Učenje istraživanjem na primjeru sadržajnog područja vjerojatnosti

Kubasek, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Kubasek

UČENJE ISTRAŽIVANJEM NA PRIMJERU SADRŽAJNOG PODRUČJA VJEROJATNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala dragoj mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na ukazanom povjerenju, savjetima i usmjerenjima, a ponajviše na iskazanoj velikodušnosti pri izradi ovog diplomskog rada.

Hvala mojoj obitelji na podršci i ljubavi koju su mi pružili tijekom mojeg hoda u ostvarivanju životnih i obrazovnih ciljeva, a posebno im hvala na sudjelovanju u provođenju mojih eksperimenata.

Na kraju najviše hvala Onome koji stoji na početku i koji mi je darovao talent i usadio ljubav za ovo što radim te umjesto mene nemoguće učinio mogućim.

Sadržaj

Uvod

Matematika je školski predmet koji je valjda oduvijek "*bauk*", a u posljednje vrijeme možda i više nego ikada. Zasigurno, poučavanje koje se provodilo godinama i uglavnom svodilo na frontalnu nastavu i upijanje činjenica, učenicima nije bilo odviše zanimljivo, a i puko učenje formula i definicija nije dovodilo do korisnog usvajanja znanja i vještina, posebno kod učenika sa slabijim matematičkim sposobnostima. Naravno, konkretni primjeri i povezivanje sadržaja matematike sa stvarnim životnim situacijama daju odgovor na pitanje: "*A što će mi to u životu?*" Osim što na taj način matematički sadržaj povezuju sa stvarnom situacijom, ona im pomaže i bolje se upoznati s matematičkom pozadinom, ali i lakše upamtiti matematički koncept, formulu ili definiciju.

Sadržajno područje vjerojatnosti učenicima je uglavnom ili izrazito zanimljivo i jasno ili jako teško i neshvatljivo. Kako bi se spriječila ovakva dijametralna razdijeljenost, potrebno je nastavnim aktivnostima obogatiti satove matematike kako bi svi učenici mogli postići što bolju razinu razumijevanja vjerojatnosnih sadržaja. Osim toga, često je matematički koncept koji se nalazi u pozadini u proturječju s intuitivnim poimanjem učenika, stoga metoda istraživanja može uvelike pomoći u razbijanju predrasuda i krivih koncepata koje kod učenika postoje. Također, vjerojatnosno je područje posebno jer mu se može pristupiti s različitih gledišta i među tim gledištima uspostaviti veze koje omogućuju razvoj vjerojatnosne teorije.

Naravno, nastavnik je onaj koji može učenicima pružiti uvjete za rad, odnosno uvjete u kojima će pomoću do sada usvojenih znanja i vještina, potpomognut nastavnim materijalima i motivirajućim pitanjima, moći otkriti nove sadržaje i donositi važne zaključke. Osim toga, vjerojatnost prožima gotovo sve što nas okružuje: biološke procese, demografske promjene, političke izbore, novinarske ankete, predviđanja u sportu itd. Pomoću vjerojatnosti donosimo i svakodnevne odluke te promišljamo o svijetu koji nas okružuje. Stoga, lako je odgovoriti na pitanje "*Što će mi to u životu?*" jer onaj koji je upoznao matematiku složit će se s Josephom Butlerom[1] i reći "*Za nas je vjerojatnost jako dobar vodič za život.*"

[1]Joseph Butler (1692. – 1752.) - engleski filozof koji se u svojim djelma služio i matematičkim elementima

Poglavlje 1

Vjerojatnost u nacionalnom kurikulu

1.1 Smještenost sadržajnog područja vjerojatnosti u srednjoj školi

Vjerojatnosni modeli nalaze se posvuda oko nas, u našem svakodnevnom životu, stoga se i sadržajno područje vjerojatnosti provlači u cijelom kurikulu te se učenici s konceptima i idejama vjerojatnosnog sadržaja upoznaju već u samim počecima školovanja. Također, prema Cjelovitoj kurikularnoj reformi iz 2016. godine ([10], [11]), učenici već u prvome ciklusu, odnosno u nižim razredima osnovne škole, određuju je li neki događaj moguć ili nemoguć. Primijetimo da je ovaj zadatak zapravo začetak razvoja vjerojatnosnog mišljenja.

Sadržaj vjerojatnosti nalazi se u jednoj od pet domena, pod nazivom "Podaci, statistika i vjerojatnost" jer je vjerojatnost izrazito povezana s analizom podataka, ali i statistikom. Vjerojatnost se, dakle, poučava u svim obrazovnim ciklusima, no najdublji sadržaj ima u četvrtom i petom ciklusu, odnosno u srednjoškolskoj nastavi. Razlog tome jest potreban prethodni učenički razvoj prije usvajanja ovih sadržaja. Naravno, ne poučavaju se svi sadržaji u svim školama i svim programima, no gotovo sve škole upoznaju se s temom vjerojatnosti, samo u različitom obujmu. U nekim programima učenici će se upoznati samo s eksperimentalnom vjerojatnošću, pojmom relativne frenkvencije te Laplaceovim vjerojatnosnim modelom, a u nekima će doznati i što je uvjetna vjerojatnost, ali i geometrijska vjerojatnost, kako odrediti vjerojatnost suprotnog događaja, pokazati da vrijedi formula uvjetne vjerojatnosti i Bayesova formula. Naravno, ovisno o tome koliki je fond sati matematike određen za pojedini program.

1.2 Ishodi učenja u području vjerojatnosti

Svaki pojedinac treba na ispravan način tumačiti podatke, ali i procjenjivati rizike i donositi odluke. Razvoj tih kompetencija omogućen je poučavanjem na području vjerojatnosti i statistike. Razvoj vjerojatnosnog mišljenja nije samo važan za matematiku, nego i za druge znanosti, ali i za svakodnevicu, na primjer za procjenu javnog mišljenja, zdravstvenog rizika ili vremenske prognoze. Učenici tako analizom podataka donose zaključke te iznose predviđanja. Promatrajući slučajne događaje, procjenjuju i računaju njihovu vjerojatnost. Područje vjerojatnosti usko je povezano i s ostalim područjima kurikula, posebice prirodoslovnim i društveno-humanističkim, a velike se poveznice stvaraju i s elementima stvarnoga života.

Ishodi učenja koji se ostvaraju nakon poučavanja vjerojatnosnih sadržaja, kao što je već rečeno, ovise o programu u kojem se kurikul provodi, ali i o razini postignutog učeničkog uspjeha. Temeljni ishodi učenja u srednjoškolskoj nastavi vjerojatnosti prema Cjelovitoj kurikularnoj reformi, odnosno prema [10] i [11] su:

- učenik računa vjerojatnost događaja u jednostavnim situacijama prema broju mogućih i povoljnih ishoda
- učenik primjenjuje skupovne dijagrame za prikazivanje slučajnog događaja te za određivanje vjerojatnosti događaja
- učenik određuje broj elemenata konačnih skupova i koristi stablo vjerojatnosti za izračunavanje vjerojatnosti događaja vezanih uz neki stvarni ili hipotetski eksperiment
- učenik objašnjava i izražava složene događaje pomoću skupovnih operacija te računa njihovu vjerojatnost
- učenik računa uvjetnu vjerojatnost i prikazuje je pomoću vjerojatnosnog stabla
- učenik primjenjuje formule potpune vjerojatnosti i Bayesovu formulu
- učenik opisuje i računa vjerojatnost složenih događaja i događaja koji se ponavljaju
- učenik razlikuje zavisne i nezavisne događaje

Poglavlje 2

Vjerojatnost tijekom povijesti

Vjerojatnost se tijekom povijesti razvijala na vrlo zanimljiv način. Neke povijesne činjenice mogu pomoći u uočavanju različitih pogleda na vjerojatnost, ali i potaknuti učeničku motiviranost za nastavu. Stoga, korisno je poznavati povijesni aspekt i s učenicima podijeliti neke zanimljive povijesne činjenice. Povijesni razvoj vjerojatnosti zorno je prikazan u [4], a kratki pregled slijedi u nastavku.

2.1 Kombinatorna teorija vjerojatnosti

Vjerojatnost se tijekom povijesti počela promatrati zbog igri na sreću. Naime, dugo su vremena igre na sreću promatrane kao rezultat nadnaravnih sila. No, tijekom renesanse mijenja se pogled. Jedan od prvih pokušaja racionalno-matematičkog pristupa daje Girolamo Cardano u knjižici *Liber de ludo aleae* (1662.). Naime, ta je knjižica služila kao pomoć profesionalnim kockarima i pokušavala je racionalno opisati mogućnosti za dobitak.

Utemeljitelji kombinatorne teorije vjerojatnosti bili su Blaise Pascal (1623. – 1662.) i Piere de Fermat (1601. – 1684.) koji su se dopisivali o nekim kockarskim problemima i na taj način postavili temelje ovoj disciplini. Autor prve objavljene knjige o teoriji vjerojatnosti *De ratiociniis in ludo aleae* je Christiaan Huygens (1629. – 1695.) koji u toj knjizi piše i o očekivanju, iako ne daje strogu definiciju očekivanja.

Prvim bitnim djelom o vjerojatnosti smatra se *Ars Conjectandi* iz 1713. godine kojega je napisao Jacob Bernoulli (1654. – 1705.). Osim što je ovo djelo vrlo opsežno jer opisuje kombinatorne principe bitne za vjerojatnost, ono je posebno i zato što o vjerojatnosti govori kao o broju između 0 i 1. Osim toga, u ovome djelu Jacob Bernoulli postavlja vezu između vjerojatnosti *a priori* i *a posteriori*. Naime, zanima ga možemo li teorijsku vjerojatnost procijeniti ukoliko slučajni pokus ponovimo dovoljno mnogo puta te tako dolazi do zakona velikih brojeva. Odnosno, danas bismo govorili o konvergenciji relativnih frenkvencija k teorijskoj vjerojatnosti ukoliko slučajan pokus provodimo neograničeni broj puta i uvijek u istim uvjetima tako da je svako izvođenje neovisno o ostalima.

2.2 Formaliziranje teorije vjerojatnosti

Iako je Abraham de Moivre (1667. – 1754.) najpoznatiji po formuli za potenciranje kompleksnih brojeva, njegovi su glavni doprinosi zapravo na području teorije vjerojatnosti. Naime, de Moivre prvi daje klasičnu definiciju vjerojatnosti kao omjera broja povoljnih i broja mogućih slučajeva premda su tu činjenicu koristili i Pascal i de Fermat, samo bez definicije. Daniel Bernoulli (1700. – 1782.), nećak Jacoba i sin Johanna Bernoullija, uveo je tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti. Thomas Bayes (1702. – 1762.) poznat je po uvođenju uvjetne vjerojatnosti, a jedna od poznatijih vjerojatnosnih formula nosi njegovo ime.

Piere - Simone Laplace (1749. – 1827.) u svojemu djelu *Théorie Analytique des Probabilités* iz 1812. godine obrađuje klasične probleme, ali i daje filozofski pogled na slučajnost. Naime, on tvrdi da je slučajnost samo naziv za događaje kojima još ne znamo objasniti uzrok. Osim toga, on daje i klasičnu definiciju vjerojatnosti: *Vjerojatnost događaja je omjer brojeva za taj događaj povoljnih i svih mogućih slučajeva, ukoliko ne postoji razlog da pretpostavimo da neki slučajni događaj nastupa češće od drugih, odnosno ako su svi slučajevi jednako vjerojatni.* Danas taj vjerojatnosni model nazivamo Laplaceov vjerojatnosni model.

2.3 Aksiomatizacija teorije vjerojatnosti

Sredinom 19. stoljeća većina teorije vjerojatnosti razvijala se u Rusiji. Pafnutij Lvovič Čebišev (1821. – 1894.) generalizirao je zakon velikih brojeva i centralni granični teorem, a njegov student Andrej Andrejevič Markov (1856.–1922.) utemeljio je teoriju stohastičkih procesa koju danas nazivamo Markovljevim lancima, a to je niz slučajnih varijabli u kojima na vjerojatnost rezultata utječe samo neposredni prethodni rezultat.

Premda se o teoriji vjerojatnosti mnogo govorilo, još uvijek je nedostajala egzaktna osnova. Naime, klasična definicija vjerojatnosti *a priori* bila je kružna jer je o vjerojatnosti govorila kao o omjeru broja povoljnih slučajeva i mogućih slučajeva koji su jednako vjerojatni. Dakle, ostaje pitanje kakvi su to jednako vjerojatni slučajevi? Međutim, ovaj problem riješio je 1933. Andej Nikolajevič Kolmogorov (1903. – 1987.) koji je na temelju teorije mjere i po uzoru na teoriju skupova postavio aksiome vjerojatnosti u svojemu djelu

Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti. Stoga, smatra ga se i ocem moderne teorije vjerojatnosti.

Istaknuti hrvatski vjerojatnosničar bio je Vilim Srećko Feller (1906. − 1970.) koji je matematiku diplomirao na Sveučilištu u Zagrebu, a od 1939. djelovao je u SAD-u. Jedan je od osnivača teorije vjerojatnosti kao znanstvene discipline, a mnogi teoremi iz teorije vjerojatnosti nose njegovo ime. Prvo izdanje njegove monografije *Uvod u teoriju vjerojatnosti i njezine primjene* objavljeno je 1950. godine. Feller je osobito doprinio povezivanju Markovljevih lanaca i diferencijalnoga računa.

Dakle, možemo uočiti da se vjerojatnost izrazito dugo razvijala sve dok nije dobila svoje aksiomatske postavke, iako je još od davne povijesti prisutna u svakodnevici, ali i u matematičkim krugovima. Osim toga, i danas postoje mnoge prepirke među vjerojatnosnim matematičarima i brojne teorije nailaze na sukobe. Međutim, možda upravo ta raznovsnost daje čari teoriji vjerojatnosti te je upravo zato i važno i u nastavi vjerojatnosti dopustiti raznovrsnost pristupa.

Poglavlje 3

Vjerojatnosno mišljenje

Vjerojatnost je svakako posebno područje matematike jer je među ostalim povezano i s filozofskim razmišljanjem. Naime, vjerojatnosti se može pristupiti s matematičkog, ali i s filozofskog gledišta. Iz toga razloga, važno je učenicima omogućiti da imaju priliku iskusiti vjerojatnosne događaje u konkretnim situacijama i na temelju njih donositi smislene zaključke. Naravno, to je moguće provesti pomoću eksperimenata koji omogućuju njihovu veću uključenost u nastavu, a ne samo upijanje definicija i teorijskih formula.

3.1 Komponente vjerojatnosnog mišljenja

U području vjerojatnosti, više nego u bilo kojem drugom području matematike, odvijalo se preklapanje filozofskih i znanstvenih ideja do čijih je razdvajanja došlo tek relativno nedavno. Borovcnik u [2] vjerojatnosno mišljenje razrađuje na temelju nekoliko sljedećih sastavnica:

- mogućnost ravnoteže između psiholoških i formalnih vjerojatnosnih elemenata pri korištenju vlastitog mjerenja vjerojatnosti
- razumijevanje nepostojanja uspješnog direktnog kriterija za slučajne događaje
- mogućnost razlikovanja slučajnosti i uzročnosti
- razumijevanje razlike između izražavanja mišljenja prema problemu i donošenja odluke

Osvrćući se na ove komponente te njihovim analiziranjem, uočava ostale sastavnice vjerojatnosnog mišljenja:

1. Utjecaj prethodne vjerojatnosne prosudbe - shvaćanje da mnoge vjerojatnosti ovise o drugim (prethodnim) vjerojatnostima i zbog tog razloga mogu se povezati s odgovarajućom podskupinom. Stoga, na primjer, vjerojatnost da žena koja ima pozitivan test na mamografiji ima rak dojke ovisi o prethodnoj vjerojatnosti, a to je vjerojatnost obolijevanja od raka dojke. Ova vjerojatnost opisuje rizik njezine podgrupe.

2. Asimetrija uvjetne vjerojatnosti - razumijevanje da uvjetna vjerojatnost zasniva nesimetričan odnos između događaja ključan je za bavljenje vjerojatnošću i njezine ispravne interpretacije. Za vjerojatnosno mišljenje izrazito je važno moći uspostaviti ispravan odnos među obrnutom uvjetnom vjerojatnošću i onom početnom. Na primjer, ukoliko je vjerojatnost da ako osoba ima pozitivan test na mamografiji, onda ona ima rak dojke, izrazito visoka, to ne mora povlačiti da je i obrnuta vjerojatnost također visoka (da je visoka i vjerojatnost događaja ukoliko ima rak dojke, onda ima i pozitivan test na mamografiji).

3. Teoretski karakter neovisnosti - primjena neovisnosti često je neophodan zahtjev vjerojatnosnih modela, no teško je provjeriti je li i uvijek prikladan. Na primjer, neovisnost se ne može primijeniti na sudu ukoliko za dva slučaja koristimo iste dokaze. Usprkos apstraktnom značenju, neovisnost je glavni koncept u vjerojatnosti te analiziranje frenkvencija i relativnih frenkvencija ima smisla ukoliko su eksperimenti izvođeni neovisno.

4. Problem malih vjerojatnosti - izrazito je teško približno interpretirati vjerojatnosti malih vrijednosti, ali i one izračunate na malom uzorku. Male uvjetne vjerojatnosti promatranih rezultata mogu u zaključku opovrgnuti pretpostavku, no to ne mora biti utemeljeno na kontradikciji s pretpostavkom. Iako je teško, izrazito je važno razumjeti da je test značajnosti zapravo slabi matematički dokaz. Također, male vjerojatnosti mogu biti i posljedica analize nedovoljno velikog opsega podataka. Na primjer, ukoliko istraživanje o nekoj bolesti provedemo na petstotinjak osoba koje uopće nisu relevantne, tako dobijemo neadekvatne rezultate, a zapravo smo ga samo trebali provesti na većem broju osoba i raznovrsnijem uzorku.

5. Korelacija kao vjerojatnosna ovisnost - važno je razumijevanje da je korelacija koja je temeljena na vjerojatnosti mnogo slabiji oblik ovisnosti od funkcijske ovisnosti. Osim toga, važno je i razumijeti da se korelacija može mijenjati, pa tako i povećavati i smanjivati zbog varijabli koje se često zanemaruju. Stoga, ispravno je razumijevanje korelacije veliki korak naprijed u vjerojatnosnom razmišljanju.

3.2 Miskoncepcije pri poučavanju vjerojatnosti

Mnogi razvojni psiholozi bavili su se proučavanjem dječjeg poimanja svijeta, logičkog promišljanja, ali i stvaranja koncepata i slika o svemu što ih okružuje. Budući da je vjerojatnosno promišljanje uvelike povezano s matematikom, ali i filozofijom, tako je i područje vjerojatnosti, također, psiholozima bilo zanimljivo za proučavanje. U nastavku slijede neki od zaključaka do kojih su došli proučavajući psihologiju vjerojatnosti prema [2], a koji su važni za poučavanje vjerojatnosti:

- Jean Piaget (1896.-1980.) poznati je psiholog koji se bavio kognitivnim razvojem djece. U svojoj teoriji kognitivni je razvoj podijelio na četiri faze:
  - senzomotorna faza (do 2. godine)
  - predoperacijska faza (od 2. do 7. godine)
  - faza konkretnih operacija (od 7. do 11. godine)
  - faza formalnih operacija (od 12. godine)

  Naravno, ova dobna ograničenja, koja su navedena, vrlo su fleksibilna ovisno o razvoju pojedinca. Osim toga, neki pojedinci nikada i ne dođu do faze formalnih operacija, a ta je faza najviša i tijekom te faze osoba logički promišlja i ima mogućnost apstrakcije. Proučavajući dječje razumijevanje vjerojatnosti, Piaget je zaključio da slučajnost opisuje nepovratnu stvarnost, a da je vjerojatnost vrlo apstraktna. Stoga, prihvatljivo razumijevanje vjerojatnosti i vjerojatnosnih procesa nije moguće prije postizanja posljednje faze, a to je faza formalnih operacija.

