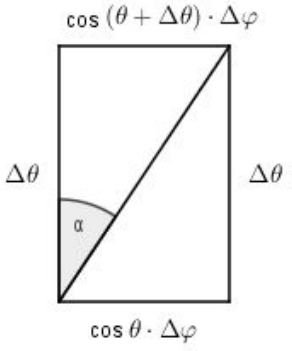
Slika 2.4: Mali pravokutnik na sferi

Sada promotrimo na sferi liniju konstantnog azimuta α. Iz drugog uvjeta Mercatorove ideje imamo da je $u = \varphi$, jer se ekvator "razmota" u ravnini tako da se ta kružnica, koju čini ekvator, i svaki njen luk prenose u svojoj stvarnoj duljini.
Promotrimo mali pravokutnik na sferi u točki (φ, θ) pri čemu su $\Delta\varphi$ i $\Delta\theta$ određeni konstantnim azimutom α kao što je prikazano na slici 2.4.



Slika 2.5: Presjek sfere

Radi lakšeg uočavanja, promotrimo i presjek sfere po glavnoj kružnici koja sadrži središte, točku (φ, θ) i os koja prolazi sjevernim i južnim polom (pogledaj sliku 2.5).
Paralela, tj. kružnica paralelna s glavnom kružnicom koja sadrži ekvator, na širini θ ima polumjer duljine $\cos\theta$, što lako možemo zaključiti primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu AOB.
Stoga stranica malog pravokutnika koja leži na toj paraleli ima približnu duljinu $\Delta\varphi\cos\theta$, a stranica pravokutnika paralelna s meridijanom ima duljinu $\Delta\theta$ (pogledaj sliku 2.6).



Slika 2.6: Mali pravokutnik u ravnini

Primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu uočavamo da je

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi\cdot\cos(\theta+\Delta\theta)} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi\cdot\cos(\theta)}. \tag{2.1}$$

Slika te putanje na karti je ravna linija koja s v-osi zatvara kut α, kako je prikazano na slici 2.7. Kako bi bio zadovoljen i treći uvjet Mercatorove ideje, mora biti

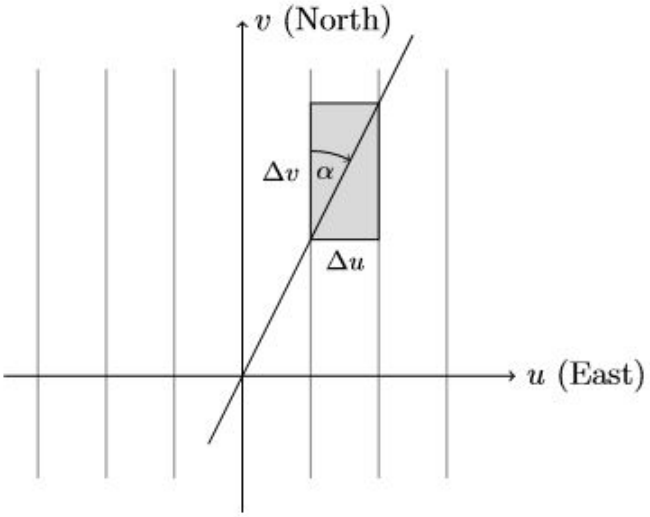
$$\operatorname{ctg}\alpha \approx \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{\Delta v}{\Delta\varphi}. \tag{2.2}$$

Izjednačavajući izraze (2.1) i (2.2) dobivamo

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi\cdot\cos\theta} = \frac{\Delta v}{\Delta\varphi} \qquad /\cdot\Delta\varphi$$
$$\frac{\Delta\theta}{\cos\theta} = \Delta v.$$

Kako je $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, imamo

$$\frac{\Delta\theta}{\cos\theta} = \Delta\theta\sec\theta \approx \Delta v.$$



Slika 2.7: Koordinatna mreža Mercatorove projekcije

Ako pustimo $\Delta\theta$ da teži u nulu, dobivamo

$$\frac{dv}{d\theta} = \sec\theta, \tag{2.3}$$

$$v'(\theta) = \sec\theta. \tag{2.4}$$

Integriranjem ćemo dobiti:

$$v(\theta) = \int \frac{1}{\cos\theta} \mathrm{d}\theta,$$

$$v(\theta) = \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} \mathrm{d}\theta,$$

$$v(\theta) = \int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} \mathrm{d}\theta.$$

Uvodimo supstituciju $t = \sin\theta$, pa je $dt = \cos\theta d\theta$, te imamo:

$$\begin{aligned}
v(\theta) &= \int \frac{dt}{1-t^2}, \\
v(\theta) &= \int \frac{dt}{(1+t)(1-t)}, \\
v(\theta) &= \int (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t})\mathrm{d}t, \\
v(\theta) &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t, \\
v(\theta) &= \frac{1}{2}\ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln(1-t) + C, \\
v(\theta) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + C.
\end{aligned}$$

Vraćanjem supstitucije dobivamo:

$$\begin{aligned}
v(\theta) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) + C, \\
v(\theta) &= \ln\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}} + C, \\
v(\theta) &= \ln\sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} + C, \\
v(\theta) &= \ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + C, \\
v(\theta) &= \ln\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) + C, \\
v(\theta) &= \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) + C.
\end{aligned}$$

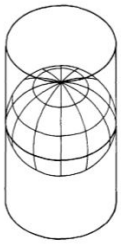
Zahtijevamo da je $v(0) = 0$, pa je $C = 0$. Iz toga slijedi da karta

$$\begin{cases} u(\varphi,\theta) &= \varphi \\ v(\varphi,\theta) &= \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) \end{cases}$$

zadovoljava sva tri uvjeta Mercatorove ideje.
Dakle, točka $P(\varphi,\theta)$ na sferi se preslikava u točku $Q(x,y)$ na karti tako da je:

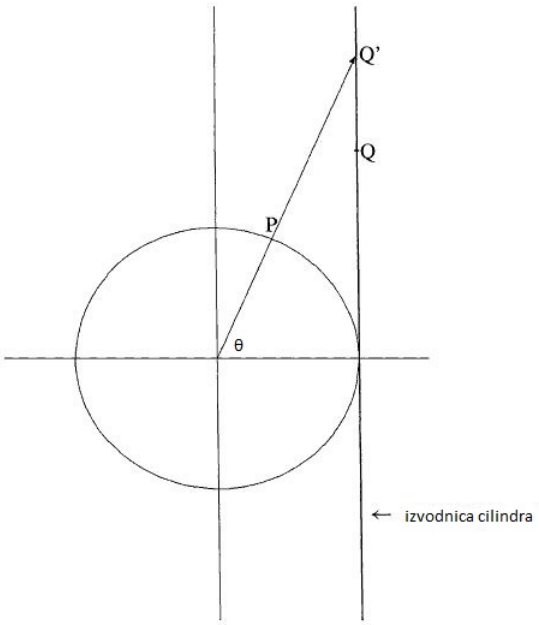
$$\begin{cases} x &= \varphi \\ y &= \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) \end{cases} \tag{2.5}$$

Predočimo na još jedan način Mercatorovu projekciju. Kako je već spomenuto, Mercatorova projekcija preslikava sferu, ali bez sjevernog i južnog pola, na ravninu. Zbog jednostavnosti smo pretpostavili da je zadana sfera polumjera 1. Svaka točka P na sferi je označena sa svojim sfernim koordinatama (φ, θ), koje označavaju duljinu i širinu. Smjestimo tangencijalni cilindar oko sfere na način da cilindar dira jediničnu sferu duž ekvatora, kako je prikazano na slici 2.8.



Slika 2.8: Tangencijalni cilindar oko sfere

Svaku točku P na sferi projiciramo u točku Q' na cilindru. Zatim točku Q' pomičemo okomito prema dolje do točke Q. Postupak je prikazan na slici 2.9 koja prikazuje presjek sfere duž osi koja sadrži i sjeverni i južni pol.



Slika 2.9: Mercatorova projekcija

Posljednji korak konstrukcije je razmotavanje cilindra u ravninu pa time dobivamo Mercatorovu kartu. Pokažimo detalje takve projekcije.

Razmotavanjem cilindra u ravninu, na cilindar stavimo Kartezijeve koordinate. Učinimo to tako da y-os predstavlja ekvator, a x-os odgovara okomitoj liniji na površini cilindra, odnosno izvodnici cilindra.
Neka je točki P pridružena širina θ. Promotrimo krug C_θ na sferi, paralelan s glavnom kružnicom koja sadrži ekvator, a nalazi se na širini θ. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut lako uočavamo da je radijus kruga C_θ jednak $\cos\theta$ (slično smo već promatrali na slici 2.5). Krug C_θ je sadržan u krugu C_x koji se nalazi na visini $x(\theta)$ na cilindru. Kako je cilindar postavljen tangencijalno oko jedinične sfere, iz toga slijedi da je radijus kruga na svakoj visini cilindra jednak radijusu sfere, odnosno jednak 1. Stoga je i radijus kruga C_x jednak 1.
Omjer opsega tih dvaju krugova je

$$\frac{opseg\ \ kruga\ \ C_x}{opseg\ \ kruga\ \ C_\theta} = \frac{2\pi}{2\pi\cos\theta},$$

odnosno ako skratimo razlomak s 2π imamo da je

$$\frac{opseg\ \ kruga\ \ C_x}{opseg\ \ kruga\ \ C_\theta} = \frac{1}{\cos\theta}. \tag{2.6}$$

Za bilo koji drugi dio na krugu C_θ, udaljenost na cilindru i stvarna udaljenost na sferi imaju taj isti omjer (slika 2.10).

Temeljna ideja Mercatorove projekcije je projicirati točku P u točku Q na cilindru, tako da omjer u izrazu (2.6) bude lokalno zadržan duž x-osi.
Dakle, na širini θ, želimo

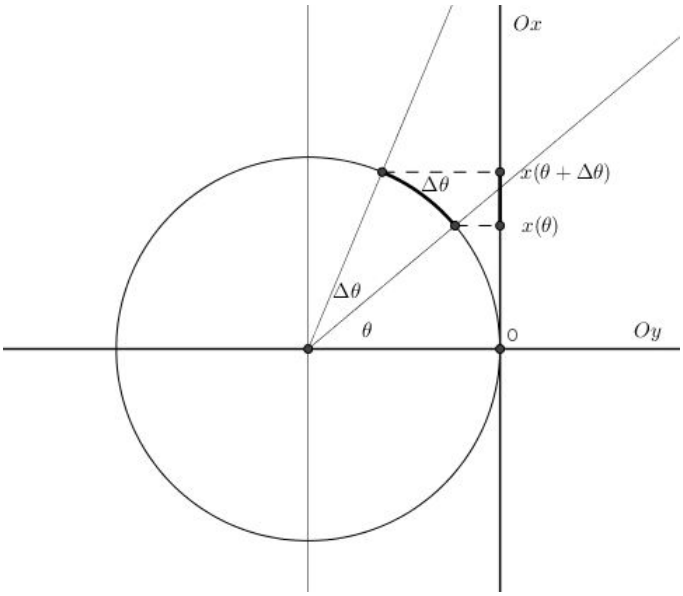
$$\frac{x(\theta+\Delta\theta) - x(\theta)}{\Delta\theta} = \frac{1}{\cos\theta},$$

a iz toga slijedi da mora biti

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Uočimo da smo dobili izraz vrlo sličan izrazu (2.3), samo s drukčijom oznakom. Dakle, i rezultat integriranja je isti kako smo i prethodno pokazali. Dakle, veza između točke $P(\varphi,\theta)$ na sferi i točke $Q(x,y)$ na cilindru je sljedeća:

$$\begin{cases} x &= \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) \\ y &= \varphi \end{cases} \tag{2.7}$$

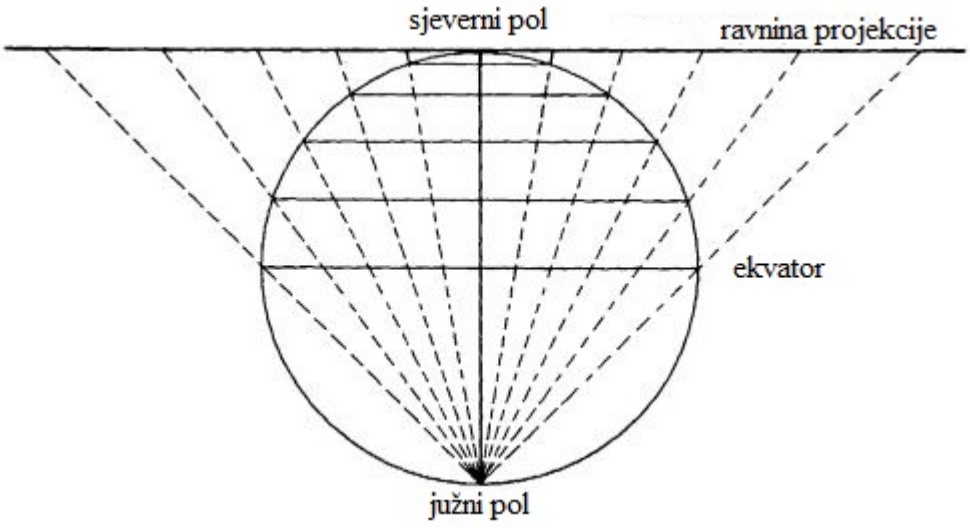


Slika 2.10: Omjer udaljenosti na cilindru i stvarne udaljenosti na sferi

2.2 Stereografska projekcija

Sljedeća, naizgled nesrodna projekcija je stereografska projekcija. Nju nije uobičajeno koristiti za preslikavanje Zemlje, nego za preslikavanje neba. Još prije 2000 godina se koristila u astrolabovima za mjerenje i prikaz astronomskih promatranja. Mnogi satovi astrolaba, pa tako i jedan od najpoznatijih iz 1410. godine, Astronomski sat u Pragu, prikazuju kretanje planeta, sunca i zodijaka.

