Teoremi o srednjoj vrijednosti za simetrično derivabilne funkcije

Bujan, Krešimir

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Krešimir Bujan

TEOREMI O SREDNJOJ VRIJEDNOSTI ZA SIMETRIČNO DERIVABILNE FUNKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Rajna Rajić

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj metorici prof. dr. sc. Rajni Rajić na mentorstvu, pomoći i podršci pri izradi ovog diplomskog rada. Ovaj diplomski rad posvećujem svojoj djevojci koja mi je tijekom studiranja bila najveća podrška.

Sadržaj

Uvod

Teoremi diferencijalnog računa leže u osnovama teorijskog razvoja matematičke analize. Jedan od najvažnijih teorema diferencijalnog računa jeste Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti. Taj važan teorem potječe od Rolleovog teorema kojeg je za polinome 1691. godine dokazao francuski matematičar Michel Rolle. Objavljen prvi puta u knjizi *Methode pour resoudre les égalites*, taj rezultat nije budio prevelik interes matematičara toga doba. Tek kada je Joseph Lagrange 1797. godine u svojoj knjizi *Theorie des functions analytiques* dokazao teorem o srednjoj vrijednosti koji proširuje Rolleov rezultat, Rolleov teorem je postao priznat. Još je veće priznanje Rolleov teorem postigao kada je Augustin Louis Cauchy u svojoj knjizi *Equationnes differentielles ordinaires* prezentirao svoj teorem o srednjoj vrijednosti. Većina dokaza u njegovoj knjizi su posljedica Rolleovog ili Lagrangeovog teorema. Teoremi o srednjoj vrijednosti postavili su temelje za mnoge rezultate dobivene u matematičkoj analizi te se primjenjuju u rješavanju raznovrsnih problema.

Cilj ovog diplomskog rada je obraditi teoreme o srednjoj vrijednosti te njihove generalizacije za realne funkcije realne varijable koje su simetrično derivabilne.

Rad je podijeljen u dva poglavlja. U prvom poglavlju ćemo prezentirati osnovne teoreme diferencijalnog računa. Posebnu pažnju posvetit ćemo Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti. Razmotrit ćemo neke varijante i poopćenja Lagrangeovog teorema, kao što su Flettov i Trahanov rezultat. U drugom poglavlju uvest ćemo pojam simetrične derivacije realne funkcije realne varijable te proučiti njena svojstva. Proučit ćemo razne varijante teorema o srednjoj vrijednosti za simetrično derivabilne funkcije.

Poglavlje 1

Teoremi diferencijalnog računa

U ovom poglavlju najprije ćemo dokazati osnovne teoreme diferencijalnog računa: Fermatov, Rolleov, Lagrangeov i Cauchyjev. Teoreme koje ćemo obraditi odnose se na realne funkcije realne varijable. Posebnu pažnju posvetit ćemo Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti, jednom od važnijih teorema u diferencijalnom računu. Da bismo zornije shvatili rezultate tih teorema, dat ćemo i njihove geometrijske interpretacije. Pokazat ćemo kako se Lagrangeov teorem primjenjuje u dokazivanju raznih matematičkih nejednakosti. Razmotrit ćemo i neke varijante Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti za koje su zaslužni matematičari T. M. Flett, D. H. Trahan, P. K. Sahoo i T. Riedel.

1.1 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

U ovoj točki obradit ćemo osnovne teoreme diferencijalnog računa, u koje ubrajamo Fermatov, Rolleov, Lagrangeov i Cauchyjev teorem i dati njihove geometrijske interpretacije.

Prvi teorem diferencijalnog računa koji ovdje prezentiramo je Fermatov teorem. Da bismo ga formulirali, treba nam pojam lokalnog ekstrema.

Definicija 1.1.1. *Neka je dana funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Kažemo da je $c \in \langle a, b\rangle$ točka lokalnog maksimuma (lokalnog minimuma) ako postoji $\delta > 0$ tako da je $f(c) \geq f(x)$ ($f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle$. Točke lokalnih maksimuma i lokalnih minimuma funkcije f zovemo točkama lokalnih ekstrema funkcije f.*

Teorem 1.1.2 (P. de Fermat)**.** *Neka je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $c \in \langle a, b\rangle$. Ako je c točka lokalnog ekstrema funkcije f, onda je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Neka je $c \in \langle a, b\rangle$ točka lokalnog ekstrema funkcije f. Pretpostavimo da je c točka lokalnog maksimuma. Tada je $f(x) \leq f(c)$ za svaki x iz nekog otvorenog intervala

$I \subseteq \langle a, b \rangle$ koji sadrži c. Dakle, za svaki $x \in I$ takav da je $x < c$ vrijedi

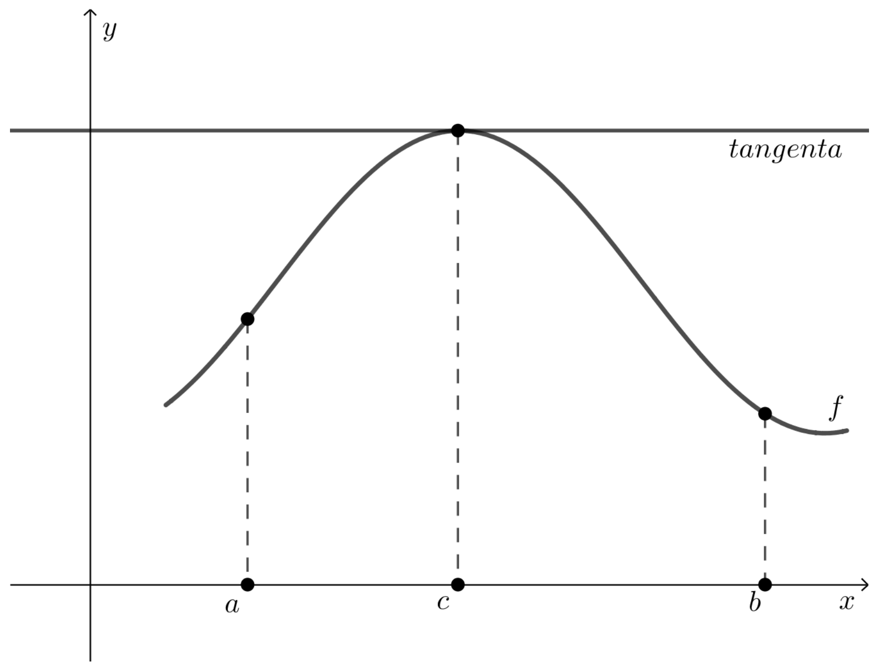
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \tag{1.1}$$

jer je brojnik nenegativan a nazivnik negativan. Sada pustimo limes u nejednakosti (**??**) kada x teži ka c s lijeva i dobivamo $f'(c) \geq 0$. Nadalje, za svaki $x \in I$ takav da je $x > c$ vrijedi

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \tag{1.2}$$

jer je brojnik nenegativan, a nazivnik pozitivan, pa kada pustimo limes u (**??**) kada x teži ka c s desna dobivamo da je $f'(c) \leq 0$. Imamo $f'(c) \geq 0$ i $f'(c) \leq 0$ pa je $f'(c) = 0$. Tvrdnja se slično dokazuje i u slučaju kada je c točka lokalnog minimuma funkcije f. □

Fermatov teorem možemo bolje shvatiti geometrijskom interpretacijom, jer ovaj vrlo važan teorem povezuje geometriju (graf funkcije) s algebrom (nalaženje nul-točaka derivacije). Koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki s apscisom c je jednak $f'(c)$. Ako je c točka lokalnog ekstrema funkcije f, tada je prema Fermatovom teoremu $f'(c) = 0$ pa je tangenta u točki $(c, (f(c))$ paralelna s osi apscisa.



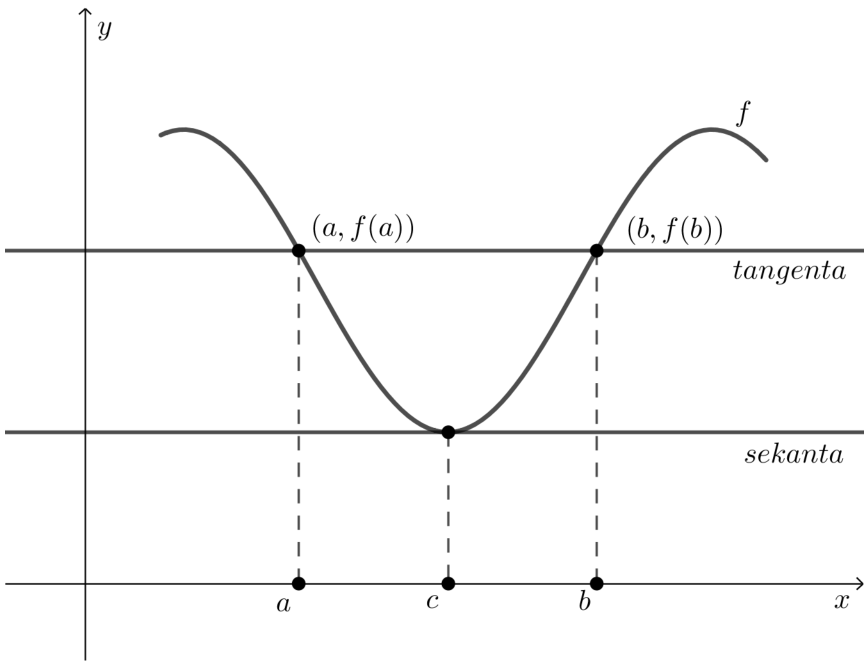
Slika 1.1: Geometrijska interpretacija Fermatovog teorema

Sljedeći teorem diferencijalnog računa koji ovdje prezentiramo je Rolleov teorem. Za dokaz Rolleovog teorema, osim Fermatovog teorema ključan je i Weierstrassov teorem o neprekidnim funkcijama na segmentu, koji ovdje samo navodimo, a dokaz se može pronaći u npr. [**?**, teorem 4, str. 31].

Teorem 1.1.3 (K. Weierstrass)**.** *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada funkcija f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost na $[a, b]$.*

Teorem 1.1.4 (M. Rolle)**.** *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$ te vrijedi $f(a) = f(b)$, tada postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da vrijedi $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Kako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, po teoremu **??** ona postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost na tom segmentu. Ako su obje takve vrijednosti postignute u granicama a i b, tada su maksimalna i minimalna vrijednost jednake i funkcija je konstanta, odnosno $f'(c) = 0$ za svaki $c \in \langle a, b\rangle$. Ako to nije slučaj, onda se ekstremna vrijednost postiže u nekoj točki $c \in \langle a, b\rangle$ pa po teoremu **??** slijedi da je $f'(c) = 0$. □



Slika 1.2: Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema

Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema je sljedeća. Ako je sekanta grafa funkcije f kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ paralelna s osi apscisa, tada postoji i tangenta na graf funkcije f koja je paralelna s osi apscisa. Sekanta siječe graf funkcije u dvjema točkama;

$(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Znamo da je koeficijent smjera sekante koja prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ jednak

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Koeficijent smjera tangente je $f'(c)$ za neki $c \in \langle a, b \rangle$, a kako je ona paralelna sa sekantom vrijedi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Rolleov teorem možemo ilustrirati i ovako: ako su a i b nultočke funkcije f koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b \rangle$, tada postoji barem jedna stacionarna točka $c \in \langle a, b \rangle$ funkcije f (tj. nultočka prve derivacije te funkcije).

