SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sebastijan Kocijan

ARAPSKI TEMELJI ŠKOLSKE MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala od srca mojoj obitelji na podršci i što su mi omogućili da strudiram ono što volim,
te hvala mojoj djevojci na potpori.
Zahvale mentorici zbog ukazanog razumijevanja i pomoći.

Sadržaj

Uvod

Opće je poznato da je Europa većinu starogrčkih matematičkih otkrića saznala upravo preko Arapa. Starogrčka matematika je u Europu stigla zaobilaznim putem preko Španjolske koja je bila u sastavu arapskog kalifata. Također, mnoga starogrčka djela sačuvana su samo u arapskom prijevodu. No, iako mnogi smatraju da su doprinosi arapskog područja matematici samo prevođenje i prijenos podataka koje su ranije otkrili stari Grci ili Indijci, to nije točno. Dapače, današnja matematika je mnogo sličnija arapskoj nego starogrčkoj.

Nakon što je 622. godine Muhamed sa svojim pristašama pobjegao iz Meke u Medinu, utemeljio je novu vjeru, islam, koju su prihvatila nomadska arapska plemena. U sljedećih nekoliko stoljeća, Muhamedovi nasljednici osvajaju velike teritorije i osnivaju islamsko carstvo koje nazivaju kalifat. Na vrhuncu svoje moći kalifat je zauzimao područja od Pirinejskog poluotoka, preko sjeverne Afrike pa sve do granica Indije na istoku. Službeni jezik kalifata je bio arapski, pa se zato često matematika tog vremena i područja naziva arapskom. Pravilnije bi je bilo nazvati srednjvjekovnom matematikom islamskog svijeta, jer se zapravo radi o znanstvenicima različitih naroda i vjera koji su pisali arapskim jezikom. Arapski kalifat nestaje nakon mongolskih osvajanja u 13. stoljeću.

Grad Bagdad je osnovan 762. godine te su kalifi koji su ondje vladali podupirali razvoj znanosti. Kalif Harun al-Rashid, koji je vladao od 786. godine pa sve do svoje smrti 809. godine, je bio veliki poticatelj razvijanja znanosti te prevođenja grčkih znanstvenih djela, kao što su primjerice Euklidov *Elementi*, na arapski jezik. Također, al-Rashid je dao ideju za osnivanje *Kuće mudrosti* (arapski: *Bayt al-Hikma*) u Bagdadu. Konačno ju je osnovao njegov sin, kalif al-Ma'mun koji je vladao od 813. do 833. godine. Al-Ma'mun je u *Kuću mudrosti* pozvao brojne matematičare, astronome, astrologe, pjesnike i prevoditelje. Prijevode nisu mogli pisati prevoditelji bez matematičkog znanja, pa su prijevodi bili vrlo kvalitetni. Vrlo brzo nakon osnivanja *Kuće mudrosti* prevedena su brojna djela Euklida, Arhimeda, Apolonija, Ptolomeja i drugih starogrčkih matematičara.

Danas je uobičajeno matematiku koja je nastala u navedenom razdoblju nazivati „arapskom”. Iako smo takav naziv i mi prihvatili i koristimo ga u ovom radu, želimo istaknuti da nije sasvim pravilan. Naime, radi se o matematičkim doprinosima znanstvenika različitih nacija i vjera, a jedino stvarno zajedničko im je da su pisani arapskim jezikom u razoblju 8. –13. stoljeća. No ipak, umjesto preciznijeg naziva „matematika srednjevjekovnog islamskog svijeta" (ili arapskog kalifata), govorit ćemo o arapskoj matematici. U ovom diplomskom radu odlučili smo arapski doprinos matematici opisati kronološki navodeći najistaknutije matematičare, zbog lakšeg određivanja redoslijeda njihovih otkrića i doprinosa. Diplomski rad se sastoji od tri poglavlja. U prvom poglavlju bit će riječ o vjerojatno najpoznatijem arapskom doprinosu matematici, arapskim brojkama. U drugom poglavlju biti će navedeni najvažniji arapski matematičari s kratkim biografijama te doprinosima matematici. U posljednjem poglavlju arapski doprinosi matematici biti će povezani s osnovnoškolskim i srednjoškolskim programom matematike.

Napominjemo da u doba djelovanja arapskih matematičara nije bila razvijena algebarska notacija, ali će se u ovom radu radi lakšeg praćenja koristiti suvremena notacija. Također, za navođenje arapskih riječi i imena koristiti će se engleska transkripcija, a navedeni citati su prijevodi engleskih prijevoda arapskih tekstova.

Poglavlje 1

Arapske brojke

Brojke koje danas koristimo u svakodnevnom životu nazivamo arapskim brojkama. Arapskim brojkama nazivamo brojeve zapisane pomoću sljedećih deset znamenaka: 0 (nula), 1 (jedan), 2 (dva), 3 (tri), 4 (četiri), 5 (pet), 6 (šest), 7 (sedam), 8 (osam), 9 (devet). Manje je poznato da su te brojke zapravo preuzete od Indijaca te su kasnije uz manje modifikacije preko Arapa stigle u Europu.

U doba početka arapskih osvajanja Egipta, Sirije i Mezopotamije, za zapisivanje brojeva većinom se koristio grčki alfabetski brojevni sustav. Po uzoru na taj brojevni sustav, vjerojatno u 7. stoljeću ili ranije, razvio se i arapski alfabetski brojevni sustav koji za prikaz jedinica, desetica i stotica te broja tisuću koristi slova arapskog alfabeta. Arapski alfabetski brojevni sustav često se naziva *abjad*, prema kraticama prvih četiriju slova koja označavaju jedinice (*alif, ba, jim, dal*). Postoje dvije inačice arapskog alfabetskog brojevnog sustava s obzirom na vrijednosti znamenki: istočna (Slika 1.1.), koju su koristili Arapi istoka, i zapadna koju su većinom koristili Arapi sjeverne Afrike i Španjolske.

slovo	naziv slova	transliterirano	brojevna vrijednost	slovo	naziv slova	transliterirano	brojevna vrijednost	slovo	naziv slova	transliterirano	brojevna vrijednost	slovo	naziv slova	transliterirano	brojevna vrijednost
ا	alif	a	1	ي	ya	y	10	ق	qaf	q	100	غ	ghayin	gh	1000
ب	ba	b	2	ك	kaf	k	20	ر	ra	r	200				
ج	jim	j	3	ل	lam	l	30	ش	shin	sh	300				
د	dal	d	4	م	mim	m	40	ت	ta	t	400				
ه	ha	h	5	ن	nun	n	50	ث	tha	th	500				
و	wa	w	6	س	sin	s	60	خ	kha	kh	600				
ز	zay	z	7	ع	ayin	’	70	ذ	dhal	dh	700				
ح	ḥa	ḥ	8	ف	fa	f	80	ض	ḍad	ḍ	800				
ط	ṭa	ṭ	9	ص	ṣad	s	90	ظ	ḍha	ḍh	900				

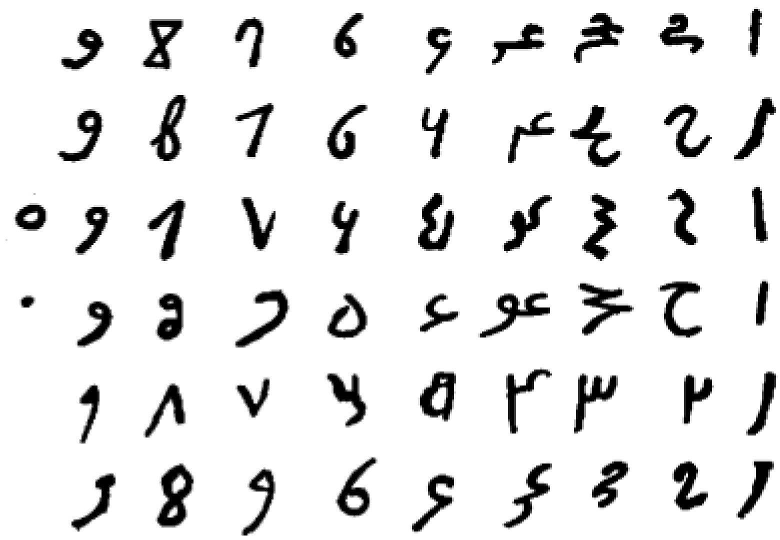
Slika 1.1: Arapski alfabetski brojevni sustav, istočna inačica (slika preuzeta iz [6)

Arapi tijekom 9. stoljeća umjesto alfabetskog brojevnog sustava počinju koristiti pozicijski brojevni sustav preuzet od Indijaca. U tome sustavu, za razliku od *abjada*, znamenke se pišu s lijeva na desno počevši od onih koje predstavljaju više potencije baze, po uzoru na indijski način zapisivanja. Također, važno je napomenuti da je sustav sadržavao nulu koja se označavala točkom ili kružićem.

Na početku su se u raznim djelovima arapskog svijeta koristile razne inačice pojedinih znamenaka, ali su se s vremenom ustalile dvije vrste arapskih brojki. Kao i alfabetski brojevni sustav i ovaj je imao istočnu i zapadnu inačicu. Istočna inačica koristila se na prostoru Egipta, Sirije, Turske i Perzije te se i danas koristi u bliskoističnim arapskim zemljama. Njene suvremene znamenke možemo vidjeti na Slici 1.2.. Zapadna inačica koristila se u Sjevernoj Africi i maurskoj Španjolskoj, a upravo se iz nje razvio naš današnji brojevni sustav. Tu zapadnu inačicu brojki Arapi su nazivali *haruf al gubar*, što bi u prijevodu značilo pješčane brojke (Slika 1.3.).

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Slika 1.2: Istočna inačica znamenki arapskog pozicijskog sustava (slika preuzeta iz [6)



Slika 1.3: Zapadna inačica znamenki arapskog pozicijskog sustava (slika preuzeta iz [6)

Često možemo pročitati da je s arapskim brojkama prvi Europu upoznao Fibonacci tijekom 13. stoljeća, no to nije potpuno točno. Arapi su Španjolsku zauzeli još tijekom 8. stoljeća pa su ondje bila poznata sva arapska matematička dostignuća. Arapske brojke Španjolcima su bile poznate od 10. stoljeća, no kako to tada nije imalo utjecaj na ostatak Europe, obično se ne uzima kao početak uporabe indoarapskih brojki u Europi.

U drugoj polovici 10. stoljeća Gerbert iz Aurrilaca, kasniji papa Silvestar II., studirao je u Španjolskoj te vjerojatno od Arapa upoznao zapadnu inačicu arapskih brojki. Kasnije je pisao o njima i zagovarao njihovo korištenje.

Pravo širenje arapskih brojki Europom počelo je 1202. godine kada je Leonardo iz Pise, poznat kao Fibonacci, napisao knjigu *Liber Abbaci* (*Knjiga o računanju*). Fibonacci je od malih nogu s ocem putovao u Bugiju (današnji Alžir), Egipat, Siriju, Grčku i Siciliju gdje se upoznao s matematičkim spisima Arapa, Indijaca, Pitagorejaca i drugih. U knjizi *Liber Abbaci* opisao je devet znamenaka i znak za nulu. Takoder, opisuje postupke računskih operacija korištenjem pozicijskog zapisa arapskim brojkama. Ta je knjiga imala bitan utjecaj na dalji razvoj matematike u Europi, a ujedno je jedan od vrhunaca srednjovjekovne europske matematike.

Bez obzira na zapise Gerberta, Fibonaccija i drugih, do 16. stoljeća arapske brojke koristio je vrlo mali broj ljudi. Zanimljivo, krajem 14. stoljeća u gradu-državi Firenzi izdani su zakoni protiv uporabe arapskih brojki zbog bankovnih krivotvorenja (lako se moglo prepraviti 0 u 6 ili 9). Pojavom prvih tiskanih knjiga s arapskim brojkama te pojavom prvih novčanica s arapskim brojkama na njima, u 16. stoljeću počele su ih učiti i prihvaćati šire mase.

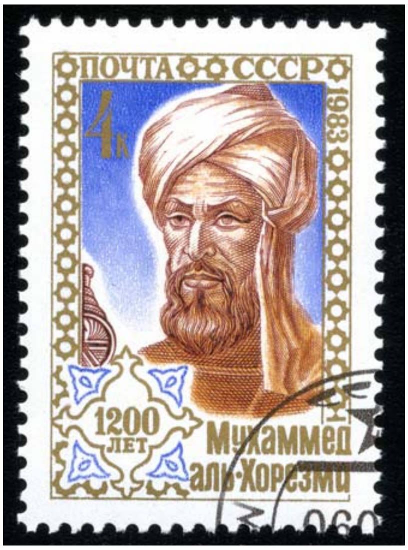
Zanimljivo je istaknuti da su Arapi bili puni poštovanja prema indijskim učiteljima te su svugdje isticali da je tu riječ o indijskom, a ne njihovom pronalasku. No unatoč velikoj zasluzi Indijaca te se brojke rijetko nazivaju indo-arapskim.

Poglavlje 2

Arapski matematičari

2.1 Al-Khwarizmi

Prvi veliki arapski matematičar al-Khwarizmi, punim imenom Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, živo je od oko 780. do 850. godine. Rođen je u gradu Khwarezmu (današnjoj Hivi u Uzbekistanu). U svojim djelima pisao je o algebri, geometriji i astronomiji. Iscrtavajući kružnice u pijesku, poput Arhimeda, al-Khwarizmi je odlučio da mora napustiti roditeljski dom te posjetiti velike gradove i njihove biblioteke gdje će se upoznati s mnogim grčkim i indijskim djelima.



Slika 2.1: Al-Khwarizmi na poštanskoj marki (slika preuzeta s Wikipedije)

Prvo je odlučio otići u Damask gdje je ostao četiri godine. Tamo ga je jedan kršćanski svećenik naučio grčki jezik, a upoznao je i indijske metode računanja zvane *Sindhind*. Te metode računanja odnosile su se na kretanje zvijezda te jednadžbe u kojima se upotrebljavaju sinus i kosinus.

Nakon Damaska al-Khwarizmi je boravio u Harranu. Tamošnji stanovnici nisu vjerovali indijskoj nauci već su bili vjerni svojoj tradiciji koju su nadopunjavali grčkim saznanjima. Al-Khwarizmi je zatim odlučio da je vrijeme da ode u Bagdad.