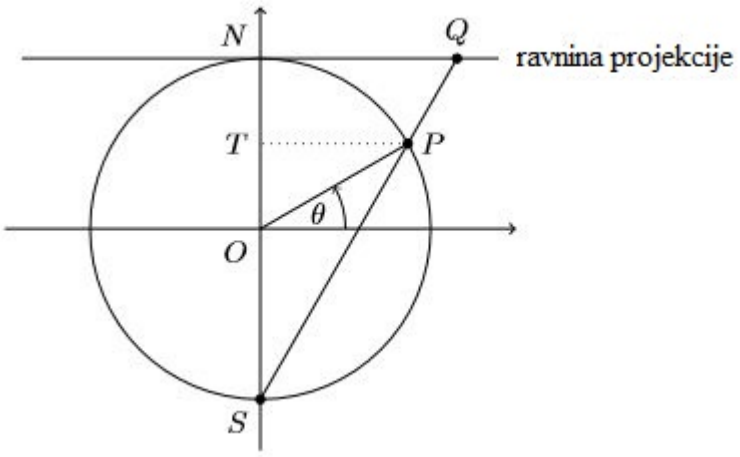
Pretpostavlja se da je stereografska projekcija u polarnom obliku bila poznata Egipćanima, a grčki astronom, geograf i matematičar Hiparh je bio prvi koji ju je koristio te se smatra njenim izumiteljem. Današnji naziv je 1613. dodijelio Francois d'Aiguillon. Do 1507. je polarna stereografska projekcija bila korištena isključivo za preslikavanje zvijezda.



Slika 2.11: Geometrijska interpretacija polarne stereografske projekcije

Stereografska projekcija je također konformna karta. U kompleksnoj analizi se koristi za predstavljanje proširene kompleksne ravnine. Stereografska projekcija ima svojstvo da su sve kružnice na sferi preslikane u kružnice ili pravce u ravnini, pa je stoga lako preslikati astronomska promatranja. Stereografska projekcija preslikava sferu s jednog od polova na ravninu paralelnu s ekvatorom. Najčešće je to ravnina koja sadrži ekvator ili tangencijalna ravnina na sferu u polu suprotnom od pola iz kojeg projiciramo.

Promatrat ćemo projekciju iz južnog pola S na tagencijalnu ravninu sfere koja sadrži sjeverni pol N. Neka je točka P točka na sferi. Tada je točka Q projekcija točke P, pri čemu je točka Q sjecište tangencijalne ravnine i pravca koji prolazi južnim polom i sadrži točku P, kako je prikazano na slici 2.12.



Slika 2.12: Stereografska projekcija točke

Kako bismo odredili koordinate točke Q, moramo odrediti njenu udaljenost $r = \overline{NQ}$ od sjevernog pola kao funkciju u ovisnosti o kutu θ koji predstavlja širinu.
Iz slike 2.12 uočavamo da su trokuti $\triangle SPT$ i $\triangle SQN$ slični pa je

$$\frac{|NQ|}{|TP|} = \frac{|NS|}{|TS|}. \tag{2.8}$$

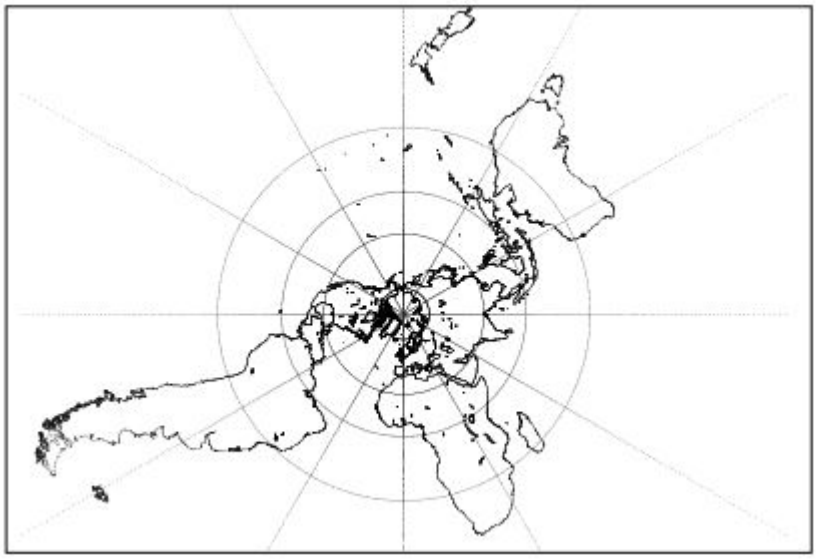
Prethodno smo označili da je $r = \overline{NQ}$. Budući da promatramo sferu radijusa 1, vrijedi da je $|OP| = 1$. Tada primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu $\triangle OPT$ dobivamo da je $|TP| = \cos\theta$, a $|TO| = \sin\theta$. Kako je radijus sfere jednak 1, slijedi da je $|NS| = 2$, a $|TS| = |TO| + |OS| = \sin\theta + 1$.
Sada uvrštavanjem u jednadžbu 2.8 dobivamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\cos\theta} &= \frac{2}{\sin\theta + 1}, \\
r &= \frac{2}{\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}}, \\
r &= \frac{2}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}, \\
r &= \frac{2}{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta}.
\end{aligned}$$

Želimo zapisati projekciju u Kartezijevim koordinatama, gdje je u horizontalna os, a v je vertikalna os. Negativni dio v-osi trebao bi predstavljati nulti meridijan. Dužinu φ mjerimo u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, kako bi ishodište odgovaralo sjevernom polu. Stoga je stereografska projekcija zadana s

$$\begin{cases} u(\varphi,\theta) &= \dfrac{2}{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta}\sin\varphi \\ v(\varphi,\theta) &= -\dfrac{2}{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta}\cos\varphi \end{cases} \tag{2.9}$$

Stereografsku projekciju nije uobičajeno koristiti za prikaz karte svijeta jer dolazi do velikog iskrivljenja na južnoj hemisferi, što se može vidjeti na slici 2.13.

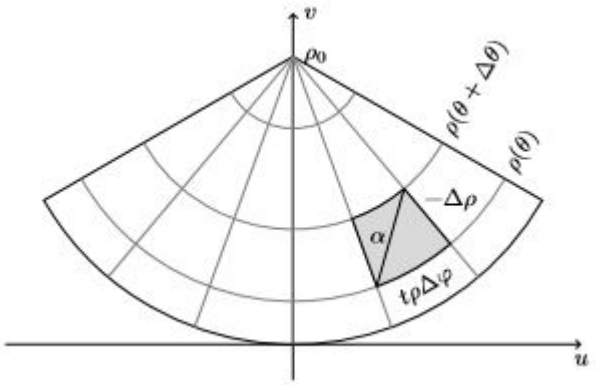


Slika 2.13: Stereografska projekcija Zemlje

2.3 Lambertova konformna konusna projekcija

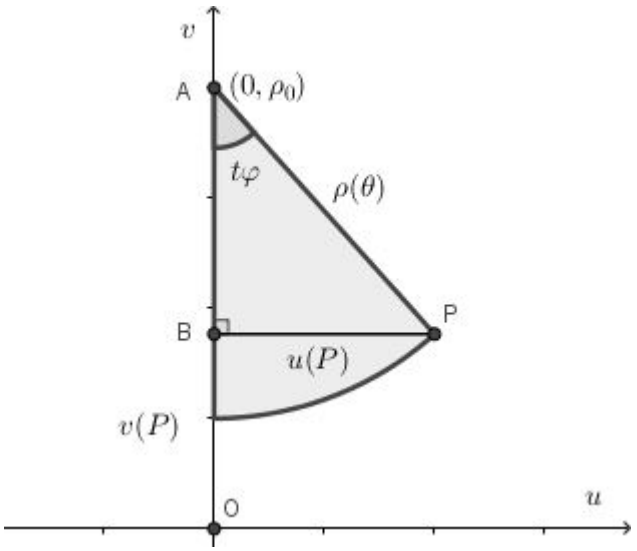
Do kraja 18. stoljeća se smatralo da su Mercatorova i stereografska projekcija potpuno nepovezane. Johann Heinrich Lambert je 1772. godine promijenio pristup kartografskim projekcijama. Započeo je sa željenim svojstvima karta, kao što su konformnost i oblik plohe projekcije, a zatim je izgradio cijele familije projekcija. Jedna od projekcijskih ploha koje je promatrao je bio stožac. Pripadajuće karte su danas poznate kao Lambertove konformne konusne projekcije.

Promotrimo projekciju sfere na stožac, koju je proučavao Lambert. Kako bi mogli konstruirati mapu, stožac presječemo po jednoj njegovoj izvodnici te ga rastvorimo u ravninu. Pretpostavimo da meridijani odgovaraju ravnomjerno raspoređenim pravcima od vrha stošca, odnosno izvodnicama stošca, a paralela zemljopisne širine θ odgovara luku kružnice radijusa $\rho(\theta)$ sa središtem u $(0, \rho_0)$, kako je prikazano na slici 2.14.



Slika 2.14: Konusna projekcija

Izvodimo konstrukciju tako da paralela širine θ_0 prolazi kroz ishodište, odnosno da je $\rho(\theta_0) = \rho_0$. Kut kružnog isječka, kojeg dobijemo rastvaranjem stošca u ravninu, iznosi $2\pi t$ i određen je parametrom $t \in \langle 0, 1]$.
Dakle, kružnica baze stošca se preslikala u luk koji je umanjen za faktor t, pa se i svaki kut kružnice baze stošca preslikava u kut koji je umanjen za faktor t. Želimo odrediti koordinate neke točke $P(\varphi, \theta)$ u konusnoj projekciji.