Rolleov teorem ćemo iskoristi pri dokazivanju Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti.

Teorem 1.1.5 (J. L. Lagrange)**.** *Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada postoji točka $c \in \langle a, b \rangle$ takva da vrijedi*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.3}$$

Dokaz. Neka je $y = g(x)$ jednadžba pravca kroz dvije točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ dana s

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

odnosno,

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Definirajmo pomoćnu funkciju h kao

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) \\ &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) \\ &= f(a) - f(a) = 0. \end{aligned}$$

Analogno se dobije da je

$$h(b) = f(b) - g(b) = 0.$$

Kako je funkcija h neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b\rangle$ te vrijedi $h(a) = h(b)$, po teoremu **??** postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da je $h'(c) = 0$. Derivirajmo funkciju h:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Budući da je $h'(c) = 0$ slijedi da je

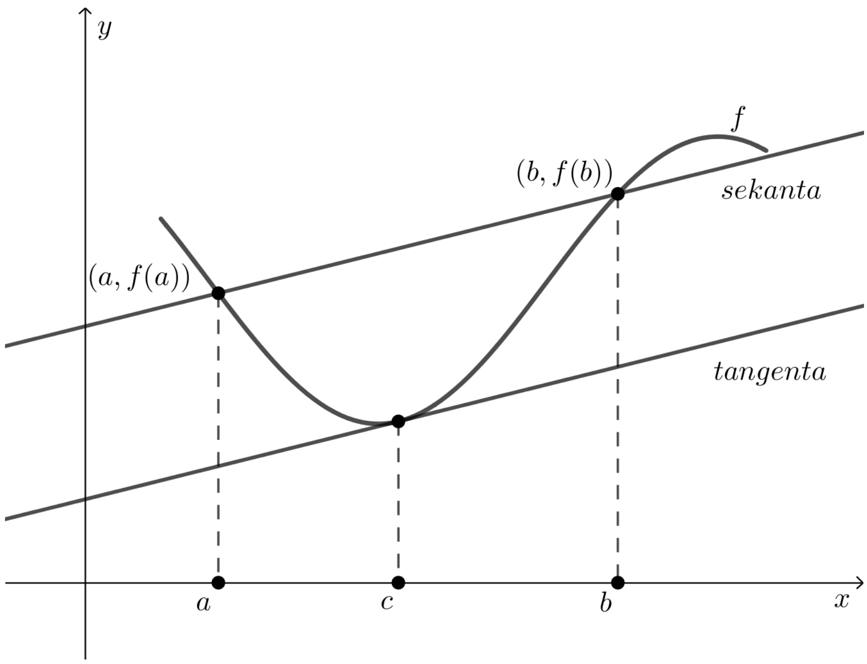
$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema je sljedeća. Za funkciju f koja zadovoljava uvjete Lagrangeovog teorema postoji tangenta na graf funkcije f koja je paralelna sekanti kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Tangentu možemo dobiti translacijom sekante. Budući da su sekanta i tangenta paralelne, imaju isti koeficijent smjera pa slijedi da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

za neku točku $c \in \langle a, b\rangle$.



Slika 1.3: Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema

Iskažimo i dokažimo još jedan teorem diferencijalnog računa.

Teorem 1.1.6 (A. L. Cauchy)**.** *Neka su zadane dvije funkcije* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *koje su neprekidne na* $[a, b]$ *i derivabilne na* $\langle a, b\rangle$*. Pretpostavimo da je* $g'(x) \neq 0$ *za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$*. Tada postoji* $c \in \langle a, b\rangle$ *takav da vrijedi*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz. Ovaj teorem se dokazuje slično kao Lagrangeov teorem. Definirajmo pomoćnu funkciju h kao

$$h(x) = f(x) - \lambda g(x).$$

Konstantu λ odaberimo tako da bude $h(a) = h(b)$. To možemo, jer iz

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$$

slijedi da je

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Primijetimo da $g(a) \neq g(b)$ jer bi inače po Rolleovom teoremu za funkciju g postojao neki $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $g'(c) = 0$. Po Rolleovom teoremu za funkciju h postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $h'(c) = 0$ pa imamo

$$h'(c) = f'(c) - \lambda g'(c) = 0$$

odakle slijedi da je

$$\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

1.2 Primjene Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti

U ovoj točki pokazat ćemo kako primijeniti Lagrangeov teorem u dokazivanju nekih tvrdnji diferencijalnog računa te matematičkih nejednakosti.

Propozicija 1.2.1. *Neka je funkcija* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *derivabilna. Ako je* $f'(x) = 0$ *za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$*, onda je* f *konstanta na* $\langle a, b\rangle$*.*

Dokaz. Neka su x_1 i x_2 proizvoljne točke iz $\langle a, b\rangle$, pri čemu je $x_1 \neq x_2$. Pretpostavimo da je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Tada, po Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti, postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da vrijedi

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0,$$

što je u kontradikciji s $f'(c) = 0$ za svaki $c \in \langle a, b\rangle$. Prema tome, funkcija f je konstanta na $\langle a, b\rangle$. □

Propozicija 1.2.2. *Neka su funkcije $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilne. Ako je $f'(x) = g'(x)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, tada se funkcije f i g razlikuju za konstantu C, tj. $f(x) = g(x) + C$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Neka je $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Tada je $h'(x) = f'(x) - g'(x)$. Budući da je $f'(x) = g'(x)$ slijedi da je $h'(x) = 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ pa po propoziciji **??** je $h(x) = C$, gdje je C konstanta. Dakle, funkcije f i g se razlikuju za konstantu C. □

Lagrangeovo teorem o srednjoj vrijednosti nam omogućuje da ispitivanjem predznaka prve derivacije funkcije odredimo intervale monotonosti te funkcije, tj. intervale na kojima je funkcija rastuća ili padajuća.

Propozicija 1.2.3. *Neka je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna. Ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda je funkcija f strogo rastuća na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda je funkcija f strogo padajuća na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Neka je $x_1 < x_2$ pri čemu su $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$. Tada po Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti postoji $c \in \langle x_1, x_2\rangle$ takav da vrijedi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0.$$

Kako je $x_2 - x_1 > 0$ slijedi da je $f(x_2) - f(x_1) > 0$ odnosno $f(x_1) < f(x_2)$. Time smo pokazali da je funkcija f na intervalu $\langle a, b\rangle$ strogo rastuća. Analogno se dokaže i druga tvrdnja ove propozicije. □

U idućim primjerima pokazat ćemo kako još upotrijebiti Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti.

Primjer 1.2.4. ***(Bernoullijeva nejednakost)*** *Ako je $x > -1$, tada je*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Jasno je da tvrdnja vrijedi za $x = 0$. Pretpostavimo sada da je $x > 0$ i neka je $f(t) = (1 + t)^n$ pri čemu je $t \in [0, x]$. Funkcija f zadovoljava pretpostavke Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti pa postoji $c \in \langle 0, x\rangle$ takav da vrijedi

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c),$$

odnosno

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c).$$

Imamo

$$(1 + x)^n - 1 = xn(1 + c)^{n-1} \geq nx,$$

odnosno

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Pretpostavimo da je $-1 < x < 0$ i neka je $f(t) = (1 + t)^n$ pri čemu je $t \in [x, 0]$. Tada prema Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti postoji $c \in \langle x, 0\rangle$ takav da je

$$f(0) - f(x) = (0 - x)f'(c).$$

Sada je

$$1 - (1 + x)^n = -xn(1 + c)^{n-1} \leq -nx,$$

odnosno

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

Primjer 1.2.5. *Ako je $x > 0$, tada je*

$$x \geq 1 + \ln x$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 1$.

Rješenje. Da bismo ovu nejednakost dokazali najprije definiramo $f(t) = \ln t$ za $t \in [1, b]$ i $b > 1$. Takva funkcija zadovoljava pretpostavke teorema **??** pa postoji $c \in \langle 1, b\rangle$ takav da vrijedi

$$f(b) - f(1) = (b - 1)f'(c).$$

Imamo

$$\begin{aligned} \ln b - \ln 1 &= (b - 1)\frac{1}{c}, \\ \ln b - 0 &= (b - 1)\frac{1}{c}, \\ \ln b &= \frac{b - 1}{c}. \end{aligned}$$

Kako je $c \in \langle 1, b\rangle$ dobivamo da je

$$\frac{b-1}{b} < \frac{b-1}{c} < \frac{b-1}{1},$$

pa slijedi

$$1 - \frac{1}{b} < \ln b < b - 1. \tag{1.4}$$

Iz lijeve strane nejednakosti (**??**) slijedi

$$\begin{aligned} 1 - \ln b &< \frac{1}{b}, \\ 1 + \ln b^{-1} &< \frac{1}{b}, \\ \frac{1}{b} &> 1 + \ln \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Budući da je $b > 1$, slijedi da je $0 < \frac{1}{b} < 1$. Uzmimo da je $x = \frac{1}{b}$ i imamo da je $x > 1 + \ln x$ za $0 < x < 1$. Iz desne strane nejednakosti (**??**) imamo

$$\ln b < b - 1,$$

a kako je $b > 1$ možemo pisati

$$x > 1 + \ln x,$$

pri čemu je $x > 1$.

Jasno je da za $x = 1$ dobivamo jednakost. Time smo pokazali da je $x \geq 1 + \ln x$ za svaki $x > 0$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 0$.

Primjer 1.2.6. *Za pozitivne realne brojeve a i b, a ≠ b, vrijedi nejednakost*

$$a^q < [qa + (1-q)b] \cdot b^{q-1},$$

pri čemu je $0 < q < 1$.

Rješenje. Kao i u prethodnim primjerima najprije definiramo pomoćnu funkciju. Neka je $f(t) = t^q$ pri čemu je $t > 0$ i $0 < q < 1$.

Pretpostavimo najprije da je $a < b$. Kako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b\rangle$, po teoremu **??** dobivamo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

za neki $c \in \langle a, b\rangle$. Sada dobivamo

$$\frac{b^q - a^q}{b - a} = qc^{q-1}. \tag{1.5}$$

Kako je $c \in \langle a, b \rangle$ dobivamo da je
$$c^{q-1} > b^{q-1}.$$
Nadalje, znamo da je $q > 0$, pa imamo
$$qc^{q-1} > qb^{q-1}.$$
Iskoristimo jednakost (**??**) u prethodnoj nejednakosti i dobivamo
$$\frac{b^q - a^q}{b - a} > qb^{q-1}. \tag{1.6}$$
Sređivanjem nejednakosti (**??**) dobivamo
$$\begin{aligned}
b^q - a^q &> (b - a)qb^{q-1},\\
b^q - a^q &> qb^q - qab^{q-1},\\
-a^q &> qb^q - b^q - qab^{q-1},\\
-a^q &> b^q(q - 1) - qab^{q-1},\\
-a^q &> [-b(1 - q) - qa] \cdot b^{q-1},\\
a^q &< [qa + (1 - q)b] \cdot b^{q-1},
\end{aligned}$$
što je i trebalo dokazati.