U Bagdadu se prijavio na ispit za ulazak među odabrane naučnike dvora kalifa Haruna al-Rašida. Ispitu su prisustvovali al-Tabari i al-Fadl ibn Naubaht te mu je postavljen sljedeći zadatak:

Jedan čovjek ostavi poslije smrti po jedan dio bogatstva svakome od svoja četiri sina, a jednom drugom čovjeku – onoliko koliko svaki od njegovih sinova dobije, i još četvrtinu toga što ostaje od trećine kapitala umanjene za jedan dio i još jedan dirham[1]*. Koliko svaki dobije od tog bogatstva?*

Za rješavanje tog zadatka al-Khwarizmi je dobio sedam dana, a za to vrijeme je imao najbolji smještaj i hranu. Rješenje zadatka znao je odmah jer se boraveći u Damasku zainteresirao za probleme naslijeđivanja koji u to vrijeme nisu bili od velikog značaja u njegovom rodnom gradu. Nakon toga al-Khwarizmi je primljen među odabrane naučnike kalifova dvora. Zanimljivo je da će se al-Khwarzmi kasnije sjetiti ovog problema te ga sa svojim rješenjem zapisati u svoju knjigu *Hisab al-Jabr w-al-Muqabala (Algebra)*.

Ubrzo nakon dolaska na dvor kalifa Haruna al-Rašida, al-Khwarizmi je prisustvovao brojnim zabavama gdje je bio u društvu drugih poznatih matematičara i astrologa. Tim zabavama matematičari i astrolozi su bili obavezni prisustvovati. Noći je al-Khwarizmi provodio u zvjezdarnici gdje je proučavao konstelacije i uspoređivao ih s tablicama koje je skupio Al-Fazari[2]. U suradnji sa svojim pomoćnicima al-Khwarizmi je sastavio prve arapske astronomske tablice.

Nakon dolaska na prijestolje velikog zaljubljenika u znanost, kalifa al-Ma'muna (813.), al-Khwarizmi je radeći u *Kući mudrosti* pokušavao objediniti indijsku astronomiju i matematiku s grčkom. Prema al-Khwarizmiju, Grci su iznosili puno teorije, ali ih nije zanimala matematička primjena, dok su Indijci bili fokusirani na jedan problem i nisu povezivali više problema. Vrijedi spomenuti da će upravo kombiniranje grčkog deduktivno-logičkog (teorijskog) pristupa i indijskog praktičnog pristupa postati značajan arapski doprinos razvoju matematike.

U *Kući mudrosti* na mjestu glavnog bibliotekara al-Khwarizmi je naslijedio al-Fazarija te je na toj dužnosti ostao do svoje smrti. Ako se po strani ostave djela koja su ga proslavila, valja napomenuti da je al-Khwarizmi dao doprinos i na drugim područjima. Primjerice,

[1]Dirham ili dirhem, uz dinar i fils jedna od tri najvažnije valute srednjevjekovnog islamskog svijeta. I danas se koristi kao valuta nekih zemalja arapskog svijeta.

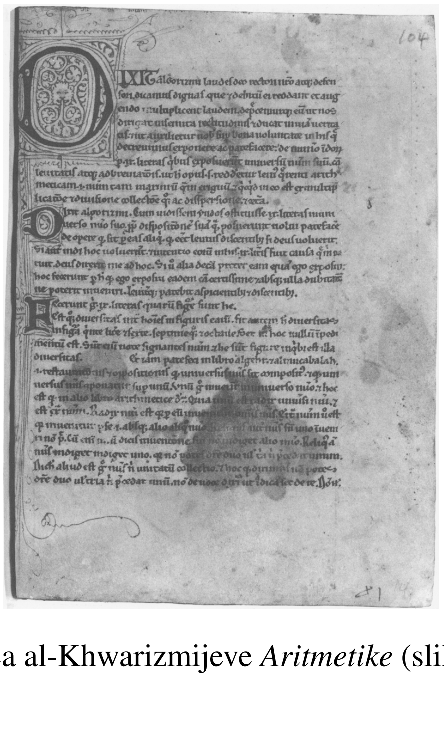
[2]Muhammad ibn Ibrahim al-Fazari, arapski filozof, matematičar i astronom.

mnogim je građevinama dao proračune velikih lukova, činovnicima je dao priručnike s tablicama u kojima se lako vidi vrijednost robe preračunata iz novca u novac, a prema Ptolemejevoj *Geografiji* napisao je svoju *Sliku zemlje* koja je u ono vrijeme sadržavala najsavršeniju geografsku kartu svijeta.

U svojim je prijevodima al-Khwarizmi često susretao s problemom arapskog jezika koji nije bio stvoren za matematiku, stoga je smišljao nove arapske riječi za matematičke pojmove. Al-Khwarizmijeva djela često su prevođena, komentirana i dorađivana, a na isti se način i on služio djelima drugih autora. Zanimljivo je pogledati kako glasi Pitagorin poučak u al-Khwarizmijevom prijevodu:

Znaj da, u svakom pravokutnom trokutu, ono što se dobiva množenjem dviju najkraćih stranica, svake s njom samom, i tvoreći zbroj, jednako je onom što se dobije množenjem najdulje stranice s njom samom.
Iz prethodne je formulacije vidljiv al-Khwarizmijev odmak od starogrčkog pristupa, u kojem se pod kvadratima nad katetama odnosno hipotenuzom mislilo isključivo na njihove površine.

Najvažnija al-Khwarizmijeva djela su: ***Hisab al-Jabr w-al-Muqabala (Algebra)*** i ***Kitab al-Jam w-al-Tafreeq bil Hisab al-Hindi (Aritmetika)***. Oba djela ostala su sačuvana samo u prijevodu, a naslove *Algebra* i *Aritmetika* su dobila prema matematičkim područjima koja opisuju.



Slika 2.2: Početna stranica al-Khwarizmijeve *Aritmetike* (slika preuzeta s Wikipedije)

Drugo djelo, koje je najvjerojatnije u 12. stoljeću na latinski jezik preveo Adelard of Bath[3], sačuvano je u latinskom prijevodu pod nazivom *Dixit Algorizmi* („Rekao je al-Khwarizmi") *de numero Indorum*. U njemu se objašnjava **dekadski pozicijski brojevni sustav** i operacije u njemu. Detaljno opisujući računske operacije prema indijskoj metodi, al-Khwarizmi neprestano naglašava kako je važno ništa ne izostaviti. Posebno naglašava da se ne smiju zaboraviti nule, prvenstveno jer poznaje ljude svog vremena koji su se koristili njegovim knjigama (naime, u to doba nula je bila još daleko od općeprihvaćenog i općepoznatog koncepta).

U ovom djelu vide se staroegipatski utjecaji jer al-Khwarizmi navodi šest računskih operacija. Uz zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, on objašnjava i dijeljenje s dva (raspolavljanje) te množenje s dva (udvostručavanje). U egipatskoj matematici udvostučavanje i raspolavljanje je imalo važnu ulogu, pogotovo kod množenja i dijeljenja velikih brojeva. Znajući da će ovu knjigu čitati početnici, al-Khwarizmi kod množenja napominje da se prvo mora na pamet naučiti 1 puta 1 pa sve do 9 puta 9. Također, napominje da je važno znati da je $n \cdot 0 = 0$ i $0 \cdot n = 0$.

Al-Khwarizmi korijene vadi koristeći seksegezimalne razlomake, uvijek aproksimativno. Na primjer:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000} \approx \frac{1414}{1000}$$

ili:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{24}{60^3}.$$

Al-Khwarizmi seksegezimalne razlomke pripisuje Indijcima, što nije baš točno jer se oni pojavljuju tisuću godina ranije u sumersko-babilonskim državama. Al-Khwarizmijevi arapski matematički suvremenici zapisivali su razlomke kao zbroj razlomaka s brojnikom jedan. Takav način prikazivaja razlomaka bio je poznat Grcima, Babiloncima, a posebno Egipćanima, prema čijem korištenju tog načina u 2. tisućljeću pr. Kr. takav zapis nazivamo egipatskim razlomcima.

Najvažnije al-Khwarizmijevo djelo jest udžbenik *Hisab al-Jabr w-al-Muqabala*. Iz imena udžbenika izvedena je riječ **algebra** (*al-jabr*) pa je kasnije ovaj udžbenik poznat pod nazivom *Algebra*. Udžbenik je podijeljen na tri dijela:

- algebarski dio;
- kratko poglavlje o geometriji;
- opširniji dio o oporukama i nasljeđivanju.

[3]Oko 1070.–1160., engleski učenjak i jedan od najznačajnijih srednjevjekovnih prevodioca arapskih djela na latinski.

Važno je napomenuti da al-Khwarizmi i u ovom djelu, kao i u *Aritmetici*, svoju matematiku opisuje vrlo opširno riječima, ne koristeći simbole.

Slika 2.3: Stranica iz al-Khwarizmijeve *Algebre* (slika preuzeta s Wikipedije)

Posebno je poznato kako je u ovom djelu al-Khwarizmi detaljno opisao rješavanje kvadratnih jednadžbi. Prije nego se posvetimo kvadratnim jednadžbama kod al-Khwarizmija, moramo objasniti njegov odnos prema negativnim i iracionalnim brojevima. U početnim poglavljima ovog djela postoje aluzije na postojanje kvadratnih iracionalnih brojeva, ali ih je al-Khwarizmi uglavnom izbjegavao i birao jednadžbe s racionalnim koeficijentima čija su rješenja uvijek cijeli brojevi. Također, al-Khwarizmi izbjegava negativne koeficijente, što je u to doba uobičajeno. Naravno, i kao rješenja prihvaća samo pozitivna realna rješenja; to je pak posljedica veze sa starogrčkim pristupom, u kojem nepoznanica predstavlja duljinu neke dužine.

Al-Khwarizmi je u *Algebri* dao klasifikaciju linearnih i kvadratnih jednadžbi pri čemu nabraja šest vrsta jednadžbi, što je posljedica izbjegavanja negativnih brojeva:

1. kvadrati su jednaki korijenima, tj. $ax^2 = bx$;
2. kvadrati su jednaki brojevima, tj. $ax^2 = c$;
3. korijeni su jednaki brojevima, tj. $bx = c$;
4. kvadrati i brojevi jednaki su korijenima, tj. $ax^2 + c = bx$ (za ovaj tip moguća su dva rješenja i tog je al-Khwarizmi bio svjestan);
5. kvadrati i korijeni jednaki su brojevima, tj. $ax^2 + bx = c$;

6. korijeni i brojevi jednaki su kvadratima, tj. $bx + c = ax^2$.

Al-Khwarizmi je prikazao postupke rješavanja spomenutih jednadžbi rabeći metode *al-jabr* i *al-muqabala*. Operacija *al-jabr* znači nadupunjavanje, tj. dodavanje pozitivnih članova objema stranama jednakosti jednakih onima koji su negativnih predznaka, a operacija *al-muqabala* podrazumijeva izjednačavanje, tj. oduzimanje pozitivnih članova od obiju strana jednakosti kako bi se skupili članovi iste potencije.

U daljnjem tekstu bit će prikazan jedan primjer primjene navedenih metoda svođenja na zadani tip jednadžbe kojeg navodi al-Khwarizmi, koji u suvremenoj simboličkoj notaciji glasi:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58,$$

odnosno

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Primjenjujući *al-jabr* al-Khwarizmi dobiva

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x,$$

potom jednadžbu dijeli sa 2 te primjenjuje *al-muqabalu* i dobiva

$$x^2 + 21 = 10x$$

što je jednadžba petog tipa.

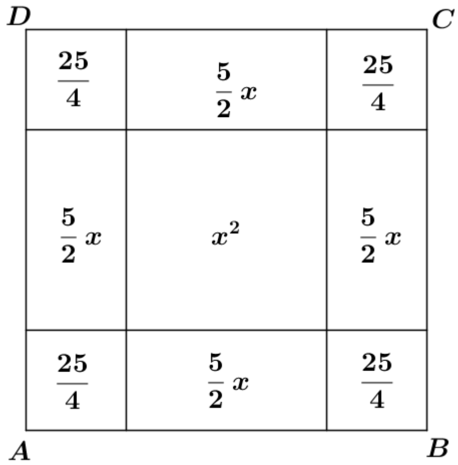
Za rješavanje kvadratnih jednadžbi pojedinih tipova al-Khwarizmi na primjerima pokazuje pravila za rješavanje, a zatim daje geometrijski dokaz. Slijede dva poznata primjera.

Primjer 1. *Kvadrat nepoznatog broja uvećan za* 21 *deset je puta veći od nepoznatog broja. Nađi korijen. (Podrazumijeva se rješavanje upravo spomenute jednadžbe* $x^2 + 21 = 10x$*.)*

Al-Khwarizmijevo rješenje glasi otprilike ovako: *Raspolovi broj korijenova i dobit ćeš* 5*, pomnoži* 5 *sa samim sobom i od umnoška oduzmi* 21 *pa ćeš dobiti* 4*. Izračunaj korijen od* 4 *i dobit ćeš* 2*. Oduzmi* 2 *od* 5 *i dobit ćeš* 3*, to će biti traženi korijen. Ili pribroji* 2 *broju* 5 *i dobit ćeš* 7*, također traženi korijen.*

Primjer 2. *Kvadrat i deset korijenova jednako je* 39*. Nađi korijen. (Podrazumijeva se rješavanje jednadžbe* $x^2 + 10x = 39$*.)*

Za rješavanje se promatra kvadrat (vidi Sliku 2.4.) s nepoznatom duljinom stranice x, nad čijim stranicama su postavljeni pravokutnici, tako da druga stranica svakoga od njih bude jednaka $\frac{5}{2}$. Dakle, površina svakog pravokutnika jednaka je $\frac{5}{2}x$. Dobiveni lik se nadopunjava do kvadrata $ABCD$ dodavanjem četiriju sukladnih kvadrata sa stranicama $\frac{5}{2}$



Slika 2.4: Kvadrat uz jednadžbu $x^2 + 10x = 39$

i površinom $\dfrac{25}{4}$. Tada se površina p kvadrata $ABCD$ može prikazati kao zbroj površina početnog kvadrata x^2, četiriju pravokutnika $(4 \cdot \dfrac{5}{2} \cdot x = 10x)$ i četiriju nadodanih kvadrata $(4 \cdot \dfrac{25}{4} = 25)$, tj.

$$p = x^2 + 10x + 25. \tag{2.1}$$

Iz početne jednadžbe slijedi da izraz $x^2 + 10x$ u jednadžbi (2.1.) možemo zamijeniti brojem 39, čime dobivamo da je $p = 64$. Iz toga dobivamo da je duljina stranice kvadrata $ABCD$ jednaka 8. Za nepoznatu duljinu x stranice prvog kvadrata sada dobivamo da je

$$x = 8 - \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 3.$$

Geometrijsko rješenje u ovom primjeru odgovara sljedećem algebarskom postupku za rješavanje kvadratne jednadžbe oblika $x^2 + px = q$:

1. $x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$;

2. $\left(x + 2\frac{p}{4}\right)^2 = q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2$;

3. $x + 2\frac{p}{4} = \sqrt{q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2}$;

4. $x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right).$

Posljednja formula predstavlja al-Khwarizmijevo pravilo za rješavanje kvadratne jednadžbe tipa $x^2 + px = q$.