Slika 2.15: Konusna projekcija točke P

Primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu $\triangle ABP$ na slici 2.15, dobivamo da je:

$$\begin{aligned}
\cos(t\varphi) &= \frac{|AB|}{\rho(\theta)}, \\
\cos(t\varphi) &= \frac{\rho_0 - v(P)}{\rho(\theta)} \qquad / \cdot \rho(\theta), \\
\rho(\theta) \cdot \cos(t\varphi) &= \rho_0 - v(P), \\
v(P) &= \rho_0 - \rho(\theta) \cdot \cos(t\varphi),
\end{aligned}$$

te imamo da je:

$$\begin{aligned}
\sin(t\varphi) &= \frac{|BP|}{\rho(\theta)}, \\
\sin(t\varphi) &= \frac{u(P)}{\rho(\theta)} \qquad / \cdot \rho(\theta), \\
u(P) &= \rho(\theta) \sin(t\varphi).
\end{aligned}$$

Stoga su jednadžbe sljedećeg oblika:

$$\begin{cases} u(\varphi, \theta) &= \rho(\theta) \sin(t\varphi) \\ v(\varphi, \theta) &= \rho_0 - \rho(\theta) \cos(t\varphi). \end{cases} \tag{2.10}$$

Kako bi karta bila konformna, potrebno je odrediti razmak između paralela. Kao i pri konstrukciji Mercatorove karte, promatramo putanje jednakog azimuta α gledano od

sjevera u smjeru kretanja kazaljke na satu. Na jednoj takvoj putanji razmotrimo mali pravokutnik na sferi s duljinama stranica $\Delta\varphi\cos(\theta)$ i $\Delta\theta$, kao što smo prethodno promatrali pri konstrukciji Mercatorove karte na slici 2.4.
Stoga slijedi, kao i u odjeljku 2.1, da je

$$\operatorname{ctg}\alpha \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi\cos(\theta)}. \tag{2.11}$$

Odgovarajući pravokutnik na karti, osjenčan na slici 2.14, ima duljine stranica $t\rho\Delta\varphi$ i $-\Delta\rho$ gdje je

$$\Delta\rho = \rho(\theta + \Delta\theta) - \rho(\theta).$$

Negativan predznak slijedi iz činjenice da se $\rho(\theta)$ smanjuje kako se θ povećava. Primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu uočavamo da je

$$\operatorname{ctg}\alpha \approx -\frac{\Delta\rho}{t\rho\Delta\varphi}. \tag{2.12}$$

Izjednačavajući izraze 2.11 i 2.12 dobivamo

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi\cos(\theta)} \approx -\frac{\Delta\rho}{t\rho\Delta\varphi}.$$

Množenjem jednadžbe s $\Delta\varphi$ te sređivanjem izraza dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\theta}{\cos(\theta)} &\approx -\frac{\Delta\rho}{t\rho} \qquad / \cdot \frac{t\rho}{\Delta\theta},\\
\frac{\Delta\rho}{\Delta\theta} &\approx -\frac{t\rho}{\cos(\theta)},\\
\frac{d\rho}{d\theta} &= -\frac{t\rho}{\cos(\theta)}.
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, imamo

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -t\rho\sec\theta.$$

Dakle, dolazimo do diferencijalne jednadžbe uz početni uvjet da je $\rho(\theta_0) = \rho_0$. Dobivenu jednadžbu pomnožimo s $\dfrac{d\theta}{\rho}$ i dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{\rho} &= -t\sec\theta d\theta,\\
\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho &= -t\int_{\theta_0}^{\theta}\sec\theta\mathrm{d}\theta,\\
\ln\rho - \ln\rho_0 &= -t\int_{\theta_0}^{\theta}\sec\theta\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Integral s desne strane jednakosti smo izračunali u odjeljku 2.1 pa slijedi da je:

$$\begin{aligned}
\ln\frac{\rho}{\rho_0} &= -t[\ln(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)-\ln(\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0)],\\
\ln\frac{\rho}{\rho_0} &= -t\ln\left(\frac{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}\right),\\
\ln\frac{\rho}{\rho_0} &= \ln\left(\frac{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}\right)^{-t},\\
\frac{\rho}{\rho_0} &= \left(\frac{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}\right)^{-t},\\
\rho(\theta) &= \rho_0\left(\frac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{t}.
\end{aligned}$$

Uočimo da imamo dva parametra koja možemo mijenjati, a to su paralela θ_0 i kut kružnog isječka određen parametrom t. Odaberimo t takav da je duljina paralele na širini θ_0 očuvana. Na jediničnoj sferi duljina te paralele iznosi $2\pi\cos\theta_0$. U konusnoj projekciji duljina te paralele iznosi $2\pi t\rho(\theta_0)$, odnosno $2\pi t\rho_0$. Stoga tražimo da bude

$$2\pi\cos\theta_0 = 2\pi t\rho_0,$$

odnosno da je

$$t = \frac{\cos\theta}{\rho_0} \in \langle 0,1]. \tag{2.13}$$

Paralela geografske širine θ_0 bez deformacija, naziva se **standardna paralela**. Stoga je konusna projekcija standardne paralele na širini θ_0 dana s:

$$\rho(\theta) = \rho_0\left(\frac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\frac{\cos\theta}{\rho_0}},$$

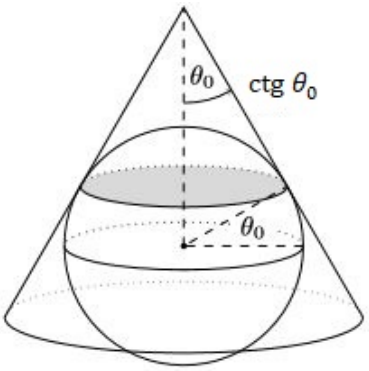
uz uvjet da je $\rho_0 \geq \cos\theta$ jer inače izraz (2.13) ne bi bio zadovoljen.

Odaberimo ρ_0 tako da stožac dodiruje sferu duž paralele na geografskoj širini θ_0, kako je prikazano na slici 2.16. Ako je stožac tangencijalan sferi, onda je $\rho_0 = \operatorname{ctg}\theta_0$, što se lako vidi primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu, pa slijedi da je

$$\rho(\theta) = \operatorname{ctg}\theta_0\left(\frac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}. \tag{2.14}$$

Uvrštavanjem jednakosti (2.13) i (2.14) u izraz (2.10), dobivamo:

$$\begin{cases}
u_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \operatorname{ctg}\theta_0\left(\dfrac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}\sin\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho_0}\cdot\varphi\right)\\
v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \rho_0-\operatorname{ctg}\theta_0\left(\dfrac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}\cos\left(\dfrac{\cos\theta}{\rho_0}\cdot\varphi\right).
\end{cases}$$



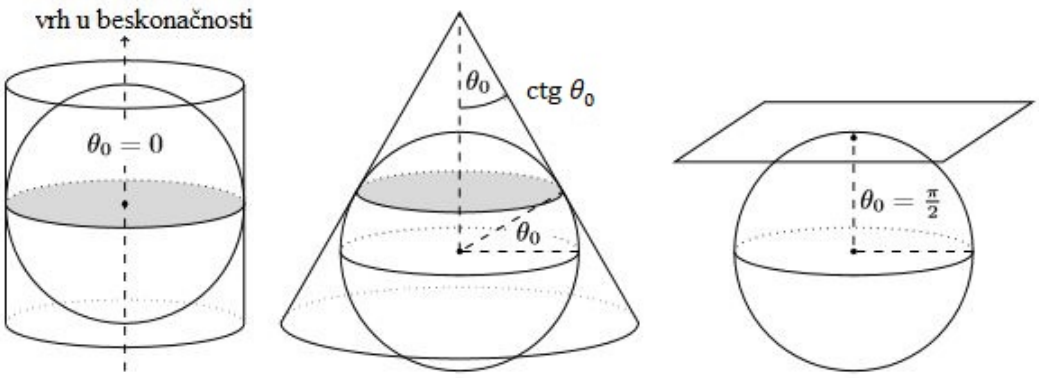
Slika 2.16: Stožac dodiruje sferu duž standardne paralele

Na kraju, uvrštavanjem uvjeta $\rho_0 = \rho(\theta_0)$ dobivamo da je:

$$\begin{cases} u_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \operatorname{ctg}\theta_0 \left(\dfrac{\sec\theta_0 + \operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0} \sin(\sin\theta_0 \cdot \varphi) \\ v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \operatorname{ctg}\theta_0 - \operatorname{ctg}\theta_0 \left(\dfrac{\sec\theta_0 + \operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0} \cos(\sin\theta_0 \cdot \varphi). \end{cases} \tag{2.15}$$

2.4 Stereografska i Mercatorova projekcija kao granični slučajevi konusne projekcije

U ovom odjeljku ćemo pokazati da su Mercatorova i stereografska projekcija granični slučajevi Lambertove konusne projekcije, kao što je prikazano na slici 2.17.



Slika 2.17: Stožac i njegovi granični slučajevi koji odgovaraju Mercatorovoj i stereografskoj projekciji

Stereografska i konusna projekcija

Prvo pokažimo da se granični slučaj kada $\theta_0 \to \frac{\pi}{2}^-$ u jednadžbama (2.15), svodi na stereografsku projekciju.

Uočimo da za svaki $\theta_0 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ vrijedi da je:

$$1 - \sin\theta_0 < \cos\theta_0 < 1.$$

To vidimo iz pravokutnog trokuta sa stranicama duljine $\cos\theta_0$, $\sin\theta_0$ i 1. Zatim, za svaki $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vrijedi

$$1 - \sin\theta_0 \leq \cos\theta_0 \leq 1.$$

Potenciranjem sa $s = 1 - \sin\theta_0$ dobivamo:

$$s^s \leq (\cos\theta_0)^s \leq 1^s.$$

Koristeći poznati rezultat da je $\lim_{s\to 0^+} s^s = 1$, možemo primjeniti Teorem o sendviču. Dakle, vrijedi da je

$$\lim_{s\to 0^+} (\cos\theta_0)^s = 1,$$

to jest

$$\lim_{\theta_0 \to \pi/2^-} (\cos\theta_0)^{1-\sin\theta_0} = 1.$$

Izraz (2.14) iz prethodnog odjeljka

$$\rho(\theta) = \operatorname{ctg}\theta_0 \left(\frac{\sec\theta_0 + \operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \right)^{\sin\theta_0},$$

možemo srediti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\rho(\theta) &= \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} \cdot \left(\frac{\frac{1}{\cos\theta_0} + \operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \right)^{\sin\theta_0}, \\
\rho(\theta) &= \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\cos\theta_0}\right)^{\sin\theta_0} \cdot (\sin\theta_0 + 1)^{\sin\theta_0}}{(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)^{\sin\theta_0}}, \\
\rho(\theta) &= \frac{\cos\theta_0 \cdot (\cos\theta_0)^{-\sin\theta_0}}{\sin\theta_0} \cdot \left(\frac{\sin\theta_0 + 1}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \right)^{\sin\theta_0}, \\
\rho(\theta) &= \frac{(\cos\theta_0)^{1-\sin\theta_0}}{\sin\theta_0} \cdot \left(\frac{\sin\theta_0 + 1}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \right)^{\sin\theta_0}.
\end{aligned}$$

Kada $\theta_0 \to \dfrac{\pi}{2}^-$ onda $\sin\theta_0 \to 1$ pa tada imamo:

$$\rho(\theta) = \frac{(\cos\theta_0)^{1-\sin\theta_0}}{\sin\theta_0} \cdot \left(\frac{\sin\theta_0 + 1}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \right)^{\sin\theta_0} \to \frac{2}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}.$$

Nadalje, primjećujemo da $\operatorname{ctg}\theta_0 \to 0$ kada $\theta_0 \to \dfrac{\pi}{2}^-$. Iz toga slijedi da jednadžbe (2.15) konusne projekcije, kada $\theta_0 \to \dfrac{\pi}{2}^-$, glase ovako:

$$\begin{cases}
u_{\theta_0}(\varphi, \theta) &= \dfrac{2}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \sin(1 \cdot \varphi) \\
v_{\theta_0}(\varphi, \theta) &= 0 - \dfrac{2}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \cos(1 \cdot \varphi),
\end{cases}$$

odnosno

$$\begin{cases}
u_{\theta_0}(\varphi, \theta) &= \dfrac{2}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \sin\varphi \\
v_{\theta_0}(\varphi, \theta) &= -\dfrac{2}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \cos\varphi,
\end{cases} \tag{2.16}$$

a to je ekvivalentno jednadžbama u izrazu (2.9) kojima je zadana stereografska projekcija iz sjevernog pola.