Neka je sada $b < a$. Stavimo $p := 1 - q$. Tada je $0 < p < 1$ pa prema prethodnom dijelu dokaza vrijedi
$$b^p < [pb + (1 - p)a] \cdot a^{p-1},$$
odnosno
$$b^{1-q} < [(1 - q)b + qa] \cdot a^{-q},$$
odakle se množenjem gornje nejednakosti s $a^q b^{q-1}$ dobije
$$a^q < [qa + (1 - q)b] \cdot b^{q-1},$$
što je i trebalo dokazati.

Primjer 1.2.7. *Za $x > 0$ je $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ strogo rastuća funkcija, a $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ strogo padajuća funkcija.*

Rješenje. Definiramo funkciju f kao $f(t) = \ln t$, $t > 0$. Po teoremu **??** za funkciju f i $x > 0$ je
$$f(x + 1) - f(x) = f'(c_x),$$

za neki $c_x \in \langle x, x+1 \rangle$. Dobivamo da je

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c_x}, \tag{1.7}$$

pri čemu je $x > 0$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] &= \frac{d}{dx}[x(\ln(x+1) - \ln x)], \\ &= \ln(x+1) - \ln x + x\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right], \\ &= \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}, \end{aligned}$$

pa prema (**??**) dobivamo

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \frac{1}{c_x} - \frac{1}{x+1} > 0.$$

Tada je prema propoziciji **??** funkcija $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ strogo rastuća. Kako je funkcija $x \mapsto e^x$ strogo rastuća, zaključujemo da je $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ kao kompozicija strogo rastućih funkcija također strogo rastuća funkcija.

Slično, da pokažemo da je $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ strogo padajuća funkcija, računamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\right] &= \frac{d}{dx}[(x+1)(\ln(x+1) - \ln x)], \\ &= \ln(x+1) - \ln x + (x+1)\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right], \\ &= \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

te opet iskoristimo (**??**) i dobivamo

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\right] = \frac{1}{c_x} - \frac{1}{x} < 0,$$

pa je prema propoziciji **??** funkcija $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ strogo padajuća. Kako je funkcija $x \mapsto e^x$ strogo rastuća, zaključujemo da je $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$, kao kompozicija strogo padajuće i strogo rastuće funkcije, strogo padajuća funkcija.

1.3 Neke varijante Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti

U prvoj točki obradili smo Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti koji kaže da za svaku funkciju realne varijeble $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidnu na svojoj domeni i derivabilnu na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$ postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da vrijedi

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{1.8}$$

Taj teorem je izveden iz Rolleovog teorema koji ima dodatnu pretpostavku da je $f(a) = f(b)$.

U ovoj točki razmotrit ćemo nekoliko generalizacija Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti. Promotrimo najprije dvije posljedice teorema o srednjoj vrijednosti.

Propozicija 1.3.1. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$ osim možda u konačno mnogo točaka. Tada postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da vrijedi*

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a)|f'(c)|. \tag{1.9}$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji samo jedna točka $d \in \langle a, b\rangle$ u kojoj funkcija f nije derivabilna. Primjenom Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti za f na redom $[a, d]$ i $[d, b]$ imamo

$$f(d) - f(a) = (d - a)f'(c_1)$$

i

$$f(b) - f(d) = (b - d)f'(c_2)$$

za neke točke $c_1 \in \langle a, d\rangle$ i $c_2 \in \langle d, b\rangle$. Zbrajanjem prethodnih dviju jednakosti dobivamo

$$f(b) - f(a) = (d - a)f'(c_1) + (b - d)f'(c_2)$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
|f(b) - f(a)| &\leq (d - a)|f'(c_1)| + (b - d)|f'(c_2)| \\
&\leq (d - a)|f'(c)| + (b - d)|f'(c)| \\
&= (b - a)|f'(c)|,
\end{aligned}$$

gdje je

$$|f'(c)| = \max\{|f'(c_1)|, |f'(c_2)|\}.$$

Dokaz se jednostavno proširuje na slučaj kad funkcija f nije derivabilna u $n > 1$ točaka otvorenog intervala $\langle a, b\rangle$. □

Propozicija 1.3.2. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$ osim u $n \in \mathbb{N}$ točaka. Tada postoji $n + 1$ točaka $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1} \in \langle a, b\rangle$ i $n + 1$ pozitivnih brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$ takvih da vrijedi*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1} = 1$$

i

$$f(b) - f(a) = (b - a)\sum_{i=1}^{n+1} k_i f'(c_i). \tag{1.10}$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji samo jedna točka $d \in \langle a, b\rangle$ u kojoj f nije derivabilna. Primjenom Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti na funkciju f i redom na intervale $[a, d]$ i $[d, b]$ vrijedi

$$f(d) - f(a) = (d - a)f'(c_1)$$

i

$$f(b) - f(d) = (b - d)f'(c_2)$$

za neke $c_1 \in \langle a, d\rangle$ i $c_2 \in \langle d, b\rangle$. Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo

$$f(b) - f(a) = (d - a)f'(c_1) + (b - d)f'(c_2).$$

Prethodnu jednakost zapišimo kao

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{b - a}[(d - a)f'(c_1) + (b - d)f'(c_2)](b - a,), \\ f(b) - f(a) &= \left(\frac{d - a}{b - a}f'(c_1) + \frac{b - d}{b - a}f'(c_2)\right)(b - a), \end{aligned}$$

odnosno

$$f(b) - f(a) = [k_1 f'(c_1) + k_2 f'(c_2)](b - a),$$

gdje je

$$k_1 = \frac{d - a}{b - a}, \quad k_2 = \frac{b - d}{b - a}.$$

Vidimo da je $k_1 + k_2 = 1$, pri čemu su $k_1 > 0$ i $k_2 > 0$. Ovaj se dokaz može proširiti na slučaj u kojem f nije derivabilna u $n > 1$ točaka intervala $\langle a, b\rangle$. □

Godine 1958. matematičar Thomas Muirhead Flett, koji je djelovao na području matematičke analize, dokazao je sljedeći teorem koji je varijanta Lagrangeova teorema o srednjoj vrijednosti.

Teorem 1.3.3 (T. M. Flett). *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilna na $[a, b]$ i neka je $f'(a) = f'(b)$. Tada postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da*

$$f(c) - f(a) = (c - a)f'(c). \tag{1.11}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je $f'(a) = f'(b) = 0$. (Naime, ako to ne vrijedi, uvodimo funkciju $h(x) = f(x) - xf'(a)$, $x \in [a, b]$. Tada je $h'(x) = f'(x) - f'(a)$ pa h ispujava uvjet $h'(a) = h'(b) = 0$. Dokažemo li da za h vrijedi $h(c) - h(a) = (c - a)h'(c)$ za neku točku $c \in \langle a, b\rangle$, tada se lako vidi da (**??**) vrijedi za funkciju f.)

Uvedimo funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiranu kao

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{ako je } x \in \langle a, b] \\ f'(a) & \text{ako je } x = a. \end{cases} \tag{1.12}$$

Funkcija g je neprekidna na $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b]$ pa deriviranjem funkcije g dobivamo

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)' \\ &= \frac{(f(x) - f(a))'(x - a) - (f(x) - f(a))(x - a)'}{(x - a)^2} \\ &= \frac{f'(x)(x - a)}{(x - a)^2} - \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} \\ &= -\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} + \frac{f'(x)}{x - a}, \end{aligned}$$

pa koristeći (**??**) ovu jednakost možemo zapisati kao

$$g'(x) = -\frac{g(x)}{x - a} + \frac{f'(x)}{x - a}, \quad x \in \langle a, b]. \tag{1.13}$$

Da bismo dokazali ovaj teorem, moramo pokazati da postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da vrijedi $g'(c) = 0$.

Vidimo da je $g(a) = 0$ pa, ako je i $g(b) = 0$ po Rolleovom teoremu postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takva da je $g'(c) = 0$ i time smo dokazali teorem. No, ako je $g(b) \neq 0$, tada je $g(b) > 0$ ili je $g(b) < 0$. Prvo pretpostavimo da je $g(b) > 0$. Tada je po (**??**)

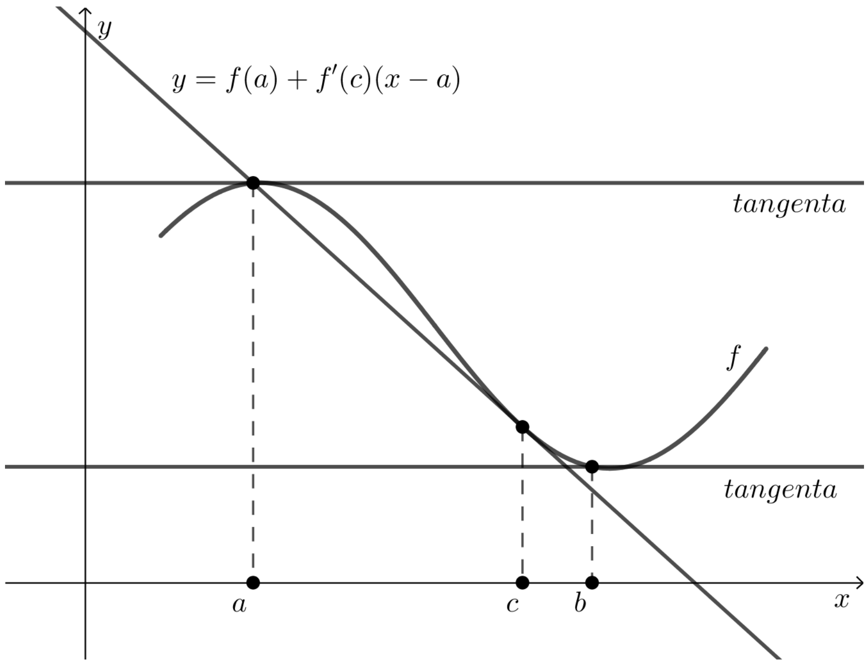
$$g'(b) = -\frac{g(b)}{b - a} < 0.$$

Kako je funkcija g neprekidna i $g'(b) < 0$, postoji točka $x_1 \in \langle a, b\rangle$ takva da je

$$g(x_1) > g(b).$$

Sada imamo $g(a) < g(b) < g(x_1)$, a kako neprekidna funkcija na segmentu poprima svaku međuvrijednost ([**?**, teorem 4, str. 31], postoji $x_0 \in \langle a, x_1 \rangle$ takav da je $g(x_0) = g(b)$. Primijenimo Rolleov teorem na funkciju g na $[x_0, b]$ i dobivamo $g'(c) = 0$ pri čemu je $c \in \langle a, b \rangle$. Analogno se pokaže da tvrdnja vrijedi i kada je $g(b) < 0$ pa je time teorem dokazan. □

Geometrijska interpretacija Flettovog teorema je sljedeća. Ako krivulja $y = f(x)$ ima tangentu u svakoj točki $x \in [a, b]$ i ako su tangente u $x = a$ i $x = b$ paralelne, tada postoji točka $c \in \langle a, b \rangle$ takva da tangenta na graf funkcije f u točki $(c, f(c))$ prolazi i točkom $(a, f(a))$.