Nakon „kanonskih" oblika jednadžbi al-Khwarizmi prelazi na objašnjavanje, pomoću primjera, osnovnih pravila za algebarske operacije:

- množenje monoma i binoma, na primjer

$$\left(10 + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 5x\right) = 5 - 50x + \frac{x}{4} - \frac{5}{2}x^2 = 5 - \frac{199}{4}x - \frac{5}{2}x^2;$$

- transformacije korijena, na primjer: $a\sqrt{x} = \sqrt{a^2x}$ ili $\sqrt{a^2x} = a\sqrt{x}$;
- množenje korijena, na primjer: $2\sqrt{x} = \sqrt{4x}$ ili $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50}$.

Završni dio knjige al-Khwarizmi je posvetio problemu naslijeđivanja i načinu na koji se raspodjeljuje ostavština. Time je olakšao posao dvorskim pisarima, a kao karakterističan primjer u knjizi se spominje njegov pristupni zadatak dvoru kalifa Haruna al-Rashida, čije je rješenje detaljno zapisao i objasnio.

Geometrijski dio svoje knjige al-Khwarizmi je napisao za potrebe prakse, tj. građevine. Ovaj dio *Algebre* sadrži pravila za izračune vezane za osnovne geometrijske oblike i najjednostavnije primjene algebre na primjerima vezanima uz trokut. Velika većina pravila je dana putem definicija i dokaza, ili barem uz kratko objašnjenje. Al-Khwarizmi proučava trokute, četverokute i krugove. Razlikuje tri vrste trokuta: pravokutni, šiljastokutni i tupokutni, a kao karakteristiku tog razlikovanja daje odnose među kvadratima na najduljoj stranici i zbroja kvadrata na preostalikm stranicama (uočimo poveznicu s Pitagorinim poučkom). Također, razlikuje pet vrsta četverokuta: kvadrate, pravokutnike, rombove (*četverokuti koji imaju oblik oka*), paralelograme (*četverokuti koji izgledaju kao romb*) i četverokute koji imaju duljine stranica i veličine kutova *potpuno nejednake*.

Al-Khwarizmi za omjer opsega kružnice i promjera (dakle, za konstantu koju danas označavamo s π) navodi tri vrijednosti i to redom: $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$ i $\frac{6832}{2000}$. Također, on navodi da je površina kruga jednaka umnošku polovine promjera i poluopsega kružnice, tj.

$$P = \frac{d}{2} \cdot \frac{O}{2} \left[= r \cdot \frac{O}{2} = r \cdot \frac{2r\pi}{2} = r^2\pi\right].$$

Napomenimo da je gornji rezultat, da je površina kruga jednaka površini pravokutnog trokuta kojemu su katete duljina polumjera odnosno poluopsega kruga, prvi pokazao Arhimed u 3. st. pr. Kr. Uz to, al-Khwarizmi navodi i formulu za izračunavanje površine kružnog isječka pomoću duljine kružnog luka, tetive i visine odsječka te formule za izračunavanje zapremina prizme, cilindra i piramide.

Od ostalih važnih doprinosa matematici al-Khwarizmija potrebno je napomenuti da je sastavio tablicu sinusa i kosinusa, a pripisuje mu se i jedno djelo o sfernoj trigonometriji.

2.2 Thabit ibn Qurra

Sljedeći poznati arapski matematičar bio je Thabit ibn Qurra, punim imenom Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani. Rođen je u gradu Harranu, koji se nalazi na području današnje Turske, 826. godine. Tijekom života, osim matematike, bavio se medicinom, astronomijom i prevođenjem. Umro je 18. veljače 901. godine. Nije bio musliman već je pripadao Sabejcima, arapskom plemenu koje je bilo jedinstveno po odbijanju islamizacije. Grad Harran bio je nastanjen astronomima, astrolozima, medicinarima i matemtičarima. Stanovnici Harrana vjerovali su u moć brojeva te u čovjekovu sudbinsku povezanost za položaj zvijezda. Sabejci su govorili sirijski, grčki ili arapski, ovisno o tome što su željeli objasniti. Zbog toga sve su značajnije grčke knjige preveli na sirijski ili arapski jezik.

U to vrijeme u Bagdadu je osim prevoditeljske radionice u *Kući mudrosti* radila i prevoditeljska skupina okupljena oko Shakira ibn Muse[4] i njegova tri sina. Oni su nastojali skupiti što više rukopisa drevnih pisaca i prevesti ih na arapski jezik. Tri sina Shakira ibn Muse poznata kao Banu Musa bili su Muhammed, Ahmad i Hasan. Muhammad se više zanimao za astronomiju, Ahmad za mehaniku, a Hasan za geometriju te su prevodili na potpuno novi način u odnosu na stare prevoditelje, koji su prevodili doslovno s grčkog, riječ po riječ. Braća Banu Musa osim prevođenja i sami su pisali, a svako njihovo djelo rezultat je zajedničkog rada pa im se nije ni jedno osobno pripisalo. Prvenstveno su se bavili primjenom metode ekshaustije[5] pomoću koje su dokazali da površina kruga može biti izražena umnoškom dijametra i poluopsega kružnice (Arhimedov rezultat) te da je odnos opsega kružnice i dijametra konstantan. Poput Arhimeda oni taj odnos smještaju između $3\frac{10}{71}$ i $3\frac{1}{7}$. Također, izvode Heronovu formulu za površinu trokuta, koju dokazuju na svoj način, a koristili su i metodu interpolacije kod konstrukcija te su elipsu konstruirali pomoću konopca koji su učvrstili u dvije točke (vrtlarska konstrukcija elipse).

Za Thabita ibn Qurru se zbog znanja grčkog i arapskog jezika, pored materinjeg sirijskog, prolazeći kroz Harran pri povratku iz Bizanta, zainteresirao Muhammad ibn Musa. Na njegov poziv, Thabit ibn Qurra s obitelji preselio se u Bagdad, gdje je u periodu od nekoliko godina stekao status jednog od najcjenjenijih matematičara.

---

[4]Shakir ibn Musa, arapski astrolog i astronom.

[5]Starogrčka metoda kojoj je glavna primjena bila određivanje površina zaobljenih likova. Smatra se pretečom infinitezimalnog računa, a pripisuje se Eudoksu iz Knida (4. st. pr. Kr.).

Sa sobom je u Bagdad Thabit ibn Qurra poveo i svog sina Sinana koji je bio vrstan liječnik. Godine 931., kalif je ovlastio Sinana da sve liječnike u Bagdadu podvrgne ispitu te, onima koji zaslužе da liječe narod, izda potvrde. Ostali su bili protjerani iz grada pod prijetnjom smrtne kazne ako se u njega ikada vrate. Pred Sinana je izašao ogroman broje liječnika, ali samo njih 860 je dobilo potvrdu da može liječiti narod.

Do svoje smrti Thabit ibn Qurra je ostao u Bagdadu dugi niz godina surađujući s Banu Musama. Posljednjih desetak godina svojeg života bio je stalan član dvora kalifa al-Mutadida te je prema zapisima bio vrlo blizak s kalifom. Njegov sin Sinan i njegova dva unuka također su postali poznati matematičari.

Slijedeći razvoj matematičke terminologije u arapskom jeziku, uočava se da je stil Thabita ibn Qurre matematički. Pisanje počinje neophodnim postulatima i definicijama, zatim daje originalne teoreme, a potom slijedi dokaz u kojem se oslanja na već prihvaćene pojmove.

Kao prevoditelj, Thabit ibn Qurra najčešće prevodi djela Euklida, Nikomaha, Herona i Arhimeda. Posebno su važni njegovi komentari Euklidovih djela, osobito pete knjige *Elemenata*[6], te njegovo propagiranje Arhimedovih djela. Tijekom prevođenja mnogo je pažnje posvećivao djelima koje je prevodio, stoga njegovi prijevodi prate originalne izvore, a ponekad je i sam pokušavao razvijati misli antičkih matematičara.

U svojem djelu *Knjiga o **teoriji brojeva***, Thabit ibn Qurra je izložio tzv. teoriju prijateljskih brojeva[7] uz koju navodi i teorem o prijateljskim brojevima:

Teorem 2.2.1. *Ako su za neki prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n pq$ i $2^n r$ prijateljski.*

Thabit ibn Qurra je za $n = 2$ dobio par brojeva 220 i 284, koji je bio poznat još pitagorejcima, a za $n = 4$ par brojeva 17296 i 18416. Osim ta dva para brojeva danas je poznat i par koji se dobije uvrštavanjem broja $n = 7$. Brojeve oblika $3 \cdot 2^n - 1$ danas nazivamo Thabitovim brojevima.

Thabit ibn Qurra bavio se i **geometrijom**. Bio je upoznat s Arhimedovim načinom rješavanja kvadrature jednog segmenta parabole, no on je problem rješio koristeći drugu metodu, o čemu piše u djelu *Knjiga o mjerenju konusnog presjeka zvanog parabola*. Metoda koju je on koristio naziva se metodom zbroja integrala, a parabola koju je promatrao bila je definirana osobinom koju danas zapisujemo jednadžbom $y^2 = px$.

U djelu *Knjiga o dokazu slavnog Euklidovog postulata*, Thabit ibn Qurra se bavio čuvenim petim Euklidovim postulatom[8]. U trećem poučku u ovoj knjizi Thabit ibn Qurra

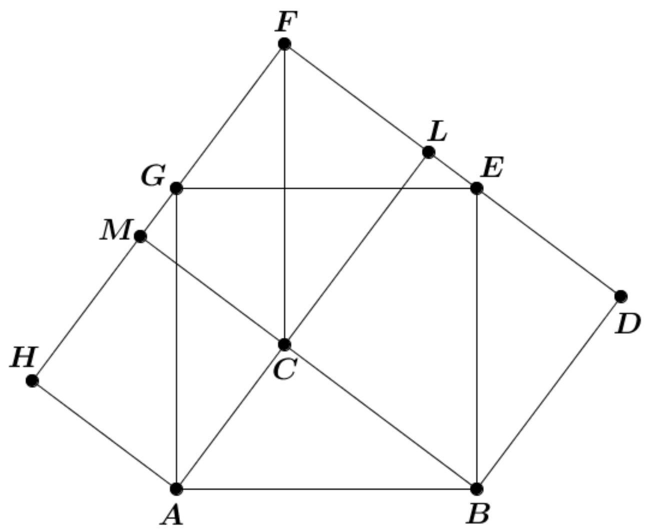
[6]Peta knjiga Euklidovih *Elemenata* sadrži teoriju omjera i razmjera.

[7]Par prirodnih brojeva zove se prijateljski ako je svaki od njih jednak zbroju pravih djelitelja drugog.

[8]Dva pravca presječena trećim pravcem sijeku se s one strane trećeg pravca na kojoj je zbroj unutarnjih kutova koje oni čine s njim manji od dva prava kuta.

dokazuje da se odsječci koji se nastavljaju na krajeve dviju dužina što se *niti ne približavaju niti ne udaljavaju* (ne rabi pojam *paralele*), tj. jednako su udaljene jedna od druge, i sami jednako udaljeni. U četvrtom poučku utvrđuje da je srednjica trokuta jednaka polovici osnovice od koje je jednako udaljena ali dodaje i da pravac jednako udaljen od osnovice trokuta povezuje one točke bočnih stranica koje ih djele u jednakom omjeru. U petom poučku svoje knjige, ujedno i posljednjem, Thabit ibn Qurra je mislio da je dokaz petog Euklidovog postulata, ali danas znamo da Euklidov peti postulat nije dokaziv.

Thabit ibn Qurra dokazivao je i Pitagorin poučak, a jedan njegov dokaz ilustriran je na slici 2.6.



Slika 2.5: Thabit ibn Qurrin dokaz Pitagorinog poučka

Dokaz (Thabit ibn Qurrin dokaz Pitagorinog poučka). Uočavamo da su površine trokuta *ABC, AHG, CMF, FLC, GFE* i *EDB* jednake. S jedne strane, površina lika *ABDFH* je jednaka $|AC|^2 + |BC|^2+$ površine trokuta *ABC, CMF* i *FLC*. S druge strane, površina lika *ABDFH* je jednaka $|AB|^2+$ površine trokuta *AHG, GFE* i *EDB*. Iz toga da su površine trokuta *ABC, AHG, CMF, FLC, GFE* i *EDB* jednake slijedi da je $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$.

□

Potrebno je spomenuti i djelo *Poslanica o magičnim kvadratima*, u kojem se Thabit ibn Qurra bavi omiljenom temom istočnjačkih matematičara. Uz navedeno, Thabit ibn Qurra autor je i knjige pod nazivom *Knjiga o kvadratu i njegovoj dijagonali*.

Valja napomenuti da je Thabit ibn Qurra među prvima primjetio varijabilnost nagnutosti ekliptike. Provjeravajući rezultate Hiparha i Ptolomeja, vrijednost te nagnutosti izračunao je na $23°33'30''$ umjesto ranijih $23°52'$. Pruočavajući rezultate svojih prethodnika primjetio je neku vrstu zakonomjernog kretanja točke ekvinocija odakle slijede greške u određivanje Sunčane godine. Prema njegovim izračunima godina sadrži 365 dana 6 sati 9 minuta i 11 sekundi. Znajući da moderna godina iznosi 365 dana 6 sati 9 minuta i 13 sekundi dolazimo do zaključka kako je, za njegovo doba, ovo otkriće bilo revolucionarno.

2.3 Al-Battani

Slijedeći istaknuti arapski matematičar o kojem ćemo govoriti je al-Battani. Al-Battani je bio poznat i pod latiniziranim imenom Albategnius. Punim imenom Abu Abdallah Mohammad ibn Jabir al-Battani, živio je otprilike od 858. do 929. godine. Osim što je bio poznati arapski matematičar, al-Battani je proučavao astrologiju i astronomiju. Kao i ranije spomenuti Thabit ibn Qurra, al-Battani je također rođen u Harranu, no ubrzo nakon toga preselio je u Raqqu, grad u Siriji na obali Eufrata. Njegova obitelj je kao i Thabit ibn Qurra pripadala Sabejcima.