Mercatorova i konusna projekcija

Pokazat ćemo da se jednadžbe (2.15) konusne projekcije svode na Mercatorovu projekciju kada $\theta_0 \to 0$.
Najprije raspišimo prvu jednadžbu u izrazu (2.15):

$$\begin{aligned}
u_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \operatorname{ctg}\theta_0\left(\frac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}\sin(\sin\theta_0\cdot\varphi)\\
u_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\cos\theta_0}\right)^{\sin\theta_0}\cdot(\sin\theta_0+1)^{\sin\theta_0}}{(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)^{\sin\theta_0}}\sin(\sin\theta_0\cdot\varphi),\\
u_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \frac{\cos\theta_0\cdot(\cos\theta_0)^{-\sin\theta_0}}{\sin\theta_0}\cdot\left(\frac{\sin\theta_0+1}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}\cdot\sin(\sin\theta_0\cdot\varphi),\\
u_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \varphi(\cos\theta_0)^{1-\sin\theta_0}\cdot\left(\frac{\sin\theta_0+1}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}\cdot\frac{\sin(\varphi\sin\theta_0)}{\varphi\sin\theta_0}. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Budući da $\dfrac{\sin(\varphi\sin\theta_0)}{\varphi\sin\theta_0}\to 1$ kada $\varphi\cdot\sin\theta_0\to 0$, a $\cos\theta_0\to 1$, imamo

$$\lim_{\theta_0\to 0} u_{\theta_0}(\varphi,\theta)=\varphi.$$

Budući da limes ne ovisi o širini θ, meridijani postaju vertikalni pravci kada $\theta_0\to 0$. Nadalje, primijetimo da $\rho_0=\operatorname{ctg}\theta_0\to\infty$ kada $\theta_0\to 0$. Ovo posebno znači da se kružni lukovi koji predstavljaju paralele u konusnoj projekciji približavaju horizontalnim pravcima.
Radi pojednostavljivanja računa uvodimo funkciju

$$g(\theta)=\ln(\operatorname{tg}\theta+\sec\theta),$$

koja se pojavljuje u Mercatorovoj projekciji (2.7). Tada možemo izraz za $v_{\theta_0}(\varphi,\theta)$ iz (2.15) napisati u obliku

$$\begin{aligned}
v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \operatorname{ctg}\theta_0-\operatorname{ctg}\theta_0\left(\frac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}\cos(\sin\theta_0\cdot\varphi),\\
v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \operatorname{ctg}\theta_0\left(1-\left(\frac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}\cos(\sin\theta_0\cdot\varphi)\right),\\
v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_0}\left(1-e^{\ln\left(\frac{\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta}\right)^{\sin\theta_0}}\cos(\sin\theta_0\cdot\varphi)\right),
\end{aligned}$$

$$v_{\theta_0}(\varphi,\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_0}\left(1 - e^{\sin\theta_0 \cdot \ln\left(\frac{\sec\theta_0 + \operatorname{tg}\theta_0}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}\right)}\cos(\sin\theta_0\cdot\varphi)\right),$$

$$v_{\theta_0}(\varphi,\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_0}\left(1 - e^{\sin\theta_0\cdot\left(\ln(\sec\theta_0+\operatorname{tg}\theta_0)-\ln(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)\right)}\cos(\sin\theta_0\cdot\varphi)\right),$$

$$v_{\theta_0}(\varphi,\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_0}\left(1 - e^{\sin\theta_0\cdot(g(\theta_0)-g(\theta))}\cos(\varphi\sin\theta_0)\right),$$

$$v_{\theta_0}(\varphi,\theta) = \frac{1 - e^{\sin\theta_0\cdot(g(\theta_0)-g(\theta))}\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\operatorname{tg}\theta_0}. \tag{2.18}$$

Limes kada $\theta_0 \to 0$ se može izračunati primjenom L'Hopitalovog pravila jer brojnik i nazivnik konvergiraju u nulu. Uvedimo oznake za funkciju u brojniku i funkciju u nazivniku:

$$f(\theta_0) = 1 - e^{\sin\theta_0\cdot(g(\theta_0)-g(\theta))}\cos(\varphi\sin\theta_0), \qquad h(\theta_0) = \operatorname{tg}\theta_0.$$

Dakle, primjenom L'Hopitalovog pravila vrijedi da je:

$$\lim_{\theta_0\to 0}\frac{f(\theta_0)}{h(\theta_0)} = \lim_{\theta_0\to 0}\frac{f'(\theta_0)}{h'(\theta_0)}.$$

Uočimo da je $g'(\theta) = \sec\theta$ jer je $\int \sec\theta d\theta = \ln(\operatorname{tg}\theta + \sec\theta)$, što smo pokazali u odjeljku 2.1 pri izvođenju Mercatorove projekcije. Deriviranjem funkcije u brojniku imamo da je

$$f'(\theta_0) = e^{\sin\theta_0(g(\theta_0)-g(\theta))}\{\sin(\varphi\sin\theta_0)\varphi\cos\theta_0 - [\cos\theta_0(g(\theta_0) - g(\theta)) + \operatorname{tg}\theta_0]\cos(\varphi\sin\theta_0\},$$

a deriviranjem funkcije u nazivniku dobivamo

$$h'(\theta_0) = \sec^2\theta_0.$$

Najprije se bavimo slučajem kada je $\varphi = 0$. Koristeći L'Hopitalovo pravilo i činjenicu da $g(\theta_0) \to 0$ kada $\theta_0 \to 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta_0\to 0} v_{\theta_0}(0,\theta) &= \lim_{\theta_0\to 0}\frac{e^{\sin\theta_0(g(\theta_0)-g(\theta))}\cdot[\cos\theta_0\cdot(g(\theta)-g(\theta_0)) - \operatorname{tg}\theta_0]}{\sec^2\theta_0}\\
&= \frac{e^{0\cdot(0-g(\theta))}\cdot[1\cdot(g(\theta)-0)-0]}{1}\\
&= \frac{1\cdot g(\theta)}{1}\\
&= g(\theta)\\
&= \ln(\operatorname{tg}\theta + \sec\theta).
\end{aligned}$$

Napomenimo da za opći slučaj izraz (2.18) možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned}
v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \frac{1-e^{\sin\theta_0\cdot(g(\theta_0)-g(\theta))}\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\operatorname{tg}\theta_0},\\
v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \frac{(1-e^{\sin\theta_0\cdot(g(\theta_0)-g(\theta))})\cos(\varphi\sin\theta_0)+1-\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\operatorname{tg}\theta_0},\\
v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \frac{1-e^{\sin\theta_0\cdot(g(\theta_0)-g(\theta))}}{\operatorname{tg}\theta_0}\cdot\cos(\varphi\sin\theta_0)+\frac{1-\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\operatorname{tg}\theta_0},\\
v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= v_{\theta_0}(0,\theta)\cdot\cos(\varphi\sin\theta_0)+\frac{1-\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\operatorname{tg}\theta_0}.
\end{aligned}$$

Primjenom L'Hopitalovog pravila dobivamo:

$$\lim_{\theta_0\to 0}\frac{1-\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\operatorname{tg}\theta_0}=\lim_{\theta_0\to 0}\frac{\sin(\varphi\sin\theta_0)\cdot\varphi\cos\theta_0}{\sec^2\theta_0}=\frac{0\cdot\varphi\cdot 1}{1}=0.$$

Iz toga slijedi da:

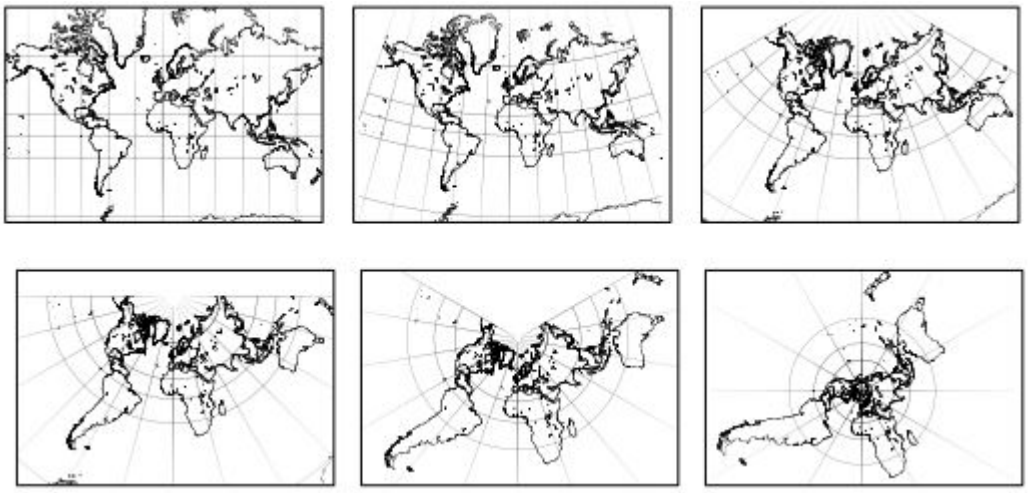
$$\begin{aligned}
\lim_{\theta_0\to 0} v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \lim_{\theta_0\to 0}\left(v_{\theta_0}(0,\theta)\cdot\cos(\varphi\sin\theta_0)+\frac{1-\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\operatorname{tg}\theta_0}\right)\\
&= \lim_{\theta_0\to 0} v_{\theta_0}(0,\theta)\cdot\lim_{\theta_0\to 0}\cos(\varphi\sin\theta_0)+\lim_{\theta_0\to 0}\frac{1-\cos(\varphi\sin\theta_0)}{\operatorname{tg}\theta_0}\\
&= \ln(\operatorname{tg}\theta+\sec\theta)\cdot 1+0\\
&= \ln(\operatorname{tg}\theta+\sec\theta).
\end{aligned}$$

Dakle, jednadžbe (2.15) konusne projekcije, kada $\theta_0\to 0$, glase ovako:

$$\begin{cases} u_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \varphi\\ v_{\theta_0}(\varphi,\theta) &= \ln(\operatorname{tg}\theta+\sec\theta), \end{cases} \tag{2.19}$$

a to je ekvivalentno jednadžbama u izrazu (2.5) kojima je zadana Mercatorova projekcija.

Slika 2.18 prikazuje kontinuiranu deformaciju karata iz Mercatorove na stereografsku kartu kada se θ_0 povećava od 0 do $\frac{\pi}{2}$.



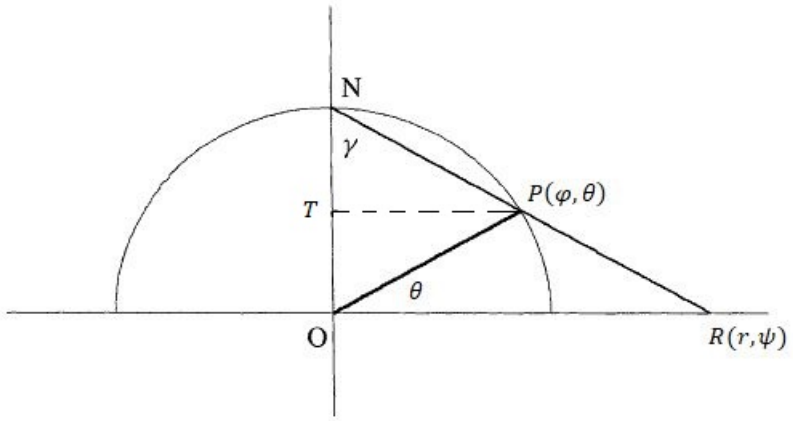
Slika 2.18: Od Mercatorove do stereografske projekcije preko konformnih konusnih karti

Poglavlje 3

Svojstva povezana s Mercatorovom projekcijom

3.1 Veza s kompleksnom funkcijom $\exp z$

U ovom odjeljku ćemo pokazati povezanost Mercatorove projekcije s kompleksnom funkcijom $\exp z$. Kako bismo otkrili tu vezu, promotrit ćemo još jednu poznatu kartografsku projekciju koju smo već spomenuli, a to je stereografska projekcija.



Slika 3.1: Stereografska projekcija

Kao što smo već definirali u odjeljku 2.2, stereografska projekcija preslikava Zemljinu sferu s jednog od polova na ravninu paralelnu s ekvatorom. Tada smo promatrali projekciju iz južnog pola S na tangencijalnu ravninu sfere koja sadrži sjeverni pol N. Neka je sada centar projekcije sjeverni pol N, a ravnina projekcije ona ravnina koja sadrži ekva-

tor. Dakle, točka $P(\varphi, \theta)$ na sferi se projicira u točku $R(r, \psi)$ na ravnini projekcije, kako je prikazano na slici 3.1. Uočavamo da je ravnina projekcije upravo ekvatorska ravnina, odnosno ona koja sadrži ekvator.