Slika 1.4: Geometrijska interpretacija Flettovog teorema

Primjer 1.3.4. *Naći točku na krivulji $f(x) = x^3$ takvu da tangenta na graf funkcije f povučena kroz tu točku prolazi točkom $A(-2, -8)$.*

Rješenje. Uočimo da točka $A(-2, -8)$ leži na grafu funkcije f. Zadatak ćemo riješiti primjenom Flettovog teorema na funkciju f na segmentu $[-2, 2]$. Naime, f je derivabilna funkcija za koju vrijedi $f'(-2) = f'(2)$ pa na segmentu $[-2, 2]$ ispunjava pretpostavke teorema **??**. Stoga postoji $c \in \langle -2, 2 \rangle$ tako da je

$$f(c) - f(-2) = (c + 2) f'(c).$$

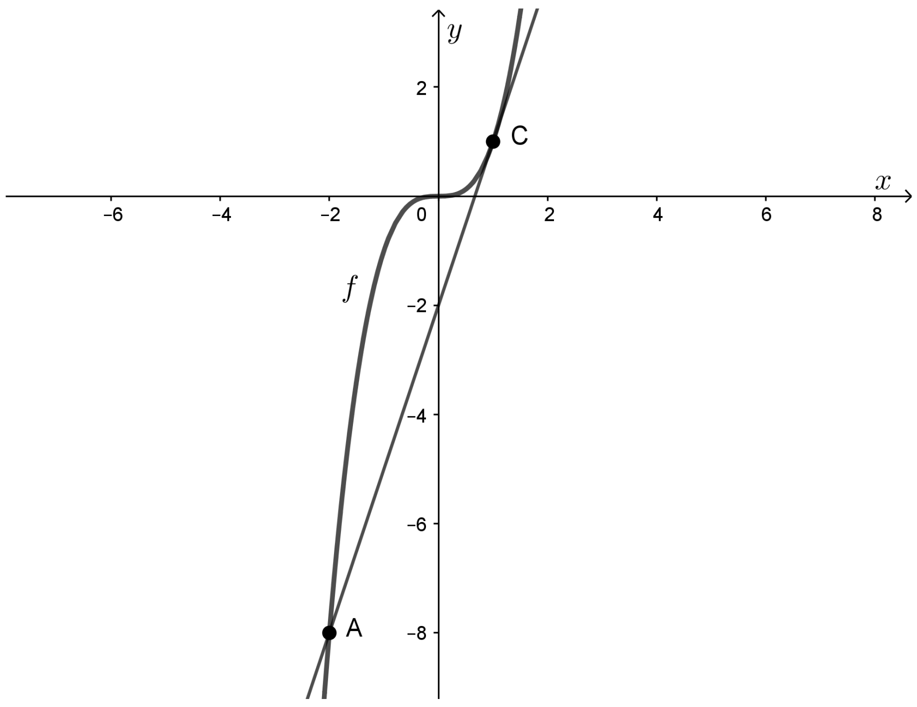
Sada je

$$\begin{aligned} c^3 - (-2)^3 &= (c+2)\cdot 3c^2, \\ c^3 + 8 &= 3c^2(c+2), \end{aligned}$$

pri čemu izraz na lijevoj strani prethodne jednakosti možemo raspisati kao umnožak (zbroj kubova) pa imamo

$$\begin{aligned} (c+2)(c^2-2c+4) - 3c^2(c+2) &= 0, \\ (c+2)(-2c^2-2c+4) &= 0, \\ -2(c+2)(c^2+c-2) &= 0, \\ (c+2)(c+2)(c-1) &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja ove kubne jednadžbe su -2 i 1, a kako je $c \in \langle -2, 2\rangle$, slijedi da je $c = 1$. Konačno, tražena točka je $C(1, f(1)) = (1, 1)$.



Slika 1.5: Tangenta u točki C koja prolazi točkom A

Sljedeći teorem otklanja pretpostavku da za funkciju f vrijedi $f'(a) = f'(b)$.

Teorem 1.3.5 (P. K. Sahoo, T. Riedel). *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, onda postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da je*

$$f(c) - f(a) = (c-a)f'(c) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

Dokaz. Definiramo pomoćnu funkciju $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ kao

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(x-a)^2$$

i vidimo da je h derivabilna na $[a, b]$ te vrijedi

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(x-a).$$

Imamo $h'(a) = h'(b) = f'(a)$ pa primjenom Flettovog teorema o srednjoj vrijednosti na funkciju h dobivamo

$$h(c) - h(a) = (c-a)h'(c)$$

za neku točku $c \in \langle a, b\rangle$. Iz ove jednakosti, koristeći definiciju funkcije h, dobivamo

$$f(c) - f(a) = (c-a)f'(c) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

□

Pomoćnu funkciju h koju smo koristili u prethodnom teoremu dobili smo kao razliku između funkcije f i njene kvadratne aproksimacije $A + B(x-a) + C(x-a)^2$ te korištenjem uvjeta da su derivacije funkcije h u rubnim točkama domene jednake, odnosno $h'(a) = h'(b)$. Rubni uvjeti na derivaciju funkcije h daju $C = \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. Konstante A i B mogu se birati proizvoljno pa smo uzeli da je $A = B = 0$.

Sljedeći teorem je poopćenje Flettovog teorema koje je 1966. godine dokazao D. H. Trahan. Za taj rezultat trebaju nam dvije pomoćne leme koje ćemo dokazati.

Lema 1.3.6. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$, derivabilna na $\langle a, b]$ i neka vrijedi $[f(b) - f(a)]f'(b) \leq 0$. Tada postoji točka $c \in \langle a, b]$ takva da je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je $[f(b) - f(a)]f'(b) = 0$. Tada razlikujemo dva slučaja. Ako je $f(b) = f(a)$, tada po Rolleovom teoremu postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takva da je $f'(c) = 0$. Ako je $f'(b) = 0$, onda uzimajući da je $c = b$ dobivamo $f'(c) = 0$.

Nadalje, pretpostavimo da je $[f(b) - f(a)]f'(b) < 0$. Tada je ili $f'(b) < 0$ i $f(b) > f(a)$ ili $f'(b) > 0$ i $f(b) < f(a)$. U prvom slučaju, budući da je f neprekidna na $[a, b]$, $f(b) > f(a)$ i f je padajuća u točki b, slijedi da funkcija f ima maksimum u nekoj točki $c \in \langle a, b\rangle$ pa je $f'(c) = 0$. Analogno, u drugom slučaju je $f(b) < f(a)$, a funkcija f je rastuća u točki b pa stoga f ima minimum u nekoj točki $c \in \langle a, b\rangle$ te je $f'(c) = 0$. □

Sljedeća lema očito proizlazi iz prethodne.

Lema 1.3.7. *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* $[a,b]$, *derivabilna na* $\langle a,b]$ *i neka vrijedi* $[f(b) - f(a)]f'(b) < 0$. *Tada postoji točka* $c \in \langle a,b\rangle$ *takva da je* $f'(c) = 0$.

Koristeći prethodne dvije leme dolazimo do generalizacije Flettovog teorema.

Teorem 1.3.8 (D. H. Trahan)**.** *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna na* $[a,b]$ *i*

$$\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] \geq 0. \tag{1.14}$$

Tada postoji točka $c \in \langle a,b]$ *takva da vrijedi*

$$f(c) - f(a) = (c-a)f'(c).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ kao

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{ako je } x \in \langle a,b] \\ f'(a) & \text{ako je } x = a \end{cases}. \tag{1.15}$$

Funkcija h je neprekidna na $[a,b]$ i derivabilna na $\langle a,b]$. Deriviranjem dobivamo

$$h'(x) = -\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} + \frac{f'(x)}{x-a}$$

za svaki $x \in \langle a,b]$. Kako je

$$[h(b) - h(a)]h'(b) = \frac{-1}{b-a}\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right],$$

vidimo da je

$$[h(b) - h(a)]h'(b) \leq 0.$$

Nadalje, iskoristimo lemu **??** i dobivamo

$$h'(c) = 0$$

za neki $c \in \langle a,b]$. Po definiciji funkcije h proizlazi da je

$$f(c) - f(a) = (c-a)f'(c)$$

čime je teorem dokazan. □

Napomena 1.3.9. *Klasa funkcija koje zadovoljavaju uvjete teorema* **??** *je šira od klase funkcija koje zadovoljavaju uvjete teorema* **??**. *Primjerice, lako se provjeri da funkcija* $f(x) = x^3$ *na segmentu* $[-\frac{1}{2}, 1]$ *ne zadovoljava pretpostavke teorema* **??**, *a zadovoljava pretpostavke teorema* **??**.

Teorem **??** je zapravo poopćenje Flettovog teorema **??**. Da bismo to pokazali, uzmimo da funkcija f ispunjava pretpostavke teorema **??** te definirajmo pomoćnu funkciju h kao u teoremu **??**:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{ako je } x \in \langle a, b] \\ f'(a) & \text{ako je } x = a \end{cases}. \tag{1.16}$$

Tada je funkcija h neprekidna na intervalu $[a, b]$ i derivabilna na $\langle a, b]$. Deriviranjem funkcije h dobivamo

$$h'(x) = -\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} + \frac{f'(x)}{x - a}$$

za svaki $x \in \langle a, b]$. Najprije pretpostavimo da je

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(b). \tag{1.17}$$

Koristeći (**??**) i (**??**) te pretpostavku $f'(a) = f'(b)$ iz Flettovog teorema, dobivamo

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(a) \\ &= f'(b) - f'(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Slijedi da je $h(b) = h(a)$, pa po Rolleovom teoremu je $h'(c) = 0$ za neki $c \in \langle a, b \rangle$. Time dobivamo

$$f(c) - f(a) = (c - a)f'(c).$$

Pretpostavimo sada da je

$$f(b) - f(a) \neq (b - a)f'(b). \tag{1.18}$$

Tada je $\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] > 0$ ili $\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] < 0$. Koristeći činjenicu da je $f'(b) = f'(a)$, dobivamo

$$\left[f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] > 0.$$

Prema tome, koristeći teorem **??** zaključujemo da je

$$f(c) - f(a) = (c - a)f'(c)$$

za neki $c \in \langle a, b]$. Uočimo da prema (**??**) vrijedi $c \neq b$.

Poglavlje 2

Simetrično derivabilne funkcije

U prošlom smo poglavlju obradili razne teoreme o srednjoj vrijednosti za realne funkcije definirane na intervalu realnih brojeva, a koje su derivabilne u klasičnom smislu. Grafički prikaz derivabilne funkcije je glatka krivulja. Pod pojmom 'glatka krivulja' mislimo da krivulja nema šiljak niti prekid. Matematičari su, zahvaljujući drugim znanstvenim disciplinama kao što su ekonomija i inženjerstvo, težili ka tome da ispituju i funkcije koje nisu derivabilne u klasičnom smislu, odnosno koje za grafički prikaz nemaju glatku krivulju. U ovom ćemo poglavlju proučiti teoreme o srednjoj vrijednosti i njihove generalizacije na funkcije koje imaju generaliziranu derivaciju. Jedna takva generalizacija derivacije funkcije jeste simetrična derivacija.