- Fischbein je krajem prošloga stoljeća proučavao učenička znanja i shvaćanja te uveo pojmove primarnih i sekundarnih intuicija. Primarne se intuicije odnose na osobna iskustva koja nisu uvjetovana nekom podukom, a sekundarne su intuicije plod sistematičnog, formalnog podučavanja. Fiscbeinova su istraživanja pokazala da se učeničko vjerojatnosno razumijevanje ponekada smanji s godinama. Ovaj zaključak potaknuo ga je da ponovno naglasak stavi na poučavanje koje bi se trebalo temeljiti na proučavanju uzročnih odnosa koji se pojavljuju u znanosti.

- Green je osamdesetih godina prošloga stoljeća proučavao učeničko razumijevanje vjerojatnosti i vjerojatnosnog jezika. Među brojnim zaključcima koje je donio jest da djeca između 11 i 16 godina napreduju u vjerojatnosnom i kombinatornom rasuđivanju, no ne razlikuju dovoljno dobro slučajan slijed događaja i onaj koji to nije.

- Daniel Kahneman i Amos Nathan Tversky matematički su psiholozi koji su sedamdesetih godina prošloga stoljeća proučavali na koji način odrasli poimaju vjerojatnost. Njihov je rad analizirao ponašanje odraslih u vjerojatnosnim situacijama u kojima su se koristili predrasudama te su uočili ključne intuitivne strategije kojima se odrasli služe pri donošenju odluka. Također, uočili su da osobne koncepcije nisu uvijek stabilne i da ljudi mijenjaju svoje poglede temeljem iskustava, a ponekada i zanemaruju činjenice ili ih pak interpretiraju tako da ih oblikuju prema svojemu pogledu.

Neke od fenomena i miskoncepcija koje se pojavljuju kod ljudi prikazani su u nastavku:

1. Dostupnost informacija - vjerojatnost je, također, intuitivno približno određena i ugodnošću prizivanja bitnih događaja iz memorije. Stoga, osobe češće prizivaju ugodne događaje i informacije. No, memorija može biti zbunjena i informacijama koje su proizvodi mašte. Osim toga, ljudi se događaja prisjećaju selektivno, tako su na primjer, događaji dublje zabilježeni ukoliko su štetni, a bilježenje događaja može početi tek nakon niza događaja koji su se zbili. Također, prizivanje je događaja pristrano, posebice ukoliko ih prizivamo iz selektivne memorije (na primjer, emocionalni događaji se češće prizivaju iz memorije).

2. Pristranost jednakim vjerojatnostima - ljudi nastoje događaje prosuđivati kao da su svi jednakovjerojatni. Obrazloženje ove ideje o poštenju nalazi se duboko u želji ljudske prirode (jednakost i jednake mogućnosti) te se jednake vjerojatnosti rabe pri izražavanju pravednosti. Drugim riječima, ukoliko je slučajnost pravedna, onda se jednake vjerojatnosti mogu dodijeliti svim slučajevima. Jednake vjerojatnosti služe donošenju pravednih odluka kada je teško pronaći rješenje koje je odgovarajuće svim stranama. Naime, tada je odluka predana slučajnosti tako da osoba koja treba odlučiti može biti oslobođena odgovornosti donošenja odluke.

   Ovu naklonost možemo usporediti s bacanjem novčića prije nogometne utakmice, tako da se odredi koji će tim početi igru. Ova tehnika odabira tima koji započinje utakmicu je pravedna jer su vjerojatnosti za pismo i glavu jednake, a jednake su vjerojatnosti utjelovljenje pravednosti i poštenja. No, to ne znači da su svi događaji uvijek jednako vjerojatni. Stoga, ne iznenađuje da se ovaj koncept upotrebljuje i u neprimjerenim situacijama te da se svi mogući rezultati smatraju jednako vjerojatnima, iako to nisu. Taj se krivi način gledanja posebice javlja ukoliko su uključena samo dva moguća rezultata, pa ih se inutitivno, automatski smatra jednako vjerojatnima, iako to možda i nisu.

3. Kontrola budućnosti - vjerojatnost je povezana i s neizvjesnim situacijama koje se odnose na prošlost, ali i na budućnost. Potreba za predviđanjem budućnosti čini se da je prototip mišljenja koji susrećemo pri modelima uzročnih veza kao što su istraživanja u fizici. Uzročne su sheme s vremenom prenesene iz područja znanosti u vjerojatnosne situacije, stoga je Laplace vjerojatnost vidio kao zamjenu za uzročne

veze. Također, postoji i želja za predviđanjem budućih događaja. U skladu s time, može se prepoznati usmjerenje prema rezultatima i nastojanje u ljudskom ponašanju da se posluži dobivenim vjerojatnosnim informacijama kao alatom za predviđanje konkretnih rezultata sljedećeg eksperimenta. Ponekada su ta predviđanja povezana i s nadnaravnim, božanskim te predviđanjima budućnosti koja se temelje na nekim prethodnim iskustvima

4. Reprezentativnost - vjerojatnost pojedinog rezultata izjednačava se s vjerojatnošću skupine sličnih rezultata pri čemu je posebni rezultat reprezentativan član skupine. Jedno obrazloženje je da se značajke grupe, prema tipičnim ljudskim nastojanjima, prenose na pojedince koji pripadaju toj grupi. Tipičan primjer je moda - volimo se odijevati sukladno modi grupe uspješnih ljudi kada želimo pripadati toj grupi. Značajke grupe imaju važnu ulogu za ljudska bića te zapravo zasebnom članu grupe mogu uvećati vrlinu pomoću svojstava grupe. Na primjer, osoba može biti mnogo bolja u penjanju u grupi, nego kada se penje samostalno.

   Jedan od primjera možemo pronaći i u izvlačenju lota. Naime, ljudi smatraju da su neke kombinacije vjerojatnije ukoliko pripadaju većem podskupu skupa brojeva iz kojega se izvlači određena kombinacija, no činjenica je da su sve kombinacije jednakovjerojatne. Promotrimo ovu situaciju na primjeru. Neka se izvlače kuglice na lotu s brojevima od 1 do 36, bez vraćanja. Neka je prvi niz izvučenih brojeva 1, 8, 21, 35, 11, 36, a drugi niz izvučenih brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6. Kada bismo ljude pitali za koji niz misle da je vjerojatniji za pobjedu na lotu, većina bi ih odlučila da je to prvi niz. Razlog tome nalazi se u mišljenju da brojevi koji su izvučeni u prvom nizu pripadaju većem podskupu skupa iz kojeg izvlačimmo brojeve nego što je podskup kojem pripadaju brojevi izvučeni u drugome nizu. Međutim, zanemaruju činjenicu da pobjedu na lotu donosi jedna specifična kombinacija.

5. Utjecaj informacija - vjerojatnosne su prosudbe i pod utjecajem nedavnih istaknutih dodatnih informacija koje i nisu potrebne za donošenje vjerojatnosnih zaključaka. Dakle, neke suvišne informacije mogu prosudbu i krivo usmjeriti, a često se takvo informiranje može koristiti i za manipulacije. Na primjer, ukoliko zrakoplovna kompanija želi svojim putnicima stvoriti sliku da su njihovi letovi redoviti, onda se može poslužiti utjecajem informacija. Stoga, može najaviti putnicima da će let kasniti pola sata, a potom nakon nekog vremena, obavijestiti putnike da će zrakoplov stići na vrijeme. Primajući ove informacije, putnici imaju dojam da nije jednostavno dolaziti na vrijeme i stoga više cijene kompaniju jer njihovi letovi ne kasne.

   Osim toga, u matematici se može dogoditi i kriva interpretacija matematičkih odnosa. Tako se zakon velikih brojeva, čija je zamisao da ukoliko se pokus ponavlja mnogo puta, relativne frekvencije teže vjerojatnosti, može krivo tumačiti i primijeniti te smatrati da se relativne frekvencije mogu uravnotežiti i na nekom manjem uzorku. Također, povezano s već spomenutom reprezentativnošću, osobe mogu misliti da ukoliko su u prava četiri bacanja pala pisma, onda je veća vjerojatnost da će i u petom bacanju pasti pismo. Naravno, da to nije istina, a na njihovo ovakvo razmišljanje utjecale su prethodno prikazane informacije o prvim četirima bacanjima.

6. Uzorci - ljudi primjećuju mnoge pravilnosti u svemu što čine, a tako i u matematici. No, često te pravilnosti poopćuju kada one i ne odgovaraju konkretnoj situaciji. Stoga, ne iznenađuje da se ljudi često usmjeravaju na uzorke slučajnih nizova i za njih donose krive zaključke. Uzorci slučajnih nizova vrlo su nestabilni za donošenje zaključaka, posebice ukoliko se radi o kratkom nizu informacija. Pretpostavka je da se u slučajnim pokusima ne odvija pravilnost pojavljivanja u nizu. Ukoliko tijekom promatranja uzorka ova pretpostavka postane sumnjiva, potrebno ju je provjeriti statističkim testom, a nikako ne intuitivnom prosudbom.

7. Osobno iskustvo i informacije - ljudi se uvelike oslanjaju na osobno iskustvo i na činjenice koje su uvidjeli "na vlastite oči". Naime, ljudi vole pričati o iznimnim slučajevima i pokrijepiti to vlastitim iskustvom. Stoga, ljudi često svoje iskustvo ne gledaju kao jedan od podataka među brojnim drugima, nego mu daju iznimno veliki značaj. Na primjer, iako istraživanja pokazuju da je neka operacija opasna u jednom od 10 000 slučajeva, netko može biti izrazito oprezan jer je njegov otac umro tijekom takve iste operacije. Dakle, očito osobno iskustvo može potaknuti brojna pitanja u promišljanju pa čak i dovesti do sumnji u vrijednost vjerojatnosnih informacija.

Poglavlje 4

Vjerojatnost u nastavi

Poučavanje vjerojatnosti u srednjoj školi ne slijedi u svemu cjelokupnu matematičku teoriju. Naime, sadržaj vjerojatnosti prilagođen je učeničkoj dobi i njihovu predznanju, stoga matematička strogost nije u potpunosti zadovoljena. Iako se spominju aksiomi vjerojatnosti, ne ulazi se u dubinu njihova značenja, a i definicije i teoremi nisu u potpunosti precizno izrečeni. Međutim, potpuna se preciznost i ne zahtijeva jer bi učenicima stvarala opterećenje i dodatnu zbunjenost. U narednim odlomcima obrađene su neke srednjoškolske vjerojatnosne teme s prikazanom matematičkom podlogom prema [9], ali i aktivnostima primjerenima srednjoškolskoj nastavi.

4.1 Vjerojatnosni prostor

Pri definiranju pojma vjerojatnosti u visokoškolskoj nastavi matematike, kreće se od pojmova σ-algebre i izmjerivog prostora. Naravno, te definicije nisu u potpunosti prikladne za srednjoškolsku razinu, stoga ih u srednjoškolskoj nastavi ne spominjemo. Tijekom obrazovanja, učenici se upoznaju s pojmovima elementarni događaj, prostor elementarnih događaja i događaj te ih objasne na nekom praktičnom primjeru kao što je bacanje igraće kocke ili bacanje novčića. Složenost formalnih matematičkih definicija jasno se očituje u nastavku:

Definicija 4.1.1. *Neka je Ω neprazan skup. Familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω zove se σ-algebra (ili σ-algebra događaja), ako vrijede sljedeća tri svojstva:*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
(ii) Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na komplement);
(iii) Ako su $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$, onda je i $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na prebrojive unije)

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ *zove se izmjeriv prostor.*

Napomena 4.1.2. *Sukladno oznakama u prethodnoj definiciji, kažemo da je* Ω *prostor elementarnih događaja (to jest, skup svih mogućih ishoda slučajnog pokusa), elemente od* Ω *nazivamo elementarni događaji, a elemente od* $\mathcal{F}$ *zovemo događaji. Ukoliko je* Ω *prebrojiv, najčešće uzimamo da je* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Definicija 4.1.3. *Neka je* Ω *neprazan skup i* $\mathcal{F}$ σ*-algebra događaja. Vjerojatnost na izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *je funkcija* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ *koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:*

(A1) Za sve $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$ *(nenegativnost);*
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(normiranost);*
(A3) Za svaki niz $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *po parovima disjunktnih događaja* $A_j \in \mathcal{F}$ $(A_i \cap A_j = \emptyset$ *za* $i \neq j)$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \qquad (\sigma - aditivnost).$$

Uređena trojka zove se vjerojatnosni prostor.

Napomena 4.1.4. *U srednjoškolskoj nastavi matematike isključivo se uzima da je* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *te se ne definira algebra događaja, nego se uvodi pomoću primjera.*

Aktivnost 1. ***Papirići s brojevima***

Cilj: uvesti vjerojatnosni prostor te povezati događaje i skupovni prikaz
Nastavni oblik: rad u grupi
Nastavna metoda: heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listići
Tijek aktivnosti:
Učenici su podijeljeni u četveročlane skupine. Svaki učenik dobije po jedan nastavni listić koji je različit od ostalih u grupi. Učenik riješi prvi zadatak sa svojega listića te ga potom daje učeniku koji sjedi lijevo od njega. Potom rješava drugi zadatak s listića koji je dobio od učenika koji sjedi desno od njega i predaje ga učeniku koji sjedi lijevo od njega. Postupak se nastavlja dalje dok se ne riješe svi zadaci.

Nastavni listić:
A
Lucija ima neprozirnu vrećicu u kojoj su na petnaest papirića napisani brojevi od 1 do 15, svaki broj jedanput. Lucija je izvukla jedan papirić.

1. Koji su se sve događaji mogli dogoditi? Zapiši ih u skup Ω.
   $\Omega =$

2. Neka je događaj A "*Lucija je izvukla broj manji od* 3", a događaj B "*Lucija je izvukla broj veći od* 10". Zapiši ove događaje pomoću skupova te odredi skup $A \cup B$.
   $A =$
   $B =$
   $A \cup B =$

3. Prikaži skupove iz drugog zadatka pomoću Vennova dijagrama.

4. Na temelju prethodnog znanja odredi $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$ te usporedi njihove vrijednosti i donesi zaključke.
   $\mathbb{P}(A) =$
   $\mathbb{P}(B) =$
   $\mathbb{P}(A \cup B) =$

B

Lucija ima neprozirnu vrećicu u kojoj su na petnaest papirića napisani brojevi od 1 do 15, svaki broj jedanput. Lucija je izvukla jedan papirić.

1. Koji su se sve događaji mogli dogoditi? Zapiši ih u skup Ω.
   $\Omega =$

2. Neka je događaj A "*Lucija je izvukla broj veći od* 3*, a manji od* 7", a događaj B "*Lucija je izvukla broj veći od* 5*, a manji od* 10". Zapiši ove događaje pomoću skupova te odredi skup $A \cup B$.
   $A =$
   $B =$
   $A \cup B =$

3. Prikaži skupove iz drugog zadatka pomoću Vennova dijagrama.

4. Na temelju prethodnog znanja odredi vjerojatnosti događaja $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$ te usporedi njihove vrijednosti i donesi zaključke.
   $\mathbb{P}(A) =$
   $\mathbb{P}(B) =$

$\mathbb{P}(A \cup B) =$

C

Lucija ima neprozirnu vrećicu u kojoj su na petnaest papirića napisani brojevi od 1 do 15, svaki broj jedanput. Lucija je izvukla jedan papirić.

1. Koji su se sve događaji mogli dogoditi? Zapiši ih u skup Ω.
   $\Omega =$

2. Neka je događaj A "*Lucija je izvukla broj veći od* 15*, a manji od* 18". Zapiši ovaj događaj pomoću skupa ukoliko se on nalazi unutar skupa Ω.
   $A =$

3. Prikaži skup A i skup Ω iz drugog zadatka pomoću Vennova dijagrama.

4. Na temelju prethodnog znanja odredi vjerojatnosti događaja $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\Omega)$ te donesi zaključke.
   $\mathbb{P}(A) =$
   $\mathbb{P}(\Omega) =$

D

Lucija ima neprozirnu vrećicu u kojoj su na petnaest papirića napisani brojevi od 1 do 15, svaki broj jedanput. Lucija je izvukla jedan papirić.

1. Koji su se sve događaji mogli dogoditi? Zapiši ih u skup Ω.
   $\Omega =$

2. Neka je događaj A "*Lucija je izvukla broj djeljiv s* 3". Zapiši ovaj događaj pomoću skupa.
   $A =$

3. Prikaži skup iz drugog zadatka pomoću Vennova dijagrama.

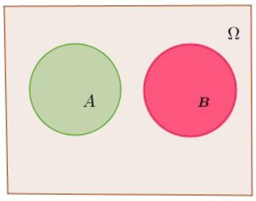
4. Na temelju prethodnog znanja odredi $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\Omega)$ te usporedi njihove vrijednosti i donesi zaključke.
   $\mathbb{P}(A) =$
   $\mathbb{P}(\Omega) =$

Primjer riješenog listića:
A
Lucija ima neprozirnu vrećicu u kojoj su na petnaest papirića napisani brojevi od 1 do 15, svaki broj jedanput. Lucija je izvukla jedan papirić.

1. Koji su se sve događaji mogli dogoditi? Zapiši ih u skup Ω.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

2. Neka je događaj A ”*Lucija je izvukla broj manji od* 3”, a događaj B ”*Lucija je izvukla broj veći od* 10”. Zapiši ove događaje pomoću skupova te odredi skup $A \cup B$.
   $A = \{1, 2\}$
   $B = \{11, 12, 13, 14, 15\}$
   $A \cup B = \{1, 2, 11, 12, 13, 14, 15\}$

3. Prikaži skupove iz drugog zadatka pomoću Vennova dijagrama.



4. Na temelju prethodnog znanja odredi $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$ te usporedi njihove vrijednosti i donesi zaključke.
   $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{15}$
   $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{15}$
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{7}{15}$
   Vjerojatnost unije jednaka je zbroju vjerojatnosti zasebnih događaja koji su međusobno disjunktni.

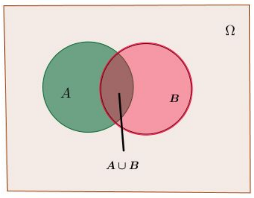
B
Lucija ima neprozirnu vrećicu u kojoj su na petnaest papirića napisani brojevi od 1 do 15, svaki broj jedanput. Lucija je izvukla jedan papirić.

1. Koji su se sve događaji mogli dogoditi? Zapiši ih u skup Ω.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

2. Neka je događaj A ”*Lucija je izvukla broj veći od* 3, *a manji od* 7”, a događaj B ”*Lucija je izvukla broj veći od* 5, *a manji od* 10”. Zapiši ove događaje pomoću skupova te odredi skup $A \cup B$.

$A = \{4, 5, 6\}$
$B = \{6, 7, 8, 9\}$
$A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

3. Prikaži skupove iz drugog zadatka pomoću Vennova dijagrama.



4. Na temelju prethodnog znanja odredi vjerojatnosti događaja $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$ te usporedi njihove vrijednosti i donesi zaključke.
   $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{15}$
   $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{15}$
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{6}{15}$
   Vjerojatnost unije nije jednaka zbroju zasebnih događaja ukoliko oni nisu disjunktni.