Slika 2.6: Al-Battani (slika preuzeta s Wikipedije)

Još kao mladog matematičara posebno ga privlačio grad Bagdad zbog svih velikih matematičara i prevoditelja koji su tamo djelovali. Al-Battani se odlučio spustiti niz Eufrat do Bagdada te je odmah potražio kuću Thabita ibn Qurre. On ga je primio u svoju kuću te su uz večeru dugo razgovarali. Za razliku od Thabita ibn Qurre, al-Battani je bio mnogo neodlučniji pa je uskoro prihvatio islam. Al-Battaniju nisu bile važne stvari izvan astronomije i matematike pa mu je bilo svejedno koje je vjere. Jedino mi je bilo važno da ga nitko ne sprječava u radu i da u njemu ima punu slobodu. Sljedećeg dana su razgovarali o svemu što se događa u Raqqi, a zatim ga je Thabit ibn Qurra poveo u razgledavanje Bagdada. Osim što je Thabit ibn Qurra želio svome gostu pokazati Bagdad, želio je istovremeno kroz razgovor saznati što je al-Battaniju poznato, na čemu sada radi te što bi još trebao usavršiti. Nakon što su stigli do jednog sunčanika, Thabit ibn Qurra ga je ispitivao o načinima izračunavanja zenitne udaljenosti Sunca, odnosno geografske širine nekog mjesta na Zemlji. Razgovarali su i o Aristotelovoj te teoriji Klaudija Ptolemeja o kretanju nebeskih tijela. Thabita ibn Qurru je zanimao kakav je al-Battani u rješavanju odnosa kružnice i tetive, a al-Battani mu je odmah izložio svoju teoriju u kojoj ga je zanimao odnos između tetive i polutetive, odnosno polovine kuta i polovine tetive. Al-Battani je tu svoju teoriju razvio daleko preko onoga što je do tada bilo poznato.

Nakon što je za nekoliko dana upoznao Bagdad i sve mudre ljude koji su svaku večer dolazili na razgovore u kuću Banu Musa, al-Battani se odlučio vratiti u Raqqu. Sa sobom je ponio vezirovu punomoć da može raditi u kalifovo ime i u slavu Alaha, a na poklon od Thabita ibn Qurre dobio je najnoviji prijepis *Almagesta*[9]. Usput je posjetio Samaru, gdje se nalazio najnoviji astronomski opservatorij.

Kasnije je u više navrata posjećivao Bagdad, ali uvijek na samo nekoliko dana. Prilikom jednog posjeta Alepu, u koji je često odlazio, upoznao je al-Farabija[10], čovjeka koji je svirao sve uobičajene instrumente tog doba i matematički tumačio glazbu. Al-Farabi je često slušao izlaganja al-Battanija o njegovoj teoriji nebeskih odnosa koja je bila bliska teoriji Klaudija Ptolemeja. Iako je zagovarao Aristotelovu teoriju, al-Farabi nikad nije proturječio al-Battaniju. Al-Farabi je dva puta liječio al-Battanija, jednom od vodene bolesti, a drugi put mu je dao neku mast za oči koju je sam spravljao jer su al-Battaniju od dugotrajnog gledanja u zvijezde oči slabile i suzile. Mast je pomogla al-Battaniju da vidi kao i ranije, čisto i jasno.

Povjesničari se slažu da je Al-Battani preminuo 929. godine, u neposrednoj blizini grada Mossul u Iraku. Bio je cijenjen i poštovan te jedan od najpoznatijih arapskih astronoma. Cijeli svoj život sve do smrti posvetio je promatranju planeta i zvijezda.

Najvažnije dopinose u matematici al-Battani je dao u području **trigonometrije**. Trigonometrija, posebice sferna, je za islamski svijet, uz primjenu u astronomiji, bila vrlo važna zbog određivanja položaja Meke u odnosu na mjesto gdje se nalazi džamija. Ritualni razlozi nalažu muslimanima da svoju molitvu usmjere prema Meki.

Već prije al-Battanija trigonometrija je kod Arapa doživjela značajan uspon. Nakon prijevoda za ranu grčku trigonometriju ključnog djela Klaudija Ptolemeja (*Matematička ras-*

[9]Almagest, naslov arapskog prijevoda djela Klaudija Ptolemeja o antičkoj teoriji gibanja nebeskih tijela u geocentričnom sustavu svemira.

[10]Al-Farabi (870. – 950.), veliki perzijski filozof, znanstvenik i glazbenik.

prava), poznatijeg pod naslovom arapskog prijevoda *Almagest*, te upoznavanja s indijskom trigonometrijskom tradicijom mnogi su se matematičari posvetili isključivo rješavanju praktičnih trigonometrijskih zadataka. Arapski matematičari pokušavali su tablice sinusa i kosinusa odrediti što točnije, a al-Battani je bio jedan od najboljih u tom poslu te je sastavio čuvene *Sabejske tablice*. Kao što je prije navedeno, jedno od prvih trigonometrijskih djela u Bagdadu pripada al-Khwarizmiju, ali su u njemu tablice tangensa sigurno naknadno dodane.

U djelu *Revizija Almagesta*, al-Battani sustavno primjenjuje sinus i kosekans[11], uzimajući kutove od 0° do 90°. U tom djelu al-Battani je razmatrao čak šest trigonometrijskih veličina i to: sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans[12] i kosekans. Također, u djelu nalazimo i sljedeće omjere izražene riječima:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{r}{\operatorname{cosec}\alpha};$$

$$\frac{\cos\alpha}{r} = \frac{r}{\sec\alpha};$$

$$r\sec\alpha = \sqrt{r^2 + r^2\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$r\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{r^2 + r^2\operatorname{ctg}^2\alpha};$$

$$\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}.$$

Ako uzmemo $r = 1$, onda zapisi relacija dobivaju oblik suvremenih formula. Proučavajući pravokutne trokute al-Battani pokazao je da za njih vrijedi:

$$b\sin\alpha = a\sin(90^\circ - \alpha).$$

Baveći se astronomijom al-Battani je poboljšao mnoge rezultate svojih prethodnika. Napisao je i djelo *Kitab al-zij (Knjiga astronomskih tablica)* koje su temelji na Ptolomejevoj teoriji i drugim grčko–sirijskim izvorima, no vidljiv je i indijski utjecaj. Knjiga je

[11]Kosekans, jedna od trigonometrijskih funkcija. Jednak je omjeru hipotenuze i nasuprotne katete u pravokutnom trokutu, tj. jednak je recipročnoj vrijednosti sinusa kuta.

[12]Sekans, jedna od trigonometrijskih funkcija. Jednak je omjeru hipotenuze i priležeće katete u pravokutnom trokutu, tj. jednak je recipročnoj vrijednosti kosinusa kuta.

kasnije prevedena na latinski jezik te je imala veliki utjecaj na europske renesansne astronome. U tom je djelu al-Battani je odredio nagib ekliptike na $23°35'$, a trajanje solarne godine izračunao je na 365 dana 5 sati 46 minuta i 24 sekunde, što je pogrešno za manje od 2 min. Nadalje, proučavao je prosječne udaljenosti središta planeta do središta Zemlje, ispravio više podataka o kretanju Mjeseca i planeta te odbacio tezu Thabita ibn Qurre o treptanju zvijezda. Njegov rad imao je veliki utjecaj na Keplera, Galilea i Kopernika te su ga oni vrlo često citirali.

Osim *Kitaba al-zija*, *Sabejskih tablica* i *Revizije Almagesta* značajna su i sljedeća al-Battanijeva djela: *Poslanica o preciznom određivanju konjunkcija*, *Jedan komentar o četiri Ptolomejeva teorema*, *Traktat o dužinama* i *Knjiga o određivanju izlaska znakova zodijaka među kvadrantima nebeske sfere*.

2.4 Abu'l-Wafa

Abu'l Wafa Muhammad ibn Muhammad ibn Yahya ibn Ismail al-Buzjani, ili kraće Abu'l Wafa, rođen je 940. godine u Buzhganu u današnjem Iranu, a umro je 998. godine u Bagdadu. Abu'l Wafa je bio perzijski matematičar i astronom. Pisao je o geometriji, trigonometriji, aritmetici i praktičnoj astronomiji. Od malena se isticao svojim bistrim umom kada je s lakoćom rješavao teške zadatke preračunavanja novca. Nakon što je upio znanje svojih učitelja, te pručio radove Euklida i Ptolemeja, počeo je razmišljati, kao i svi veliki matematičari tog vremena, o dobrim bibliotekama u Bagdadu, kamo se ubrzo preselio.

Slika 2.7: Abu'l Wafa (slika preuzeta s Wikipedije)

Ubrzo nakon dolaska u Bagdad, mladog Abu'l Wafu njegova je ljepota i mudrost učinila centralnom osobom oko kojeg su se okupljali znanstvenici i umjetnici. Voljeli su ga glazbenici, pjesnici, arhitekti, astronomi, matematičari, ali i veziri te kalifi, bez obzira koji je bio na vlasti.

Jedno od najvažnijih Abu'l Wafinih djela jest *Rasprava o računskim elementima neophodnim pisarima i upravnicima*, koje je pisano u sedam poglavlja i u kojem je obrađeno sve što tim ljudima u praksi zadaje računske probleme. Sedam poglavlja ovog djela su:

- omjeri;
- množenje i dijeljenje;
- operacije sa površinama;
- operacije poreza (harača);
- operacije dijeljenja (naslijeđa);
- operacije mijenjanja;
- komercijalne transakcije.

Abu'l Wafa ne poklanja previše pažnje dokazivanju pojedinih stavova, pogotovo onih preuzetih od Grka i al-Khwarizmija. U navedenom djelu, Abu'l Wafa sustavno izlaže gradivo te ga s lakoćom korisiti u praktičnom radu, što je bio i glavni cilj samog djela. Tu Abu'l Wafa koristi obilježavanje svojstveno njegovom vremenu, što znači da nema pozicijske numeracije, za pisanje brojeva koristi arapski alfabetski brojevni sustav, a računi se provode *u glavi*. Važno je istaknuti da Abu'l Wafa u svome djelu koristi **negativne brojeve**, a moguće je da je to jedino mjesto njihova pojavljivanja u srednovjekovnoj arapskoj matematici. Abu'l Wafa daje opće ravilo te zapisuje poseban slučaj da oduzimanje 5 od 3 daje *dug* 2.

U ovom djelu posebno je zanimljivo Abu'l Wafino detaljno razmatranje **razlomaka**. Prvo navodi da je odnos dva broja mjera jednog uspoređena s mjerom drugog. Pri tome postoje tri vrste odnosa među brojevima: onaj manjeg prema većem, onaj većeg prema manjem i onaj dva jednaka broja. Razlomak definira kao odnos jednog broja prema drugom većem od njega, dakle razmatra samo tzv. prave razlomke. Razlikuje tri vrste razlomaka koje on naziva osnovnim:

- glavni razlomci, tj. razlomci koji imaju brojnik jedinicu, od $\frac{1}{2}$ do $\frac{1}{10}$;
- složeni razlomci oblika $\frac{m}{n}$, $m < n \leq 10$, među kojima razlomak $\frac{2}{3}$ zauzima posebno mjesto;

- ujedinjeni razlomci, tj. umnožak dva ili više glavnih razlomaka.

Abu'l Wafa razlikuje i *izrazive* i *neizrazive* razlomke. *Izrazivi* su razlomci oni koji u nazivniku imaju faktore 2, 3, 5 i 7, a *neizrazivi* su razlomci koji u nazivniku sadrže proste faktore veće od 7. Da bi olakšao račun s razlomcima, sastavio je četiri tablice. U prvoj tablici (Tablica 2.1.) zapisani su glavni razlomci:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
30	20	15	12	10	$8\frac{4}{7}$	$7\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$	6

Tablica 2.1: Tablica glavnih razlomaka

Druga tablica sadrži različite složene razlomke od $\frac{2}{3}$ do $\frac{9}{10}$. Abu'l Wafa za svoje razlomke daje elegantnije izraze u obliku zbroja osnovnih razlomaka i složenih razlomaka, na primjer:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\ \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10},\ \dots,\ \frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}.$$

U trećoj tablici nalazimo dvočlane zbrojeve nekih često korištenih razlomaka, na primjer: $\frac{1}{2} + \frac{1}{7}, \frac{1}{2} + \frac{1}{9}$, itd. do $\frac{1}{9} + \frac{1}{10}$. Četvrta tablica sadrži u seksegezimalnom obliku dvočlane umnoške razlomaka, na primjer: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$, itd. do $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10}$. Abu'l Wafa daje i više načina da se izračuna približna vrijednost razlomka. Odabirao je zgodne brojeve te je uspijevao postići da se greška pri računanju svede na minimalnu mjeru.

U drugom djelu svoje knjige Abu'l Wafa opisuje operacije s cijelim brojevima, obične razlomke te izrazive razlomke uz pomoć osnovnih razlomaka. Pri tome ne koristi udvostručavanje i dijeljenje s dva, operacije koje su prije njega bile prisutne u sličnim djelima. Kod određivanja najmanjeg zajedničkog nazivnika Abu'l Wafa traži da se odredi najmanji zajednički višekratnik. Metode računanja s razlomcima zapisane u njegovom djelu su djelomično seksegezimalne. Evo primjera za zbroj i umnožak razlomaka:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 60 + \frac{2}{3} \cdot 60 + \frac{3}{10} \cdot 60}{60} = \frac{106}{60} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10};$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot 60 + \frac{1}{5} \cdot 60\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{60} = \frac{22\frac{1}{2}}{60} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}.$$

U geometrijskom dijelu knjige *Rasprava o računskim elementima neophodnim pisarima i upravnicima* Abu'l Wafa je preuzeo građu od al-Khwarizmija te ju nadogradio, ali ne navodeći dokaze. U tom dijelu se nalazi Heronova formula za površinu trokuta gdje za π koristi vrijednost $\frac{22}{7}$. Navodi i metode za određivanje udaljenosti i visine nedostupnih objekata pomoću pravokutnog okvira.

U sljedećem važnom djelu *Knjiga o geometrijskim konstrukcijama neophodnih zanatlijama*, Abu'l Wafa piše o primijenjenoj **geometriji** potrebnoj graditeljima tog doba. Knjiga se sastoji od uvoda i 12 poglavlja te sadrži velik broj konstrukcija kojima su se koristili arhitekti, tehničari i geodeti. Važno je istaknuti da je 18 problema riješio pomoću ravnala i šestara sa stalnim otvorom te je time olakšao posao praktičarima na terenu koji nisu bili u mogućnosti translatirati krugove različitih promjera.