2.1 Simetrična derivacija realne funkcije

Neka je f realna funkcija realne varijable definirana na nekoj okolini točke $c \in \mathbb{R}$. Podsjetimo se da je derivacija funkcije f u točki c definirana kao limes

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

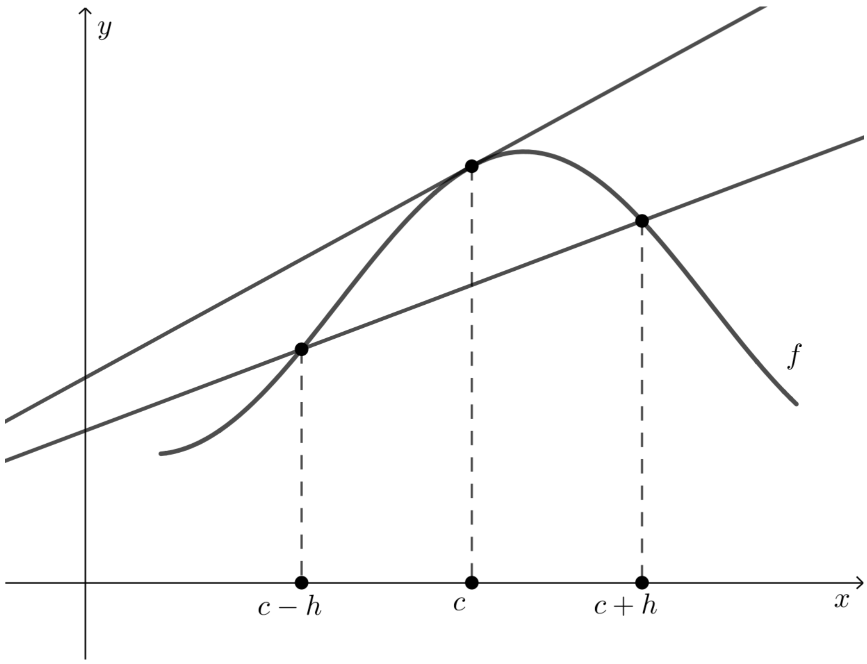
ako taj limes postoji (u smislu da je konačan, tj. realan broj). Taj broj jednak je nagibu tangente na graf funkcije f u točki $(c, f(c))$. Ako funkcija f u svakoj točki intervala ima konačnu derivaciju, onda je njen grafički prikaz glatka krivulja, što znači da nema šiljak ili vertikalne tangente.

Tokom godina matematičari su predlagali razne generalizacije pojma derivacije funkcije. Primjerice, ako u definiciji klasične derivacije kvocijent $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ zamijenimo s $\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}$, dolazimo do pojma generalizirane derivacije, koju nazivamo *simetričnom derivacijom*.

Definicija 2.1.1. *Neka je $I = \langle a, b\rangle$ interval u $\mathbb{R}$ i $c \in I$. Neka je f realna funkcija definirana u svakoj točki intervala I, osim možda u točki c. Kažemo da je funkcija f simetrično derivabilna u točki c ako postoji limes*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h}.$$

Ovaj limes ćemo označiti s $f^s(c)$. Ako je funkcija simetrično derivabilna u svakoj točki nekog intervala, onda je simetrično derivabilna na tom intervalu.



Slika 2.1: Geometrijska interpretacija simetrične derivacije

Za razliku od pojma klasične derivacije, uočimo da pojam simetrične derivacije funkcije f u točki c ne podrazumijeva nužno da funkcija f bude definirana u točki c. Dovoljno je da je funkcija f definirana na nekom otvorenom intervalu oko točke c koji možda ne sadrži točku c, budući da se pri računanju limesa pojavljuju vrijednosti funkcije f u točkama $c+h$ i $c-h$, ali ne i u samoj točki c. Funkcija može biti simetrično derivabilna u nekoj točki, a da u toj točki nije definirana, kao što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 2.1.2. *Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je simetrično derivabilna u nuli, ali nije definirana u nuli.*

Rješenje. Provjerimo postoji li simetrična derivacija funckije f u nuli:

$$f^s(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h^2}}{2h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Dakle, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je simetrično derivabilna u nuli iako nije definirana u nuli.

Lako se pokaže da je f simetrično derivabilna i u svakoj točki $x \neq 0$. Naime, za $x \neq 0$ računamo

$$\begin{aligned} f^s(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{(x-h)^2}}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x-h)^2 - (x+h)^2}{2h(x+h)^2(x-h)^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2x}{(x+h)^2(x-h)^2} \\ &= \frac{-2x}{x^4} \\ &= \frac{-2}{x^3}. \end{aligned}$$

Prema tome, simetrična derivacija funkcije f je dana s

$$f^s(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^3} & \text{ako je } x \neq 0 \\ 0 & \text{ako je } x = 0 \end{cases}.$$

Teorem 2.1.3. *Ako je funkcija f derivabilna u točki c, onda je f i simetrično derivabilna u točki c te vrijedi $f^s(c) = f'(c)$.*

Dokaz. Želimo pokazati da postoji simetrična derivacija $f^s(c)$ i da je $f^s(c) = f'(c)$. Kako je

$$\frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} = \frac{f(c+h) - f(c)}{2h} + \frac{f(c) - f(c-h)}{2h}$$

te zbog derivabilnosti funkcije f u točki c postoji limes desne strane gornje jednakosti kada h teži u nulu, vrijedi

$$\begin{aligned} f^s(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(c) - f(c-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} f'(c) + \frac{1}{2} f'(c) = f'(c), \end{aligned}$$

čime je teorem dokazan. □

Primijetimo da teorem **??** daje dovoljan, ali ne i nužan uvjet da bi funkcija bila simetrično derivabilna u nekoj točki. Dakle, simetrično derivabilna funkcija nije nužno i derivabilna. Pokažimo to na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.4. *Funkcija $f(x) = |x|$ je simetrično derivabilna u nuli, ali nije derivabilna u nuli.*

Funkcija je derivabilna u nuli ako postoji lijevi limes $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ i desni limes $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ te ako su oni jednaki. Stoga računamo

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-1) = -1,$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

Kako je $-1 \neq 1$, funkcija f nije derivabilna u nuli.

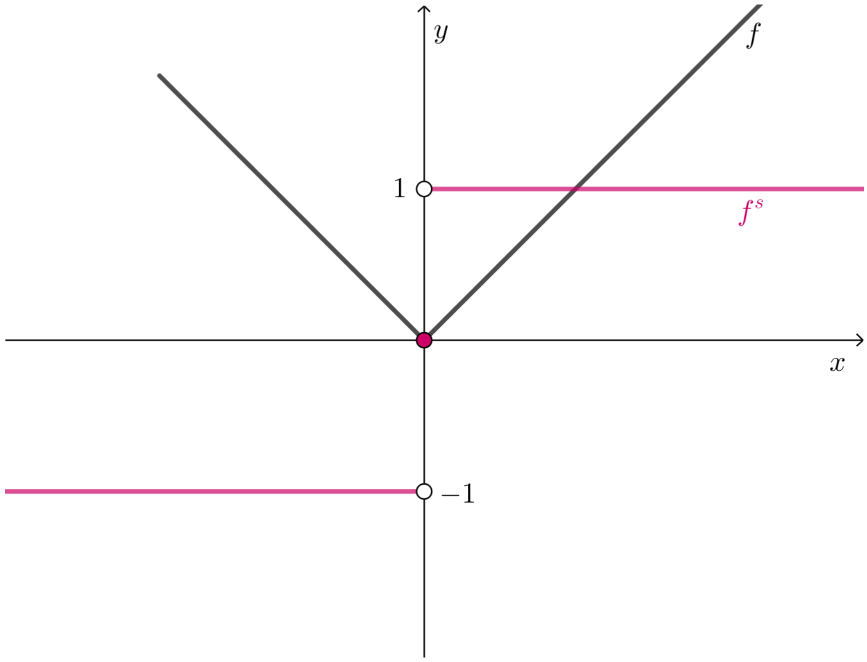
Provjerimo sada postoji li $f^s(0)$:

$$\begin{aligned} f^s(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|h|}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, ovaj limes postoji i jednak je nuli pa je funkcija f simetrično derivabilna u nuli. Primijetimo da funkcija apsolutne vrijednosti $f(x) = |x|$ ima šiljak u nuli iz čega proizlazi da nije derivabilna u nuli. Međutim, f je simetrično derivabilna u nuli, što pokazuje da graf funkcije može imati šiljak u točki u kojoj je funkcija simetrično derivabilna.

Nadalje, kako je funkcija $f(x) = |x|$ derivabilna u svakoj točki $x \neq 0$ i pritom je $f'(x) = 1$ ako je $x > 0$ te $f'(x) = -1$ ako je $x < 0$, prema teoremu **??** i prethodnim razmatranjima vrijedi

$$f^s(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{ako je } x \neq 0 \\ 0 & \text{ako je } x = 0 \end{cases}.$$



Slika 2.2: Grafički prikaz $f(x) = |x|$ i simetrične derivacije f^s

Poopćavanjem pojma derivabilnosti na simetričnu derivabilnost, funkcija gubi neka dobra svojstva poput neprekidnosti i glatkoću krivulje. U sljedećim primjerima pokazat ćemo da funkcija koja ima prekid prve vrste može i ne mora biti simetrično derivabilna.

Primjer 2.1.5. *Funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ako je } x \neq 0 \\ 1 & \text{ako je } x = 0 \end{cases}$$

je simetrično derivabilna u nuli, ali nije neprekidna u nuli.

Funkcija f očito ima prekid u točki $c = 0$, i to uklonjiv prekid prve vrste (tj. postoji $\lim_{x\to 0} f(x)$, ali je $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$). Kako je

$$f^s(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x+h}{2h} = 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je funkcija f simetrično derivabilna na čitavom skupu $\mathbb{R}$.