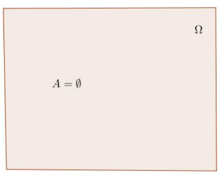
C

Lucija ima neprozirnu vrećicu u kojoj su na petnaest papirića napisani brojevi od 1 do 15, svaki broj jedanput. Lucija je izvukla jedan papirić.

1. Koji su se sve događaji mogli dogoditi? Zapiši ih u skup Ω.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

2. Neka je događaj A ”*Lucija je izvukla broj veći od* 15*, a manji od* 18”. Zapiši ovaj događaj pomoću skupa ukoliko se on nalazi unutar skupa Ω.
   $A = \emptyset$

3. Prikaži skup A i skup Ω iz drugog zadatka pomoću Vennova dijagrama.



4. Na temelju prethodnog znanja odredi vjerojatnosti događaja $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\Omega)$ te donesi zaključke.
   $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{0}{15} = 0$
   $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{15}{15} = 1$
   Vjerojatnost praznog skupa jednaka je 0, a vjerojatnost čitavog skupa događaja jednaka je 1.

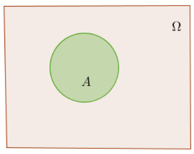
D

Lucija ima neprozirnu vrećicu u kojoj su na petnaest papirića napisani brojevi od 1 do 15, svaki broj jedanput. Lucija je izvukla jedan papirić.

1. Koji su se sve događaji mogli dogoditi? Zapiši ih u skup Ω.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

2. Neka je događaj A "*Lucija je izvukla broj djeljiv s* 3". Zapiši ovaj događaj pomoću skupa.
   $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

3. Prikaži skup iz drugog zadatka pomoću Vennova dijagrama.



4. Na temelju prethodnog znanja odredi $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\Omega)$ te usporedi njihove vrijednosti i donesi zaključke.
   $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
   $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{15}{15} = 1$
   Vjerojatnost nekog događaja uvijek je veća ili jednaka 0, a manja ili jednaka 1

Kutak za nastavnike:
Nakon provedbe ove aktivnosti učenici će ponoviti znanja iz područja vjerojatnosti, ali i zaključiti kako definirati vjerojatnost. Naime, nastavnik može razgovorom s učenicima doći do definicije vjerojatnosti tako da ih potakne da verbaliziraju zaključke do kojih su došli rješavanjem zadataka. Aktivnost kolo-naokolo je korisna jer nastavnik lako uoči kod kojeg učenika je papir stao i koji učenik s kojim zadatkom ima problem pri rješvanju.

4.2 Laplaceov vjerojatnosni model

Jedan od najstarijih vjerojatnosnih modela u povijesti je kasnije nazvan Laplaceov vjerojatnosni model koji vjerojatnost promatra kao omjer broja povoljnih i broja mogućih ishoda. Budući da je on intuitivan, s njime se najprije upoznaju i učenici još u osnovnoj školi. Naravno, u toj dobi učenici ne usvajaju stroge matematičke definicije i postavke ovog modela, nego se s njime upoznaju na temelju jednostavnih i praktičnih primjera.
Pretpostavka Laplaceova vjerojatnosnog modela je da imamo konačno mnogo ishoda koji su svi jednako vjerojatni. Odnosno, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) := p_i,\ i = 1, 2, ..., n,\ p_1 = p_2 = ... = p_n =: p$. Sada, prema aksiomu *(A2)* imamo

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = np$$

Ova nam jednakost daje $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$. Odnosno, za proizvoljni $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j} = kp = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

odnosno, vjerojatnost svakog događaja A jednaka je omjeru broja elemenata od A i broja svih elementarnih događaja.

Naravno, u srednjoškolskoj nastavi učenici ne pristupaju Laplaceovu modelu na ovaj način, odnosno ne daju mu precizno, matematičko značenje, nego ga upoznaju na primjerima iz života. Neki od primjera su bacanje simetričnog novčića, bacanje simetrične igraće kocke i drugi pokusi u kojima je svaki elementarni događaj jednako vjerojatan. Ovaj je koncept i razumijevanje vjerojatnosti najučestaliji kod učenika i iz toga im je razloga, najprirodniji i najrazumljiviji. Neki nastavnici učenike s temom sadržajnog područja vjerojatnosti upoznaju upravo pomoću ovakvih eksperimenata i koncepta jednako vjerojatnih događaja.

Aktivnost 2. Bacanje novčića
Cilj: povezati vjerojatnost *a priori* i vjerojatnost *a posteriori* s Laplaceovim vjerojatnosnim modelom
Nastavni oblik: rad u grupi
Nastavna metoda: heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić, novčić
Tijek aktivnosti:
Učenici su podijeljeni u peteročlane skupine. Svaki učenik baca novčić dvadeset puta i bilježi rezultat koji je dobio. Potom rješava zadatke s listića surađujući s ostatkom grupe. Nakon toga, nastavnik s učenicima izvodi konačne zaključke.

Nastavni listić:

1. Zamisli da bacaš simetričan novčić 20 puta. Koliku relativnu frekvenciju pojave pisma očekuješ?

2. Baci novčić 20 puta i zabilježi ishode koje si dobio u donju tablicu (upiši 1 za pismo, a 0 za glavu). Uoči da su tako rezultati grupirani u grupe po pet. U predzadnjem retku tablice zbroji koliko se pisama pojavilo u pojedinoj grupaciji po pet. U zadnjem retku tablice odredi relativnu frekvenciju pojave pisma u pojedinoj gupi i zapiši je u obliku decimalnog broja.

bacanje	ishod	bacanje	ishod	bacanje	ishod	bacanje	ishod
1.		6.		11.		16.	
2.		7.		12.		17.	
3.		8.		13.		18.	
4.		9.		14.		19.	
5.		10.		15.		20.	
zbroj		zbroj		zbroj		zbroj	
rel. frekv.		rel. frekv.		rel. frekv.		rel. frekv.	

3. Pomoću prethodne tablice popuni sljedeću u kojoj su od svih ishoda načinjene dvije grupe po deset bacanja.

	bacanje 1. – 10.	bacanje 11. – 20.
broj pisama		
relativna frekvencija		

4. Popuni sljedeću tablicu tako da odrediš ukupan broj pisama koji se pojavio dok si provodio/la eksperiment te tako odredi relativnu frekvenciju pojave pisma.

ukupan broj pisama u bacanjima 1. – 20.	
relativna frekvencija	

5. Unutar grupe razmijenite koliko se pisama pojavilo kod pojedinog učenika te popunite donju tablicu. U predzadnjem retku odredite koliko se ukupno pisama pojavilo, a u zadnjem retku odredite relativnu frekvenciju pojave pisma.

	broj pisama
1.učenik	
2.učenik	
3.učenik	
4.učenik	
5.učenik	
zbroj	
relativna frekvencija	

6. Usporedite relativne frekvencije u grupama po pet (2. zadatak). Jesu li njihove vrijednosti bliske? Zašto?

7. Usporedite relativne frekvencije među različitim grupacijama (po pet, deset, dvadeset). Usporedite ih i s vašom pretpostavkom (1. zadatak).

8. Zbrojite koliko se pisama pojavilo u cijelom razredu (koristite se rješenjem petog zadatka svake grupe). Zatim odredite relativnu frekvenciju pojave pisma u cijelom razredu.

9. Usporedite sve relativne frekvencije koje ste izračunali. Što uočavate? Što se događa s relativnom frekvencijom kada povećavate broj bacanja novčića? Kojem se broju ona tada približava?

Primjer riješenog listića:

1. Zamisli da bacaš simetričan novčić 20 puta. Koliku relativnu frekvenciju pojave pisma očekuješ?
   Očekujem relativnu frekvenciju $\frac{1}{2}$.

2. Baci novčić 20 puta i zabilježi ishode koje si dobio u donju tablicu (upiši 1 za pismo, a 0 za glavu). Uoči da su tako rezultati grupirani u grupe po pet. U predzadnjem

retku tablice zbroji koliko se pisama pojavilo u pojedinoj grupaciji po pet. U zadnjem retku tablice odredi relativnu frekvenciju pojave pisma u pojedinoj gupi i zapiši je u obliku decimalnog broja.

bacanje	ishod	bacanje	ishod	bacanje	ishod	bacanje	ishod
1.	0	6.	0	11.	1	16.	0
2.	0	7.	1	12.	1	17.	0
3.	1	8.	1	13.	1	18.	1
4.	0	9.	0	14.	1	19.	0
5.	1	10.	0	15.	1	20.	1
zbroj	2	zbroj	2	zbroj	5	zbroj	2
rel. frekv.	$\frac{2}{5} = 0.4$	rel. frekv.	$\frac{2}{5} = 0.4$	rel. frekv.	1	rel. frekv.	$\frac{2}{5} = 0.4$

3. Pomoću prethodne tablice popuni sljedeću u kojoj su od svih ishoda načinjene dvije grupe po deset bacanja.

	bacanje 1. – 10.	bacanje 11. – 20.
broj pisama	4	7
relativna frekvencija	$\frac{4}{10} = 0.4$	$\frac{7}{10} = 0.7$

4. Popuni sljedeću tablicu tako da odrediš ukupan broj pisama koji se pojavio dok si provodio/la eksperiment te tako odredi relativnu frekvenciju pojave pisma.

ukupan broj pisama u bacanjima 1. – 20.	11
relativna frekvencija	$\frac{11}{20} = 0.55$

5. Unutar grupe razmijenite koliko se pisama pojavilo kod pojedinog učenika te popunite donju tablicu. U predzadnjem retku odredite koliko se ukupno pisama pojavilo, a u zadnjem retku odredite relativnu frekvenciju pojave pisma.

	broj pisama
1.učenik	11
2.učenik	10
3.učenik	9
4.učenik	11
5.učenik	7
zbroj	48
relativna frekvencija	$\frac{48}{100} = 0.48$

6. Usporedite relativne frekvencije u grupama po pet (2. zadatak). Jesu li njihove vrijednosti bliske? Zašto?

Uočavamo da se relativne frekvencije u grupama po pet izrazito razlikuju, zato jer je to mali uzorak.

7. Usporedite relativne frekvencije među različitim grupacijama (po pet, deset, dvadeset). Usporedite ih i s vašom pretpostavkom (1. zadatak).
   Kakko smo povećavali veličinu grupacije, tako je vrijednost relativne frekvencije bila bliža našoj pretpostavci.

8. Zbrojite koliko se pisama pojavilo u cijelom razredu (koristite se rješenjem petog zadatka svake grupe). Zatim odredite relativnu frekvenciju pojave pisma u cijelom razredu.
   Relativna frekvencija u cijelom razredu iznosi $\frac{252}{500} = 0.504$.

9. Usporedite sve relativne frekvencije koje ste izračunali. Što uočavate? Što se događa s relativnom frekvencijom kada povećavate broj bacanja novčića? Kojem se broju ona tada približava?
   Kada povećavamo broj bacanja novčića, relativna frekvencija se približava našoj pretpostavci u prvom zadatku.

Kutak za nastavnike:

U ovoj aktivnosti učenici će pomoću eksperimenta dobiti predodžbu vjerojatnosti *a posteriori*. Tijekom ove aktivnosti učenici uočavaju da im je za ispravne zaključke potrebno mnogo ponavljanja pokusa te uočavaju da nakon dovoljno mnogo ponavljanja pokusa vjerojatnost *a priori* i *a posteriori* poprimaju vrlo bliske vrijednosti. Također, mogu uočiti da se tijekom eksperimenta vrijednosti pisma, odnosno glave ne izmijenjuju u pravilnostima kako bi inače pomislili. Osim toga, predodžbu raznolikosti relativnih frekvencija pri malim uzorcima učenici mogu poboljšati i korištenjem tehnologije, više o tome u zadnjem poglavlju.

4.3 Vjerojatnost suprotnog događaja

Pri računanju vjerojatnosti često se koristi vjerojatnost suprotnog događaja. Razlog tome jest da nam je često lakše odrediti vjerojatnost suprotnog događaja nego onog traženog, no, uz jednostavnu formulu koja ih povezuje, lako možemo vjerojatnost jednoga odrediti pomoću drugoga. U nastavku je definicija suprotnog događaja i dokaz za formulu koja ih povezuje. Ovaj se jednostavan dokaz pojavljuje i u srednjoškolskoj nastavi vjerojatnosti.

Propozicija 4.3.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *dani vjerojatnosni prostor i* $A \in \mathcal{F}$ *događaj. Kažemo da je suprotni događaj događaju* A *njegov komplement, odnosno događaj* A^c*. Vrijedi:*

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Dokaz. Znamo da je $\Omega = A \cup A^c$ te da vrijedi $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Sada slijedi:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

□

Aktivnost 3. ***Bacanje kockice***

Cilj: otkriti izraz za vjerojatnost suprotnog događaja
Nastavni oblik: rad u paru
Nastavna metoda: heuristička nastava
Potrebni materijal: nastavni listić s uputama, igraća kockica za svakog učenika
Tijek aktivnosti:
Učenici su podijeljeni u parove. Svaki učenik igraću kockicu baca 10 puta te oba učenika bilježe rezultat u tablicu. Potom određuju relativnu frenkvenciju pojavljivanja parnog, odnosno neparnog broja. Zajedno rješavaju preostale zadatke i izvode zaključke vezane uz vjerojatnost suprotnog događaja.
Nastavni listić:

1. Igraću kockicu baci 10 puta i rezultat bacanja upiši u prvi stupac donje tablice. Nakon što je to učinio i tvoj par, njegove rezultate unesi u četvrti stupac donje tablice.

rezultat bacanja	paran	neparan	rezultat bacanja	paran	neparan
zbroj			zbroj		

2. U drugi, odnosno treći stupac zapiši 0 ili 1 ovisno o istinitosti tvrdnje (0 za laž, a 1 za istinu). Isto ponovi i za zadnja tri stupca. Potom u zadnjem retku zbroji koliko jedinica ima u drugom, odnosno u trećemu stupcu te u petome, odnosno šestome stupcu. Na ovaj način dobio/la si koliko je puta pao paran, odnosno neparan broj.

3. Na temelju rezultata u tablici za svoja bacanja i bacanja tvojega para, odredi sljedeće vjerojatnosti (zapiši ih u obliku decimalnog broja):

$P(\{\text{pao je paran broj}\}) = \boxed{}$
$P(\{\text{pao je neparan broj}\}) = \boxed{}$
$P(\{\text{pao je paran broj}\}) + P(\{\text{pao je neparan broj}\}) = \boxed{}$

4. Kakvi su međusobno događaji: {pao je neparan broj} i {pao je paran broj}?

5. Ukoliko uvedemo sljedeće oznake: $A = \{\text{pao je neparan broj}\}$ i $B = \{\text{pao je paran broj}\}$, kakvi su međusobno skupovi A i B? Prikaži ove skupove na skupu Ω koji je prostor elementarnih događaja.

6. Usporedite rješenja 3. i 4. i 5. zadatka te posebno obratite pozornost na zbroj vjerojatnosti danih događaja. Što primjećujete? Zapišite svoj zaključak primjerenim matematičkim jezikom. Vrijedi li vaš zaključak i općenito? Dokaži.

Primjer riješenog listića:

1. Igraću kockicu baci 10 puta i rezultat bacanja upiši u prvi stupac donje tablice. Nakon što je to učinio i tvoj par, njegove rezultate unesi u četvrti stupac donje tablice.

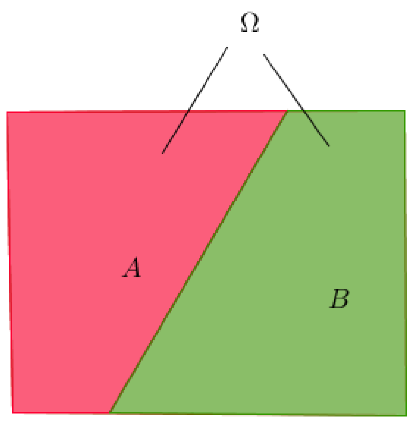
rezultat bacanja	paran	neparan	rezultat bacanja	paran	neparan
4	1	0	5	0	1
2	1	0	4	1	0
6	1	0	3	0	1
2	1	0	2	1	0
6	1	0	6	1	0
4	1	0	4	1	0
4	1	0	5	0	1
6	1	0	6	1	0
4	1	0	4	1	0
5	0	1	2	1	0
zbroj	9	1	zbroj	7	3

2. U drugi, odnosno treći stupac zapiši 0 ili 1 ovisno o istinitosti tvrdnje (0 za laž, a 1 za istinu). Isto ponovi i za zadnja tri stupca. Potom u zadnjem retku zbroji koliko jedinica ima u drugom, odnosno u trećemu stupcu te u petome, odnosno šestome stupcu. Na ovaj način dobio/la si koliko je puta pao paran, odnosno neparan broj.

3. Na temelju rezultata u tablici za svoja bacanja i bacanja tvojega para, odredi sljedeće vjerojatnosti (zapiši ih u obliku decimalnog broja):
   $P(\{\text{pao je paran broj}\}) = \boxed{0.8}$
   $P(\{\text{pao je neparan broj}\}) = \boxed{0.2}$
   $P(\{\text{pao je paran broj}\}) + P(\{\text{pao je neparan broj}\}) = \boxed{1}$

4. Kakvi su međusobno događaji: {pao je neparan broj} i {pao je paran broj}?
   Ovi događaji su disjunktni / međusobno se isključuju / suprotni su.

5. Ukoliko uvedemo sljedeće oznake: A = {pao je neparan broj} i B = {pao je paran broj}, kakvi su međusobno skupovi A i B? Prikaži ove skupove na skupu Ω koji je prostor elementarnih događaja.
   Skupovi A i B su disjunktni.



Slika 4.1: Skupovni prikaz

6. Usporedite rješenja 3. i 4. i 5. zadatka te posebno obratite pozornost na zbroj vjerojatnosti danih događaja. Što primjećujete? Zapišite svoj zaključak primjerenim

matematičkim jezikom. Vrijedi li vaš zaključak i općenito? Dokaži.
Za događaj A i njemu suprotni događaj A^c vrijedi:

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Znamo da je $\Omega = A \cap A^c$ i da vrijedi $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Slijedi:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Kutak za nastavnike:
U ovoj aktivnosti učenici će povezati algebru događaja sa skupovima te će primjenjujući skupovni prikaz Vennovim dijagramima doći do zaključka da je zbroj vjerojatnosti nekog događaja i njemu suprotnog događaja jednaka 1.

4.4 Geometrijska vjerojatnost

U nastavi vjerojatnosti susrećemo se i s problemima slučajnih odabira točke na nekom intervalu ili odabira slučajne točke unutar nekog geometrijskog lika ili geometrijskog tijela. Ovakve probleme rješavamo pomoću geometrijske vjerojatnosti. Stroga matematička definicija dana je u nastavku.

Definicija 4.4.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$ ograničen, izmjeriv skup i $m(\Omega) < +\infty$ gdje je m geometrijska mjera (za $n = 1$ duljina, za $n = 2$ površina i za $n = 3$ volumen). Neka vrijedi $m(\Omega) > 0$. Neka je događaj $A \subset \Omega$ izbor točke iz skupa A.*
Geometrijska vjerojatnost događaja A je broj

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Napomena 4.4.2. *U redovnoj nastavi, naravno, ne spominjemo pojam izmjerivog prostora, no učenicima je intuitivno jasno da je duljina jednodimenzionalna mjera, površina dvodimenzionalna, a volumen trodimenzionalna. Osim toga, prirodno je učenicima jasno da je ova definicija vjerojatnosti prikladna za probleme s kojima se oni susreću.*

Aktivnost 4.