U uvodu Abu'l Wafa pokazuje kako se pomoću šestara sa stalnim otvorom konstruira normala na sredini i na kraju dane dužine. U prvom poglavlju, koje sadrži osnovne konstrukcije, istom metodom dijeli dužinu na bilo koji broj jednakih dužina te dijeli kut na dva jednaka dijela. U drugom poglavlju posvećenom pravilnim poligonima, on konstruira za zadanu dužinu kao stranicu mnogokute sa 3, 4, 5, 6, 8 i 10 stranica. U trećem poglavlju obrađuje poligone sa 3, 5, 6 i 8 stranica upisane u krug što je olakšalo posao majstorima ornamenata.

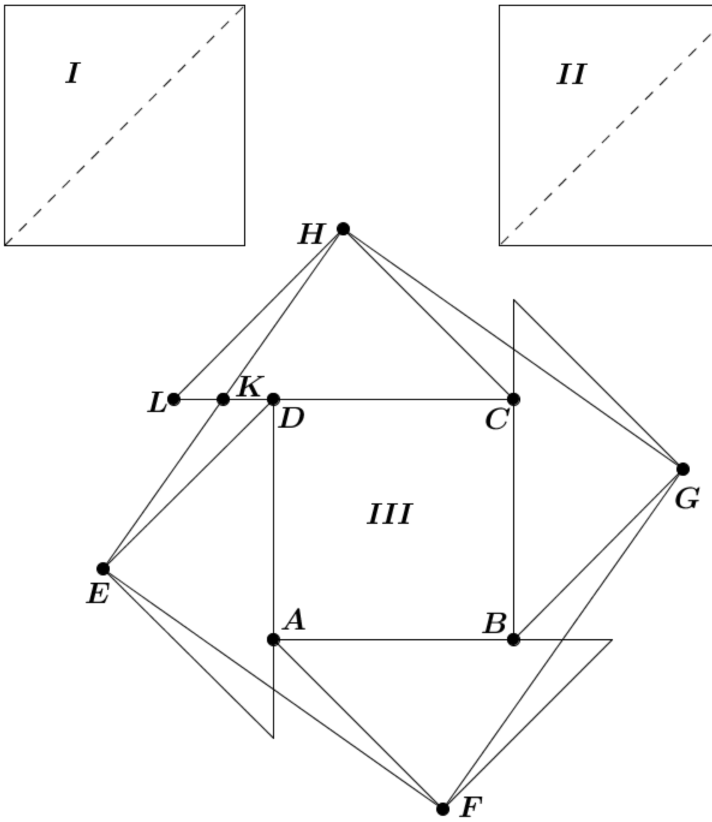
U nastavku opisuje konstrukciju paralela, tangenti na kružnicu, pravilnog sedmerokuta (približna konstrukcija), a izvodi i mehaničku trisekciju kuta te udvostručavaje kocke. U šestom poglavlju Abu'l Wafa razrađuje problem poligona upisanih u krug i opisanih oko kruga. Od sedmog do desetog poglavlja, dotiče se dijeljenja kruga i likova, na primjer, dijeljenja četverokuta na dva jednaka dijela pomoću dužine koja polazi iz jednog vrha.

U jedanaestom poglavlju Abu'l Wafa rješava probleme vezane uz diobu kvadrata na zbroj više kvadrata ili za predstavljanje zbroja kvadrata jednim kvadratom. Evo jednog takvog Abu'l Wafinog zadatka.

Zadatak 1. *Sastavite kvadrat od tri zadana i jednaka kvadrata.*

Rješenje. Razrezavši svaki od dva kvadrata po dijagonali (Slika 2.9.), prislonimo redom hipotenuzu svakog od 4 dobivena pravokutna trokuta na stranicu trećeg isto takvog kvadrata *III*. Tada je *EFGH* traženi kvadrat. Trokut *HLK* koji *strši* zaista je jednak unutarnjem trokutu *EDK* jer je $|HL| = |ED|$, $\angle HLK = \angle EDK = 45^\circ$ i $\angle HKL = \angle EKD$, pa zaključujemo da je $|LK| = |KD|$. Analogno za sve trokute koji *strše*.

U suradnji sa svojim kolegama u Bagdadu Abu'l Wafa je sastavio i nove astronomske tablice, koje su bile vrlo cijenjene. U njima je Abu'l Wafa uspio odrediti ključne trigonometrijske funkcije sa zadovoljavajućom točnošću. Stvorio je novu metodu za izračun tablica koja je bila mnogo točnija i lakša za primjenu. Krenuo je od sinusa pola stupnja i



Slika 2.8: Abu'l Wafin zadatak

koristio interpolaciju. Na taj način izbjegao je trisekciju kuta i dobio prilično točne rezultate. Prvo je odredio vrijednosti trećine kuta čija je veličina bliska $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ redom za $\left(\frac{12}{32}\right)^\circ$, $\left(\frac{15}{32}\right)^\circ$ i $\left(\frac{18}{32}\right)^\circ$. Vrijednost $\sin\frac{12^\circ}{32} = \sin\frac{72^\circ - 60^\circ}{32}$ određena je pomoću pravila za sinus razlike dva kuta koja koristeći današnju notaciju glasi:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Abu'l Wafa je koristio tangense i kotangense te je izračunao njihove tablice kao i tablice sinusa. Također, otkrio je sinusov poučak za sferne trokute koji glasi:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

Astronomi Abu'l Wafu smatraju izravnim pretečom Tycho Brahea[13] u pogledu točnosti predviđanja u astronomiji. Kako se Johan Kepler u svojim zaključcima oslanja na Tycha Brahea, možemo zaključiti da je Abu'l Wafa preteča Keplera. Abu'l Wafa je otkrio i treću lunarnu nepravilnost koja je danas poznata pod imenom Tycha Brahea.

Nakon Abu'l Wafe centri moći iz Bagdada otišli su u druge gradove i pokrajine. Iz toga razloga drugi matematičari nisu imali potrebe dolaziti u Bagdad pa ostaju u mjestima u kojima se centralizirala ekonomska i svjetovna vlast.

2.5 Al-Karaji

Direktni nastavljač djela al-Khwarizmija i Abu Kamila, pa čak i Diofanta[14]. Abu Bakr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji, skraćeno **al-Karaji**, rođen je 953. godine u gradu Karaju u današnjem Iranu. Ovaj matematičar i inženjer većinu svojeg života je proveo u Bagdadu te su sva njegova najvažnija matematička djela nastala tamo. Ne zna se kamo je pri kraju života odselio, a pretpostavlja se da je umro 1029. godine.

Različiti autori drugačije gledaju na važnost al-Karajija na razvoj matematike. Jedni smatraju da je on samo preradio ideje ranijih matematičara, dok većina smatra da je prvi potpuno oslobodio **algebru** od geometrijskih operacija i argumentacija te time iz nje stvorio samostalnu disciplinu.

Al-Karaji je prvi definirao monome $x, x^2, x^3, x^4, \dots$ i $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \dots$ te je dao pravila za množenje i dijeljenje dva monoma, ali nije uspio definirati $x^0 = 1$. Bavio se i neodređenim jednadžbama i njihovim sustavima.

Kod al-Karajija se pojavljuju i začeci matematičke indukcije. U dokazu prvo dokazuje tvrdnju za $n = 1$, zatim za $n = 2$ koristeći već dokazano za $n = 1$, potom za $n = 3$ koristeći već dokazano za $n = 2$, pa tako sve do $n = 5$ uz napomenu da bu se postupak mogao ponavljati u beskonačnost. Iako ovo nije pravilan induktivni dokaz, ovo je važan korak prema razumijevanju induktivnog dokaza.

Koristeći ovaj oblik indukcije, al-Karaji se bavi binomnim teoremom i Pascalovim trokutom. Al-Karaji se bavi zbrojevima prvih n kvadrata prirodnih brojeva, a taj rezultat u modernoj notaciji izgleda:

$$\sum i^2 = \sum i + \sum i(i-1).$$

Također, on se bavi i zbrojevima prvih n kubova prirodnih brojeva, a taj rezultat u modernoj notaciji izgleda:

$$\sum i^3 = \left(\sum i\right)^2.$$

[13]Tycho Brahe (1546. – 1601.), danski astronom, astrolog i znanstvenik.

[14]Diofant Aleksandrijski, posljednji veliki starogrčki matematičar, živio je negdje između 100. i 350. g. n. e.

Al-Karaji je pokazao da je $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)^2$ jednako $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$. Prvo je pokazao da je $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)^2 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2+10^3$, zatim isto pravilo koristi za $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2$, pa potom za $(1+2+3+4+5+6+7+8)^2$, itd. sve do 1.

Pisao je i da je Zemlja okruglog oblika, ali smatrao je da je Zemlja u središtu svemira davno prije nego što su to smatrali Galileo Galilei, Johannes Kepler ili Isaac Newton.

2.6 Al-Haytham

Sljedeći važan arapski matematičar je al-Haytham, punim imenom Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham. Al-Haytham je u zapadnom svijetu poznat pod latinskim imenom Alhazen. Rođen je 965. godine u gradu Basri koji se nalazi u današnjem Iraku. Al-Haytham je bio arapski znanstvenik, matematičar, astronom i filozof sa značajnim doprinosima u optici, astronomiji, teoriji brojeva, geometriji i filozofiji. Na poziv fatimidskog[15] kalifa al-Hakima[16], al-Haytham je napustio vezirsko mjesto u Basri i preselio u Kairo.

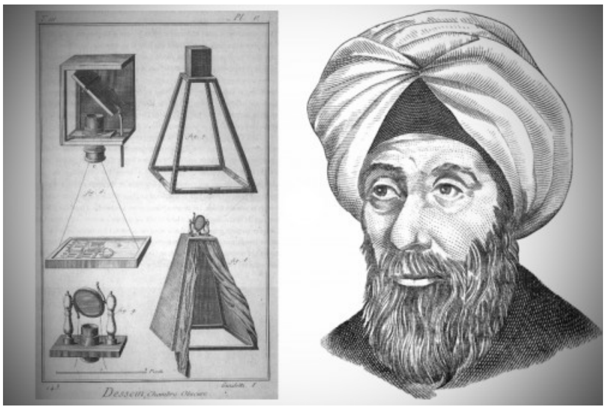
Nedugo nakon dolaska u Kairo, al-Haytham traži kalifovo dopuštenje za projekt regulacije toka rijeke Nil kojom bi spriječio poplave i povećao plodnost zemlje uz samu rijeku. Kalif al-Hakim dopustio je al-Haythamu pokušaj gradnje brane u gornjem dijelu toka rijeke Nil. Također, dao mu je novac da unajmi radnike, nabavi alat i učini sve što je potrebno da završi svoj projekt. Kako je prolazilo vrijeme troškovi su sve više rasli, a rezultata nije bilo. Al-Haytham je shvatio da su njegovi izračuni bili pogrešni i da neće uspjeti završiti svoj projekt. Bojeći se osvete kalifa al-Hakima, al-Haytham je odglumio ludilo zbog čega je držan u kućnom pritvoru do kalifove smrti 1021. godine. Upravo u to vrijeme napisao je više od 100 djela iz svih područja znanosti, matematike, astronomije, optike i filozofije. U Kairu je ostao sve do svoje smrti 1040. godine.

Zbog njegovog kvantitativnog, empirijskog i eksperimentalnog pristupa u fizici i znanosti, al-Haytham se smatra pionirom moderne znanstvene metode i eksperimentalne fizike. Neki ga smatraju osnivačem psihofizike i eksperimentalne psihologije zbog njegovog eksperimentalnog pristupa u psihologiji vizualne percepcije.

Najvažnije al-Haythamovo djelo je *Knjiga o optici (Kitab al-manazir)*, čiji je original izgubljen, ali je knjiga sačuvana zahvaljujući latinskom prijevodu Gerarda iz Kremone. Naslov *Knjige o optici* na latinskom jeziku glasio je *Opticae thesaurus*. Prijevod ove knjige uvelike je utjecao na rad europskih znanstvenika poput Rogera Bacona, Leonarda da Vincija, Galilea Galileija, Renea Descartesa, Johana Keplera i drugih. Al-Haythamova razmišljanja u *Knjizi o optici* dala su teorijske osnove za kasnije praktične izume, poput

[15] Fatimidi, šiitska dinastija koja je vladala područjem Magreba i Egipta.

[16] Abu Ali Mansur Tariku al-Hakim (985. – 1021.), vladao od 996. do 1021.



Slika 2.9: Al-Haytham (slika preuzeta s Wikipedije)

povećala ili leća. Knjiga sadrži mnoge primjere optičkih pojava, poput duge, ogledala i refrakcije.

Al-Haytham je bio uvjeren da je ispravna teorija vida rezultat usuglašavanja Euklidovog matematičkog i Ptolemejevog fizičkog pristupa. Tako je al-Haytham u *Knjizi o optici* dao svoju novu teoriju vida koja je bila bolja od prethodnih. On je smatrao da svijetlost i boja linearno izbijaju iz svake točke vidljivog objekta.

Kako je al-Haytham zastupao eksperimentalni pristup, mnoga je gledišta koja nisu bila nova, iznosio uz pomoć iskustvenih argumenata što je imalo izuzetan efekt na njegove sljedbenike. Kako je bio i odličan astronom, al-Haytham u optiku unosi astronomsku metodologiju ispitivanja, provjeravanja i zaključivanja. Tako zahtjeva da se eksperimentima moraju provjeriti linearno širenje svijetlosti, te odbijanje i prelamanje svjetlosnih zraka.

U navedenoj knjizi al-Haytham posebno precizno određuje točku na ogledalu od koje se odbija svjetlosna zraka, u slučaju sfernih i cilindričnih ogledala, ako se položaj svjetlosnog izvora i ogledala unaprijed zna. Taj problem se naziva Alhazenovim problemom i svodi se na sljedeće:

Neka su u ravnini dani krug i dvije točke izvan kruga, treba na kružnici pronaći točku tako da dužine koje spajaju tu točku s dvije dane točke određuje jednake kutove s polumjerom kružnice koji prolazi kroz tu točku.

Ovaj problem se također može opisati pomoću jednadžbe četvrtog stupnja.

Al-Haytham je dva svoja djela posvetio analizi Eukidovih *Elemenata*. Prvo djelo je *Knjiga komentara o nedokazanim tvrdnjama iz Euklidove knjige Elemenata* u kojem ispituje definicije, aksiome i postulate poznate Euklidu. Drugo djelo je *O rješavanju sumnji u Euklidovim Elementima* u kojem su detaljno prokomentirane tvrdnje grčke **geometrije**.