Primjer 2.1.6. *Funkcija*

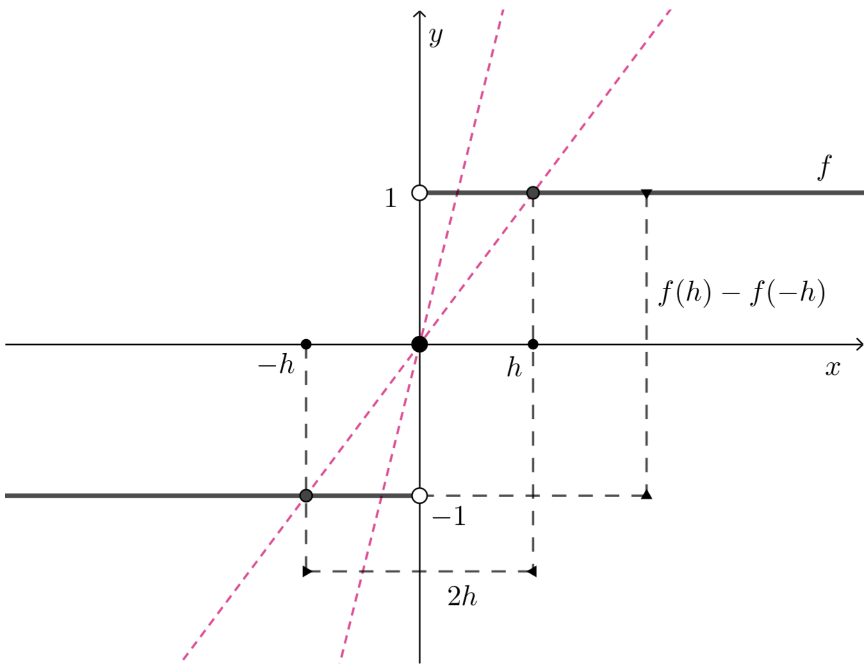
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{ako je } x \neq 0 \\ 0 & \text{ako je } x = 0 \end{cases}$$

nije simetrično derivabilna u nuli i nije neprekidna u nuli.

Funkcija f u točki $c = 0$ ima neuklonjiv prekid prve vrste (tj. postoje $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ i $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, ali su ova dva limesa različita). Da bismo provjerili je li funkcija f simetrično derivabilna u nuli računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{|h|}{h}-\frac{|-h|}{-h}}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h^2} \\
&= \begin{cases} \dfrac{h}{h^2} & \text{ako je } h>0 \\ \dfrac{-h}{h^2} & \text{ako je } h<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{ako je } h>0 \\ \dfrac{-1}{h} & \text{ako je } h<0 \end{cases} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija nije simetrično derivabilna u nuli jer dobiveni limes nije realan broj.



Slika 2.3: Graf funkcije f iz primjera **??** koja nije simetrično derivabilna u nuli

Navedimo sada dva teorema koja nam daju osnovna pravila za deriviranje simetrično derivabilnih funkcija.

Teorem 2.1.7. *Neka su funkcije f i g simetrično derivabilne u točki c. Tada vrijedi*:

1. $(f+g)^s(c) = f^s(c) + g^s(c)$

2. $(kf)^s(c) = kf^s(c), \quad k \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

1. Računamo limes

$$\begin{aligned}(f+g)^s(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(c+h) - (f+g)(c-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) + g(c+h) - f(c-h) - g(c-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} + \frac{g(c+h) - g(c-h)}{2h} \\ &= f^s(c) + g^s(c).\end{aligned}$$

2. Računamo limes, pritom je $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(k \cdot f)^s(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot f(c+h) - k \cdot f(c-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{k(f(c+h) - f(c-h))}{2h} \\ &= k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} \\ &= k \cdot f^s(c).\end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.8. *Neka su funkcije f i g simetrično derivabilne i neprekidne u točki c. Tada vrijedi*:

1. $(fg)^s(c) = f^s(c)g(c) + f(c)g^s(c)$

2. $\left(\dfrac{f}{g}\right)^s(c) = \dfrac{f^s(c)g(c) - f(c)g^s(c)}{g(c)^2}, \quad g(c) \neq 0.$

Dokaz.

1. Računamo limes,

$$\begin{aligned}(fg)^s(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(c+h)-(fg)(c-h)}{2h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)g(c+h)-f(c-h)g(c-h)}{2h}.\end{aligned}$$

   Brojniku pod limesom dodamo i oduzmemo $f(c-h)g(c+h)$, i onda imamo

$$\begin{aligned}(fg)^s(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)g(c+h)+f(c-h)g(c+h)-f(c-h)g(c+h)-f(c-h)g(c-h)}{2h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(c+h)-f(c-h))g(c+h)+(g(c+h)-g(c-h))f(c-h)}{2h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}\cdot g(c+h)+\lim_{h\to 0}\frac{g(c+h)-g(c-h)}{2h}\cdot f(c-h)\\ &= f^s(c)g(c)+f(c)g^s(c).\end{aligned}$$

   Primijetimo da smo u dokazu koristili pretpostavku da su funkcije f i g neprekidne u točki c, to jest da vrijedi $\lim_{h\to 0} f(c-h) = f(c)$ i $\lim_{h\to 0} g(c+h) = g(c)$.

2. Slično kao i kod umnoška računamo limes,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)^s(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left(\left(\frac{f}{g}\right)(c+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(c-h)\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left(\frac{f(c+h)}{g(c+h)}-\frac{f(c-h)}{g(c-h)}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)g(c-h)-g(c+h)f(c-h)}{2h\cdot g(c+h)g(c-h)}.\end{aligned}$$

   Sada brojniku pod limesom oduzmemo i dodamo $f(c-h)g(c-h)$, i onda imamo

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)^s(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)g(c-h)-f(c-h)g(c-h)-g(c+h)f(c-h)+f(c-h)g(c-h)}{2h\cdot g(c+h)g(c-h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(c+h)-f(c-h))g(c-h)-f(c-h)(g(c+h)-g(c-h))}{2h\cdot g(c-h)g(c+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}g(c-h)-f(c-h)\frac{g(c+h)-g(c-h)}{2h}}{g(c+h)g(c-h)}\\ &= \frac{f^s(c)g(c)-f(c)g^s(c)}{g(c)^2}.\end{aligned}$$

   Uočimo da smo i ovdje u dokazu koristili pretpostavku da su funkcije f i g neprekidne u točki c.

□

2.2 Teorem o kvazi-srednjoj vrijednosti

U ovoj točki ćemo navesti teoreme o srednjoj vrijednosti za funkcije koje su simetrično derivabilne. Nadalje, pokazat ćemo da za svaku neprekidnu funkciju čija simetrična derivacija ima Darbouxovo svojstvo vrijedi varijanta Lagrangeova teorema o srednjoj vrijednosti. Sljedeći primjer ilustrira kako za simetrično derivabilnu funkciju općenito ne vrijedi Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti.

Primjer 2.2.1. *Za simetrično derivabilnu funkciju* $f(x) = |x|$ *ne vrijedi Lagrangeov teorema o srednjoj vrijednosti na intervalu* $[-1, 2]$.

Simetrična derivacija funkcije f je dana s

$$f^s(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{ako je } x \neq 0 \\ 0 & \text{ako je } x = 0 \end{cases}.$$

Primijetimo da f^s poprima vrijednosti iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Koeficijent smjera tangente koja prolazi granicama intervala je

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3},$$

a kako $f^s(x)$ ne poprima tu vrijednost, ne postoji $c \in \langle -1, 2\rangle$ takav da vrijedi

$$f^s(c) = \frac{1}{3}.$$

Sljedeća lema, zahvaljujući poljskom matematičaru C. F. Aullu, bit će nam od koristi za dokazivanje takozvanog teorema o kvazi-srednjoj vrijednosti.

Lema 2.2.2. *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* $[a, b]$ *i simetrično derivabilna na* $\langle a, b\rangle$. *Ako je* $f(b) > f(a)$, *onda postoji točka* $c \in \langle a, b\rangle$ *takva da vrijedi*

$$f^s(c) \geq 0.$$

Nadalje, ako je $f(b) < f(a)$, *onda postoji točka* $d \in \langle a, b\rangle$ *takva da vrijedi*

$$f^s(d) \leq 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $f(b) > f(a)$ i neka je k realan broj takav da vrijedi $f(a) < k < f(b)$. Skup

$$\{x \in [a, b] : f(x) > k\}$$

je ograničen odozdo s a. Kako je taj skup podskup od $\mathbb{R}$, infimum tog skupa postoji i neka je on c. Funkcija f je neprekidna i k zadovoljava nejednakost $f(a) < k < f(b)$, pa vrijedi da je $c \neq a$ i $c \neq b$. Budući je c infimum skupa $\{x \in [a,b] : f(x) > k\}$, postoji $\delta > 0$ tako da je $\langle c-\delta, c+\delta\rangle \subset [a,b]$ i da vrijedi

$$f(c+h) > k$$

i

$$f(c-h) \leq k$$

za svaki $h \in \langle 0, \delta\rangle$. Prema tome,

$$f^s(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c-h)}{2h} \geq 0.$$

U slučaju kada je $f(b) < f(a)$ analogno se pokaže da postoji $d \in \langle a,b\rangle$ takav da vrijedi

$$f^s(d) \leq 0.$$

□

Sljedeći teorem je inačica Rolleovog teorema za simetrično derivabilne funkcije.

Teorem 2.2.3 (C. E. Aull)**.** *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a,b\rangle$. Pretpostavimo da je $f(a) = f(b) = 0$. Tada postoje točke $c, d \in \langle a,b\rangle$ takve da vrijedi*

$$f^s(c) \geq 0$$

i

$$f^s(d) \leq 0.$$

Dokaz. Ako je $f \equiv 0$ teorem očito vrijedi, pa pretpostavimo da $f \not\equiv 0$. Kako je f neprekidna i vrijedi $f(a) = f(b) = 0$, postoje točke $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ takve da je

$$f(x_1) > 0 \qquad i \qquad f(x_2) < 0 \tag{2.1}$$

ili

$$f(x_1) > 0 \qquad i \qquad f(x_2) > 0 \tag{2.2}$$

ili

$$f(x_1) < 0 \qquad i \qquad f(x_2) < 0. \tag{2.3}$$

Ako vrijede nejednakosti (**??**), onda po lemi **??** za funkciju f na intervalu $[a, x_1]$ dobivamo $f^s(c) \geq 0$ za neki $c \in \langle a, x_1\rangle \subset \langle a,b\rangle$. Nadalje, po lemi **??** za funkciju f na intervalu $[a, x_2]$ dobivamo $f^s(d) \leq 0$ za neki $d \in \langle a, x_2\rangle \subset \langle a,b\rangle$.

Ako vrijede nejednakosti (**??**), onda po lemi **??** za funkciju f na intervalu $[a, x_1]$ dobivamo $f^s(c) \geq 0$ za neki $c \in \langle a, x_1\rangle \subset \langle a,b\rangle$, a za funkciju f na intervalu $[x_2, b]$ dobivamo $f^s(d) \leq 0$ za neki $d \in \langle x_2, b\rangle \subset \langle a,b\rangle$.

Ako vrijede nejednakosti (**??**), onda po lemi **??** za funkciju f na intervalu $[a, x_1]$ dobivamo $f^s(d) \leq 0$ za neki $d \in \langle a, x_1 \rangle \subset \langle a, b \rangle$, a za funkciju f na intervalu $[x_2, b]$ dobivamo $f^s(c) \geq 0$ za neki $c \in \langle x_2, b \rangle \subset \langle a, b \rangle$. □

Napomena 2.2.4. *Uvjet $f(a) = f(b) = 0$ u prethodnom teoremu može se oslabiti, tj. zamijeniti uvjetom $f(a) = f(b)$. Naime, ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a, b \rangle$ te ako vrijedi $f(a) = f(b)$, tada funkcija $g(x) := f(x) - f(a)$, $x \in [a, b]$, zadovoljava pretpostavke teorema* **??** *pa stoga postoje $c, d \in \langle a, b \rangle$ za koje je $g^s(c) \geq 0$ i $g^s(d) \leq 0$. Tada je $f^s(c) \geq 0$ i $f^s(d) \leq 0$.*

Dokažimo sada teorem o kvazi-srednjoj vrijednosti za simetrično derivabilnu funkciju.