Cilj: otkriti izraz za geometrijsku vjerojatnost
Nastavni oblik: rad u grupi
Nastavna metoda: heuristička metoda
Potrebni materijal: poklopac Nutelle, čepovi različitih radijusa (na primjer Jana, Nestie),

sitne konfete (na primjer papirići koji su otpad bušilice za papir), nastavni listić sa zadacima

Tijek aktivnosti:

Učenici su podijeljeni u šest četveročlanih skupina. Tri i tri skupine imaju iste modele (čepovi iste veličine) čiji vanjski izgled možemo vidjeti na 4.2. Na slikama 4.3 i 4.4 prikazani su različiti modeli ovisno o veličini čepa.

Slika 4.2: Prikaz modela

Slika 4.3: Model sa širim čepom

Slika 4.4: Model s užim čepom

Tijekom prvog dijela aktivnosti učenici rješavaju zadatke "*kod kuće*". Unutar skupine svaki od učenika deset puta ubaci konfete u poklopac, a svi učenici u skupini zapisuju koliko je od 20 konfeta upalo u čep. Prikaz eksperimanta možemo vidjeti na slikama 4.5 i 4.6.

Slika 4.5: Model s užim čepom nakon ubacivanja konfeta

Slika 4.6: Model sa širim čepom nakon ubacivanja konfeta

Nakon što su riješili zadatke ”*kod kuće*”, učenici se pregrupiraju tako da načine četiri šesteročlane skupine i da je u svakoj skupini zastupljen po jedan učenik iz inicijalnih skupina. Potom učenici rješavaju zadatke ”*u gostima*”. Nakon što su razmijenili informacije ”*u gostima*”, učenici se ponovno vraćaju u inicijalne skupine i donose zaključke.

Nastavni listić:

KOD KUĆE

1. Svaki član grupe neka deset puta ubaci konfete u poklopac. Svi zapisujte koliko je konfeta u pojedinom bacanju upalo u manji čep (poslužite se donjom tablicom).

bacanje	konfete	bacanje	konfete	bacanje	konfete	bacanje	konfete
1.		11.		21.		31.	
2.		12.		22.		32.	
3.		13.		23.		33.	
4.		14.		24.		34.	
5.		15.		25.		35.	
6.		16.		26.		36.	
7.		17.		27.		37.	
8.		18.		28.		38.	
9.		19.		29.		39.	
10.		20.		30.		40.	
zbroj		zbroj		zbroj		zbroj	

2. Odredite relativnu frekvenciju pojavljivanja konfeta unutar manjeg čepa:

ukupan broj konfeta unutar manjeg čepa	
ukupan broj bačenih konfeta	
relativna frekvencija	

U GOSTIMA

1. S kolegama koji su imali model istih dimenzija usporedi rezultat te na temelju vaših podataka odredite relativnu frekvenciju:

ukupan broj konfeta unutar manjeg čepa	
ukupan broj bačenih konfeta	
relativna frekvencija	

2. Konzultirajući se međusobno, unesite podatke za različite modele:

	prvi model	drugi model
polumjer poklopca		
polumjer čepa		
površina poklopca		
površina čepa		
omjer površine čepa i površine poklopca		
relativna frekvencija pojave konfeta u modelu		

KOD KUĆE

1. Usporedite omjere površina čepa i poklopca te relativne frekvencije. Uočavate li kakvu povezanost? Smanjuje li se ili povećava vjerojatnost da je konfeta pala u čep ukoliko se povećava polumjer čepa? Što zaključujete o vezi relativnih frekvencija i omjera površina čepa i poklopca?

2. Kako bi glasilo općenito pravilo za određivanje vjerojatnosti slučajnog odabira točke unutar geometrijskog lika određene površine koji se nalazi unutar nekog većeg geometrijskog lika?

Primjer riješenog listića:

KOD KUĆE

1. Svaki član grupe neka deset puta ubaci konfete u poklopac. Svi zapisujte koliko je konfeta u pojedinom bacanju upalo u manji čep (poslužite se donjom tablicom).

bacanje	konfete	bacanje	konfete	bacanje	konfete	bacanje	konfete
1.	5	11.	4	21.	7	31.	10
2.	10	12.	13	22.	6	32.	6
3.	7	13.	1	23.	5	33.	2
4.	9	14.	10	24.	2	34.	5
5.	10	15.	9	25.	6	35.	3
6.	13	16.	2	26.	1	36.	4
7.	1	17.	3	27.	3	37.	1
8.	11	18.	1	28.	5	38.	2
9.	8	19.	5	29.	2	39.	4
10.	2	20.	12	30.	4	40.	5
zbroj	76	zbroj	60	zbroj	41	zbroj	42

2. Odredite relativnu frekvenciju pojavljivanja konfeta unutar čepa:

ukupan broj konfeta unutar čepa	219
ukupan broj bačenih konfeta	800
relativna frekvencija	$\frac{219}{800} = 0.27375$

U GOSTIMA

1. S kolegama koji su imali model istih dimenzija usporedi rezultat te na temelju vaših podataka odredite relativnu frekvenciju:

ukupan broj konfeta unutar manjeg čepa	630
ukupan broj bačenih konfeta	2 400
relativna frekvencija	$\frac{630}{2\ 400} = 0.2625$

2. Konzultirajući se međusobno, unesite podatke za različite modele:

	prvi model	drugi model
polumjer poklopca	4 cm	4 cm
polumjer čepa	2 cm	1.5 cm
površina poklopca	16 cm^2	16 cm^2
površina čepa	4 cm^2	2.25 cm^2
omjer površine čepa i površine poklopca	$\frac{1}{4}\ \text{cm}^2 = 0.25\ \text{cm}^2$	$\frac{2.25}{16}\ \text{cm}^2 \approx 0.141\ \text{cm}^2$
relativna frekvencija pojave konfeta u modelu	0.2625	0.153

KOD KUĆE

1. Usporedite omjere površina čepa i poklopca te relativne frekvencije. Uočavate li kakvu povezanost? Smanjuje li se ili povećava vjerojatnost da je konfeta pala u čep ukoliko se povećava polumjer čepa? Što zaključujete o vezi relativnih frekvencija i omjera površina čepa i poklopca?

   Povećanjem polumjera čepa povećala se i vjerojatnost da je konfeta pala u čep. Uočavamo da je omjer površina čepa i poklopca približno jednak relativnoj frekvenciji.

2. Kako bi glasilo općenito pravilo za određivanje vjerojatnosti slučajnog odabira točke unutar geometrijskog lika određene površine koji se nalazi unuat nekog većeg geometrijskog lika?

   $$\mathbb{P} = \frac{A(\text{manji lik})}{A(\text{veći lik})},$$

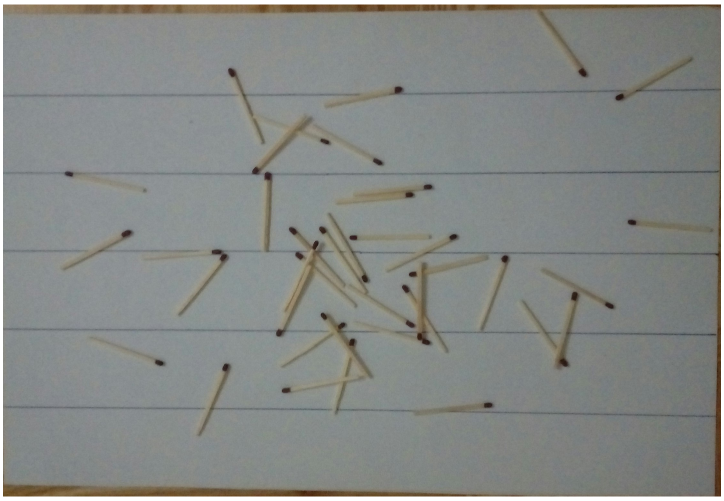
   gdje A označava površinu lika.

Kutak za nastavnike:
U ovoj aktivnosti učenici mogu pomoću konkretnog eksperimenta potvrditi intuitivnu pretpostavku da se vjerojatnost može odrediti pomoću omjera površina likova. Možda kod nekih grupa ekperiment neće pokazati veliku povezanost omjera površina i relativne frekvencije, no nakon aktivnosti u zajedničkom razgovoru i donošenju službenih zaključaka, nastavnik može skiciranjem likova naglasiti utjecaj površina likova na određivanje vjerojatnosti.
Također, lakši razmještaj učenika po grupama možemo učiniti tako da svakome učeniku podijelimo listić s oznakama A1, A2, ... , A6, B1, ... , B6, ... , D6 te ih prvo grupirati po brojevima ("kod kuće"), a zatim po slovima ("u gostima") i na kraju opet po brojevima ("kod kuće").

Aktivnost 5. ***Buffonov pokus***

Cilj: otkriti povezanost geometrijske vjerojatnosti i broja π; primijeniti geometrijsku vjerojatnost na konkretnom eksperimentu
Nastavni oblik: rad u grupi
Nastavna metoda: heuristička metoda
Potrebni materijal: kutija šibica, list $A3$ papira s paralelnim prugama, nastavni listić
Tijek aktivnosti:
Učenici u parovima provode eksperiment deset puta. Na udaljenosti od pedesetak centimetara od papira iz ruku ispuste kutiju šibica te prebrojavaju koliko je šibica palo na papir tako da sijeku jednu od paralelnih crta na papiru kao što je prikazano na slici 4.7. Budući da je ova aktivnost zamišljena poput projekta u kojem bi sudjelovali učenici iz nekoliko

razreda, nakon provođenja eksperimenta u svim razredima, učenici mogu zajedno obraditi dobivene podatke te donijeti zaključke popunjavajući nastavni listić. Također, ukoliko u učionici postoji mogućnost korištenja tehnologije za svaki par učenika, učenici mogu unositi svoje rezultate u pripravljenu datoteku koja je dostupna svima i tako olakšati unos svih podataka. Više o tome u poglavlju o ulozi tehnologije.



Slika 4.7: Buffonov pokus

Nastavni listić:

1. Na udaljenosti pedesetak centimetara od papira ispustite šibice (40 komada) i prebrojite koliko je šibica palo na papir tako da siječe neku od paralelnih crta i taj broj zapišite u donju tablicu. Pokus ponovite deset puta.

broj bacanja	broj šibica koje sijeku jednu od linija
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	

2. Nakon prikupljenih i obrađenih svih podataka, odredite:

$$\mathbb{P} = \frac{\text{broj šibica koje sijeku crtu}}{\text{ukupan broj bačenih šibica}} = \boxed{\frac{\quad}{\quad}} \approx \boxed{\quad}$$

3. Koristeći se gore izračunatom vjerojatnošću odredite vrijednst donjeg izraza i procijenite kojem broju je bliska vrijednost ovog izraza:

$$\frac{2}{\mathbb{P}} = \boxed{\frac{\quad}{\quad}} \approx \boxed{\quad}$$

Primjer riješenog listića:

1. Na udaljenosti pedesetak centimetara od papira ispustite šibice (40 komada) i prebrojite koliko je šibica palo na papir tako da siječe neku od paralelnih crta i taj broj zapišite u donju tablicu. Pokus ponovite deset puta.

broj bacanja	broj šibica koje sijeku jednu od linija
1.	24
2.	21
3.	26
4.	23
5.	22
6.	23
7.	26
8.	25
9.	27
10.	26

2. Nakon prikupljenih i obrađenih svih podataka, odredite:

$$\mathbb{P} = \frac{\text{broj šibica koje sijeku crtu}}{\text{ukupan broj bačenih šibica}} = \boxed{\frac{13\,207}{20\,800}} \approx \boxed{0.63495}$$

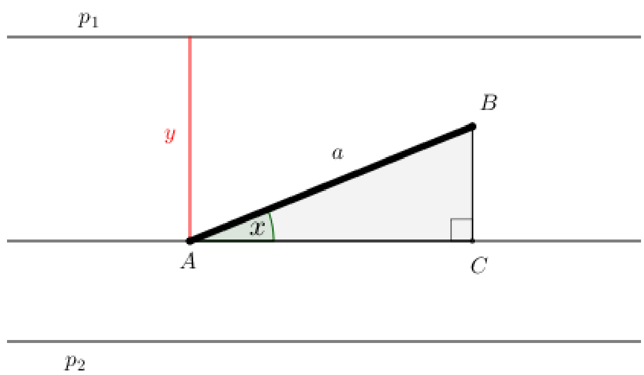
3. Koristeći se gore izračunatom vjerojatnošću odredite vrijednst donjeg izraza i procijenite kojem broju je bliska vrijednost ovog izraza

$$\frac{2}{\mathbb{P}} = \boxed{\frac{2}{0.63495}} \approx \boxed{3.1498}$$

Ovaj je broj blizak broju π.

Kutak za nastavnike:
Dokaz ove otkrivene činjenice je vrlo jednostavan, stoga se može provesti i u redovnoj nastavi prema [3]. Međutim, treba imati na umu da se u jednom koraku dokaza koristi integral za određivanje površine, stoga je potrebno ili tu informaciju o površini uzeti kao činjenicu i naglasiti učenicima da je to sadržaj koji će uskoro raditi na matematici ili ovu aktivnost napraviti pri kraju školske godine kao sintezu područja vjerojatnosti, integrala i geometrije.

Dokaz. Kao što smo proveli i u našem eksperimentu, uzet ćemo šibicu duljine a koja je jednaka razmaku paralelnih crta na papiru na koji smo bacali šibice (za različite duljine razmaka i šibica dokaz bi se proveo analogno). Označimo krajnje točke šibice sa A i B. Dakle, tražimo vjerojatnost da je šibica presjekla jedan pravac (koji predstavlja paralelne crte na našem papiru) iz skupa svih paralelnih pravaca ravnine s međusobnim razmakom a.



Slika 4.8: Prikaz jedne pruge i šibice

Šibica se očito nalazi unutar jedne pruge, odnosno među dvama paralelnim pravcima ili siječe jedan pravac (uočimo da šibica može sjeći samo jedan pravac, a ne više njih). Bez smanjenja općenitosti možemo promatrati siječe li šibica pravac p_1 ili pravac p_2, no na kraju ćemo samo udvostručiti dobivenu vjerojatnost (jer ona može pasti ili na jedan ili na drugi pravac). Također, uočimo da nam je dovoljno promatrati jednu prugu određenu pravcima p_1 i p_2 kako bismo odredili vjerojatnost jer se na ostalim prugama situacija ponavlja. Promotrimo jedan općeniti položaj šibice s pripadnim oznakama kao što je prikazano na slici 4.8.

Hoće li šibica sjeći pravac p_1 ovisit će o dvjema stvarima: udaljenosti y točke A do pravca

p_1, te o kutu x između šibice i paralele s pravcima kroz točku A, kao što je označeno na slici 4.8. Očito su ove dvije veličine međusobno neovisne i sve moguće vrijednosti za x i y jednako su vjerojatne.

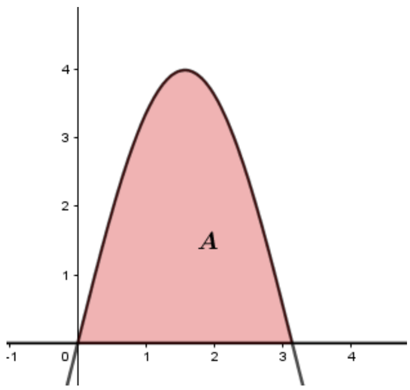
Kako nas zanima presjek šibice i pravca p_1, očito se kut x nalazi u intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Osim toga, da bi šibica presjekla pravac p_1 mora vrijediti $y < |BC|$. Iz pravokutnog tokuta ABC slijedi:

$$\sin x = \frac{|BC|}{a} \Rightarrow |BC| = a \sin x$$

Odnosno, mora vrijediti $y < a \sin x$. Dakle, položaj šibice ovisi o dvjema veličinama x i y koje možemo promatrati u obliku uređenoga para (x, y). Ukoliko uvedemo oznake $A = \{$šibica je pala preko gornjeg pravca$p_1\}$, $\Omega = \{$svi mogući položaji šibice unutar pruge$\}$, možemo uočiti:

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq a,\ y < a \sin x\}$$

$$\Omega = \{(x, y) : -\pi \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq a\}$$

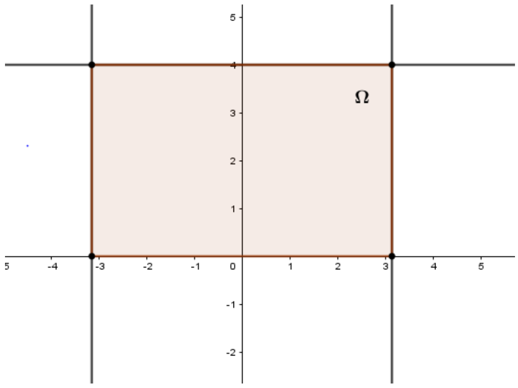


Slika 4.9: Područje skupa A

Sada je tražena vjerojatnost jednaka omjeru površina skupova A i Ω. Slika 4.9 prikazuje skup A, a slika 4.10 skup Ω te lako određujemo:

$$m(A) = \int_0^\pi a \sin x dx = -a \cos \pi + a \cos 0 = 2a$$

$$m(\Omega) = 2 \cdot \pi \cdot a$$



Slika 4.10: Područje skupa Ω

Odnosno, vjerojatnost da šibica siječe pravac p_1 iznosi

$$\frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2a}{2\pi a} = \frac{1}{\pi},$$

a vjerojatnost da siječe pravac p_1 ili p_2 dvostruko je veća i iznosi

$$\frac{2}{\pi} \approx 0.636619$$

Ukoliko vjerojatnost izrazimo pomoću relativnih frekvencija te ju izjednačimo s geometrijskom vjerojatnošću, dobivamo vrijednost broja π:

$$\frac{\text{broj šibica koje sijeku pravac}}{\text{broj svih šibica}} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \pi = \frac{2 \cdot \text{broj svih šibica}}{\text{broj svih šibica koje sijeku pravac}}$$

□

4.5 Uvjetna vjerojatnost

U visokoškolskoj matematici definira se uvjetna vjerojatnost te se potom njezina definicija koristi pri rješavanju zadataka.

Definicija 4.5.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost događaja A uz dano B definira se formulom*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Uočimo da iz dane definicije odmah slijedi:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$$

U srednjoj se školi uvjetna vjerojatnost, također, definira te se potom ta definicija koristi pri analizi i rješavanju zadataka i problema. Međutim, smisao definicije možemo objasniti različitim aktivnostima koje na konkretnim primjerima učenicima mogu približiti teoriju te pomoći u shvaćanju teorijske pozadine. Stoga, sljedeća aktivnost vodi učenike u otkrivanju uvjetne vjerojatnosti.