U prvom djelu al-Haytham se detaljno bavi problemom petog Euklidovog postulata, a počinje objašnjavanjem pojma paralelnih pravaca. Polazeći od Euklidove definicije paralelnih pravaca[17], al-Haytham tvrdi da se složenost petog postulata u usporedbi s drugim aksiomima sastoji u samom shvaćanju paralelnosti koja je usko povezana s pojmom beskonačnosti. U praksi je jasno da možemo predočiti samo ograničeni mali dio pravca (ravnine ili prostora), ali Euklidov peti postulat, kao i pojam paralelnih pravaca, zahtijeva predodžbu beskonačnog prostora.

Al-Haytham je smatrao da je pojam beskonačnog pravca moguće definirati pomoću izgradnje odsječka koji je koliko god puta želimo veći od zadanog, tj. pomoću Arhimedovog aksioma[18]. Također, al-Haytham je pomoću kinematičkih pojmova koje je preuzeo od Thabita ibn Qurre dokazao da geometrijsko mjesto točaka ravnine koje su jednako udaljene od pravca na jednu njegovu stranu jest pravac. Na tome se zasniva njegov „dokaz” petog postulata. Važno je primjetiti da je pri tome al-Haytham promatrao četverokut s tri prava kuta, a četvrti je tupi. Danas se taj četverokut naziva *Lambertov četverokut*, po njemačkom matematičaru Johannu Heinrichu Lambertu.

Na kraju svog „dokaza” al-Haytham izjavljuje da peti Euklidov postulat, kojeg je on „dokazao”, treba skinuti s liste postulata i kao teorem zapisati prije teorema 29 u prvu knjigu *Elemenata*. Iako je al-Haytham mislio da je dokazao peti Euklidov postulat, danas možemo reći da ga je on samo pokušao dokazati.

Od ostalih rezultata u **geometriji** al-Haytham je pokazao poopćenje prvog Hipokratovog mjeseca[19]. Al-Haytham je pokazao da je površina pravokutnog trokuta jednaka površini mjeseca omeđenih polukružnicama nad katetama i kružnicom nad hipotenuzom.

Nakon Thabita ibn Qurre i al-Kuhija[20], al-Haytham je također dao značajan doprinos povijesti **infinitezimalnog računa** izračunavajući obujam tijela dobivenog rotacijom segmenta parabole oko bilo kojeg pravca, a ne samo oko osi parabole. U *Traktatu o mjerenju paraboličnog tijela* al-Haytham navodi da su mu radovi dvojice njegovih prethodnika pomogli da se pozabavi ovim problemom. Thabitu ibn Qurri zamjera duljinu njegove metode, a al-Kuhiju površnost i kratke dokaze. Al-Haythamovo rješenje za problem parabolične kupole je vrlo elegantno, ali njegov doprinos je posebno značajan u izračunavanju obujama rotacijskih tijela, što nisu uspjeli izvesti ni Thabit ibn Qurra ni al-Kuhi.

Al-Haytham je poznat i po svojim rezultatima u **teoriji brojeva**. Uočio je da su svi parni savršeni brojevi oblika $2^{p-1}(2^p-1)$, gdje je 2^p-1 prost broj. On to nije znao dokazati, prvi je dokaz dao Euler u 18. stoljeću. Drugi važan doprinos al-Haythama je objašnjenje i korištenje Wilsonovog teorema:

[17] Paralelni pravci su pravci koji leže u jednoj ravnini i beskonačno produljivani na obje svoje strane nigdje se ne sijeku.

[18] Za svaka dva realna broja $a > 0$ i $b > 0$ postoji takav prirodni broj n da je $nb > a$.

[19] Hipokratovi mjeseci, likovi u obliku Mjesečeva srpa koji nastaju kada se nad stranicama pravokutnoga trokuta opišu polukrugovi.

[20] Abu Sahl Wayjan ibn Rustam al-Kuhi (940. – 1000.), islamski matematičar koji je bitno doprinjeo oživljavanju interesa i nastavku grčke geometrije.

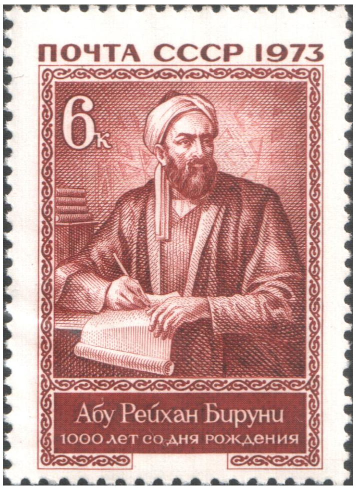
Teorem 2.6.1. *(Wilsonov teorem) Broj p prost je ako i samo ako je* $1 + (p-1)!$ *djeljivo s p.*

Teorem je zapravo otkrio indijski matematičar Bhaskara I u 7. stoljeću, a ime je dobio po engleskom matematičaru Johnu Wilsonu koji ga je iskazao u 18. stoljeću. Dokaz Wilsonovog teorema je dao francuski matematičar Joseph-Louis Lagrange 1773. godine.

Al-Haytham je svoj doprinos dao i u **astronomiji** tako da je prvi definirao pojam nebeskih sfera. Definiciju pojma nebeskih sfera njegovi su prethodnici vješto izbjegavali. Također, al-Haytham je prvi u astronomska razmatranja uveo Aristotelovu ideju o nebeskim sferama uz, do tada stalno korištenu, Ptolemejevu ideju o nebeskim sferama.

2.7 Al-Biruni

Jedan od najznačajnijih arapskih srednjovjekovnih znanstvenika bio je al-Biruni (Abu al-Rayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni). Rođen je 973. godine u blizini grada Katha u pokrajni Horezmiji (današnji Beruniy u Uzbekistanu). Osim što je bio vrstan matematičar, astronom, fizičar, geograf, povjesničar i lingvista, al-Biruni je razmatrao razne običaje i vjerovanja te komentirao tuđa djela.



Slika 2.10: Al-Biruni na ruskoj poštanskoj marci (slika preuzeta s Wikipedije)

Vrlo rano je uočeno njegovo izuzetno vladanje logikom i sposobnost zdravorazumskog zaključivanja, pa je rano dobio posao kod horezmijskog vladara. Al-Birunijev život je obilježen čestim promjenama vladara i vladajućih dinastija te mnogim dalekim putovanjima. Unatoč tome, ostao je vrlo plodonosan pisac, a gotovo polovica njegovih djela odnosila su se na astronomiju i astrologiju. Ostatak tekstova odnosi se na matematiku, geografiju, povijest i književnost. Nažalost, do danas je sačuvan samo manji dio njegovih tekstova.

Al-Biruni je studirao jezike i islamsko pravo, pa ne čudi da je osim materinjeg perzijskog jezika, vladao i arapskim, turskim, sirijskim i hebrejskim jezikom. Iako mu je materinji jezik bio perzijski, al-Biruni je shvatio važnost arapskog jezika kao jezika komunikacije u arapskom svijetu pa ga je pretpostavljao perzijskom jeziku kada su u pitanju bila znanstvena djela.

Neka djela al-Biruni je napisao i na arapskom i na perzijskom, kao na primjer *Kronologiju drevnih naroda*. Knjigu je napisao oko 1000. godine, a riječ je o knjizi enciklopedijskog karaktera. U 21. poglavlju ove knjige, al-Biruni se bavi različitim pitanjima prošlosti i sadašnjosti, kalendarom, matematičkim i astronomskim problemima, meteorologijom, geologijom, itd.

Sljedeće važno djelo al-Birunija je *Povijest Horezmije* u koji je unio sve važne i zanimljive događaje važne za svoj rodni kraj. Kao i u *Kronologiji drevnih naroda* tako i u *Povijesti Horezmije* al-Biruni ističe potrebu za očuvanjem duhovnog naslijeđa.

Godine 1017. al-Biruniju se otvorila prilika da posjeti i upozna Indiju, što je on naravno iskoristio. Tamo se uveo u indijski način mišljenja, shvatio složeno ustrojstvo kasta, a on je Indijce poučavao grčkoj znanosti o kojoj su oni vrlo malo znali. Tako je nastalo njegovo djelo *Indija* koje se sastojalo od 80 poglavlja gdje je, između ostalog, prikazao indijski sistem kasta, što je prvi poznati prikaz izvan Indije. U knjizi se sistematski govori o indijskoj astronomiji, o određivanju veličine Zemlje, iznosi kritiku indijske trigonometrije, o nepokretnim zvijezdama, o indijskoj astrologiji, itd.

Među brojnim al-Birunijevim djelima, po slavi koju je kasnije stekla, ističe se *Knjiga u kojoj se objašnjava vještina astronomije*. U tom djelu al-Biruni u obliku pitanja i odgovora rješava 530 različitih problema o geometriji, aritmetici, astronomiji, geografiji, prirodnoj astrologiji, kronologiji, astrolabima i sudskoj astrologiji. U djelu o astronomiji al-Biruni raspravlja o problemima rotacije Zemlje oko svoje osi, o nebeskim sferama, o Mjesečevim mijenama, o ekscentričnoj hipotezi kretanja Sunca, o veličini Sunca, Mjeseca i planeta te njihovoj udaljenosti od Zemlje.

Najvažnije al-Birunijevo matematičko djelo je *Kanon Masudi* koje je nastalo između 1030. i 1036. godine. U 11 knjiga al-Biruni je izuzetno sistematično izložio svoja i preuzeta saznanja iz matematike i astronomije svog vremena. Imena knjiga su redom:

- O svemiru;
- O vremenu;
- O krugu i sferi;
- O nebeskoj sferi;
- O Zemlji;
- O Suncu;

- O Mjesecu;
- O međusobnim odnosima Zemlje, Sunca i Mjeseca;
- O zvijezdama;
- O planetima;
- O međusobnom položaju zvijezda i planeta.

Pošto se radi o ključnom djelu jednog od najvećih matematičara svog vremena, navesti ćemo ukratko sadržaj svake knjige.

U prvoj knjizi piše o izgledu svega postojećeg u svijetu, principu Ptolomejevog sistema, nebeskim krugovima te o danima, mjesecima i godinama kod raznih naroda.

Druga knjiga sadrži tri osnovna kalendara (lunarni muslimanski, sunčani grčki i sunčani perzijski), kronološke tablice sa značajnim događajima svjetske povijesti te bitne dane i praznike židova, kršćana i muslimana.

Treća knjiga je posvećena trigonometriji i govori o „osnovnim” tetivama, izvedenicama iz njih, trisekciji kuta, odnosu promjer i kružnice, Menelajev teorem, itd. Knjiga sadrži i pravila za korištenje tablice sinusa gdje se koristi pravilo linearne interpolacije koje se može suvremenim oznakama izraziti ovako:

$$\sin x \approx \sin x_0 + (x - x_0)\frac{\sin(x_0 + 15') - \sin x_0}{15'}.$$

Uz to pravilo, al-Biruni je za svoje tablice koristio i kvadratnu interpolaciju.

U četvrtoj knjizi izložena je astronomska trigonometrija. Al-Biruni u knjizi piše o kutu nagiba ekliptike prema nebeskom ekvatoru, prelasku iz ekliptičkog sistema koordinata na nebeskoj sferi na ekvatorijalni sistem, određivanju trajanja prošlog dana i noći, itd.

U petoj knjizi al-Biruni piše o određivanju udaljenosti među mjestima s poznatim širinama i dužinama, određivanju dužine i širine mjesta prema udaljenosti među njima i dvama mjestima s poznatim širinama i dužinama, paralelama Zemljine površine, tablice širina i dužina za 581 grad, itd.

Šesta knjiza govori o pretvaranju vremena jednog mjesta u vrijeme drugog, hipotezu ekscentričnog kretanja Sunca, srednjem kretanju Sunca, teoriju vidljivog kretanja Sunca, itd.

Sedma knjiga govori o kretanju Mjeseca u odnosu na geografsku dužinu, kretanju Mjeseca u odnosu na geografsku širinu te određivanju Sunčevog i Mjesečevog promjera i udaljenosti Sunca od Zemlje.

U osmoj knjizi al-Biruni piše o brzini Sunca i Mjeseca, pomračenju Sunca i Mjeseca, Mjesečevim fazama te privremenim položajima Mjeseca.

Deveta knjiga govori nepokretnim zvijezdama te sadrži katalog 1029 nepokretnih zvijezda s određenim njihovim ekliptičkim koordinatama i veličinama.

Deseta knjiga sadrži Ptolomejevu teoriju kretanja planeta prema geografskoj dužini, kretanje planeta prema geografskoj širini te govori o pojavljivanju i iščezavanju planeta, njihovom sjedinjavanju i međusobnom sakrivanju.

Posljednja, jedanaesta knjiga, govori o nepravilnostima planeta, određivanju vremena za koje će planet dostići neko mjesto te konjunkciji planeta.

Al-Biruni u više svojih djela pažnju posvećuje **trigonometriji**, od samih definicija sinusa, tetiva i tangensa, itd. pa sve do izračunavanja njihovih vrijednosti. Greške koje je nalazio kod računanja sinusa kod Ptolemeja i Abu'l Wafe, al-Biruni je pokušavao izbjeći. Tablica sinusa kod al-Birunija je, kao i kod Abu'l Wafe, posložena na razlikama između lukova za $15'$, a razlike između lukova u tablicama tangensa međusobno se razlikuju za 1°. Al-Biruni je rabio pravila koja su ekvivalentna suvremenim formulama

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma,$$

tj. poznavao je poučak o kosinusima.

Također, u svojim djelima al-Biruni se doticao i problema zasnivanja teorije brojeva. Bavio se i problemom iracionalnosti gdje piše da je odnos promjera i kružnice iracionalan.

Najvažniji doprinosi al-Birunija u području geografije su da je relativno točno izračunao duljinu ekvatora, izradio prvi globus i predstavio podlogu za računanje udaljenosti između mjesta. Na području fizike al-Biruni je poznat po izračunavanju specifične težine dragog kamena i metala.

Al-Biruni je umro 1048. godine u gradu Ghazni u današnjem Afganistanu.

2.8 Omar Khayyam

Jedan od najutjecajnijih znansvenika islamskog svijeta u srednjem vijeku bio je Omar Khayyam (Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim al-Nisaburi al-Khayyami). Rođen je 18. svibnja 1048. godine u obitelji obrtnika u gradu Nishapuru koji se nalazi na sjeveru današnjeg Irana. Omar Khayyam se tijekom svog života bavio matematikom, astronomijom, geografijom, filozofijom i poezijom. Uz Nishpur, živio je i radio u Samarkandu, Buhari, Isfahanu i drugim gradovima u srednjoj Aziji. Djelovao je u vrijeme velikih osvajanja Seldžuka[21], u čije vrijeme je položaj znanstvenika bio vrlo težak pa i Omar Khayyam naglašava da je bio lišen mogućnosti da se bavi svojim radom.