Teorem 2.2.5 (C. F. Aull)**.** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a, b \rangle$. Tada postoje točke $c, d \in \langle a, b \rangle$ takve da vrijedi*

$$f^s(c) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^s(d).$$

Dokaz. Definirajmo pomoćnu funkciju g kao

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Funkcija g je neprekidna na $[a, b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a, b \rangle$ te vrijedi $g(a) = g(b) = 0$ pa po teoremu **??** dobivamo

$$g^s(c) \leq 0 \qquad i \qquad g^s(d) \geq 0 \tag{2.4}$$

za neke $c, d \in \langle a, b \rangle$. Koristeći definiciju funkcije g dobivamo

$$g^s(x) = f^s(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

pa prema (**??**) imamo

$$f^s(c) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^s(d)$$

čime je teorem dokazan. □

Prethodni teorem ne kaže da je koeficijent smjera sekante koja prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ jednak simetričnoj derivaciji u nekoj točki $c \in \langle a, b \rangle$. Zbog toga, nameće se pitanje koje dodatne uvjete trebamo nametnuti simetrično derivabilnoj funkciji da bi taj zaključak vrijedio. Pokazat ćemo da ako simetrično derivabilna funkcija f ima Darbouxovo svojstvo, onda za takvu funckiju vrijedi varijanta Lagrangeova teorema o srednjoj vrijednosti.

Definicija 2.2.6. *Realna funckija f definirana na intervalu $[a, b]$ ima Darbouxovo svojstvo ako vrijedi da za svaka dva broja $c, d \in [a, b]$ te bilo koji broj y između $f(c)$ i $f(d)$, postoji broj γ između c i d takav da je $y = f(\gamma)$.*

Znamo da svaka neprekidna funkcija na segmentu ima Darbouxovo svojstvo. Neki su matematičari u 19. stoljeću vjerovali da je to svojstvo ekvivalentno svojstvu neprekidnosti funkcije. No, Darboux je 1875. godine pokazao da su takva vjerovanja neopravdana, odnosno, funkcija koja ima Darbouxovo svojstvo može imati prekid.

Teorem 2.2.7 (C. F. Aull)**.** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Ako simetrična derivacija f^s funkcije f ima Darbouxovo svojstvo na $[a, b]$, onda postoji $\gamma \in \langle a, b\rangle$ takav da vrijedi*

$$f^s(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dokaz. Po teoremu **??** postoje $c, d \in \langle a, b\rangle$ takve da je

$$f^s(c) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^s(d).$$

Kako funkcija f^s ima Darbouxovo svojstvo, postoji $\gamma \in \langle a, b\rangle$ takav da vrijedi

$$f^s(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

i time je dokaz gotov. □

Budući da simetrično derivabilne funkcije nisu nužno i derivabilne, zanima nas koje dodatne uvjete treba postaviti funkciji da bude derivabilna. Pokazali smo da neprekidnost funkcije, uz simetričnu derivabilnost, ne implicira i derivabilnost funkcije. Sada ćemo, uz pomoć prethodnog teorema, pokazati da je funkcija f derivabilna ako su f i f^s obje neprekidne funkcije.

Teorem 2.2.8 (C. F. Aull)**.** *Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna i simetrično derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Ako je simetrična derivacija f^s funckije f neprekidna na $\langle a, b\rangle$, onda postoji $f'(x)$ za sve $x \in \langle a, b\rangle$ i vrijedi*

$$f'(x) = f^s(x), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu točku $x \in \langle a, b\rangle$. Neka je h dovoljno mali tako da je $a < x + h < b$. Kako je f^s neprekidna, ima Darbouxovo svojstvo. Primijenimo li teorem **??** na funkciju f na $[x, x + h]$ imamo

$$f^s(c) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

za neki $c \in \langle x, x+h \rangle$. Računajući limes obiju strana kada $h \to 0$ i uzimajući u obzir da limes lijeve strane prethodne jednakosti postoji, dobivamo

$$f^s(x) = f'(x).$$

Ovime smo dokazali teorem. □

2.3 Generalizacije teorema o kvazi-srednjoj vrijednosti

U ovoj točki prezentiramo neke rezultate koje možemo smatrati poopćenjima Flettovog odnosno Trahanovog teorema o srednjoj vrijednosti za simetrično derivabilne funkcije. Najprije dajemo rezultate koje je 1969. godine dokazao matematičar S. Reich. Ti rezultati su verzija Trahanovih rezultata za simetrično derivabilne funkcije (v. lemu **??** i teorem **??**). Za funkciju f derivabilnu na $[a, b]$, smatramo da je $f'(b) = f^s(b)$.

Teorem 2.3.1 (S. Reich)**.** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a, b \rangle$. Pretpostavimo da je f derivabilna u granici b intervala $[a, b]$ te da je $[f(b) - f(a)]f'(b) \leq 0$. Tada postoje točke $c, d \in \langle a, b]$ takve da vrijedi*

$$f^s(c) \geq 0 \qquad i \qquad f^s(d) \leq 0.$$

Dokaz. Ako je $f'(b) = 0$ tada, za $c = b$ i $d = b$, dobivamo $f^s(c) = 0$ i $f^s(d) = 0$ koristeći da je $f'(b) = f^s(b)$.

Ako je $f(b) = f(a)$, po teoremu **??** primjenjenom na funkciju f na $[a, b]$ dobivamo

$$f^s(d) \leq 0 \leq f^s(c)$$

za neke $c, d \in \langle a, b \rangle$.

Pretpostavimo da je $[f(b) - f(a)]f'(b) < 0$. Slijedi da je ili $f'(b) < 0$ i $f(b) > f(a)$ ili $f'(b) > 0$ i $f(b) < f(a)$. U prvom slučaju, jer je f neprekidna na $[a, b]$ i $f(b) > f(a)$ uz to da je f padajuća u b, postoji točka $y \in \langle a, b \rangle$ takva da je

$$f(y) > f(b) > f(a).$$

Primjenom leme **??** na f na intervalu $[y, b]$ dobivamo da je $f^s(d) \leq 0$ za neki $d \in \langle y, b \rangle$. Ponovno primjenom leme **??** na f na $[a, b]$ dobivamo $f^s(c) \geq 0$ za neki $c \in \langle a, b \rangle$.

Razmotrimo slučaj kada je $f'(b) > 0$ i $f(b) < f(a)$. Tada postoji točka $y \in \langle a, b \rangle$ takva da je

$$f(y) < f(b) < f(a).$$

Primjenom leme **??** na f na $[y, b]$ dobivamo $f^s(c) \geq 0$ za neki $c \in \langle y, b \rangle$. Ponovno primjenom leme **??** na f na $[a, b]$ dobivamo $f^s(d) \leq 0$ za neki $d \in \langle a, b \rangle$. □

Idući teorem je verzija Trahanovog teorema **??** za simetrično derivabilne funkcije.

Teorem 2.3.2 (S. Reich)**.** *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a,b\rangle$. Pretpostavimo da je f derivabilna u granicama intervala $[a,b]$ te neka je*

$$\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] \geq 0. \tag{2.5}$$

Tada postoje točke $c, d \in \langle a,b]$ takve da je

$$(c-a)f^s(c) \geq f(c) - f(a)$$

i

$$(d-a)f^s(d) \leq f(d) - f(a).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ kao

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{ako je } x \in \langle a,b] \\ f'(a) & \text{ako je } x = a \end{cases}.$$

Uočimo da je funkcija h neprekidna na $[a,b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a,b]$. Prema pravilima za deriviranje simetrično derivabilnih funkcija vrijedi

$$h^s(x) = \frac{f^s(x)(x-a) - (f(x)-f(a))}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a}\left[f^s(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right], \quad x \in \langle a,b].$$

Posebno, imamo

$$h'(b) = h^s(b) = \frac{1}{b-a}\left[f^s(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] = \frac{1}{b-a}\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right].$$

Uzimajući u obzir nejednakost (**??**) vidimo da je

$$[h(b)-h(a)]h'(b) = \frac{-1}{b-a}\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] \leq 0.$$

Po teoremu **??** dobivamo

$$h^s(d) \leq 0 \leq h^s(c)$$

za neke $c, d \in \langle a,b]$. Odavde, po definiciji funkcije h, dobivamo nejednakosti

$$(c-a)f^s(c) \geq f(c) - f(a)$$

i

$$(d-a)f^s(d) \leq f(d) - f(a)$$

i time je dokaz gotov. □

Sljedeći rezultat je varijanta Flettovog teorema **??** o kvazi-srednjoj vrijednosti za simetrično derivabilne funkcije.

Teorem 2.3.3. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a,b\rangle$. Nadalje, neka je f derivabilna u granicama a i b intervala $[a,b]$. Pretpostavimo da je $f'(a) = f'(b)$. Tada postoje $c, d \in \langle a,b\rangle$ takve da je*

$$(c-a)f^s(c) \geq f(c) - f(a)$$

i

$$(d-a)f^s(d) \leq f(d) - f(a).$$

Dokaz. Kao u prethodnom teoremu definiramo funkciju $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ kao

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{ako je } x \in \langle a,b] \\ f'(a) & \text{ako je } x = a \end{cases}. \tag{2.6}$$

Funkcija h je neprekidna na $[a,b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a,b]$. Deriviranjem funkcije h dobivamo

$$h^s(x) = -\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} + \frac{f^s(x)}{x-a}, \quad x \in \langle a,b]. \tag{2.7}$$

Prvo pretpostavimo da je

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(b). \tag{2.8}$$

Koristeći (**??**) i (**??**) dobivamo

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a) \\ &= f'(b) - f'(a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pa slijedi da je $h(b) = h(a)$. Po teoremu **??** za simetrično derivabilnu funckiju h dobivamo $h^s(c) \geq 0$ i $h^s(d) \leq 0$ za neke $c, d \in \langle a,b\rangle$. Iz te dve nejednakosti, uz (**??**) i (**??**), dobivamo

$$(c-a)f^s(c) \geq f(c) - f(a)$$

i

$$(d-a)f^s(d) \leq f(d) - f(a).$$

Sada pretpostavimo da je

$$f(b) - f(a) \neq (b-a)f'(b). \tag{2.9}$$

Tada je ili $\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] > 0$ ili $\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] < 0$. U oba slučaja, koristeći da je $f'(b) = f'(a)$, dobivamo

$$\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] > 0,$$

pa po teoremu **??** postoje $c, d \in \langle a, b]$ takve da je

$$(c-a)f^s(c) \geq f(c) - f(a)$$

i

$$(d-a)f^s(d) \leq f(d) - f(a).$$

Pritom je, $c \neq b$ i $d \neq b$, budući da smo pretpostavili da vrijedi (**??**). □

Sljedeći teorem otklanja pretpostavku da za funkciju f vrijedi $f'(a) = f'(b)$. Radi se o varijanti teorema **??** za simetrično derivabilne funkcije.