Aktivnost 6. ***Monty Hall problem***

Cilj: otkriti formulu za uvjetnu vjerojatnost
Nastavni oblik: rad u grupi
Nastavna metoda: heuristička metoda
Potrebni materijal: tri neprozirne plastične čaše, Kiki bombon, nastavni listić
Tijek aktivnosti:
Učenici su podijeljeni u četveročlane skupine. Jedan od članova skupine je voditelj igre, dva su igrača, a jedan je zapisničar. Igraju igru analognu onoj kod Monty Hall problema, samo što imaju tri plastične čaše i jedan bombon. Nakon što su proučili pravila igre, bilježe svoje pretpostavke o utjecaju mijenjanja mišljenja na rezultat igre. Potom prvi igrač igra igru 20 puta, a nakon njega drugi igrač igra igru 20 puta. Za to vrijeme, zapisničar bilježi rezultate igre. Nakon toga, učenici analiziraju rezultate igre i uspoređuju ih sa svojom pretpostavkom te određuju vjerojatnost pobjede ukoliko se mijenja mišljenje i ukoliko se ne mijenja. U nastavku rješavanja zadataka s listića učenici se upoznaju s vjerojatnosnim stablom i uvjetnom vjerojatnosti te otkrivaju definiciju uvjetne vjerojatnosti.
Nastavni listić:

1. Prije početka igre, podijelite uloge. Jedan učenik neka bude voditelj, dva učenika neka budu igrači te jedan član skupine neka bude zapisničar rezultata igre.
   Igra se igra na način da voditelj stavi bombon ispod jedne od čaša tako da igrač koji igra igru ne vidi ispod koje je čaše bombon. Potom igrač predlaže čašu za koju misli da se u njoj nalazi bombon. Nakon njegova prijedloga, voditelj, od preostale dvije čaše okreće jednu koja je prazna i pokazuje kako u njoj nije bombon te pita igrača želi li promijeniti mišljenje i opredijeliti se za treću preostalu čašu ili ostaje pri svojemu mišljenju.
   Mislite li da će vjerojatnost za pobjedu biti veća ukoliko igrač promijeni mišljenje ili će ona biti manja ili promjena mišljenja ne utječe na vjerojatnost pobjede?

2. Neka igru odigra 1. igrač, a zapisničar neka bilježi rezultate igre (stavlja "plus" u onaj stupac za koji je igrač ostvario pobjedu, odnosno "minus" u onaj stupac za koji je igrač ostvario gubitak)

	ostanak pri mišljenju	promjena mišljenja
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		
16.		
17.		
18.		
19.		
20.		

3. Neka igru odigra 2. igrač, a zapisničar neka bilježi rezultate igre (stavlja "plus" u onaj stupac za koji je igrač ostvario pobjedu, odnosno "minus" u onaj stupac za koji je igrač ostvario gubitak)

	ostanak pri mišljenju	promjena mišljenja
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		
16.		
17.		
18.		
19.		
20.		

4. Pomoću dobivenih rezultata, odredite vjerojatnost za pobjedu ukoliko igrač ne mijenja mišljenje i vjerojatnost za pobjedu ukoliko igrač mijenja mišljenje (uzmite u obzir rezultate obaju igrača):

   $\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu uz uvjet da nije mijenjao mišljenje}\}) =$

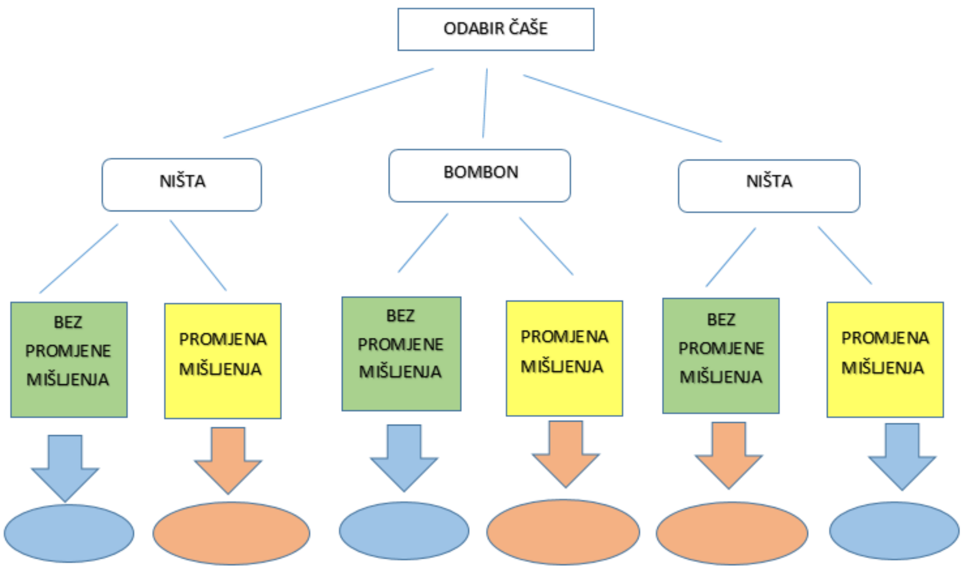
   $$= \frac{\text{broj igri u kojima je pobijedio i nije promijenio mišljenje}}{\text{broj igri u kojima nije promijenio mišljenje}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

   $\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu uz uvjet da je mijenjao mišljenje}\}) =$

   $$= \frac{\text{broj igri u kojima je pobijedio i mijenjao mišljenje}}{\text{broj igri u kojima je mijenjao mišljenje}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

5. Usporedite dobivene vjerojatnosti iz četvrtog zadatka s vašom pretpostavkom u prvom zadatku.

6. Rezultati koje ste dobili su eksperimentalne prirode, promotrimo teorijsku pozadinu ovih vjerojatnosti. Popunite donji redak sheme tako da napišete što bi osvojio igrač kada bio odigrao na određeni način (popunite riječima "ništa" ili "bombon").



7. Služeći se prethodnom shemom odredite:
$\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu uz uvjet da nije mijenjao mišljenje}\}) =$

$$= \frac{\text{broj ishoda u kojima je pobijedio i nije promijenio mišljenje}}{\text{broj ishoda u kojima nije promijenio mišljenje}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu uz uvjet da je mijenjao mišljenje}\}) =$

$$= \frac{\text{broj ishoda u kojima je pobijedio i mijenjao mišljenje}}{\text{broj ishoda u kojima je mijenjao mišljenje}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

Što uočavaš? Koja je vjerojatnost veća? Usporedi ove izračunate vjerojatnosti sa svojom pretpostavkom iz prvog zadatka.

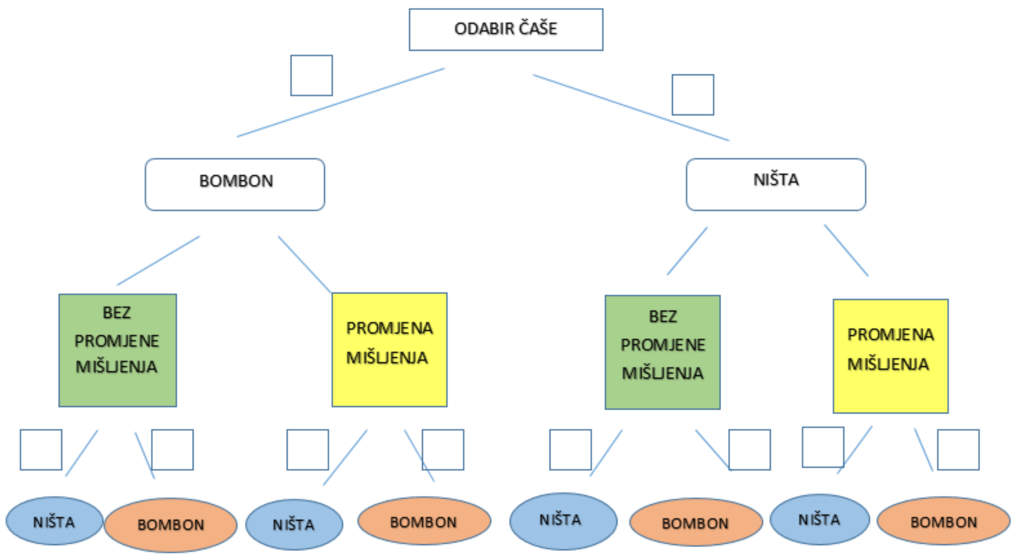
8. Služeći se shemom izračunajte:

$$\frac{\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu i nije mijenjao mišljenje}\})}{\mathbb{P}(\{\text{igrač nije mijenjao mišljenje}\})} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$\frac{\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu i mijenjao je mišljenje}\})}{\mathbb{P}(\{\text{igrač je mijenjao mišljenje}\})} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

9. Uvedimo sljedeće oznake:
   A = {igrač je pobijedio}, B = {igrač je promijenio mišljenje},
   B^c = {igrač nije promijenio mišljenje},
   $(A|B)$ = {igrač je pobijedio uz uvjet da je promijenio mišljenje},
   $(A|B^c)$ = {igrač je pobijedio uz uvjet da nije promijenio mišljenje}.
   Usporedite rješenja sedmog i osmog zadatka te donesite zaključke i zapišite ih ispravnim matematičkim jezikom.

10. Sljedeća shema prikazuje sve mogućnosti koje se mogu dogoditi pri igranju ove igre. U prazne kvadratiće napišite kolika je vjerojatnost za pojedini ishod kako biste dobili sistematičan prikaz svih mogućnosti i pripadnih vjerojatnosti.



Primjer riješenog listića:

1. Prije početka igre, podijelite uloge. Jedan učenik neka bude voditelj, dva učenika neka budu igrači te jedan član skupine neka bude zapisničar rezultata igre.
   Igra se igra na način da voditelj stavi bombon ispod jedne od čaša tako da igrač koji igra igru ne vidi ispod koje je čaše bombon. Potom igrač predlaže čašu za koju misli da se u njoj nalazi bombon. Nakon njegova prijedloga, voditelj, od preostale dvije čaše okreće jednu koja je prazna i pokazuje kako u njoj nije bombon te pita igrača želi li promijeniti mišljenje i opredijeliti se za treću preostalu čašu ili ostaje pri svojemu mišljenju.
   Mislite li da će vjerojatnost za pobjedu biti veća ukoliko igrač promijeni mišljenje ili će ona biti manja ili promjena mišljenja ne utječe na vjerojatnost pobjede?
   Otvaranje jedne od čaša će utjecati na mišljenje igrača, no mislim da promjena mišljenja ne utječe na vjerojatnost pobjede.

2. Neka igru odigra 1. igrač, a zapisničar neka bilježi rezultate igre (stavlja "plus" u onaj stupac za koji je igrač ostvario pobjedu, odnosno "minus" u onaj stupac za koji je igrač ostvario gubitak)

	ostanak pri mišljenju	promjena mišljenja
1.		-
2.	-	
3.	+	
4.	+	
5.	+	
6.	+	
7.	+	
8.	-	
9.	-	
10.	+	
11.		+
12.		+
13.	-	
14.		+
15.		+
16.	+	
17.		+
18.		+
19.	+	
20.	+	

3. Neka igru odigra 2. igrač, a zapisničar neka bilježi rezultate igre (stavlja "plus" u onaj stupac za koji je igrač ostvario pobjedu, odnosno "minus" u onaj stupac za koji je igrač ostvario gubitak)

	ostanak pri mišljenju	promjena mišljenja
1.	+	
2.	-	
3.	-	
4.		+
5.		+
6.	-	
7.	-	
8.		+
9.	-	
10.		-
11.		+
12.		-
13.		+
14.	+	
15.	+	
16.	-	
17.		+
18.	+	
19.	-	
20.	-	

4. Pomoću dobivenih rezultata, odredite vjerojatnost za pobjedu ukoliko igrač ne mijenja mišljenje i vjerojatnost za pobjedu ukoliko igrač mijenja mišljenje (uzmite u obzir rezultate obaju igrača):

$\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu uz uvjet da nije mijenjao mišljenje}\}) =$

$$= \frac{\text{broj igri u kojima je pobijedio i nije promijenio mišljenje}}{\text{broj igri u kojima nije promijenio mišljenje}} = \boxed{\frac{13}{25}} = \boxed{0.52}$$

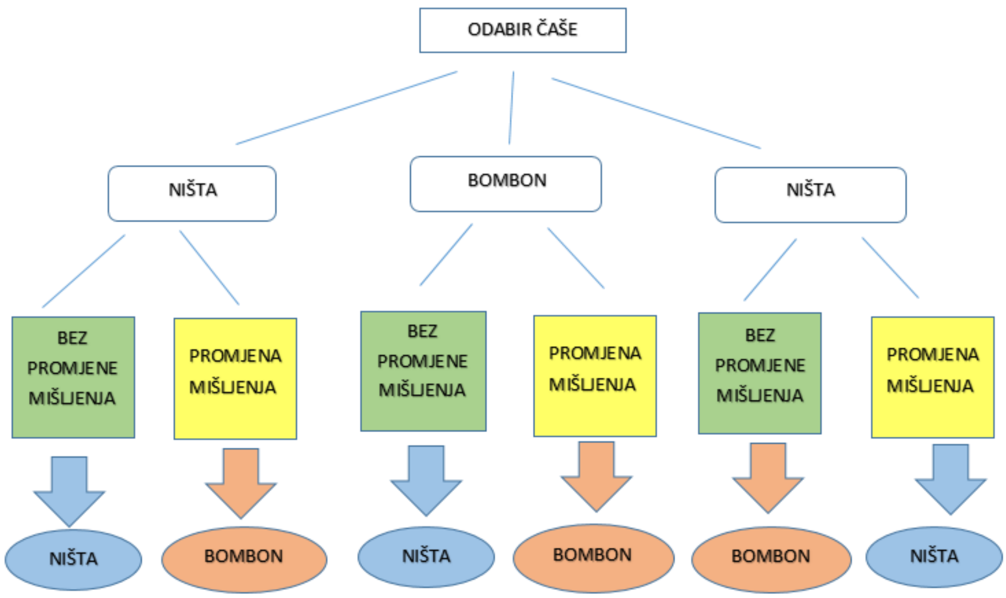
$\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu uz uvjet da je mijenjao mišljenje}\}) =$

$$= \frac{\text{broj igri u kojima je pobijedio i mijenjao mišljenje}}{\text{broj igri u kojima je mijenjao mišljenje}} = \boxed{\frac{12}{15}} = \boxed{0.8}$$

5. Usporedite dobivene vjerojatnosti iz četvrtog zadatka s vašom pretpostavkom u prvom zadatku.

   Vjerojatnost pobjede je izrazito veća pod uvjetom da je igrač promijenio mišljenje nego kada nije promijenio mišljenje. Dobivene vrijednosti nisu u skladu s našom pretpostavkom.

6. Rezultati koje ste dobili su eksperimentalne prirode, promotrimo teorijsku pozadinu ovih vjerojatnosti. Popunite donji redak sheme tako da napišete što bi osvojio igrač kada bio odigrao na određeni način (popunite riječima "ništa" ili "bombon").



7. Služeći se prethodnom shemom odredite:
   $\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu uz uvjet da nije mijenjao mišljenje}\}) =$

   $$= \frac{\text{broj ishoda u kojima je pobijedio i nije promijenio mišljenje}}{\text{broj ishoda u kojima nije promijenio mišljenje}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

   $\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu uz uvjet da je mijenjao mišljenje}\}) =$

   $$= \frac{\text{broj ishoda u kojima je pobijedio i mijenjao mišljenje}}{\text{broj ishoda u kojima je mijenjao mišljenje}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

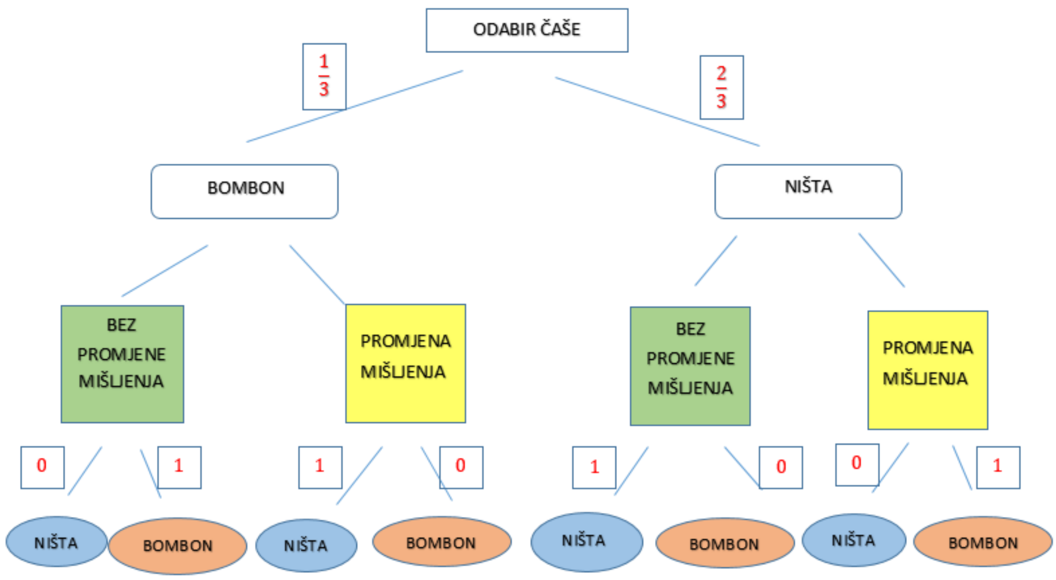
   Što uočavaš? Koja je vjerojatnost veća? Usporedi ove izračunate vjerojatnosti sa

svojom pretpostavkom iz prvog zadatka.
Veća je vjerojatnost pobjede kada igrač mijenja mišljenje. Moja pretpostavka u prvom zadatku je bila kriva.

8. Služeći se shemom izračunajte:
$$\frac{\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu i nije mijenjao mišljenje}\})}{\mathbb{P}(\{\text{igrač nije mijenjao mišljenje}\})} = \boxed{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{\mathbb{P}(\{\text{igrač je ostvario pobjedu i mijenjao je mišljenje}\})}{\mathbb{P}(\{\text{igrač je mijenjao mišljenje}\})} = \boxed{\frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

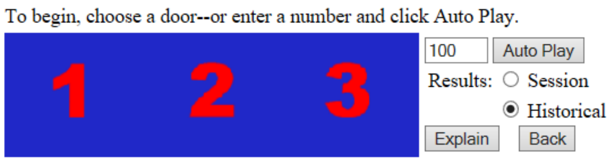
9. Uvedimo sljedeće oznake:
$A = \{\text{igrač je pobijedio}\}$, $B = \{\text{igrač je promijenio mišljenje}\}$,
$B^c = \{\text{igrač nije promijenio mišljenje}\}$,
$(A|B) = \{\text{igrač je pobijedio uz uvjet da je promijenio mišljenje}\}$,
$(A|B^c) = \{\text{igrač je pobijedio uz uvjet da nije promijenio mišljenje}\}$.
Usporedite rješenja sedmog i osmog zadatka te donesite zaključke i zapišite ih ispravnim matematičkim jezikom.
$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, $\mathbb{P}(A|B^c) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)}$

10. Sljedeća shema prikazuje sve mogućnosti koje se mogu dogoditi pri igranju ove igre. U prazne kvadratiće napišite kolika je vjerojatnost za pojedini ishod kako biste dobili sistematičan prikaz svih mogućnosti i pripadnih vjerojatnosti.



Kutak za nastavnike:
Pomoću ove aktivnosti učenici će na konkretnom primjeru te vođeni zadacima uspjeti samostalno otkriti definiciju uvjetne vjerojatnosti te shvatiti zašto takva njezina definicija ima smisla. Osim toga, radeći u skupini, učenici će moći pomoći jedan drugome u zaključivanju i međusobno provjeriti rješenja koja su dobili. Nastavnik, prolazeći razredom, lako može uočiti kako napreduje učenički rad. Zadnji zadatak i grafički prikaz, odnosno vjerojatnosno stablo može biti motivacija za daljni nastavni tijek u kojemu nastavnik može objasniti kako se služimo vjerojatnosnim stablom. Osim toga, punu svrhu vjerojatnosnog stabla učenici će upoznati nakon što otkriju formulu potpune vjerojatnosti.