[21] Seldžuci, feudalna dinastija turskog podrijetla nazvana po njezinom osnivaču Seldžuku.

Slika 2.11: Omar Khayyam (slika preuzeta s Wikipedije)

Prvo matematičko djelo Omara Khayyama *Problemi **aritmetike*** nije sačuvano, pa nam je njezin sadržaj danas nepoznat. Zahvaljujući sponzorstvu jednog samarkandskog pokrovitelja, Omar Khayyam je uspio završiti svoja znanstvena istraživanja i napisati poznato djelo *O računanju pomoću al-jabr i al-muqabale*. Djelo se može podijeliti na pet dijelova:

- uvod;
- rješavanje jednadžbi prvog i drugog stupnja;
- rješavanje jednadžbi trećeg stupnja;
- svođenje na prethodne oblike jednadžbi;
- dopuna.

U djelu su sadržana sva algebarska znanja toga vremena pa se u njemu nalazi klasifikacija jednadžbi te su izražena rješenja jednadžbi prvog, drugog i trećeg stupnja. Omar Khayyam u uvodu navodi da je **algebra** znanost o određivanju nepoznatih veličina koje su u nekom odnosu s poznatim veličinama. To je prva poznata definicija algebre. Jednadžbe su u djelu zapisivane u općem obliku, tj. s neodređenim pozitivnim koeficijentima, te se opisuju u govornom jeziku.

Klasifikacija jednadžbi ovisi o njihovom stupnju i broju članova koji se nalaze s dvije strane jednadžbe. Na kraju Omar Khayyam navodi 25 vrsta „kanonskih” jednadžbi, od toga ih je šest opisao al-Khwarizmi, pet vrsta se može svesti na tih šest, a preostalih 14 vrsta se dijele na oblike s dva, tri ili četiri člana. Kao i kod ranijih autora takva podjela obuhvaća samo jednadžbe čija su rješenja pozitivna. Omar Khayyam je prvi uočio da neke jednadžbe ne moraju imati jedinstveno rješenje (zapravo, za jedan tip kvadratnih jednadžbi to je uočio još al-Khwarizmi). Nepoznanica kod Omara Khayyama može biti ili broj, ili geometrijska veličina (odsječak, površina ili obujam). Omar Khayyam govori o značaju brojčanog rješenja, ali osnovom smatra geometrijsku konstrukciju nepoznatog rješenja.

Omar Khayyam rješava i neke oblike jednadžbi koje sadrže veličine recipročne nepoznanici i njezinoj potenciji. Evo dvaju primjera zapisanih u suvremenoj simbolici.

Primjer 3. *Riješi jednadžbu*

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}. \tag{2.2}$$

Omar Khayyam jednadžbu formulira: *Dio kvadrata jednak je polovini dijela rješenja.* Također, ukazuje da je to isto kao kad bismo rekli kvadrat je jednak polovini rješenja, tj. pri zamjeni $\frac{1}{x} = y$ u jednadžbi (2.2) dobiva se ekvivalentna jednadžba

$$y^2 = \frac{1}{2}y. \tag{2.3}$$

Rješenje od (2.3) je $y = \frac{1}{2}$, a onda je rješenje od (2.2) $x = 2$.

Primjer 4. *Riješi jednadžbu*

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}. \tag{2.4}$$

Koristeći istu supstituciju kao u prethodnom primjeru Omar Khayyam svodi jednadžbu (2.4) na jednadžbu

$$y^2 + 2y = 1\frac{1}{4}, \tag{2.5}$$

čije je rješenje $y = \frac{1}{2}$. Rješenje od (2.4) onda je $x = 2$.

Omar Khayyam je dao i klasifikaciju kubnih jednadžbi na 14 tipova zajedno s geometrijskim rješenjima pomoću sjecišta konika. Trudio se dati potpun opis algebarskog rješenja kubnih jednadžbi, ali bio je svjestan da je njegov rad nepotpun. Zanimljivo je da je prvi uočio da kubne jednadžbe ne moraju imati jedinstveno rješenje. Evo jednog primjera Omar Khayyamovog rješavanja kubne jednadžbe presjekom konika.

Primjer 5. *Realna rješenja jednadžbe oblika* $x^3+a^2x = b^3$ *Omar Khayyam dobiva nalaženjem sjecišta parabole i kružnice. Koristeći jezik analitičke geometrije rekli bismo da je određivao sjecište različito od* $(0,0)$ *parabole* $x^2 = ay$ *i kružnice* $\left(x - \frac{b^3}{2a^2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^6}{4a^4}$*. Aproksimativnu numeričku vrijednost rješenja dobio je interpolacijom pomoću trigonometrijskih tablica.*

Omar Khayyam je 1074. godine postao dvorski astronom Malik-šaha[22], koji je u svoj tek podignuti opservatorij u Isfahanu pozvao astronome i opunomoćio ih da naprave reformu postojećeg kalendara. U ono vrijeme aktualna su bila dva kalendara: sunčani i lunarni. Sunčana godina sastojala se od 365 dana 5 sati 48 minuta i 46 sekundi, a lunarna od 354 dana 8 sati 48 minuta i 36 sekundi. Reformom je rukovodio Omar Khayyam, no ipak ju nije uspio do kraja provesti. Ipak, postoji legenda prema kojoj u Omar Khayyanovom kalendaru, koji je bio vrlo precizan, na svake 33 godine dolazi 8 prijestupnih godina, gdje se tijekom 5000 godina nakupi greška od samo jednog dana. Usporedbe radi, u Gregorijanskom kalendaru ista pogreška se dogodi svakih 3300 godina. Uz rukovođenje reformom, Omar Khayyam je uspio sastaviti nove astronomske tablice. Svoj rad u opservatoriju Omar Khayyam je nastavio sve do smrti sultana Malik-šaha 1092. godine.

Omar Khayyam se bavio i **geometrijom**. Svoj rad na djelu *Komentari Euklidovih teških postulata*, Omar Khayyam je završio 1077. godine. Djelo se sastoji od tri knjige. Prva sadrži originalnu teoriju paralelnih pravaca, a druga i treća knjiga govore o usavršavanju teorije omjera i proporcija. Svoju prvu knjigu Omar Khayyam počinje kritikom dokaza petog postulata kojeg je dao al-Haytham, jer se u njemu koristi gibanje. Omar Khayyam je, kao i Euklid i Aristotel, smatrao da gibanje ne treba primjenjivati u geometriji. Danas znamo da to nije točno. Svoj „dokaz" petog postulata Omar Khayyam temelji na sljedećoj tvrdnji: *Ako se dva pravca približavaju jedan drugome, oni se moraju sjeći.* U posljednjoj propoziciji prve knjige „dokazan" je peti postulat. Omar Khayyam je prilikom svog „dokaza" promatrao četverokut koje je danas poznat pod imenom Khayyam-Saccherijev[23] četverokut. To je četverokut s dva prava kuta koje tvore osnovica i dvije priležeće stranice, te sadrži tri međusobno sukladne stranice.

U drugoj knjizi je Omar Khayyam, slažući se s Aristotelom, ovako definirao princip neprekidnosti: *Veličine se mogu dijeliti do beskonačnosti, tj. one se ne sastoje od nedjeljivih dijelova.* Omar Khayyam sebi postavlja zadatak ujediniti teoriju omjera brojeva iz VII. knjige *Elemenata* s općom teorijom omjera iz V. knjige. Uočivši temelj Euklidovog algoritma, odnosno način nalaženja iz približne vrijednosti omjera nesumjerljivih veličina, uvodi novu definiciju proporcije, u kojoj se jednakost omjera svodi na rastavljanje razlo-

[22]Malik-šah, sultan Seldžutskog carstva od 1072. do 1092. godine.

[23]Giovanni Girolamo Saccheri, (1667. –1733.), talijanski filozof i matematičar.

maka na verižne razlomke. Omar Khayyam dokazuje ekvivalentnost svoje teorije s Euklidovom teorijom i utvrđuje postojanje četvrte proporcionalnosti dodane k trima danima.

Treću knjigu *Komentara Euklidovih teških postulata* posvetio je množenju omjera. Ovdje Omar Khayyam na novi način objašnjava vezu između pojma omjera i broja. U cilju povezivanja pojmova broja i omjera, Omar Khayyam zapravo promiče ideju poopćavanja pojma broja i proširuje ju do realnog pozitivnog broja.

Zbog svoje težnje prema sintezi geometrijske i aritmetičke teorije omjera i proporcija, poistovječivanju pojma broja i omjera te proučavanju geometrije pomoću učenja o brojevima, Omar Khayyam je zapravo prethodio Descartesu kao utemeljitelju analitičke geometrije.

Uz znanstveni rad, Omar Khayyam poznat je i po svojim stihovima koji su u svijetu poznati pod imenom *Rubaije* (ili *Četverostisi*). Njegovi stihovi puni su čežnje za radosnim i sretnim životom, pa iz toga vidimo kako je teško proživljavao ovisnost o bogatim pokroviteljima.

Nakon što je 1092. godine umro Malik-šah, Omar Khayyam je optužen za bezboštvo. Ostao je bez plemićke podrške te se siromašan i razočaran vratio u rodni Nishapur. Siromaštvo ga je pratilo do kraja života. Omar Khayyam umro je 17. prosinca 1131. godine. Iako nije pisao puno kao al-Biruni, Omar Khayyam je ostavio djela trajne vrijednosti.

2.9 Al-Tusi

Sljedeći važan arapski matematičar je al-Tusi (Nasir ad-Din al-Tusi)[24]. Al-Tusi je rođen 18. veljače 1201. godine u gradu Tusi u pokrajni Khwarizmiji (današnji sjeverni Iran). Al-Tusi je bio poznati astronom, matematičar, arhitekt, biolog, kemičar, filozof, liječnik, fizičar, znanstvenik i teolog. U Tusi je postojao poznat kulturni i znanstveni centar, gdje su radili izvanredni učitelji. Poput mnogih suvremenika, i al-Tusi je stekao enciklopedijsko znanje. Između ostalog, posebno su ga zanimale filozofija i matematika, u koju je ulazila astronomija. Vrlo mlad preselio je u Nishapur, gdje je pohađao studij filozofije, a nakon toga je u Mosulu studirao matematiku i astronomiju.

Nakon što je putovao po kalifatu od utvrde do utvrde, konačno se trajno nastanio u tvrđavi Alamut gdje je obavljao poslove astrologa svojim pokroviteljima. Tijekom al-Tusijevog života krenula su velika mongolska osvajanja. Mongolska vojska predvođena zloglasnim Hulagu Khanom[25] 1253. godine osvaja tvrđavu Alamut. Hulagu Khan iz osvojene tvrđave nije poštedio nikoga osim onih koji su mu mogli biti od koristi, prvenstveno graditelje, matematičare i astrologe. Sve to dobio je u al-Tusiju, pa ga je poštedio.

[24] Ne smijemo ga pomiješati s perzijskim matematičarem Sharaf al-Din al-Tusijem, oko 1135. –1213., koji se bavio kubnim jednadžbama.

[25] Hulagu Khan (1218. –1265.), mongolski vladar koji je osvojio velik dio zapadne Azije.

Slika 2.12: al-Tusi (slika preuzeta s Wikipedije)

U siječnju 1258. godine Hulagu Khan je sa svojom vojskom stigao pod zidine Bagdada, a s njim je kao njegov osobni astrolog, diplomat i savjetnik bio al-Tusi. Iako je bilo jasno da Bagdadu nema spasa, njegovi stanovnici su se pregovorima pokušavali diplomatski izvući. Pregovorima je u ime Hulagu Khana prisustvovao al-Tusi. Pregovori su propali te je Bagdad danima gorio.

Nakon osvajanja Bagdada, Hulagu Khan je na preporuku al-Tusija osnovao svoju prijestolnicu Maragu[26]. Grad je postao centar znanstvenog svijeta, a njegov opservatorij je bio najbolji u to doba. Pod vodstvom al-Tusija u opservatoriju su radili najbolji astronomi tog vremena. Al-Tusi i njegovi suradnici tamo su sastavili poznate *Ilhanske astronomske tablice* koje sadržavaju vrlo precizne tablice planetarnih kretanja. Knjiga sadrži i astronomske tablice za izračunavanje pozicije planeta te imena zvijezda. Za njegov model planetarnog sustava vjeruje se da je najnapredniji u to doba, te se opsežno koristi do razvoja heliocentričnog modela. Također, u *Ilhanskim astronomskim tablicama*, al-Tusi daje kronologiju različitih kalendara: muslimanskog, grčko-sirijskog, židovskog, perzijskog Omar Khayyamovog i kineskog. U trigonometrijskom dijelu knjige daje tablice sinusa i kosekansa svakih $1'$, te tablice tangensa od $0°$ do $45°$ svakih $1'$, a od $45°$ do $89°\ 50'$ svakih $10'$.

Al-Tusi je najslavniji arapski matematičar u području **trigonometrije**. Najvažnije al-Tusijevo djelo je *Traktat o punom četverokutu* gdje je izložio trigonometiju kao samostalni dio matematike, a ne kao pomoćno sredstvo astronomiji kao što je bilo uobičajeno

[26]Maraga, grad na području današnjeg sjeverozapadnog Irana.

u ono vrijeme. U djelu je potpuno izloženo svo ranije znanje o trigonometriji, ali i nova proučavanja samog al-Tusija. Djelo je nastalo u najplodnijem autorovom razdoblju, kada je boravio u Maragi, a nastalo je vjerojatno 1260. godine za potrebe znanstvenika koji su tamo s njim surađivali.

Traktat o punom četverokutu sastoji se od devet knjiga. U trećoj knjizi al-Tusi uvodi pojmove sinusa i kosinusa luka, dokazuje leme i rješava probleme dva luka polazeći od njihovog zbroja ili razlike i odnosa njihovih sinusa. Ova knjiga sadrži i poučak o sinusima za ravninske trokute

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

kojeg je i dokazao i koja je al-Tusijev najpoznatiji matematiči rezultat. Četvrta knjiga bavi se Menelajevim teoremom o sfernom trokutu. Peta knjiga je posvećena sfernim trokutima, a odmah na početku dana je detaljna klasifikacija deset osnovnih tipova sfernih trokuta prema njihovim kutevima (šiljasti, pravi i tupi) i prema njigovim stranicama (mogu biti manje, jednake ili veće od četvrtine velikog kruga). U sljedećim knjigama al-Tusi navodi teoreme o sinusima i tangensima s dokazima koje su napisali njegovi prethodnici, a zatim i svoje vlastite dokaze. Usput je uveo pojmove tangens, kotangens, sekans i kosekans. U posljednjoj knjizi opisuje rješavanje sfernih trokuta.