Radi jednostavnosti, opet pretpostavljamo da je radijus sfere jednak 1. Kako bismo odredili koordinate točke R, moramo odrediti njenu udaljenost $r = \overline{OR}$ od središta sfere kao funkciju u ovisnosti o kutu θ koji predstavlja širinu. Budući da se ravnina projekcije podudara s ekvatorskom ravninom, slijedi da je $\psi = \varphi$. Preostaje odrediti udaljenost r.
Iz slike 3.1 uočavamo da su trokuti $\triangle NTP$ i $\triangle NOR$ slični pa je

$$\frac{|OR|}{|TP|} = \frac{|ON|}{|TN|} \tag{3.1}$$

Prethodno smo označili da je $r = \overline{OR}$. Budući da promatramo sferu radijusa 1, vrijedi da je $|OP| = 1$. Tada primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu $\triangle OPT$ dobivamo da je $|TP| = \cos\theta$, a $|OT| = \sin\theta$. Kako je radijus sfere jednak 1, slijedi da je $|ON| = 1$, a $|TN| = |ON| - |OT| = 1 - \sin\theta$.
Sada uvrštavanjem u jednadžbu 3.1 dobivamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\cos\theta} &= \frac{1}{1-\sin\theta} \\
r &= \frac{1}{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}} \\
r &= \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \\
r &= \frac{1}{\sec\theta - \operatorname{tg}\theta}
\end{aligned}$$

Nadalje, sredimo dobiveni izraz:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{1}{\sec\theta - \operatorname{tg}\theta} \cdot \frac{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta} \\
r &= \frac{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ako podijelimo trigonometrijski identitet $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ sa $\cos^2\theta$, dobivamo sljedeći identitet:

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta,$$

te uvrštavanjem u izraz 3.2 dobivamo sljedeće:

$$r = \frac{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta}$$

$$r = \frac{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}{1}$$
$$r = \sec\theta + \operatorname{tg}\theta$$

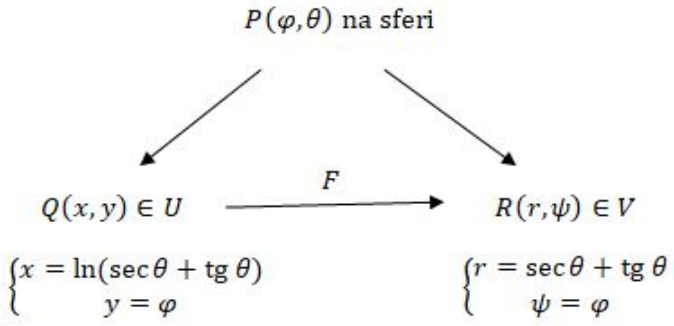
Dakle, veza između točaka $P(\varphi, \theta)$ i $R(r, \psi)$ glasi:

$$\begin{cases} r &= \sec\theta + \operatorname{tg}\theta \\ \psi &= \varphi \end{cases} \tag{3.3}$$

Nadalje, promotrimo vezu između Mercatorove i stereografske projekcije.
Neka je zadana točka $P(\varphi, \theta)$ na sferi. Stereografska projekcija preslikava sferu, isključujući sjeverni pol, na dvodimenzionalnu ravninu V. Južni pol odgovara ishodištu O u ravnini V. Kao što smo pokazali u odjeljku 2.1, Mercatorova projekcija preslikava sferu, isključujući sjeverni i južni pol, na podskup U dan s:

$$\begin{cases} x &= \ln\left(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta\right) \\ y &= \varphi \end{cases} \tag{3.4}$$

Iz toga slijedi da postoji preslikavanje između skupa U i skupa $V\backslash\{O\}$, odnosno dvodimenzionalne xy-ravnine bez ishodišta O. Označimo to preslikavanje s F. Na slici 3.2 su prikazane veze između točke $P(\varphi, \theta)$ na sferi, njene slike $Q(x, y)$ u Mercatorovoj projekciji i njene slike $R(r, \psi)$ u stereografskoj projekciji.



Slika 3.2: Grafički prikaz preslikavanja

Sada možemo lako opisati preslikavanje F kombiniranjem izraza 3.3 i 3.4, te dobivamo:

$$\begin{cases} r &= e^x \\ \psi &= y \end{cases} \tag{3.5}$$

jer je

$$\begin{aligned} r &= \sec\theta + \operatorname{tg}\theta \\ r &= e^{\ln(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)} \\ r &= e^{x}. \end{aligned}$$

Skup U, podskup u dvodimenzionalnoj ravnini, može također biti prikazan kao podskup u kompleksnoj ravnini. Taj podskup je tada dan s:

$$U = \{z \mid z = x + iy, -\pi < y < \pi\}.$$

Također i slika preslikavanja F, prethodno zadana kao skup $V\backslash\{O\}$, odgovara podskupu $C\backslash\{O\}$. Kao kompleksna funkcija, F preslikava $z = x + iy \in U$ u vrijednost $w \in C\backslash\{O\}$. Izrazimo vrijednost w u polarnim koordinatama:

$$w = r\cos\theta + ir\sin\theta.$$

Iz preslikavanja F zadanog jednadžbama u izrazu (3.5), slijedi da je:

$$w = e^{x}\cos\theta + ie^{x}\sin\theta.$$

Ova veza se također može zapisati kao $w = e^{x+iy}$, odnosno F kao kompleksna funkcija je zadana s

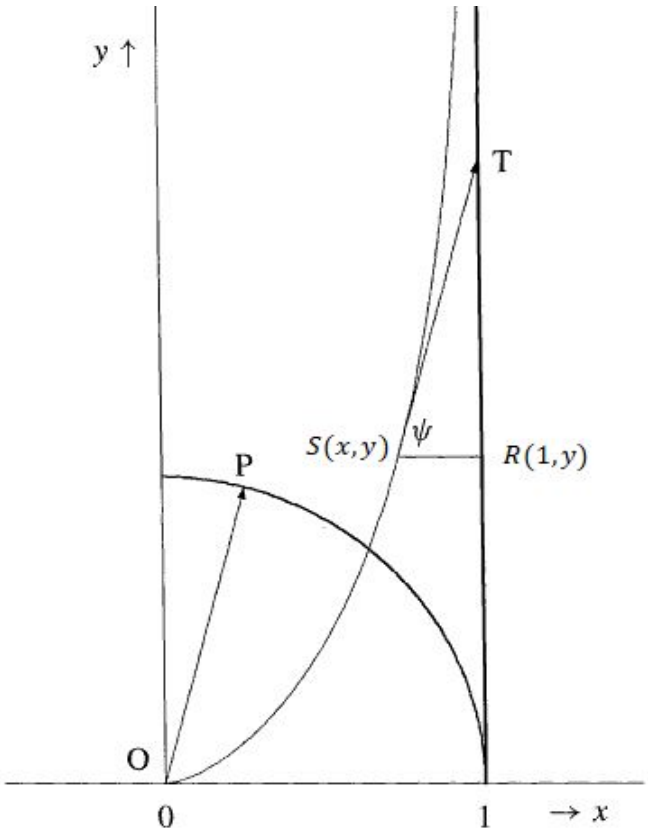
$$F(z) = e^{z}.$$

Kako su i stereografska i Mercatorova projekcija konformne, slijedi da je i preslikavanje F konformno te je takvo da je orijentacija očuvana.

3.2 Mercatorova projekcija i krivulja traktrisa

U ovom odjeljku ćemo prikazati vezu između Mercatorove projekcije i krivulje traktrise. Prvo se pobliže upoznajmo s krivuljom traktrisom i njenim jednadžbama. **Traktrisa** je transcedentna krivulja u ravnini za koju je duljina dijela tangente od dirališta do sjecišta sa zadanim pravcem stalna. Opisat ćemo kako nastaje traktrisa.

Pretpostavimo da se neki objekt nalazi u ishodištu koordinatnog sustava te je, vrpcom duljine 1, povezan s osobom koja se nalazi u točki $(1, 0)$. Kako osoba hoda prema gore, duž pravca $x = 1$ u prvom kvadrantu, objekt ostavlja trag koji iscrtava krivulju traktrisu, kako je prikazano na slici 3.3.



Slika 3.3: Traktrisa

Najprije odredimo jednadžbu traktrise. Parametar ψ predstavlja kut između x-osi i tangente na krivulju. Lančano pravilo osigurava da za svaki parametar ψ vrijedi

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\psi}. \tag{3.6}$$

Nagib tangente položene na graf krivulje u nekoj točki možemo izraziti kao $\operatorname{tg}\psi$, pri čemu je ψ kut što ga tangenta zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Nadalje, kako derivacija funkcije u nekoj točki daje nagib tangente, znamo da je nagib tangente u određenoj točki jednak i $\frac{dy}{dx}$. Iz toga slijedi da je

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\psi.$$

Primjenom trigonometrije u pravokutnom trokutu $\triangle SRT$ dobivamo da je $|SR| = \cos\psi$, jer je duljina $|ST|$ jednaka duljini vrpce, odnosno jednaka 1. Iz toga slijedi da je

$$x = 1 - \cos\psi. \tag{3.7}$$

Dakle, imamo da je:

$$\frac{dx}{d\psi} = (1 - \cos\psi)',$$
$$\frac{dx}{d\psi} = \sin\psi.$$

Sada uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u 3.6 dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\psi} &= \operatorname{tg}\psi \cdot \sin\psi, \\
\frac{dy}{d\psi} &= \frac{\sin\psi}{\cos\psi} \cdot \sin\psi, \\
\frac{dy}{d\psi} &= \frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}, \\
\frac{dy}{d\psi} &= \frac{1 - \cos^2\psi}{\cos\psi}, \\
\frac{dy}{d\psi} &= \frac{1}{\cos\psi} - \cos\psi,
\end{aligned}$$

odnosno

$$y'(\psi) = \frac{1}{\cos\psi} - \cos\psi. \tag{3.8}$$

Početni uvjet ove jednakosti je

$$y(0) = 0,$$

jer kada se objekt nalazi u ishodištu, osoba se nalazi u točki $(1, 0)$. Kako bismo odredili y, potrebno je integrirati izraz s desne strane jednadžbe (3.8) pa imamo:

$$y(\psi) = \int \left(\frac{1}{\cos\psi} - \cos\psi \right) \mathrm{d}\psi$$

$$y(\psi) = \int \frac{1}{\cos\psi} \mathrm{d}\psi - \int \cos\psi \mathrm{d}\psi \tag{3.9}$$

Integral $\int \cos\psi \mathrm{d}\psi$ je tablični integral, a $\int \frac{1}{\cos\psi} \mathrm{d}\psi$ smo već odredili u odjeljku 2.1 pa uvrštavanjem već poznatih rješenja u jednadžbu (3.9), dobivamo da je

$$y(\psi) = \ln(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi) - \sin\psi. \tag{3.10}$$

Dakle, jednadžbe (3.7) i (3.10) predstavljaju parametarsku jednadžbu traktrise:

$$\begin{cases} x &= 1 - \cos\psi \\ y &= \ln(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi) - \sin\psi. \end{cases} \tag{3.11}$$

Sada kad smo odredili jednadžbu traktrise, zanima nas u kakvom je ona odnosu s Mercatorovom projekcijom. Stoga, pretpostavimo da se objekt nalazi u točki S na traktrisi i time određuje parametar ψ. Tada se osoba koja povlači taj objekt nalazi u točki T, kako je prikazano na slici 3.3. Znamo da je duljina vrpce jednaka 1 pa lako možemo odrediti koordinate točke $T(x_T, y_T)$ kada znamo koordinate točke $S(x_S, y_S)$, koje smo prethodno izveli (pogledaj izraz (3.11)). Slijedi da je

$$x_T = x_S + |SR| = 1 - \cos\psi + \cos\psi = 1,$$

što slijedi i iz činjenice da točka T leži na pravcu $x = 1$, te imamo da je

$$y_T = y_S + |RT| = \ln(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi) - \sin\psi + \sin\psi = \ln(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi).$$

Dakle, točka T ima sljedeće koordinate:

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= \ln(\sec\psi + \operatorname{tg}\psi). \end{cases} \tag{3.12}$$

Ako usporedimo koordinate točke T u izrazu (3.12) i koordinate točke Q u izrazu (2.7), uočavamo da je točka T na slici 3.3 jednaka točki Q na slici 2.9. Dakle, točka T je također slika točke $P(\cos\psi, \sin\psi)$ na jediničnom krugu, koji je presjek jedinične sfere po glavnoj kružnici, u Mercatorovoj projekciji.
Zaključujemo da je, za točku na sferi sa širinom ψ, njen okomiti položaj na Mercatorovoj karti, jednak poziciji osobe kada je kut koji zategnuta vrpca zatvara s pozitivnim dijelom x-osi jednak ψ.