Također, ova je aktivnost utemeljena na poznatom vjerojatnosnom problemu zvanom Monty Hall. Nastavnik može učenicima opisati tu igru u kojoj se od triju vrata biraju jedna ako znamo da se iza dvaju nalazi koza, a iza jednih automobil. Nakon što natjecatelj odabere vrata, voditelj mu otvara jedna vrata iza kojih je koza i pita ga želi li promijeniti mišljenje. Učenici tako mogu uočiti analogiju ove stvarne igre koja je bila prikazivana na televiziji i eksperimenta koji su proveli. Među matematičarima se razvila rasprava oko toga utječe li promjena mišljenja na vjerojatnost pobjede u igri. Teorijski je pokazano da utječe, a postoje i neke internetske stranice na kojima se ova igra odigrala više od 32 000 000 puta te se tako eksperimentalno pokazalo da teorijski dokaz vrijedi, što je vidljivo na slici 4.11. Ukoliko je u razredu prisutna tehnologija, učenici mogu odigrati nekoliko igara na internetskoj stranici `www.btwaters.com/probab/monty/montmainD.html` i sudjelovati u ovom eksperimentu.



Historical Results:

Action	Cars	Goats
Stay	33.34% (10884809/32644716)	66.66% (21759907/32644716)
Switch	66.68% (21886806/32825225)	33.32% (10938419/32825225)

Expected Results:

Action	Cars	Goats
Stay	33.33% (1/3)	66.67% (2/3)
Switch	66.67% (2/3)	33.33% (1/3)

Slika 4.11: Eksperimentalno rješenje Monty Hall problema

4.6 Formula potpune vjerojatnosti

Formula potpune vjerojatnosti jedna je od najvažnijih, ali i najkorisnijih formula vezanih uz sadržajno područje vjerojatnosti. U srednjoškolskoj nastavi do navedene formule dolazi se na sličan način kao i na visokoškolskoj razini, posebno ukoliko se radi o prirodoslovno-matematičkim gimnazijama i tehničkim školama koje dublje ulaze u temu vjerojatnosti. Svakako, prema novoj kurikularnoj reformi, oni programi koji će imati veći fond sati matematike i moći će sadržajnom području vjerojatnosti detaljnije pristupiti, dublje će razmatrati dokaz formule potpune vjerojatnosti i pristupiti joj na ispravan i precizan matematički način.

Definicija 4.6.1. *Konačna ili prebrojiva familija događaja $(H_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$, u vjerojatnosnom prostoru $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$ je potpun sustav događaja ako vrijedi:*

(i) $H_i \neq \emptyset,\ \forall i \in I;$
(ii) $H_i \cap H_j = \emptyset$ *za sve* $i \neq j,\ i, j \in I;$
(iii) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i = \Omega$

Odnosno, potpun sustav događaja je particija skupa elementarnih događaja Ω*.*

Propozicija 4.6.2. *Neka je $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ potpun sustav događaja. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j).$$

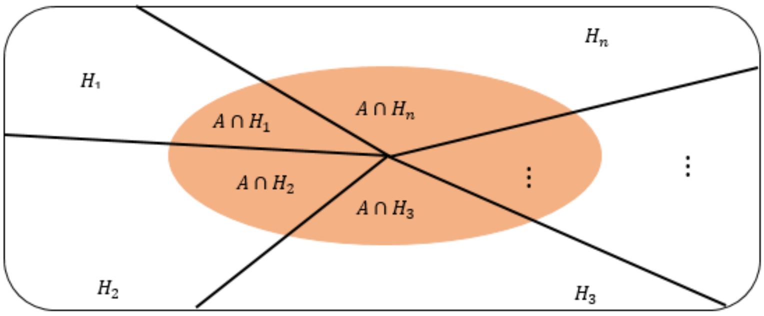
Ovu formulu nazivamo formula potpune vjerojatnosti.

Dokaz.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Big(A \cap H_j\Big)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap H_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)\end{aligned}$$

□

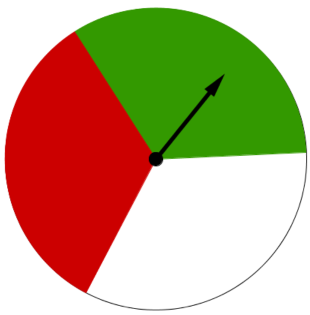
Ukoliko se u nastavi ne obrazloži strogi matematički dokaz (ako se radi o programima koji to ne zahtijevaju), učenicima od velike pomoći može biti grafički prikaz kao što je na slici 4.12. Na taj način mogu usvojiti pojmove potpunog sustava događaja, odnosno vizualno predočiti značenje formule potpune vjerojatnosti.



Slika 4.12: Skupovni prikaz vjerojatnosti događaja A

Aktivnost 7. *Prstna vrtjelica (fidget spinner)*

Cilj: otkriti formulu potpune vjerojatnosti
Nastavni oblik: rad u grupi
Nastavna metoda: heuristička metoda
Potrebni materijal: nastavni listić sa zadacima, model kruga i prstna vrtjelica za svaku skupinu
Tijek aktivnosti:
Učenici su podijeljeni u šesteročlane skupine. Svaki učenik unutar skupine zavrti prstnu vrtjelicu dvaput zaredom te prvi rezultat upisuje u drugi stupac, a drugi u treći stupac. Vrtjelica se nalazi na krugu koji je podijeljen na tri jednaka dijela i obojan trima različitim bojama. Jedan krak vrtjelice označi se strelicom koja služi kao pokazatelj na određenu boju, slika 4.13 prikazuje model. Rješavajući zadatke na nastavnom listiću i izvodeći zaključke, učenici otkrivaju formulu potpune vjerojatnosti.



Slika 4.13: Model vrtjelice

Nastavni listić:

1. Svaki učenik iz skupine neka zavrti prstnu vrtjelicu dva puta zaredom. Boju na koju je pokazala strelica pri prvoj vrtnji zapisuje u drugi stupac, a boju koju je pokazala u drugoj vrtnji u treći. Svi učenici unutar skupine zapisuju sve rezultate.

učenik	1. vrtnja	2.vrtnja
1. učenik		
2. učenik		
3. učenik		
4. učenik		
5. učenik		
6. učenik		

2. Koristeći se podacima iz tablice, odredi vjerojatnost da je pri drugoj vrtnji bila zelena boja (obrati pozornost na kraći zapis):
   $\mathbb{P}(\{\text{u drugoj vrtnji je zelena}\}) = \mathbb{P}(\text{2. je Z}) = \boxed{}$

3. Koristeći se podacima iz tablice, odredi sljedeće vjerojatnosti (obrati pozornost na kraći zapis):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{u drugoj vrtnji je zelena}\}|\{\text{u prvoj vrtnji je crvena}\}) &= \mathbb{P}(\text{2. je Z}|\text{1. je C})\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{\text{2. je Z}\} \cap \{\text{1. je C}\})}{\mathbb{P}(\text{1. je C})} = \boxed{}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\text{1. je C}) = \boxed{}$
$\mathbb{P}(\text{2. je Z}|\text{1. je C}) \cdot \mathbb{P}(\text{1. je C}) = \boxed{}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{u drugoj vrtnji je zelena}\}|\{\text{u prvoj vrtnji je bijela}\}) &= \mathbb{P}(\text{2. je Z}|\text{1. je B})\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{\text{2. je Z}\} \cap \{\text{1. je B}\})}{\mathbb{P}(\text{1. je B})} = \boxed{}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\text{1. je B}) = \boxed{}$
$\mathbb{P}(\text{2. je Z}|\text{1. je B}) \cdot \mathbb{P}(\text{1. je B}) = \boxed{}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{u drugoj vrtnji je zelena}\}|\{\text{u prvoj vrtnji je zelena}\}) &= \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je Z}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{2.\text{ je Z}\}\cap\{1.\text{ je Z}\})}{\mathbb{P}(1.\text{ je Z})} = \boxed{}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(1.\text{ je Z}) = \boxed{}$
$\mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je Z}) \cdot \mathbb{P}(1.\text{ je Z}) = \boxed{}$

4. Koristeći se prethodnim zadatkom, izračunaj:

   $\mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je C})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je C}) + \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je B})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je B}) + \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je Z})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je Z}) =$

   $\boxed{}+\boxed{}+\boxed{}=\boxed{}$

5. Uspoređujući rješenja drugog i četvrtog zadatka donesite zaključak i zapišite ga primjerenim matematičkim jezikom.

Primjer riješenog listića:

1. Svaki učenik iz skupine neka zavrti prstnu vrtjelicu dva puta zaredom. Boju na koju je pokazala strelica pri prvoj vrtnji zapisuje u drugi stupac, a boju koju je pokazala u drugoj vrtnji u treći. Svi učenici unutar skupine zapisuju sve rezultate.

učenik	1. vrtnja	2.vrtnja
1. učenik	crvena	zelena
2. učenik	bijela	crvena
3. učenik	zelena	zelena
4. učenik	bijela	zelena
5. učenik	crvena	zelena
6. učenik	zelena	crvena

2. Koristeći se podacima iz tablice, odredi vjerojatnost da je pri drugoj vrtnji bila zelena boja (obrati pozornost na kraći zapis):
   $\mathbb{P}(\{\text{u drugoj vrtnji je zelena}\}) = \mathbb{P}(2.\text{ je Z}) = \boxed{\frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$

3. Koristeći se podacima iz tablice, odredi sljedeće vjerojatnosti (obrati pozornost na kraći zapis):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{u drugoj vrtnji je zelena}\}|\{\text{u prvoj vrtnji je crvena}\}) &= \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{je C})\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{2.\text{ je Z}\}\cap\{1.\text{ je C}\})}{\mathbb{P}(1.\text{ je C})} = \boxed{1}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(1.\text{ je C}) = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\mathbb{P}(2.\text{ je Z}|\text{ je C})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je C}) = \boxed{1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{u drugoj vrtnji je zelena}\}|\{\text{u prvoj vrtnji je bijela}\}) &= \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je B})\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{2.\text{ je Z}\}\cap\{1.\text{ je B}\})}{\mathbb{P}(1.\text{ je B})} = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(1.\ je\ B) = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je B})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je B}) = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{u drugoj vrtnji je zelena}\}|\{\text{u prvoj vrtnji je zelena}\}) &= \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\ je\ Z)\\ &= \frac{\mathbb{P}(\{2.\text{ je Z}\}\cap\{1.\text{ je Z}\})}{\mathbb{P}(1.\text{ je Z})} = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(1.\text{ je Z}) = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je Z})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je Z}) = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}}$

4. Koristeći se prethodnim zadatkom, izračunaj:

   $\mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je C})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je C}) + \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je B})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je B}) + \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je Z})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je Z}) =$

   $\boxed{\frac{1}{3}}+\boxed{\frac{1}{6}}+\boxed{\frac{1}{6}}=\boxed{\frac{2}{3}}$

5. Uspoređujući rješenja drugog i četvrtog zadatka donesite zaključak i zapišite ga primjerenim matematičkim jezikom.

   $\mathbb{P}(2.\text{ je Z}) = \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je C})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je C}) + \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je B})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je B}) + \mathbb{P}(2.\text{ je Z}|1.\text{ je Z})\cdot\mathbb{P}(1.\text{ je Z})$

Kutak za nastavnike:
Iako je formula potpune vjerojatnosti učenicima i intuitivno jasna, sam njezin zapis nije im lako shvatljiv, posebno ukoliko potpun sustav događaja čine tri ili više događaja i formula postaje složenija. Međutim, skupovnim prikazom i provođenjem eksperimenta kojim učenici otkrivaju ovu formulu, mogu je lakše upamtiti i bolje shvatiti. Nastavnik nakon provođenja ove aktivnosti mora s učenicima donijeti općeniti zaključak i matematičkim jezikom zapisati formulu s općenitim oznakama, odnosno provesti generalizaciju.

4.7 Bayesova formula

Bayesova se formula na jednostavan način izvodi iz već poznate formule za uvjetnu vjerojatnost, stoga njezino dokazivanje ne predstavlja problem u srednjoškolskoj nastavi vjerojatnosti. Međutim, samo poimanje ove formule učenicima može konceptualno biti problem te ju možda neće uvijek moći na ispravan način upotrijebiti pri rješavanju zadataka. Naime, Bayesova formula povezuje vjerojatnost pretpostavke pod uvjetom da se dogodio određeni događaj i zato je taj vremenski nesrazmjer učenicima teško pojmiti. Mi smo naviknuti računati vjerojatnosti događaja onim redom kojim su se odvijali. No, zapravo Bayesova formula ima mnogo primjena u svakodnevici pri računanju nekih demografskih podataka, dijagnosticiranju u medicini, ali i u analizi izbora birača.

Teorem 4.7.1. *Neka je $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$ vrijedi:*

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_j)}.$$

Dokaz. Korištenjem defincije uvjetne vjerojatnosti te formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_j|A) &= \frac{\mathbb{P}(H_j \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}\end{aligned}$$

□

Aktivnost 8. *Vrtjelica i novčići*

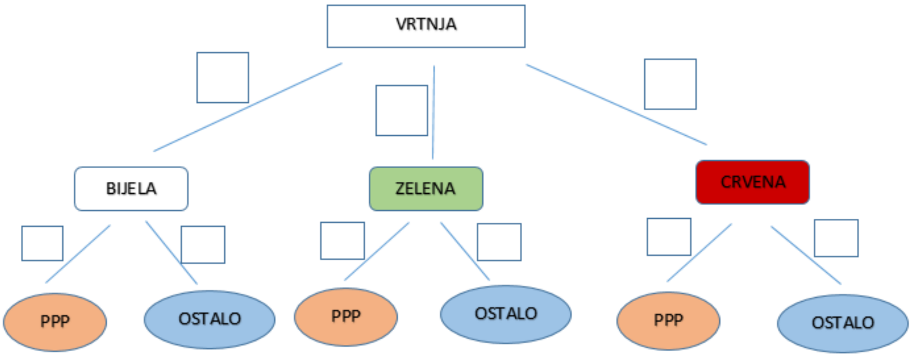
Cilj: otkriti Bayesovu formulu
Nastavni oblik: rad u paru
Nastavna metoda: metoda analize i sinteze

Potrebni materijal: nastavni listić
Tijek aktivnosti:
Učenici u paru rješavaju nastavni listić na način da svatko riješi prvi zadatak te potom zamijene listiće te rješavaju drugi zadatak i ponovno zamijene listiće te ponavljaju postupak sve dok ne riješe sve zadatke. Na ovaj način učenici jedan drugome odmah provjeravaju rješenja jer inače ne mogu riješiti sljedeći zadatak. Rješavajući zadatke učenici otkrivaju Bayesovu formulu kojoj naziv i općenitost daju tek u razgovoru s nastavnikom nakon rješavanja listića.

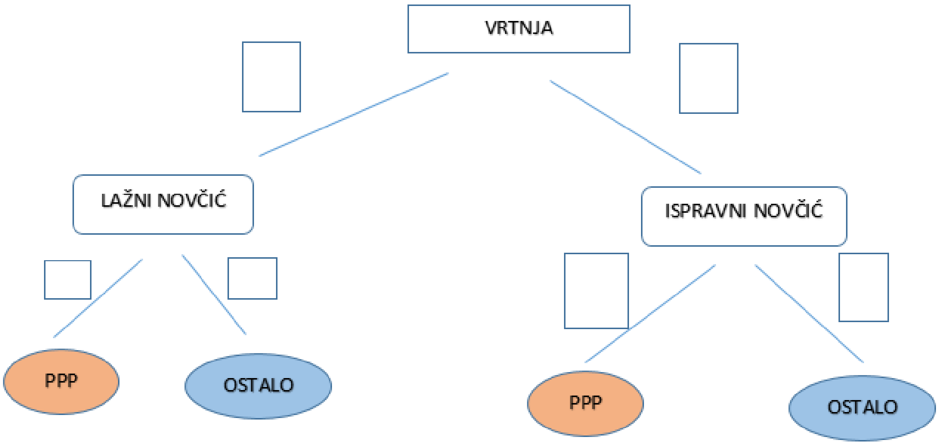
Nastavni listić:
Mariji i Ivanu je bilo dosadno, pa je Ivan Mariji smislio igru s vrtjelicom i novčićima. Igra se igra na sljedeći način:
Onaj koji igra, prvo zavrti vrtjelicu nad krugom koji je podijeljen na tri jednaka dijela i obojan crvenom, zelenom i bijelom bojom. Ako je vrtjelica pokazala na bijelu ili zelenu boju, tada se uzima lažni novčić (to je novčić koji s obje strane ima pismo) i baca se tri puta zaredom. Ako je vrtjelica pokazala na crvenu boju kruga, onda se uzima ispravni novčić (koji ima i pismo i glavu) i baca se tri puta zaredom. Marija je igrala igru po Ivanovim pravilima dok Ivana nije bilo i bacala novčić tri puta zaredom te je svaki put palo pismo. Označimo sa A taj događaj. Zatim je upitala Ivana kolika je vjerojatnost da je vrtjelica pokazala na crvenu boju ako su njoj pala tri pisma. Ivan je zapeo u promišljanju i traži tvoju pomoć.

1. Podijeli vjerojatnosni prostor na potpun sustav događaja (H_1, H_2, ... , H_n) s obzirom na to koju je boju pokazala vrtjelica.
   $H_1 = \{$vrtjelica je pokazala crvenu boju$\}$

2. Vjerojatnosnim stablom prikaži moguće događaje.



3. Sažmi vjerojatnoasno stablo iz prethodnog zadatka pomoću donje sheme.



4. Služeći se vjerojatnosnim stablom, izračunaj $\mathbb{P}(H_i)$ i $\mathbb{P}(A|H_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

5. Služeći se formulom potpune vjerojatnosti, izračunaj $\mathbb{P}(A)$.

6. Koristeći se definicijom uvjetne vjerojatnosti izrazi $\mathbb{P}(H_1|A)$.

7. Upotrijebi komutativnost presjeka dvaju skupova i na drugačiji način zapiši rješenje prethodnog zadatka.

8. U brojniku rješenja prethodnog zadatka ponovno upotrijebi definiciju uvjetne vjerojatnosti, odnosno vjerojatnosti presjeka.

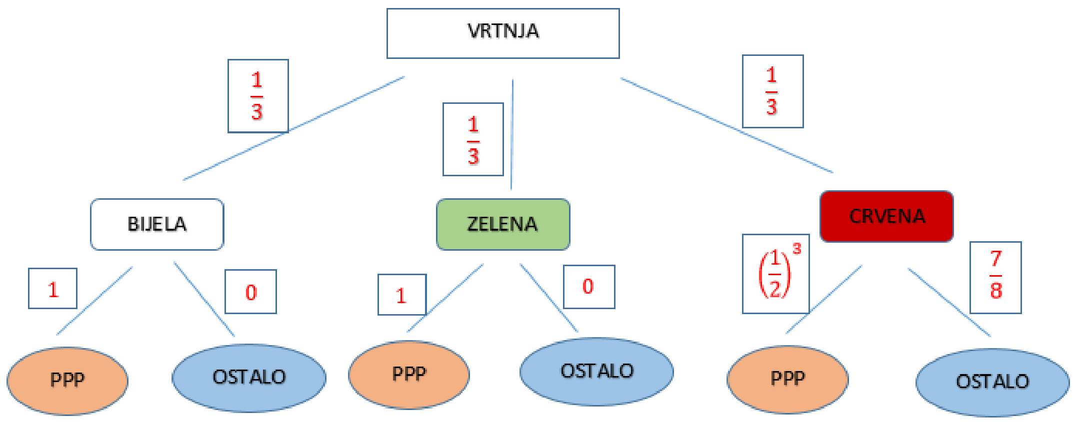
9. Koristeći se dobivenom formulom u prethodnom zadatku, odredi kolika je vjerojatnost da se vrtjelica zaustavila na crvenoj boji ako znamo da su pala tri pisma kad je Marija bacala novčić.