Teorem 2.3.4 (P. K. Sahoo)**.** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Pretpostavimo da je f derivabilna u granicama a i b intervala $[a, b]$. Tada postoje $c, d \in \langle a, b\rangle$ takve da je*

$$(c-a)f^s(c) \geq f(c) - f(a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2$$

i

$$(d-a)f^s(d) \leq f(d) - f(a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(d-a)^2.$$

Dokaz. Promotrimo funkciju

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)^2, \quad x \in [a, b].$$

Ta je funkcija neprekidna na $[a, b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a, b\rangle$ te vrijedi

$$g^s(x) = f^s(x) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a).$$

Budući da je f derivabilna u granicama intervala $[a, b]$, funkcija g je također derivabilna u tim granicama i slijedi da je $g'(b) = g'(a)$. Primijenimo li sada teorem **??** na funkciju g dobivamo

$$(c-a)g^s(c) \geq g(c) - g(a)$$

i

$$(d-a)g^s(d) \leq g(d) - g(a)$$

za neke $c, d \in \langle a, b\rangle$. Odavde, koristeći definiciju funkcije g, dobivamo

$$(c-a)f^s(c) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2 \geq f(c) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2 - f(a),$$
$$(d-a)f^s(d) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(d-a)^2 \leq f(d) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(d-a)^2 - f(a),$$

čime je teorem dokazan. □

Sljedeći rezultat je varijanta Cauchyjevog teorema o kvazi-srednjoj vrijednosti za simetrično derivabilne funkcije.

Teorem 2.3.5 (S. Reich)**.** *Neka su funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne na $[a, b]$ i simetrično derivabilne na $\langle a, b\rangle$. Nadalje, neka su f i g derivabilne u granicama a i b intervala $[a, b]$ uz uvjet $g'(a) \neq 0$. Pretpostavimo da je $g(x) \neq g(a)$ za svaki $x \in \langle a, b]$ te da je*

$$\left[\frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right][f'(b)[g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)]g'(b)] \geq 0. \tag{2.10}$$

Tada postoje $c, d \in \langle a, b]$ takvi da vrijedi

$$[g(c)-g(a)]f^s(c) \geq [f(c)-f(a)]g^s(c)$$

i

$$[g(d)-g(a)]f^s(d) \leq [f(d)-f(a)]g^s(d).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ kao

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} & \text{ako je } x \in \langle a, b] \\ \dfrac{f'(a)}{g'(a)} & \text{ako je } x = a. \end{cases}.$$

Funkcija h je neprekidna na $[a, b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Također je h derivabilna u granici b. Slijedi

$$h^s(x) = -\frac{f(x)-f(a)}{(g(x)-g(a))^2}g^s(x) + \frac{1}{g(x)-g(a)}f^s(x), \quad x \in \langle a, b].$$

Odavde je

$$h'(b)[g(b)-g(a)]^2 = f'(b)[g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)]g'(b),$$

što uz (**??**) daje $[h(b)-h(a)]h'(b)[g(b)-g(a)]^2 \leq 0$, odnosno $[h(b)-h(a)]h'(b) \leq 0$. Sada, po teoremu **??** je

$$h^s(c) \geq 0 \qquad i \qquad h^s(d) \leq 0$$

za neke $c, d \in \langle a, b]$ što implicira traženi rezultat. □

Primijetimo da ako nejednakost (**??**) podijelimo izrazom $[g(b)-g(a)]g'(b)$, uz uvjet da je taj izraz veći od nule, dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\left[\frac{f'(a)}{g'(a)}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]\left[\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]\geq 0,$$

pa kao direktnu posljedicu prethodnog teorema imamo sljedeći rezultat.

Korolar 2.3.6. *Neka su funkcije $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidne na $[a,b]$ i simetrično derivabilne na $\langle a,b\rangle$. Nadalje, neka su f i g derivabilne u granicama a i b intervala $[a,b]$ uz uvjet da je $g'(a)\neq 0$ i $[g(b)-g(a)]g'(b)>0$. Pretpostavimo da je $g(x)\neq g(a)$ za svaki $x\in\langle a,b]$ te da je*

$$\left[\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]\left[\frac{f'(a)}{g'(a)}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]\geq 0. \tag{2.11}$$

Tada postoje $c,d\in\langle a,b]$ takvi da je

$$[g(c)-g(a)]f^s(c)\geq[f(c)-f(a)]g^s(c)$$

i

$$[g(d)-g(a)]f^s(d)\leq[f(d)-f(a)]g^s(d).$$

Korolar 2.3.7. *Neka su funkcije $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidne na $[a,b]$ i simetrično derivabilne na $\langle a,b\rangle$. Nadalje, neka su f i g derivabilne u granicama a i b intervala $[a,b]$ uz uvjet da je $g'(a)\neq 0$ i $[g(b)-g(a)]g'(b)>0$. Pretpostavimo da je $g(x)\neq g(a)$ za svaki $x\in\langle a,b]$ te da je*

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{f'(b)}{g'(b)}.$$

Tada postoje $c,d\in\langle a,b]$ takvi da je

$$[g(c)-g(a)]f^s(c)\geq[f(c)-f(a)]g^s(c)$$

i

$$[g(d)-g(a)]f^s(d)\leq[f(d)-f(a)]g^s(d).$$

Dokaz. Ovaj rezultat je direktna posljedica korolara **??**, budući da iz uvjeta $\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{f'(b)}{g'(b)}$ slijedi da je zadovoljena nejednakost (**??**). □

Na kraju dajemo rezultat koji je generalizacija korolara **??**, gdje je uvjet (**??**) ispušten.

Teorem 2.3.8 (P. K. Sahoo)**.** *Neka su funkcije $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne na $[a,b]$ i simetrično derivabilne na $\langle a,b \rangle$. Nadalje, neka su f i g derivabilne u granicama a i b intervala $[a,b]$ uz uvjet da je $g'(a) \neq 0$ i $[g(b) - g(a)]g'(b) > 0$. Pretpostavimo da je $g(x) \neq g(a)$ za svaki $x \in \langle a,b]$. Tada postoje $c, d \in \langle a,b]$ takvi da je*

$$[g(c) - g(a)]f^s(c) \geq \left[f(c) - f(a) + \frac{1}{2}\left[\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\right] \frac{(g(c) - g(a))^2}{g(b) - g(a)} \right] g^s(c)$$

i

$$[g(d) - g(a)]f^s(d) \leq \left[f(d) - f(a) + \frac{1}{2}\left[\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\right] \frac{(g(d) - g(a))^2}{g(b) - g(a)} \right] g^s(d).$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ kao

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\right] \frac{(g(x) - g(a))^2}{g(b) - g(a)}.$$

Ta je funkcija neprekidna na $[a,b]$ i simetrično derivabilna na $\langle a,b \rangle$. Nadalje, funkcija h je derivabilna u granicama intervala $[a,b]$. Vrijedi

$$h^s(x) = f^s(x) - \left[\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\right] \frac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)} g^s(x), \quad x \in [a,b],$$

odakle se lako provjeri da je

$$h'(b) = \frac{f'(a)}{g'(a)} g'(b)$$

i

$$h'(a) = f'(a).$$

Slijedi da je

$$\frac{h'(b)}{g'(b)} = \frac{h'(a)}{g'(a)}$$

pa primjenom korolara **??** na funkcije h i g na intervalu $[a,b]$ dobivamo

$$[g(c) - g(a)]h^s(c) \geq [h(c) - h(a)]g^s(c)$$

i

$$[g(d) - g(a)]h^s(d) \leq [h(d) - h(a)]g^s(d)$$

za neke $c, d \in \langle a,b]$. Iz ove dvije nejednakosti, koristeći definiciju funkcije h, slijedi zaključak teorema. □

Bibliografija

[1] C. F. Aull, *The first symmetric derivative*, Amer. Math. Monthly, 74 (1967), 708–711.

[2] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.

[3] S. Lang, *A first course in calculus*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[4] S. Reich, *On mean value theorem*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 70–73.

[5] P. K. Sahoo, T. Riedel, *Mean value theorems and functional equations*, World Scientific, Singapore, 1998.

[6] P. K. Sahoo, *Quasi-mean value theorems for symmetrically differentiable functions*, Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 27 (3) (2011), 279–301.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su teoremi o srednjoj vrijednosti za simetrično derivabilne funkcije. U prvom poglavlju prezentiramo neke osnovne teoreme diferencijalnog računa. Dani su Rolleov i Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti te njihove geometrijske interpretacije. Također je dan i Cauchyjev teorem o srednjoj vrijednosti. Nadalje, Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti primjenjujemo u dokazivanju nekih nejednakosti koje susrećemo u matematičkoj analizi. Dane su neke varijacije i poopćenja Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti, a zadužni za te rezultate su matematičari Flett, Trahan, Sahoo i Riedel.

U drugom poglavlju uvodimo pojam simetrične derivacije, kao poopćenje derivacije u klasičnom smislu. Poopćavanjem obične derivacije funkcija gubi neka svoja dobra svojstva kao što su neprekidnost i glatkoća krivulje. Razmatraju se svojstva simetrično derivabilnih funkcija te ilustriraju na nekim primjerima. Proučavamo razne teoreme o kvazi-srednjoj vrijednosti za simetrično derivabilne funkcije, koje su dokazali Aull, Reich i Sahoo. Ti rezultati su generalizirane verzije Rolleovog, Lagrangeovog, Flettovog i Trahanovog teorema o srednjoj vrijednosti.

Summary

The topic of this thesis is mean value theorems for symmetrically differential functions. In the first chapter we present some basic theorems of differential calculus. Rolle's and Lagrange's mean value theorems are given and illustrated with geometrical interpretations. Also, Cauchy's mean value theorem is given. Further, we apply Lagrange's mean value theorem for proving some inequalities which we meet in mathematical analysis. Some variants and generalizations of Lagrange's mean value theorem due to mathematicians Flett, Trahan, Sahoo and Riedel are given.

In the second chapter we introduce the concept of symmetric derivative, as a generalization of the derivative in the classical sense. By generalizing the ordinary derivative, a function loses some good properties like continuity and smoothness of the curve. Properties of symmetrically differentiable functions are considered and illustrated by a few examples. We study various quasi-mean value theorems for functions with symmetric derivatives, proved by Aull, Reich and Sahoo. These results are generalized versions of Rolle's, Lagrange's, Flett's and Trahan's mean value theorems.

Životopis

Rođen sam 21. svibnja 1989. godine u Zagrebu. Odrastao sam u Zagrebu gdje sam završio osnovnu i srednju školu. Godine 2009. upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, nastavnički smjer, a 2014. godine završavam preddiplomski smjer. Godine 2016. upisujem na istom fakultetu diplomski studij, smjer nastavnički. Kroz godine mojeg studiranja radio sam u Privatnoj Klasičnoj Gimnaziji kao zamjena na jedno polugodište te sam, u raznim privatnim obrazovnim ustanovama, pripremao učenike za državnu maturu iz matematike.