Poglavlje 4

Složenije varijante Mercatorove projekcije

4.1 Transverzalni Mercator na sferi: TMS

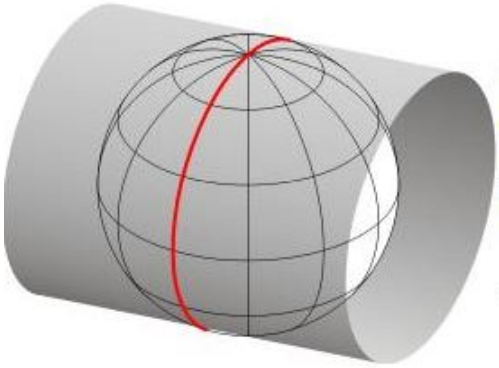
U poglavlju 2 smo prikazali konstrukciju Normalnog Mercatora na sferi (NMS) čija je najveća prednost bila konformnost, odnosno očuvanje kutova i oblika na lokalnoj razini. Nadalje, meridijani su se preslikavali u pravce okomite na ekvator, dok je konformnost povlačila to da se loksodrome preslikavaju također u pravce te je time osigurana korisnost NMS kao pomoći pri navigaciji.

Nedostatak Normalnog Mercatora na sferi kao topografske karte sfere je u tome što ta projekcija veoma deformira oblike kako se približava polovima. Međutim, NMS ima točno mjerilo na ekvatoru i vrlo je precizan unutar uskog pojasa oko ekvatora. Upravo tu točnost u blizini ekvatora želimo iskoristiti kako bismo konstruirali projekciju koja će meridijan, odnosno veliku kružnicu na kojoj leži meridijan, uzeti kao neku vrstu ekvatora te koristiti NMS kako bi postigli konformnu i točnu projekciju unutar uskog pojasa koji je povezan s odabranim meridijanom. To je upravo **Transverzalni Mercator na sferi (TMS)** kojeg je prvo demonstrirao Lambert 1772. godine.

Ključna posljedica je da ako imamo projekciju koja je vrlo precizna u blizini jednog meridijana, onda će skup takvih projekcija osigurati preciznu pokrivenost čitave sfere.

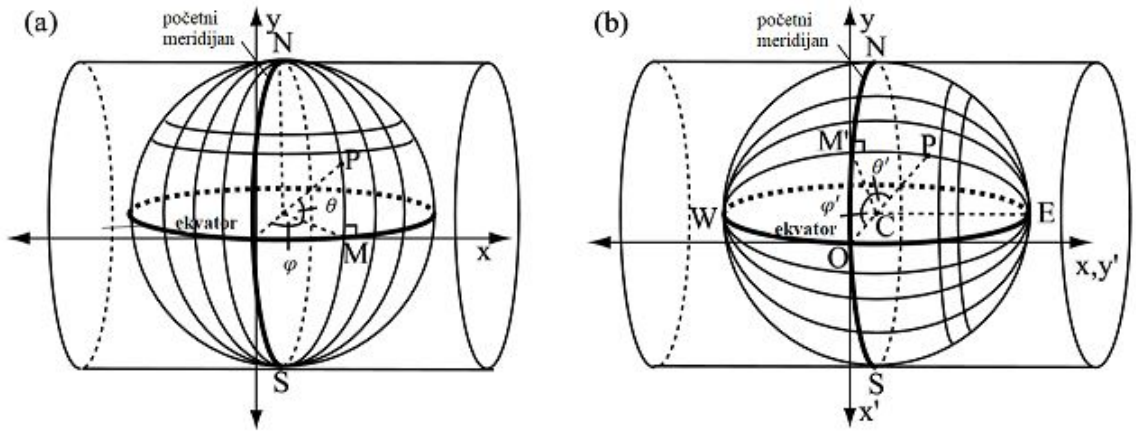
U Normalnoj Mercatorovoj projekciji na sferu je cilindar omotavao sferu tako da ju je dodirivao duž ekvatora, a u ovom slučaju omotavamo cilindar oko sfere, koja predstavlja Zemlju, tako da dodiruje sferu uzduž središnjeg meridijana umjesto da slijedi ekvator, što možemo vidjeti na slici 4.1. Tada je uzduž središnjeg meridijana precizno mjerilo, bez obzira koliko se karta proteže na sjever i jug, a regije u njegovoj blizini su preslikane s malim iskrivljenjem.

Problem je izgraditi funkcije $x(\varphi, \theta)$ i $y(\varphi, \theta)$ tako da projekcija bude također konfor-



Slika 4.1: Transverzalni Mercator na sferi (TMS)

mna. Prvo uvedimo novu mrežu meridijana i paralela koja je zapravo normalna mreža prikazana na slici 4.2a, ali rotirana tako da se njen "ekvator"poklapa s odabranim meridijanom, odnosno velikom kružnicom na kojoj on leži, kako je prikazano na slici 4.2b.



Slika 4.2: Transverzalni Mercator na sferi

Zbog jednostavnosti pretpostavimo da je zadana sfera polumjera 1.
Neka su $\theta' = \sphericalangle PCM'$ i $\varphi' = \sphericalangle OCM'$ koordinate točke P s obzirom na novu mrežu meridijana i paralela. Uočimo da je φ' pozitivan od ishodišta O prema točki M', što je suprotno orijentaciji kuta φ u standardnoj mreži meridijana i paralela na slici 4.2a.
Na slici 4.2b su prikazane osi x' i y' koje su povezane s novom mrežom meridijana i paralela na isti način na koji su osi bile dodijeljene za Normalnu Mercatorovu projekciju na sferi na slici 4.2a.
Stoga, s obzirom na orijentaciju kuta φ i rotiranu mrežu meridijana i paralela, jednadžbe

za Normalnu Mercatorovu projekciju na sferi su

$$\begin{cases} x' &= -\varphi' \\ y' &= \ln(\sec\theta' + \operatorname{tg}\theta') \end{cases}$$

Sada je odnos između stvarnih osi Transverzalne Mercatorove projekcije na sferi i temeljnih osi jednostavan, odnosno $x = y'$ i $y = -x'$, što možemo vidjeti i na slici 4.2b. Dakle, odmah dobivamo formule projekcije s obzirom na kutove (θ', φ') u rotiranoj mreži meridijana i paralela:

$$\begin{cases} x &= \ln(\sec\theta' + \operatorname{tg}\theta') \\ y &= \varphi' \end{cases}$$

Dobiveni izraz za prvu koordinatu se još može zapisati na drugačiji način:

$$\begin{aligned} x &= \ln(\sec\theta' + \operatorname{tg}\theta'), \\ x &= \ln(\sec\theta' + \sqrt{\sec^2\theta' - 1}), \end{aligned}$$

a kako je $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, slijedi da je

$$x = \operatorname{arch}(\sec\theta').$$

Također možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x &= \ln(\sec\theta' + \sqrt{\sec^2\theta' - 1}), \\ x &= \ln\left(\frac{1}{\cos\theta'} + \sqrt{\frac{\sin^2\theta'}{\cos^2\theta'}}\right), \\ x &= \ln\left(\frac{1 + \sin\theta'}{\cos\theta'}\right), \\ x &= \ln\sqrt{\frac{(1 + \sin\theta')^2}{\cos^2\theta'}}, \\ x &= \ln\sqrt{\frac{(1 + \sin\theta')^2}{1 - \sin^2\theta'}}, \\ x &= \ln\sqrt{\frac{1 + \sin\theta'}{1 - \sin\theta'}}, \end{aligned}$$

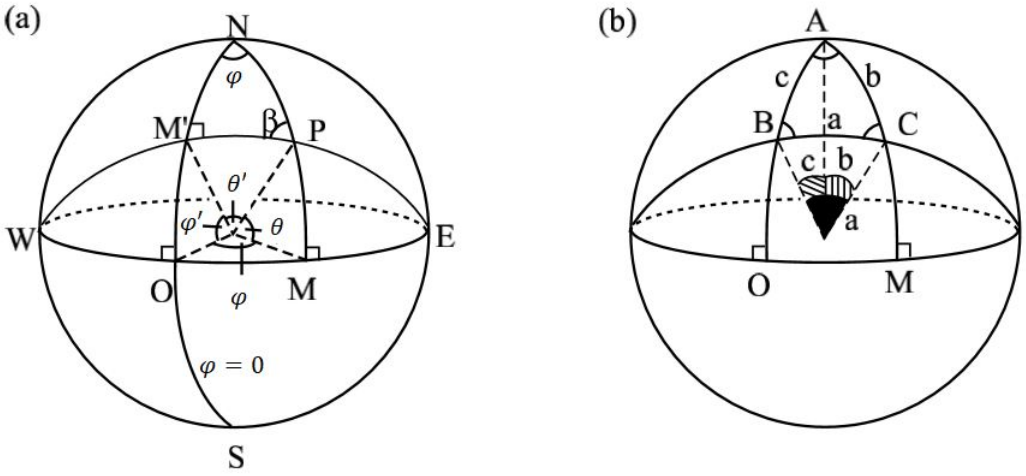
a budući da je $\operatorname{arth} x = \ln\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$, slijedi da je

$$x = \operatorname{arth}(\sin\theta').$$

Dakle, formule projekcije s obzirom na kutove (θ', φ') u rotiranoj mreži meridijana i paralela možemo zapisati i ovako:

$$\begin{cases} x &= \text{th}^{-1}(\sin\theta') \\ y &= \varphi' \end{cases} \tag{4.1}$$

Preostalo je izvesti vezu između (θ', φ') i (θ, φ) primjenom sferne trigonometrije na trokut $\triangle NM'P$ koji je određen meridijanom koji prolazi kroz ishodište O, proizvoljnom točkom P i velikom kružnicom $WM'PE$ koja predstavlja "meridijan" u rotiranoj mreži (slika 4.3a).



Slika 4.3: Primjena sferne trigonometrije u TMS

Na slici 4.3b je prikazan sličan sferni trokut, na jediničnoj sferi, sa standardnim oznakama za koji vrijedi pravilo sinusa:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

pri čemu su A, B, C kutovi sfernog trokuta, dok su a, b, c njima nasuprotne stranice. Također vrijedi i pravilo kosinusa:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned}$$

Standardne oznake zamijenimo oznakama zadanim na slici 4.3a:

$$A \to \varphi, \qquad B \to \frac{\pi}{2}, \qquad C \to \beta,$$
$$a \to \theta', \qquad b \to \frac{\pi}{2} - \theta, \qquad c \to \frac{\pi}{2} - \varphi'.$$

Tada po pravilu sinusa za našu sferu:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta'} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi')}, \tag{4.2}$$

a po pravilu kosinusa su:

$$\cos\theta' = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi') + \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi')\cos\varphi, \tag{4.3}$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi')\cos\theta' + \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi')\sin\theta'\cos\frac{\pi}{2}, \tag{4.4}$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi') = \cos\theta'\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + \sin\theta'\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\cos\beta. \tag{4.5}$$

Iz prva dva uvjeta pravila sinusa (4.2) imamo da je

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta'} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)},$$

što možemo pojednostavniti jer je $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ i $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ pa imamo da je:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{\sin\theta'} &= \frac{1}{\cos\theta}, \\ \sin\varphi \cdot \cos\theta &= \sin\theta' \cdot 1, \\ \sin\theta' &= \sin\varphi \cdot \cos\theta. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Uočimo kako smo dobili jednostavan izraz za $\sin\theta'$ preko φ i θ.
Nadalje, prvi uvjet pravila kosinusa (4.3) možemo pojednostavniti tako da iskoristimo formule svođenja na prvi kvadrant, odnosno $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ i $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, pa dobivamo:

$$\cos\theta' = \sin\theta\sin\varphi' + \cos\theta\cos\varphi'\cos\varphi, \tag{4.7}$$

a drugi uvjet pravila kosinusa (4.4) možemo također pojednostavniti te imamo da je:

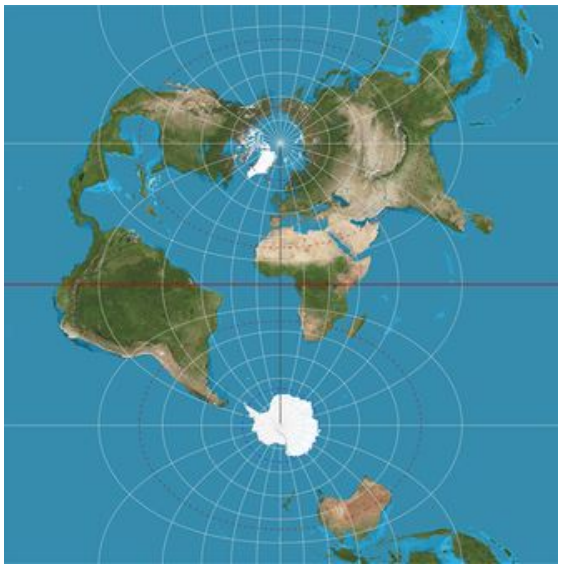
$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sin\varphi'\cos\theta' + \cos\varphi'\sin\theta' \cdot 0, \\ \sin\theta &= \sin\varphi'\cos\theta' + 0, \\ \sin\theta &= \sin\varphi'\cos\theta'. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Sada iz jednadžbi (4.7) i (4.8) eliminirajmo $\cos\theta'$ tako da prvu jednadžbu uvrstimo u drugu, a time dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin\varphi'(\sin\theta\sin\varphi' + \cos\theta\cos\varphi'\cos\varphi),\\
\sin\theta &= \sin^2\varphi'\sin\theta + \sin\varphi'\cos\theta\cos\varphi'\cos\varphi, && /:\cos\theta\\
\operatorname{tg}\theta &= \sin^2\varphi'\operatorname{tg}\theta + \sin\varphi'\cos\varphi'\cos\varphi, && /-\sin^2\varphi'\operatorname{tg}\theta\\
\operatorname{tg}\theta(1-\sin^2\varphi') &= \sin\varphi'\cos\varphi'\cos\varphi,\\
\operatorname{tg}\theta\cos^2\varphi' &= \sin\varphi'\cos\varphi'\cos\varphi, && /:\cos^2\varphi'\\
\operatorname{tg}\theta &= \operatorname{tg}\varphi'\cos\varphi,\\
\operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{tg}\theta\cdot\frac{1}{\cos\varphi},\\
\operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{tg}\theta\sec\varphi. && (4.9)
\end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem izraza (4.6) u (4.1), te izražavanjem kuta φ' u (4.9) i također uvrštavanjem u (4.1), dobivamo jednadžbe Transverzalne Mercatorove projekcije na sferi s obzirom na početni, odnosno Griničkи meridijan:

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) &= \operatorname{th}^{-1}(\sin\varphi\cdot\cos\theta),\\ y(\varphi,\theta) &= \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg}\theta\sec\varphi). \end{cases}$$



Slika 4.4: Transverzalni Mercator na sferi s obzirom na Griničkи meridijan

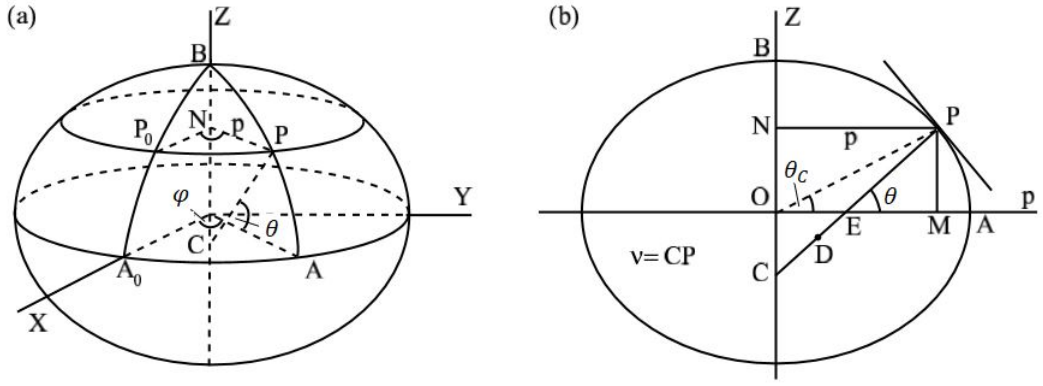
4.2 Mercatorove projekcije na elipsoidu

Geometrija elipsoida

Zemlju najčešće zamišljamo kao sferu, ali ona je preciznije modelirana oblikom rotacijskog elipsoida. Ako za os simetrije uzmemo z-os, Kartezijeva jednadžba elipsoida s obzirom na centar u ishodištu koordinatnog sustava glasi:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1, \qquad a > b. \tag{4.10}$$

Zemljopisna dužina φ je ista kao i kod sfere, dok je **geodetska širina** θ kut pod kojim normala u točki P, koja leži na elipsoidu, siječe ekvatorijalnu ravninu koja ima jednadžbu $Z = 0$. Za razliku od sfere, u slučaju elipsoida normala ne prolazi njegovim središtem, osim ako točka P leži na ekvatoru ili se poklapa s polovima.



Slika 4.5: Elipsoid u Kartezijevom koordinatnom sustavu i njegov presjek duž osi simetrije

Kut koji zatvara spojnica središta elipsoida i točka P na Zemljinom elipsoidu s ravninom ekvatora definiramo kao **geocentričnu širinu** θ_c. Uvedimo oznaku za udaljenost točke P na elipsoidu od osi simetrije

$$p(\theta) = |PN|,$$

te oznaku za udaljenost točke P od točke C koja je sjecište normale kroz točku P s osi simetrije elipsoida:

$$\nu(\theta) = |PC|.$$

Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta na trokut $\triangle PNC$, što možemo vidjeti na slici 4.5b, slijedi da je:

$$\cos\theta = \frac{|PN|}{|PC|}, \tag{4.11}$$

$$\cos\theta = \frac{p(\theta)}{v(\theta)}, \tag{4.12}$$

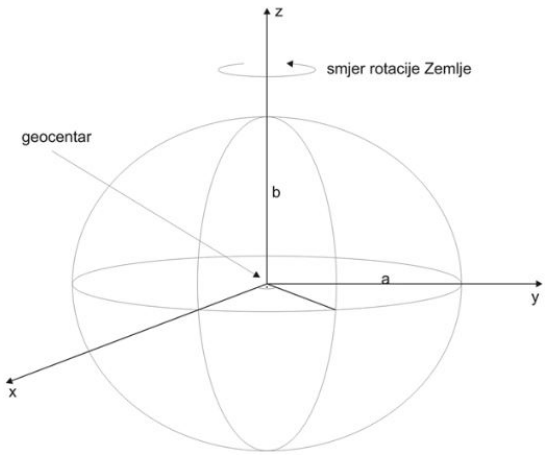
$$p(\theta) = v(\theta)\cos\theta. \tag{4.13}$$

Ako projiciramo točku P na ravninu ekvatora, lako uočavamo da vrijedi i sljedeća relacija:

$$p(\theta) = \sqrt{X^2 + Y^2}. \tag{4.14}$$

Definirajmo parametre koji određuju elipsoid.
Parametar a je **ekvatorijalni radijus**, a parametar b predstavlja udaljenost središta elipsoida od pola. Zbog toga se on često naziva polarnim radijusom iako to nije točno jer se ne radi o kružnici. Ovi parametri predstavljaju **veliku i malu poluos** meridijanske elipse koja je određena bilo kojim meridijanom i njegovim produljenjem preko polova.
Umjesto upotrebe (a, b) kao osnovnih parametara elipse, možemo koristiti kombinaciju (a, e) gdje e predstavlja **ekscentricitet**, ili (a, f) gdje f predstavlja **spljoštenost**.
Spomenuti parametri su definirani i povezani na sljedeći način:

$$b^2 = a^2(1 - e^2), \qquad f = \frac{a - b}{a}, \qquad e^2 = 2f - f^2 = f(2 - f).$$



Slika 4.6: Grafički prikaz elipsoida WGS84

Kao primjer navedimo vrijednosti za WGS84 (World Geodetic System) elipsoid koji se koristi kao referentni koordinatni sustav Zemlje:

$$a = 6378137m, \qquad e = 0.0818191908, \qquad f = 0.00335281,$$

$$b = 6356752.314m, \qquad e^2 = 0.0066943799, \qquad \frac{1}{f} = 299.3249753.$$

Temelji se na skupu konstanti i parametara koji opisuju Zemljinu veličinu, oblik, gravitaciju i geomagnetska polja. To je također referentni sustav za Globalni sustav pozicioniranja (GPS).
Spljoštenost Zemlje je jako mala. Primjerice, na slici 4.5 razlika između sfere radijusa a i elipsoida kojemu je ekvatorijalni radijus jednak također a, bila bi otprilike kao "debljina" jednog pravca na toj slici. Spljoštenost elipsi koje su prikazane ovdje, a i u drugim izvorima, obično je znatno preuveličana.
Elipsoid možemo parametrizirati geodetskom širinom θ. Najprije zapišimo jednadžbu bilo kojeg meridijana koja slijedi iz (4.10) i (4.14):

$$\begin{aligned} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{p^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} &= 1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Diferencirajamo prethodnu jednadžbu po p:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} &= 1 \qquad / \frac{d}{dp}, \\ \frac{1}{a^2} \cdot 2p \cdot dp + \frac{1}{b^2} \cdot 2Z \cdot Z' \cdot dp &= 0, \\ \frac{2p \cdot dp}{a^2} + \frac{2Z \cdot dZ}{b^2} &= 0, \\ \frac{2Z \cdot dZ}{b^2} &= -\frac{2p \cdot dp}{a^2}, \\ \frac{Z \cdot dZ}{b^2} &= -\frac{p \cdot dp}{a^2} \qquad / \cdot \frac{b^2}{Z \cdot dp}, \\ \frac{dZ}{dp} &= -\frac{pb^2}{Za^2}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Derivacija funkcije krivulje u točki predstavlja koeficijent smjera tangente u toj točki pa stoga vrijedi da je koeficijent smjera tangente jednak:

$$k_t = -\frac{pb^2}{Za^2}.$$

Budući da su normala i tangenta međusobno okomite, umnožak njihovih koeficijenata smjera je jednak -1. Stoga je koeficijent smjera normale jednak

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = \frac{Za^2}{pb^2} = \frac{Z}{p(1-e^2)},$$

jer je $b^2 = a^2(1 - e^2)$. Također znamo da je koeficijent smjera pravca jednak tangensu kuta koji taj pravac zatvara s pozitivnim dijelom x-osi, pa vrijedi da je:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{Z}{p(1-e^2)}, \\ Z &= \operatorname{tg}\theta \cdot p(1-e^2). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Uvrštavanjem jednakosti (4.17) u jednadžbu (4.15) eliminiramo Z i dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{tg}\theta \cdot p(1-e^2))^2}{b^2} &= 1, && / \cdot a^2b^2 \\ p^2b^2 + \operatorname{tg}^2\theta \cdot p^2(1-e^2)^2a^2 &= a^2b^2, \\ p^2b^2 + \operatorname{tg}^2\theta \cdot p^2b^2(1-e^2) &= a^2b^2, && / : b^2 \\ p^2 + \operatorname{tg}^2\theta \cdot p^2(1-e^2) &= a^2, \\ p^2\left[1 + \operatorname{tg}^2\theta \cdot (1-e^2)\right] &= a^2. \end{aligned}$$

Nadalje, sređivanjem jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{a^2}{1 + \operatorname{tg}^2\theta \cdot (1-e^2)}, \\ p &= \frac{a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta \cdot (1-e^2)}}, \\ p &= \frac{a}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot (1-e^2)}}, \\ p &= \frac{a}{\frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta \cdot (1-e^2)}}, \\ p &= \frac{a\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta - e^2\sin^2\theta}}, \\ p &= \frac{a\cos\theta}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ako prethodnu jednakost (4.18) uvrstimo u (4.17), dobivamo:

$$\begin{aligned} Z &= \operatorname{tg}\theta \cdot \frac{a\cos\theta}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}} \cdot (1-e^2), \\ Z &= \frac{a \cdot (1-e^2)\sin\theta}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}}. \end{aligned}$$

Dakle, potrebna je parametrizacija:

$$|PN| = p(\theta) = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}, \tag{4.19}$$

$$|PM| = Z(\theta) = \frac{a\cdot(1-e^2)\sin\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}. \tag{4.20}$$