Primjer riješenog listića:

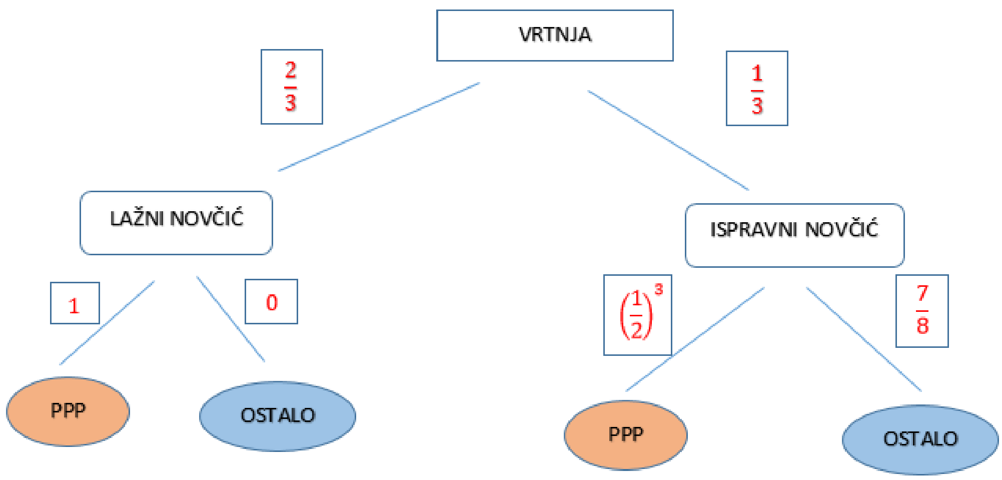
1. Podijeli vjerojatnosni prostor na potpun sustav događaja $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ s obzirom na to koju je boju pokazala vrtjelica.

   H_1 = {vrtjelica je pokazala crvenu boju}
   H_1 = {vrtjelica je pokazala bijelu boju}
   H_1 = {vrtjelica je pokazala zelenu boju}

2. Vjerojatnosnim stablom prikaži moguće događaje.



3. Sažmi vjerojatnoasno stablo iz prethodnog zadatka pomoću donje sheme.



4. Služeći se vjerojatnosnim stablom, izračunaj $\mathbb{P}(H_i)$ i $\mathbb{P}(A|H_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(A|H_1) = \frac{1}{8},\ \mathbb{P}(A|H_2) = 1,\ \mathbb{P}(A|H_3) = 1$$

5. Služeći se formulom potpune vjerojatnosti, izračunaj $\mathbb{P}(A)$.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$$

6. Koristeći se definicijom uvjetne vjerojatnosti izrazi $\mathbb{P}(H_1|A)$.

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(H_1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

7. Upotrijebi komutativnost presjeka dvaju skupova i na drugačiji način zapiši rješenje prethodnog zadatka.

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_1)}{\mathbb{P}(A)}$$

8. U brojniku rješenja prethodnog zadatka ponovno upotrijebi definiciju uvjetne vjerojatnosti, odnosno vjerojatnosti presjeka.

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1)}{\mathbb{P}(A)}$$

9. Koristeći se dobivenom formulom u prethodnom zadatku, odredi kolika je vjerojatnost da se vrtjelica zaustavila na crvenoj boji ako znamo da su pala tri pisma kad je Marija bacala novčić.

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{17}{24}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{17}{24}} = \frac{1}{17}$$

Kutak za nastavnike:
Učenicima je teško pamtiti Bayesovu formulu, stoga je važno omogućiti im da ju sami izvedu pomoću već poznatih definicija i formula. Osim toga, važno im je naglasiti da onda tu istu formulu mogu i sami kasnije izvesti u zadacima koje će rješavati. Nadalje, ovaj koncept određivanja vjerojatnosti hipoteze uz uvjet da nam je poznat ishod određenog pokusa teško je shvatljiv učenicima jer im je prirodno određivati vjerojatnosti događaja

prema vremenskome slijedu. Međutim, upravo aktivnost u kojoj na konkretnom primjeru mogu vidjeti ishod kasnijeg događaja te pomoću njega odrediti vjerojatnost prethodnog pod uvjetom kasnijeg, omogućuje im vizualizaciju i poboljšanje poimanja vjerojatnosti iz ovog kuta gledanja.

Poglavlje 5

Strategije poučavanja vjerojatnosti

Nakon proučavanja psiholoških komponenata i matematičke podloge koja je potrebna za usvajanje sadržaja vjerojatnosti te osmišljavanja aktivnosti kojima učenici otkrivaju nova znanja, važno je prepoznati koje metode određenoj skupini učenika najviše odgovaraju i koji su im načini poučavanja najkorisniji. Neke od učinkovitih pristupa i načina poučavanja prikazanih u [2] objašnjeni su u nastavku.

5.1 Metode poučavanja vjerojatnosti

Izrazito je važno da učenici spoznaju da područje vjerojatnosti uključuje dvije različite vrste neizvjesnih situacija:

- Situacije koje su označene pomoću vjerojatnosti, kao što je lutrija, ugovaranje osiguranja ili cijene dionica. Postavljaju se pitanja *Treba li uplatiti listić za lutriju? I koju kombinaciju uplatiti? Na koju opciju osiguranja automobila pristati? Kako se na burzi mijenja cijena dionica? Trebamo li kupiti neke dionice ili ne? Koliki je rizik?*

- Situacije u kojima možemo bolje postupati ukoliko unesemo vjerojatnosne koncepte. Primjeri ovih situacija su pooopćavanje rezultata nekog istraživanja provedenog na nekoj podskupini na čitavu skupinu. Na primjer, ukoliko istraživanje provedeno na učenicima jedne škole pokazuje da je tjelesni indeks mase djevojčica 23.01, možemo li pomoću toga istraživanja rezultate poopćiti i na cijelu županiju te s kolikom točnošću vjerojatnosti to možemo učiniti?

U ovim je situacijama nemoguće donijeti konkretan zaključak. Vjerojatnost omogućuje koncepte i modele koji se mogu koristiti za donošenje prikladnih odluka u neizvjesnim situacijama. Dva su ključna koraka u vjerojatnosnom modeliranju: najprije prepoznati sve moguće ishode, a potom ih odrediti pomoću vjerojatnosti. Postoji nekoliko načina kako odrediti konkretne vjerojatnosne vrijednosti:

- koristeći pretpostavke o simetričnosti temeljnih slučajnih eksperimenata (na primjer bacanje novčića)
- koristeći informacije o prošlim događajima (na primjer relativne frenkvencije već izvedenog slučajnog pokusa ili informacije iz skupa podataka koje su dobivene pokretanjem nekog slučajnog programa)
- određivanje pomoću već poznatih činjenica (na primjer podaci iz različitih provedenih istraživanja u zdravstvenom području)
- procjenjivanje na temelju osobnih činjenica (na primjer vjerojatnost osobnih čimbenika koja utječe na mogućnost nesreće pri osiguranju automobila)

Primjećujemo da vjerojatnosti možemo pristupiti na različite načine, stoga je važno i u srednjoškolskom obrazovanju učenicima prikazati neke od mogućih pristupa vjerojatnosnom mišljenju. Četiri su temeljna pristupa s kojima moramo upoznati učenike:

- vjerojatnost *a priori* (omjer broja povoljnih i broja mogućih događaja)
- teorija relativnih frenkvencija (vjerojatnost kao limes relativne frenkvencije)
- subjektivistička teorija (vjerojatnost kao mjera uvjerenja)
- aksiomi vjerojatnosti

Nadalje, važno je među svim pristupima ostvariti poveznice i pokazati koliko je važna njihova međusobna interakcija. Ovakav način podučavanja učenicima daje širu vjerojatnosnu sliku i omogućava bolje razumijevanje.

Vjerojatnost *a priory*

Iako se stoljećima vjerojatnost koristila čak i u mnogim složenim situacijama, bilo je potrebno mnogo vremena da bi joj se dala formalna definicija. Prvi ju je definirao Laplace u 19. stojeću koji je rekao da je vjerojatnost događaja A omjer broja povoljnih slučajeva n_A i svih mogućih slučajeva n_S, odnosno:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n_S}.$$

Posljedično, svi elementarni događaji imaju jednaku vjerojatnost koja iznosi $\frac{1}{n_S}$. Kako bi se osigurala jednaka vjerojatnost svih slučajeva, Laplace je uveo *princip nedovoljnog razloga* prema kojem možemo pretpostaviti da su svi ishodi jednako vjerojatni ukoliko nemamo dovoljno razloga za vjerovanje da će se jedan od ishoda vjerojatnije zbiti. Također, jedan od argumenata jednake vjerojatnosti svakog od elementarnih događaja jest i simetrija vršenja eksperimenta, ali i nepristranost prema bilo kojem ishodu.

Problemi ovakvoga pristupa nalaze se u nedostatku broja primjera u kojima su elementarni događaji jednako vjerojatni. Naime, u mnogim je eksperimentima bilo upitno jesu li svi elementarni događaji jednako vjerojatni, posebno kada se pokus ponavlja nekoliko puta. Također, mnogi eksperimenti koji se odvijaju u fizici nailaze na ovaj problem jednake vjerojatnosti.

Teorija relativnih frekvencija

Pri ovoj teoriji eksperiment izvodimo nekoliko puta pod istim uvjetima i neovisno o prethodnom izvođenju eksperimenta. Vjerojatnost događaja A definiramo kao limes relativnih frekvencija pojave događaja A:

$$\mathbb{P}(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n},$$

gdje $n(A)$ predstavlja koliko puta se događaj A pojavio u prvih n ponavljanja pokusa. Ovo je bio jedan od pokušaja postavljanja aksiomatskih temelja vjerojatnosti koji je uporište tražio na konvergenciji relativnih frekvencija. No, pokazao se nedoslijednim i previše složenim. I u ovome pristupu postoje mnogi nedostaci. Na koji način možemo provjeriti da ovaj niz konvergira? Na koji način bismo odredili vrijednost vjerojatnosti za konačan broj ponavljanja pokusa? Na koji način možemo provjeriti pretpostavku neovisnosti?

Valja naglasiti da su mnogi pogledi na teoriju relativnih frekvencija često iskrivljeni i mogu dovesti do zabluda. Naime, ljudi se često usmjere na same obrasce ishoda, a ne na definiciju vjerojatnosti, pa donose krive zaključke. Prethodni ishodi ne utječu na one buduće i stoga se na temelju njih ne mogu određivati predviđanja. Međutim, teorija relativnih frekvencija izrazito je korisna u stvarnom svijetu, na primjer za izračun mortaliteta koji se temelji na demografskim podacima.

Subjektivistička teorija

Na temelju ovoga pristupa svaka se vjerojatnosna izjava temelji na osobnoj prosudbi koja je uvjetovana trenutnim predznanjem. Pripadnici Bayesova učenja, kao što je Bruno de Finetti (1906. − 1985.) ne prepoznaju nikakva racionalna ograničenja za subjektivističku teoriju vjerojatnosti. Stoga, de Finetti uspostavlja aksiomatski pristup vjerojatnosti koji se temelji na osovnim preferencijama. Moguće je izvesti i prikaz osobnih preferencija u vjerojatnosnoj formi pomoću Bayesova pravila, aksioma osobnih preferencija i zahtjeva da se ne pristaje na okladu koja daje gubitak bez obzira što se dogodilo.

Ovakav pristup vjerojatnosti vrlo je koristan pri donošenju jednokratnih odluka, odnosno pri procjenjivanju vjerojatnosti kod događaja koji se odvijaju jedanput. Također, osobna prosudba treba slijediti racionalne kriterije, ali i biti otvorena subjektivističkom pogledu (na primjer, zbroj vjerojatnosti dvaju isključivih događaja nikada nije veći od jedan). Međutim, ovaj je prikaz vjerojatnosti često kritiziran jer se vjerojatnost temelji na proizvoljnoj prosudbi. Osim toga, bayesijanska škola, koja nasljeduje ovakvo viđenje vjerojatnosti, napreduje i raste te tvrdi da usprkos nekim problemima, ne postoje razlozi da iz razmatranja isključimo osobno poimanje vjerojatnosti.

Aksiomi vjerojatnosti

Kao što je i u povijesnom pregledu naglašeno, tek je 1933. godine askiomatizirana vjerojatnost. Taj iskorak učinio je Kolmogorov, a matematička javnost velikodušno je primila njegove ideje. Naime, on vjerojatnost definira kao funkciju koja djeluje na algebri događaja i daje realne vrijednosti na intervalu [0, 1] te zadovoljava aksiome nenegativnosti, normaliziranosti i aditivnosti za disjunktne događaje. Ovi aksiomi uzrokuju temeljna matematička pravila koja služe pri upotrebi vjerojatnosti, dok se konkretne vjerojatnosne vrijednosti određuju pomoću dodatnih pretpostavki (te pretpostavke mogu se temeljiti na nekoj od triju već objašnjenih pogleda na vjerojatnost).

Iako aksiomatsko proučavanje vjerojatnosti nije dubinski uključeno u srednjoškolsku nastavu, nužno je da nastavnici primjene temeljne aksiomatske ideje i naglase ih učenicima. Također, jako je važno da nastavnici razumiju spomenute sličnosti i razlike među svakim od prikazanih pogleda na vjerojatnost. Osim toga, nastavnici bi trebali proučiti i neslaganja koja još uvijek postoje u ovom području te svoja saznanja upotrijebiti za nastavu.

Usporedba različitih pristupa vjerojatnosti

Mnogi istraživači poučavanja vjerojatnosti naglašuju negativne utjecaje poučavanja vjerojatnosti pomoću samo jednog pristupa. Laplaceovoj teoriji nedostaje mogućnost za širu primjenjivost, pristup koji se temelji na jednakoj vjerojatnosti elementarnih događaja ne može se proširiti na eksperimente koji se ponavljaju beskonačno mnogo puta, teorija relativnih frekvencija ne može provjeriti pretpostavku neovisnosti. Nadalje, neki događaji su jednokratni i neponovljivi te nam je potrebna subjektivistička teorija za određivanje njihove vjerojatnosti. Iako aksiomatski pristup nastoji biti nepristran prema različitim interpretacijama vjerojatnosti, zapravo je usmjeren na teoriju relativnih frekvencija.

Jedna od temeljnih razlika između subjektivističke teorije vjerojatnosti i teorije koja se temelji na relativnim frekvencijama jest sam smještaj vjerojatnosti. Naime, kod subjektivističke teorije ključno je svojstvo određene osobe (njezina osobna prosudba), a kod teorije relativnih frekvencija ključna se značajka nalazi u stvarnosti (na primjer, neka fizikalna veličina čije svojstvo mjerimo). Osim toga, prvi od ovih dvaju pristupa je subjektivan, a drugi je objektivan. Nadalje, uvjetna vjerojatnost dobiva svoj potpuni smisao ukoliko se u obzir uzmu i subjektivistički i objektivistički pristup jer bi se zanemarivanjem jednoga od njih poljulala čitava teorija vjerojatnosti. Ove činjenice valja uzeti u obzir pri poučavanju vjerojatnosti - važna je raznovrsnost pristupa.

5.2 Vjerojatnosno stablo i tablice slučajeva

Ponekada je učenicima teško predočiti o kojim je sve slučajevima riječ kada proučavaju neki zadatak ili problem. Dodatnu zbunjenost može im stvoriti i uvjetna vjerojatnost kao i previše teksta u zadacima, posebice ako je tekst pomalo nejasan. Kako bismo izbjegli te probleme, trebamo nastojati podatke sistematično zabilježiti. Poznato je da većina osoba vizualno vrlo dobro percipira stvarnost i na taj način lako u memoriji bilježi potrebne informacije. Iz toga razloga, učenicima, pri rješavanju vjerojatnosnih zadataka, od velike pomoći mogu biti strukturirani prikazi poznatih informacija i slučajeva koji su mogući u zadanom problemu. Najpoznatiji su vjerojatnosna stabla i tablice slučajeva koji olakšavaju rješavanje zadatka i pomažu pri razumijevanju problema.

Vjerojatnosna stabla

Jedan od najčešćih, ali i najjednostavnijih prikaza vjerojatnosnih podataka i ishoda vezanih uz neki slučajni pokus je vjerojatnosno stablo. Učenicima je prihvatljivo da se dugački tekst zadatka preoblikuje u svega nekoliko ”slova, brojeva i crta”, a opet daje potpunu sliku svih mogućih ishoda i pripadnih im vjerojatnosti. Na vjerojatnosnom se stablu uz pojedini događaj upisuje i njegova pripadna uvjetna vjerojatnost koja nam onda kasnije pomaže pri računu. Za vjerojatnosno stablo postoje samo dva jednostavna pravila:

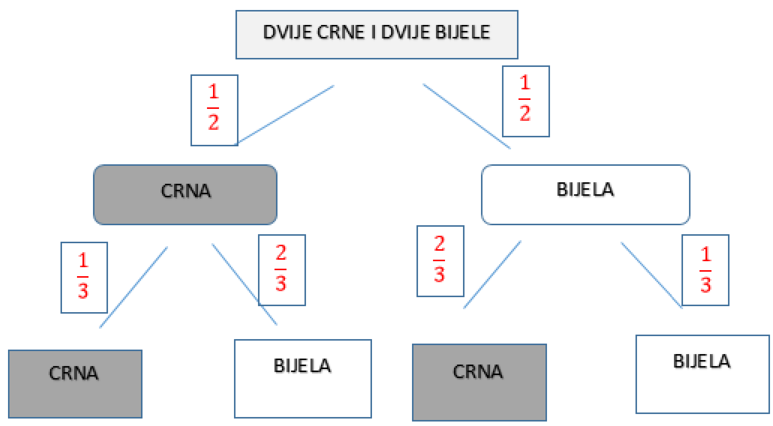
- Vjerojatnost pojedinog događaja dobivamo tako da množimo uvjetne vjerojatnosti koje se pojavljuju na putu od početka stabla do tog događaja.
- Ukoliko pojedinom događaju pripada više putova (grana) na vjerojatnosnom stablu, vjerojatnost toga događaja dobit ćemo tako da zbrojimo potrebne pripadne vjerojatnosti.

Ova se pravila, a i zamisao vjerojatnosnog stabla lako uočavaju na jednostavnom primjeru.

Primjer:
U posudi imamo dvije bijele i dvije crne kuglice. Dva puta zaredom izvlačimo kuglice iz posude, tako da ih ne vraćamo ponovno unutra. Promotrite sljedeća pitanja:

1. Kolika je vjerojatnost da je prva izvučena kuglica crna, a druga bijela?
2. Kolika je vjerojatnost da je druga izvučena kuglica crna?
3. Kolika je vjerojatnost da je druga izvučena kuglica bijela ako znamo da je prva izvučena kuglica bijela?
4. Kolika je vjerojatnost da je prva izvučena kuglica bijela ako znamo da je druga izvučena kuglica bijela? Usporedi rješenje ovog zadatka i prethodnog.