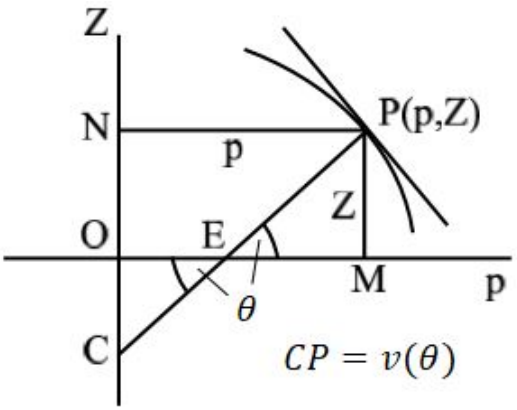
Budući da iz jednakosti (4.13) slijedi da je $v(\theta) = |PC| = p\sec\theta$, uvrštavanjem (4.18), imamo da je:

$$|PC| = v(\theta) = \frac{a\cos\theta\sec\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}},$$

$$|PC| = v(\theta) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}. \tag{4.21}$$

Konačno, uvrštavanjem jednakosti (4.21) u (4.19) i (4.20), dobivamo **parametrizaciju elipsoida geodetskom širinom** θ:

$$p(\theta) = v(\theta)\cos\theta,$$
$$Z(\theta) = (1-e^2)v(\theta)\sin\theta.$$



Slika 4.7: Trokut OCE definiran normalom i njenim odsječcima na osima

Lako se izvedu sljedeće relacije za duljine stranica trokuta $\triangle OCE$, koji je definiran normalom i odsječcima što ih ona odsijeca na osima (slika 4.7):

$$OE = ve^2\cos\theta, \qquad CE = ve^2, \qquad OC = ve^2\sin\theta.$$

Nadalje, mogu se izvesti različite relacije koje povezuju geodetsku i geocentričnu širinu, zatim veze između kartezijevih i geografskih koordinata i tako dalje. Navest ćemo samo neke od osnovnih relacija:

$$\operatorname{tg}\theta_c = (1 - e^2)\operatorname{tg}\theta.$$

Očito su θ i θ_c jednake samo na ekvatoru kada je $\theta = 0$ ili na polovima kada je $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Koristeći parametrizaciju elipsoida geodetskom širinom θ, možemo odrediti Kartezijeve koordinate točke na plohi:

$$\begin{aligned} X(\theta) &= p(\theta)\cos\varphi = v(\theta)\cos\theta\cos\varphi, \\ Y(\theta) &= p(\theta)\sin\varphi = v(\theta)\cos\theta\sin\varphi, \\ Z(\theta) &= (1 - e^2)v(\theta)\sin\theta. \end{aligned}$$

Ako su zadani X, Y, Z onda vrijedi:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right), \qquad \theta = \left(\frac{Z}{(1 - e^2)\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$$

Normalni Mercator na elipsoidu: NME

Normalna Mercatorova projekcija na elipsoidu (NME) je jednostavna, ali ne i trivijalna, generalizacija Normalnog Mercatora na sferi (NMS u odjeljku 2.1), a obje dijele iste prednosti i nedostatke. Projekcija je konformna, čuva kutove i preslikava loksodrome na elipsoidu u pravce jednakog azimuta. Konformnost osigurava da mjerilo u svakoj točki ne ovisi o smjeru, tako da približno čuva male oblike.
Kao i kod NMS, mjerilo varira mijenjanjem zemljopisne širine, pri tome je točno na ekvatoru, a vrlo je precizno unutar uskog pojasa oko ekvatora. Opseg tog područja visoke preciznosti se može povećati korištenjem sekantnog oblika projekcije.
Već smo utvrdili da su kvantitativne razlike između NMS i NME reda e^2, oko 0.007, odnosno manje od 1%.

Projekcijske jednadžbe su napisane u kontekstu modificiranog Mercatorovog parametra $\psi(\theta) = \ln(\operatorname{tg}\theta + \sec\theta)$, koji je u literaturi obično nazvan izometričkom zemljopisnom širinom:

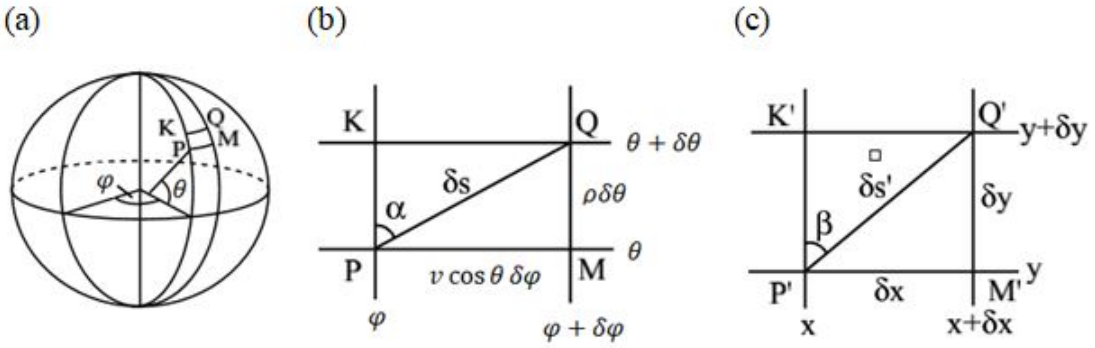
$$x(\varphi, \theta) = a\varphi, \qquad y(\varphi, \theta) = a\psi(\theta).$$

Mercatorov modificirani parametar je izveden usporedbom infinitezimalnih elemenata na elipsoidu i projekcijske ravnine te nametanjem uvjeta konformnosti. Geometrija infinitezimalnih elemenata daje

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v\cos\theta\delta\varphi}{\rho\delta\theta}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{a\delta\varphi}{a\psi'(\theta)\delta\theta},$$

tako da je

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\rho \sec\theta}{v\psi'(\theta)} \operatorname{tg}\alpha.$$



Slika 4.8: Izravna transformacija za NME

Konformna projekcija čuva kutove, stoga mora biti $\alpha = \beta$. Iz toga slijedi da je:

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\rho(\theta)\sec\theta}{v(\theta)}$$

Funkcije $v(\theta)$ i $\rho(\theta)$ su dane jednadžbama:

$$v(\theta) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}}, \qquad \rho(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{\left(1 - e^2\sin^2\theta\right)^3}},$$

pa slijedi da je

$$\psi(\theta) = \int_0^\theta \frac{(1-e^2)}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{1 - e^2\sin^2\theta} d\theta.$$

Rastavom na parcijalne razlomke dobivamo:

$$\begin{aligned}
\psi(\theta) &= \int_0^\theta \frac{1}{\cos\theta} - \frac{e^2\cos\theta}{2}\left(\frac{1}{1+e\sin\theta} + \frac{1}{1-e\sin\theta}\right) d\theta, \\
\psi(\theta) &= \int_0^\theta \frac{1}{\cos\theta} - \int_0^\theta \frac{e^2\cos\theta}{2}\left(\frac{1}{1+e\sin\theta} + \frac{1}{1-e\sin\theta}\right) d\theta, \\
\psi(\theta) &= \ln(\operatorname{tg}\theta + \sec\theta) - \frac{e}{2}\ln\left(\frac{1+e\sin\theta}{1-e\sin\theta}\right), \\
\psi(\theta) &= \operatorname{arth}(\sin\theta) - e\operatorname{arth}(e\sin\theta).
\end{aligned}$$

Naglasimo da se iz relacije za $\psi(\theta)$ ne može dobiti inverzna relacija $\theta(\psi)$ u zatvorenom obliku, nego se primjenjuju numeričke metode za računanje θ kao funkcije od ψ, npr. pomoću Taylorovog red i metodom iteracije.

Budući da je NME konformna cilindrična projekcija, linije koje zatvaraju isti kut s elipsoidnim meridijanima se preslikavaju u pravce. Djelovanje loksodroma na sferi, iz odjeljka 2.1, prenosi se i na elipsoid i NME s vrlo malim promjenama.
Jednadžba loksodrome kroz točku (φ_1, θ_1) pod azimutom α je dana pravcem

$$y - y_1 = (x - x_1)\operatorname{ctg}\alpha,$$

gdje je $x = a\varphi$, $y = a\psi(\theta)$, $\psi(\theta) = \operatorname{arth}(\sin\theta) - e\operatorname{arth}(e\sin\theta)$.
Dakle, imamo da je:

$$\begin{aligned} a\psi(\theta) - a\psi(\theta_1) &= (a\varphi - a\varphi_1)\operatorname{ctg}\alpha, \\ \psi(\theta) - \psi(\theta_1) &= (\varphi - \varphi_1)\operatorname{ctg}\alpha, \\ \psi(\theta) &= \psi(\theta_1) + (\varphi - \varphi_1)\operatorname{ctg}\alpha, \end{aligned}$$

a odatle slijedi i:

$$\begin{aligned} \psi(\theta) - \psi(\theta_1) &= \varphi\operatorname{ctg}\alpha - \varphi_1\operatorname{ctg}\alpha, \\ \varphi\operatorname{ctg}\alpha &= \varphi_1\operatorname{ctg}\alpha + \psi(\theta) - \psi(\theta_1), \\ \varphi(\theta) &= \varphi_1 + \operatorname{tg}\alpha\,(\psi(\theta) - \psi(\theta_1)) \end{aligned}$$

Ne postoji jednadžba kojom se može izraziti $\theta(\varphi)$ jer $\psi(\theta)$ nema inverznu relaciju u zatvorenom obliku.

Bibliografija

[1] D. Daners, *The Mercator and Stereographic Projections, and many in between*, The American Mathematical Monthly, 119 (2012), 199-210.

[2] N. Frančula, M. Lapaine, *Mali rječnik kartografskih projekcija*, www.kartografija.hr/old_hkd/mali_rjecnik.html, (srpanj 2017.)

[3] C. A. Furuti, *Cartographical Map Projections*, www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/TOC/cartTOC.html, (kolovoz 2017.)

[4] P. Osborne, *The Mercator projections*, Zenodo, Edinburgh, 2013.

[5] W. Pijls, *Some properties related to Mercator projection*, The American Mathematical Monthly, 108 (2001), 537-543.

[6] J. P. Snyder, *Map Projections - A Working Manual*, United States Government printing office, Washington, 1987.

[7] A. Toskić, *Kartografske projekcije*, www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Kartografija_13_14_15.pdf, (srpanj 2017.)

Sažetak

U ovom su radu najprije prikazana osnovna svojstva familija konformnih projekcija sfere na ravninu, koje se primjenjuju u kartografiji. Te projekcije obuhvaćaju Mercatorovu i stereografsku projekciju, koje smo pobliže upoznali, a upravo one su granični slučajevi Lambertove konusne projekcije.
Izvedene su najvažnije relacije te je ukazano na zanimljive veze Mercatorove projekcije s kompleksnom funkcijom $\exp z$ i s krivuljom traktrisom.
U završnom dijelu rada su ukratko izložene složenije varijante Mercatorove projekcije u kojima se umjesto normalne projekcije na sferi koristi poprečna (transverzalna) projekcija te se upoznajemo s geometrijom rotacijskog elipsoida, kojim je Zemlja preciznije modelirana nego sferom.

Summary

This paper presents the basic features of a family of conformal projections of the sphere onto the plane, applied in cartography. These projections include Mercator's and stereographic projection, which we have studied in more detail, and precisely those are the limit cases of Lambert's cone projection. The most important relations were presented and we indicated some interesting connections of Mercator projection with the complex function $\exp z$ and the tractrix curve.
In the final part of the work, we briefly exposed more complex variants of Mercator projection in which, instead of normal projections, we use transversal projections, and we get acquainted with the geometry of the rotational ellipsoid, which is a more precise model of the Earth than a sphere.

Životopis

Rođena sam 19. siječnja 1993. godine u Augsburgu, Savezna Republika Njemačka. Svoje obrazovanje započinjem 1999. godine u Osnovnoj školi Smiljevac u Zadru. Osnovnoškolsko obrazovanje završavam 2007. godine te se upisujem u Ekonomsko-birotehničku i trgovačku školu u Zadru, smjer ekonomist.
Po završetku srednje škole 2011. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija 2014. godine stječem akademski naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji ove godine završavam.