Rješenje primjera:
Ovaj primjer vrlo jednostavno možemo riješiti služeći se prikazom podataka pomoću vjerojatnosnog stabla prikazanog na slici 5.1 koja zorno predočava moguće slučaje nakon prvog, odnosno drugog izvlačenja.



Slika 5.1: Vjerojatnosno stablo koje prikazuje moguće ishode i pripadne vjerojatnosti

1. Primjenjujući gore navedeno prvo pravilo za vjerojatnosno stablo, lako možemo izračunati:
$\mathbb{P}(\{\text{prva je crna, druga je bijela}\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

2. Primjenjujući gore navedeno drugo pravilo za vjerojatnosno stablo, lako možemo izračunati:
$\mathbb{P}(\{\text{druga je crna}\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

3. Primjenjujući formulu za uvjetnu vjerojatnost te očitavajući potrebne vjerojatnosti s vjerojatnosnog stabla, računamo:

$$\mathbb{P}(\{\text{druga je bijela}\}|\{\text{prva je bijela}\}) = \frac{\mathbb{P}(\{\text{prva je bijela i druga je bijela}\}}{\mathbb{P}(\{\text{prva je bijela}\})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

4. Promatranjem vjerojatnosnog stabla, lako uočavamo da tražena vjerojatnost iznosi $\frac{1}{3}$. No, to možemo pokazati i računom:

$$\mathbb{P}(\{\text{prva je bijela}\}|\{\text{druga je bijela}\}) = \frac{\mathbb{P}(\{\text{prva je bijela i druga je bijela}\}}{\mathbb{P}(\{\text{druga je bijela}\})} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Ova vjerojatnost jednaka je prethodnoj, no općenito znamo da ne mora vrijediti da je $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$. Osim toga, ovaj zadnji zadatak većina ljudi pogrešno procjenjuje. Naime, mnogi misle da tražena vjerojatnost iznosi $\frac{1}{2}$ jer smatraju da se prvo izvlačenje vrši između dviju bijelih i dviju crnih kuglica, a zanemaruju činjenicu da je vjerojatnost tražimo pod uvjetom da je druga izvučena kuglica bijela. Stoga, primjećujemo da vrijeme ima veliku ulogu u procjeni vjerojatnosti i da je ljudima teško pojmiti uvjetnu vjerojatnost.

Tablice slučajeva

Osim što se za prikazivanje podataka pri rješavanju zadataka možemo služiti vjerojatnosnim stablom, od velike nam pomoći mogu biti i tablice slučajeva. Naime, podatke možemo sistematično svrstati u tablicu ovisno o karakteristikama koje promatramo, a pomoću te tablice na vrlo jednostavan način možemo računati potrebne vjrojatnosti. Tablice slučajeva posebno nam mogu biti korisne pri računanju uvjetnih vjerojatnosti.

Primjer:
U medicini se često vrše ispitivanja kojima se utvrđuje koliko je neko testiranje učinkovito,

odnosno pouzdano. Tako je jednim istraživanjem ispitivan odnos mamografije i bolesti raka dojke. Od 10 osoba koje boluju od raka dojke, njih 9 imalo je pozitivan test na mamografiji, a od 990 osoba koje ne boluju od raka dojke, njih 99 je imalo pozitivan test na mamografiji. Odgovorite na sljedeća pitanja:

1. Kolika je vjerojatnost da za slučajno odabranu osobu vrijedi da je imala pozitivan test na mamografiji?

2. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba ima pozitivan test na mamografiji te također ima rak dojke?

3. Kolika je vjerojatnost da smo slučajnim odabirom među osobama koje boluju od raka dojke odabrali osobu koja ima pozitivan test na mamografiji? Usporedite tu vjerojatnost s vjerojatnošću da smo među osobama koje ne boluju od raka dojke odabrali osobu koja ima pozitivan test na mamografiji.

4. Kolika je vjerojatnost da smo slučajnim odabirom među osobama koje imaju pozitivan test na mamografiji odabrali osobu koja boluje od raka dojke? Usporedite tu vjerojatnost s vjerojatnošću da smo slučajnim odabirom među osobama koje boluju od raka dojke odabrali osobu koja ima pozitivan test na mamografiji.

Rješenje primjera:
Bolovanje od raka dojke označeno je sa A, a oslobođenost bolovanja od raka dojke sa A^c, pozitivan test na mamografiji označen je sa B (test mamografije pokazuje bolovanje od raka dojke), negativan test na mamografiji sa B^c (test mamografije pokazuje da osoba ne boluje od raka dojke). Podaci su prikazani u donjoj tablici.

	Status bolesti		
Rezultat mamografije	A (bolestan)	A^c(zdrav)	Ukupno
B (pozitivan test)	9	99	108
B^c (negativan test)	1	891	892
Ukupno	10	990	1 000

1. Pomoću tablice vrlo jednostavno možemo odrediti traženu vjerojatnost očitavajući ukupan broj osoba s pozitivnim testom mamografije i ukupan broj ispitanika:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{108}{1\,000} = 0.108$$

2. U tablici na presjeku retka i stupca koji odgovaraju osobama s pozitivnim testom i rakom dojke očitamo broj osoba, a ukupan broj osoba nam je također poznat pa lako izračunamo:

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \frac{9}{1\,000} = 0.009$$

3. Ukupan broj osoba oboljelih od raka dojke je 10 i njega očitamo iz pripadnog stupca, a osobe među njima koje imaju pozitivan test očitamo u pripadnom retku danog stupca i on iznosi 9, pa izračunamo:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{9}{10} = 0.9$$

   Sličan postupak provedemo i za drugi dio zadatka, samo vrijednosti očitavamo iz stupca A^c, odnosno zdravih osoba:

$$\mathbb{P}(B|A^c) = \frac{99}{990} = 0.1$$

   Uočavamo da je vjerojatnost da osoba koja je bolesna ima pozitivan test na mamografiji devet puta veća od vjerojatnosti da zdrava osoba ima pozitivan test na mamografiji.

4. Iz tablice očitavamo da pozitivan test ima 108 osoba, a da među njima je bolesnih 9 i računamo vjerojatnost:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{9}{108} \approx 0.083$$

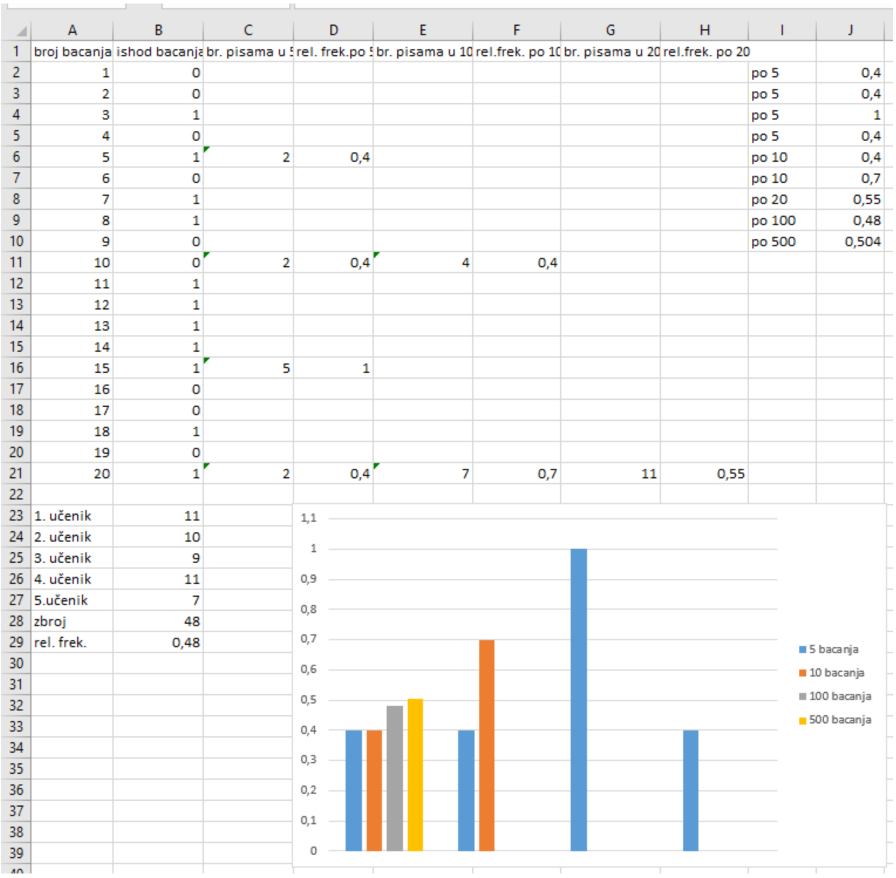
   Uspoređujući ovu vjerojatnost s vjerojatnošću događaja $B|A$, uočavamo da se one drastično razlikuju. Na ovaj način možemo uočiti da ukoliko je $\mathbb{P}(B|A)$ izrazito visoka, to ne mora značiti i da je $\mathbb{P}(A|B)$ izrazito visoka.

Tablice slučajeva učenicima omogućavaju da problem sagledaju iz različitih kutova te da uoče povezanosti ili nepovezanosti uvjetnih vjerojatnosti. Također, pomoću tablica slučajeva učenici mogu pojednostaviti prikaz podataka potrebnih za rješavanje zadatka i lako računati potrebne vjerojatnosti.

5.3 Uloga tehnologije u nastavi vjerojatnosti

U današnje vrijeme tehnologija učenicima mnogo znači. Okruženi su računalima, aplikacijama, programima i većinu informacija primaju, ali i odašilju tim putem. Naravno, i nastava je zanimljivija ukoliko je obogaćena tehnologijom te daje matematici novu dimenziju. Moderna tehnologija omogućava konkretniji pogled na apstraktne matematičke ideje, ali i međusobne odnose pretpostavki i zaključaka. Naravno, tehnološki alati mogu biti od velike pomoći pri prikazivanju velikog broja podataka, stoga omogućuju da učenici određene eksperimente provode na satu i brzo i efikasno ih prikazuju u tablicama ili pomoću grafova. Rad na stvarnim i konkretnim podacima učenicima može pomoći pri razbijanju miskoncepcija koje su stvorene. Također, pomoću tehnologije stvaramo i veliku poveznicu između vjerojatnosti, prikazivanja i analize podataka te statistike.

Uz pomoć tehnologije nastavu možemo ubrzati i lakše provoditi eksperimente, a potom i s lakoćom analizirati rezultate eksperimenta. Tako, na primjer, ukoliko rezultate pokusa bacanja novčića koji smo proveli u Aktivnosti 2. u drugom poglavlju odmah upisujemo u Excel tablicu, lako možemo pratiti rezultate i prikazati ih i grafički. Vizualni prikazi nam mogu pomoći u donošenju zaključaka kao što je prikazano na slici 5.2. Na temelju toga prikaza učenici mogu vidjeti da je razlika u visinama plavih stupaca (koji prikazuju grupacije po pet bacanja) veća nego između visina crvenih stupaca (koji prikazuju grupacije po deset bacanja). Osim toga, mogu uočiti i koliko se te vrijednosti razlikuju od 0.5 što je teorijski pretpostavljena vjerojatnost. Nadalje, uviđaju da su sivi i narančasti stupac (koji prikazuju grupacije po dvadest i po sto bacanja) približno iste visine i da su bliski broju 0.5. Tako intuitivno zaključuju da se povećanjem broja ponavljanja pokusa, približavamo traženoj vjerojatnosti.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	broj bacanja	ishod bacanja	br. pisama u 5	rel. frek.po 5	br. pisama u 10	rel.frek. po 10	br. pisama u 20	rel.frek. po 20		
2	1	0							po 5	0,4
3	2	0							po 5	0,4
4	3	1							po 5	1
5	4	0							po 5	0,4
6	5	1	2	0,4					po 10	0,4
7	6	0							po 10	0,7
8	7	1							po 20	0,55
9	8	1							po 100	0,48
10	9	0							po 500	0,504
11	10	0	2	0,4	4	0,4				
12	11	1								
13	12	1								
14	13	1								
15	14	1								
16	15	1	5	1						
17	16	0								
18	17	0								
19	18	1								
20	19	0								
21	20	1	2	0,4	7	0,7	11	0,55		
22										
23	1. učenik	11								
24	2. učenik	10								
25	3. učenik	9								
26	4. učenik	11								
27	5.učenik	7								
28	zbroj	48								
29	rel. frek.	0,48								
30										
31										
32										
33										
34										
35										
36										
37										
38										
39										

Slika 5.2: Prikaz podataka iz Aktivnosti 2.

Također, u Aktivnosti 5. pri izvođenju Buffonova pokusa, tehnologija može uvelike olakšati obradu podataka. Naime, za ovaj je pokus potrebno sudjelovanje barem četiri razreda te je potrebno provesti više od petsto bacanja što bi pri analizi podataka zahtijevalo mnogo vremena. Međutim, ukoliko bi nastavnik dokument s potrebnom tablicom za unos podataka mrežno podijelio s učenicima i oni bi odmah mogli unositi rezultate svojih bacanja, tada bi se račun proveo vrlo brzo pomoću jednostavnih funkcija koje alat posjeduje. Jednostavna tablica prikazana je na slici 5.3. Dapače, učenici bi čak istovremeno mogli u više razreda provesti pokus te na kraju sata koristiti podatke preostalih razreda i doći do zaključka.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		bacanje									
2	par	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	24	21	26	23	22	23	26	25	27	26
4	2										
5	3										
6	4										
7	5										
8	6										
9	7										
10	8										
11	9										
12	10										

Slika 5.3: Tablica za unos podataka iz Aktivnosti 5.

Dakle, tehnologija uvelike može pojednostavniti analizu podataka pri provođenju eksperimenata i obradi dobivenih rezultata. Osim što olakšava proces obrade podataka, tehnologija samim time i ubrzava obradu, a na taj način omogućava i bržu provedbu aktivnosti te brže dolaženje do zaključaka. Nadalje, valja imati na umu da s tehnologijom treba biti oprezan i ne pretjerivati u njezinoj upotrebi jer je važno i da učenici neke zaključke donose sami, a ne samo uz pomoć određenih programa. No, svakako treba koristiti sve one alate koji omogućuju kvalitetniju nastavu.

Bibliografija

[1] S. Antoliš, A. Copić, *Matematika 4, I. polugodište, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2006

[2] C. Batanero, M. Borovcnik, *Statistics and Probability in High School*, Sense Publishers, Rotterdam, 2016

[3] D. Brozović, M. Čobanov, *Broj π i vjerojatnost*, MIŠ (Matematika i škola), časopis za nastavu matematike, Element, Vol. II, Br. 9 (2001), 158 – 161, dostupno na `http://mis.element.hr/fajli/560/09-04.pdf` (lipanj 2018)

[4] F. M. Brückler, *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera. Odjel za matematiku, Osijek, 2014

[5] I. Budimir, *Jedna igra na sreću ili kako osvojiti auto*, Matka: časopis za mlade matematičare, HMD, Vol. XX, Broj 80 (2012), 230 – 232, dostupno na `https://hrcak.srce.hr/97541` (lipanj 2018)

[6] M. Čičak, *Monty Hall problem*, Matka: časopis za mlade matematičare, HMD, Vol. XXIII, Broj 90 (2014), 80 – 83, dostupno na `https://hrcak.srce.hr/140024` (lipanj 2018)

[7] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4, dodatak za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2006

[8] A. Grozdanić, *Eksperimentalna vjerojatnost ili "Kako se igrati na satu matematike?"*, MIŠ (Matematike i škola), časopis za nastavu matematike, Element, Vol. XIX, Br. 94 (2018), 188 – 191

[9] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002

[10] *Prijedlog nacionalnog dokumenta matematičkog područja kurikuluma*, dostupno na `http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/02/MAT-PODRUCJE-18.2-FINALpdf.pdf` (lipanj, 2018)

[11] *Prijedlog nacionalnog kurikuluma nastavnog predmeta matematike*, dostupno na http://mzos.hr/datoteke/6-Predmetni_kurikulum-Matematika.pdf (lipanj 2018)

[12] P. Vranjković, *Vjerojatnost i statistika u srednju školu? Da!*, MIŠ (Matematika i škola), časopis za nastavu matematike, Element, Vol. II, Br. 9 (2001), 162 – 164, dostupno na http://mis.element.hr/fajli/561/09-05.pdf (lipanj 2018)

Sažetak

U nastavi matematike, s posebnim naglaskom na vjerojatnosnom području, važno je svim učenicima omogućiti da do mnogobrojnih zaključaka dođu samostalno uz pomoć vlastitih predznanja. Nadalje, učenike treba, što je više moguće, uključivati u proces učenja i omogućiti im da matematičku teoriju povežu s primjerima iz stvarnoga života. U ovome diplomskome radu prikazan je povijesni kontekst razvoja vjerojatnosti, kao i psihološke zapreke i miskoncepcije koje utječu na učeničko shvaćanje vjerojatnosnih pojmova i koncepata kako bi poučavanju vjerojatnosti pristupili na ispravan način. Prolazeći različitim vjerojatnosnim temama, dana je stroga matematička podloga koja je uspoređena s metodičkim pristupom u srednjoškolskoj nastavi vjerojatnosti, potkrepljena aktivnostima u kojima se učenici koriste metodom istraživanja kako bi usvojili nove nastavne sadržaje. Također, naglašava se važnost stvaranja poveznica između matematičkih i intuitivnih koncepata. Nadalje, prikazani su i različiti pristupi vjerojatnosnom sadržaju, kao i načini lakšeg prikaza podataka te znakovita uloga tehnologije. Naravno, u svemu treba biti umjeren i pronaći pravu mjeru, a to se najbolje može osluškivanjem potreba samih učenika.

Summary

In teaching of mathematics, with a special emphasis on the area of probability, it is important for all students to be able to come up with numerous conclusions independently, with the help of their own preknowledge. Furthermore, students should, as much as possible, be involved in the learning process which enables them to combine mathematical theory with examples from the real life. This paper presents the historical context of probability development, as well as psychological barriers and misunderstandings affecting students' understanding of probability notions and concepts in order to approach the learning of probability in the right way. Passing through a variety of topics in probability, a rigorous mathematical background is compared to the methodical approach in the secondary school and supported by activities in which students use inquiry methods to adopt new teaching content. Moreover, the importance of creating links between mathematical and intuitive concepts is also emphasized. Different approaches to the probability contents are presented, as well as the ways in which the data is being read with the significant role of technology. Of course, every approach must be moderate and a teacher needs to find the right measure. This can best be done by the observing the needs of students themselves.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 1994. godine. Pohađala sam OŠ Ante Kovačića, a potom i OŠ Svetu Nedelju gdje je od početka prepoznala svoje zanimanje za matematikom, ali i prenošenjem njezinih čari drugima. Upisala sam Gimnaziju Lucijana Vranjanina, prirodoslovno – matematički smjer 2009. godine. Uz matematiku, rado sam sudjelovala i na natjecanjima iz hrvatskog jezika jer volim gramatiku i u njoj prepoznajem elemente logike. Svoje obrazovanje nastavljam upisavši Prediplomski studij matematike, nastavnički smjer 2013. godine sa 100%-tnim uspjehom iz matematike na Državnoj maturi. Tijekom studija bila sam demonstratorica iz Analitičke geometrije, Linearne algebre 1 i 2, Diferencijalnog i integralnog računa 1 i 2, Osnova matematičke analize te Uvoda u diferencijalnu geometriju. Po završetku Prediplomskog studija primila sam pohvalnicu Fakultetskog vijeća za izniman uspjeh u studiju. Svoje obrazovanje nastavljam 2016. godine upisivanjem Diplomskog studija matematike, nastavničkog smjera.