Al-Tusi je dao doprinos i u proučavanju problema paralela kojem je posvetio svoja tri djela. Prvo je *Diskusija koja raspršuje sumnje koje se odnose na paralelne pravce* koja je nastala poslije 1251. godine. Druga dva djela su dva različita izdanja *Izlaganja o Euklidu*, tj. komentari Euklidovih *Elemenata*, koje je dopunio i modificirao. Al-Tusi se u ovim djelima oslanjao na teorije svojih prethodnika Omar Khayyama i al-Jawharija[27], pa se prvo posvetio kritičkoj analizi njihovih radova. Uočio je neke njihove pogreške, posebno kod zamjene Euklidovog petog postulata sličnim tvrdnjama koje ga impliciraju. Novost koji je al-Tusi donio je pokušaj da dokaže Euklidov peti postulat bez pozivanja na dodatnu hipotezu. U svojim dokazima al-Tusi, kao i Omar Khayyam i mnogi drugi, čini pogreške, ali ipak njihove ideje zauzimaju važno mjesto u teoriji paralela i pretpovijesti neeuklidske geometrije. Naravno, oni nisu ni bili svjesni da je je moguće stvoriti geometriju koja nije euklidska, nego su se trudili dokazati peti Euklidov postulat tvrdnjama koje su smatrali očitima.

Svoj doprinos al-Tusi dao je i u **aritmetici**, a među aritmetičkim djelima ističe se *Aritmetički zbornik pomoću daske i prašine*. Sastavljen je 1265. godine i sadrži korisna uputstva za praktično računanje. Također, u prvom poglavlju djela al-Tusi piše o cijelim brojevima, u drugom o običnim razlomcima, a u trećem o seksegezimalnim razlomcima.

Još jedan važan al-Tusijev doprinos matematici je da zahvaljujući njegovom izdanju *Izlaganja o Euklidu* koje je 1594. godine publicirano u Rimu, Europa saznala da su arapski matematičari proširili pojam broja do pozitivnog realnog broja.

[27]Al-Jawhari (800. –860.), arapski astronom i matematičar koji se bavio problemom paralela.

Al-Tusi je napisao više od 150 djela, od čega je 25 na perzijskom jeziku, a ostala su na arapskom jeziku. Umro je 26. lipnja 1274. godine u sjevernom predgrađu Bagdada.

2.10 Al-Kashi

Jedan od najboljih arapskih matematičara i astronoma bio je al-Kashi, punim imenom Giyat ad-Din Jamshid Ibn Masud al-Kashi. Rođen je oko 1380. godine u gradu Kashanu koji se nalazi u današnjem Iranu. Kako se točno ne zna njegov datum rođenja, niti gdje se obrazovao ili tko su mu bili učitelji, možemo zaključiti da je kao i mnogi u to vrijeme bio siromašan. Al-Kashi je živio u doba Timurovih[28] osvajanja i Ulug Begove[29] vladavine sa središtem u Samarkandu. Za al-Kashija je, kao i za druge znanstvenike tog vremena, bilo važno da imaju svog pokrovitelja. Zbog toga je al-Kashi 1411. godine napisao djelo *Kompendij znanosti astronomije* koje je posvetio tadašnjem pokrovitelju Shahruhu[30]. Kako je Ulug Beg i sam bio znanstvenik, odlučio je Samarkand pretvoriti u veliki znanstveni i kulturni centar. Godine 1417. Ulug Beg osniva sveučilište u Samarkandu te uz ostale najbolje matematičare i astronome tog vremena, poziva i al-Kashija da predaje na sveučilištu. U Samarkandu je al-Kashi ostao do svoje smrti 22. lipnja 1429. godine te je tamo napisao sva svoja najvažnija matematička djela.

Al-Kashi, tada vodeći matematičar i astronom, vodi gradnju opservatorija koja je počela 1425. godine. Bio je to posljednji opservatorij s velikim ugledom i važnošću. Kako su u opservatoriju djelovali najbolji astronomi tog vremena odlučili su napraviti nove astronomske tablice. Tablice su posvećene Ulug Begu, ali njihov završetak nije uspio dočekati al-Kashi koji je u međuvremenu umro.

Glavno al-Kashijevo djelo je čuveni *Ključ aritmetike*, udžbenik za studente o osnovama matematike za astronomiju , mjeriteljstvo, arhitekturu, računovodstvo i trgovinu. Pisan je suvremeno i pregledno, pravi vodič za tadašnju matematiku primjeren za široku upotrebu. Prema mnogima, to djelo zbog svog sadržaja i elegancije izlaganja zauzima posebno mjesto među matematičkom literaturom srednjeg vijeka. Veći dio knjige sadrži sažetak postojeće literature, ali al-Kashi svemu daje sasvim novi pogled. On je **aritmetiku** definirao kao sredstvo za određivanje numeričkih vrijednosti nepoznanice pomoću poznatih veličina.

Ključ aritmetike sastoji se od pet knjiga:

- O aritmetici cijelih brojeva;
- O aritmetici razlomaka;
- O metodi astromoskog računanja;

[28]Timur (9. travanj 1336. – 18. veljače 1405.), mongolski osvajač i vladar.
[29]Ulug Beg (22. ožujak 1394. – 27. listopad 1449.), obnovitelj mongolskog carstva.
[30]Shahruh (20. kolovoza 1377. – 13. ožujak 1447.), Timurov sin i otac Ulug Bega.

- O mjerenju figura;
- O određivanju nepoznatih veličina pomoću *al-jabra*, pravila pogrešnog mjesta i drugih aritmetičkih pravila.

Vidljivo je dakle da se usprkos naslovu, al-Kashi u ovom djelu bavi i **algebrom** i **geometrijom**. Prva knjiga sadrži šest glava: *O prikazivanju brojeva i njihovo razvrstavanje*, *O udvajanju, razdvajanju, slaganju i oduzimanju*, *O množenju*, *O dijeljenju*, *O određivanju baze potencije* i *O mjeri*. Najvažnija glava ove knjige je šesta, gdje je detaljno izložen opći postupak za vađenje korijena cijelih brojeva. Al-Kashi navodi potpuni postupak i detaljno objašnjava vađenje korijena, predstavljajući operacije u tablici. Zatim daje primjere vađenja korijena brojeva zapisanih seksegezimalno, ne pretvarajući ih prethodno u decimalne. U knjizi se također nalazi i opis pravila za potenciranje binoma, a koeficijente binoma al-Kashi naziva *elementima eksponenata*. Potom daje i jednu aditivnu formulu za sukcesivno računanje koeficijenata koja odgovara današnjoj formuli:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

Također, al Kashi s velikom točnošću računa duljinu brida pravilnih poliedara. Brojeve $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ i $\frac{1}{\sqrt{3}}$ računa s točnošću do 60^{-5}, što u decimalnom brojevnom sustavu odgovara $1,3 \cdot 10^{-9}$. Potom daje i približne vrijednosti:

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{10(5-\sqrt{5})} \approx 1°10'32''33'''13^{iv}55^{v};$$

$$\frac{1}{6}(\sqrt{15}-\sqrt{3}) \approx 0°21'24''33'''34^{iv}17^{v}.$$

Druga knjiga *Ključa aritmetike* sadrži 12 glava i posvećena je aritmetičkim razlomcima. U prvoj glavi al-Kashi uvodi, oslanjajući se na seksegezimalni način, decimalne razlomke. Al-Kashi je želio za sve razlomke stvoriti sistem u kome se, kao u seksegezimalnom, sve operacije izvode točno kao sa cijelim brojevima, ali koji počivaju na bazi deset. U trećoj i četvrtoj knjizi se također brojni rezultati izračunavaju pomoću decimalnih razlomaka. Al-Kashi veliku pažnju posvećuje pretvaranju seksegezimalnih razlomaka u decimalne i obrnuto. Kada se ne može svaki seksegezimalni broj izraziti pomoću konačnog decimalnog razlomka (obrnuto je uvijek moguće), al-Kashi zaokružuje i daje približne vrijednosti. Decimalne razlomke su koristili ranije u Kini te neki al-Kashijevi prethodnici, ali znamo da je on prvi jasno objasnio teoriju razlomaka, koristeći ih u svojem djelu i opisujući odgovarajuće operacije s njima. U Europu će ih tek 135 godina kasnije uvesti Stevin[31].

[31] Simon Stevin, (1548. –1620.), nizozemski matematičar i fizičar

U trećoj knjizi *Ključa aritmetike* al-Kashi govori o astronomskom računanju, a knjiga sadrži šest glava: *O zapisivanju seksegezimalnih razlomaka i cijelih brojeva u seksegezimalnom sistemu*, *O udvajanju, razdvajanju, slaganju i razlaganju*, *O množenju*, *O dijeljenju*, *O određivanju baze potencije* i *O prevođenju seksegezimalnih brojeva u indijske i obrnuto*. Al-Kashi je formulirao pravila u najopćenitijem obliku, tako da vrijede za bilo koje cijele eksponente. Tako on zapisuje da je $a^0 = 1$ i promatra negativne eksponente razlikujići ih po strani s koje dolaze. Nakon toga al-Kashi daje uobičajene operacije s eksponentima, gdje pokazuje način množenja potencija jednakih baza i jednakih eksponenata. Množenje i dijeljenje cijelih seksegezimalnih razlomaka i brojeva al-Kashi izvodi jednako kao što ih izvodimo u našem decimalnom sustavu.

U uvodu četvrte knjige *Ključa aritmetike* su dane definicije mjerenja te definicije točke, pravca, površine tijela, paralelnih pravaca prema Euklidu i druge. Knjiga se dijeli na devet glava: *O mjerenju trokuta*, *O mjerenju četverokuta*, *O mjerenju mnogokuta*, *O mjerenju kruga i njegovih dijelova*, *O mjerenju drugih ravnih figura*, *O mjerenju zaobljenih površina*, *O mjerenju tijela*, *O određivanju zapremine nekih tijela prema njihovoj težini i obrnuto* i *O mjerenju građevina i konstrukcija*. Al-Kashi u ovoj knjizi rješava mnoge probleme jedino algebarski, a za ostale koristi trigonometrijske formule. Za površinu pravilnih poligona s n-strana, za $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16$, pokazuje da je jednaka

$$\frac{n}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Peta knjiga sastoji se od četiri glave: *O al-jabru i al-muqabali*, *O određivanju nepoznanica na osnovi dvaju grešaka*, *O izlaganju nekih aritmetičkih pravila, na koja se je nužno oslanjati prilikom određivanja nepoznanica* i *O primjerima*. Posljednja glava sastoji se od 25 zadataka koji se svode na algebarske jednadžbe, sedam zadataka o određivanju nasljedstva i sedam geometrijskih zadataka.

Među najznačajnijim al-Kashijevim djelima je i *Trakatat o kružnici* čija je suština u određivanju broja π. Račun je izuzetno značajan i zanimljiv, ne samo zbog točnosti koja je postignuta i ide do 16 decimalnih mjesta, već i zbog načina na koji je ostvaren. Al-Kashi je 27 puta udvostručio broj stranica šesterokuta i došao do mnogokuta koji ima $3 \cdot 2^{28}$ kutova. Svoj račun završava dobivši vrijednost $2\pi \approx 6,2381853071795865$, odnosno

$$\pi \approx 3,1415926535897932.$$

Da bi astronomske tablice za Ulug Bega bile što točnije, al-Kashi je određivao sinus jednog stupnja. U djelu *Traktat o određivanju sinusa jednog stupnja prema geometrijskim pravilima* al-Kashi polazi od rješavanja kubne jednadžbe

$$4x^3 + g = 3x,$$

gdje je $x = \sin 1^\circ$, $g = \sin 3^\circ$, metodom uzastopnih aproksimacija (više detalja o metodi može se naći primjerice u [1]). Ne ulazeći u detaljnije rješavanje samog problema, navedimo samo vrijednost koju je dobio al-Kashi:

$$\sin 1^\circ = 0,017452406437283571.$$

Također, al-Kashi je s velikom točnošću izračunao trigonometrijske tablice s korakom od $1'$, koje 250 godina nisu bile nadmašene. Kao zanimljivost spomenimo i da se i danas u Francuskoj poučak o kosinusima naziva al-Kashijevim poučkom.

Napomenimo još da se današnja osnova za određivanje iracionalnog broja oslanja na ideju al-Kashija o mjerenju odsječka i neograničenom približavanju nepoznatom broju pomoću beskonačnih dekadskih razlomaka.

Nakon smrti al-Kashija, srednjevjekovna arapska/islamska matematika više nije dala značajnijih matematičara, te je izgubila na važnosti nakon što su njezina najslavnija vremena prošla.

2.11 Ostali značajni arapski matematičari

Za kraj, navedimo još nekolicinu istaknutih arapskih matematičara srednjevjekovnog perioda (8. –15. st.). Spomenut ćemo al-Habasha, al-Jawharija, al-Mahanija, Abu Kamila i Avicennu.

Jedan od suvremenika al-Khwarizmija je Ahmed ibn Abdallah al-Mervazi, nazvan i **al-Habash al-Hisab** (Računovođa). Rođen je u Mervu, gradu u današnjem Turkmenistanu od kojeg su nakon mongolskih osvajanja 796. godine, ostale samo ruševine. Al-Habash je bio astronom, geograf i matematičar.

Između 825. i 835. godine al-Habash je napravio promatranja i sastavio tri astronomske tablice. Također, radeći u opservatoriju u Bagdadu procjenjuje niz geografskih i astronomskih vrijednosti.

Al-Habash je bio napoznatiji po tome što se bavio pitanjem gnomona. Utvrdio je da se omjeri duljine štapa l i duljine sjene u mjenjaju ovisno o visini Sunca, koja se mjeri kutom φ (uzima se da je $l = 1$).

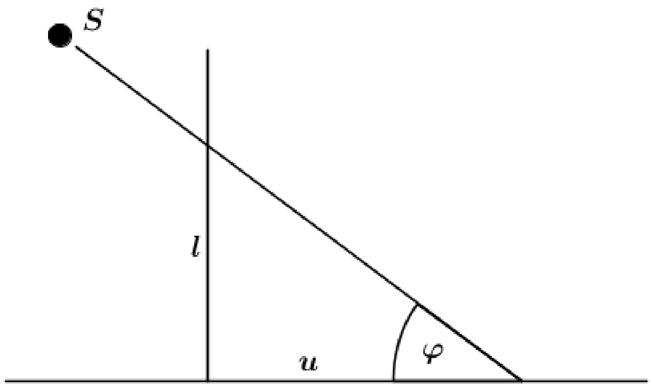
Sastavio je tablicu vrijednosti sjene u za kutove $\varphi = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, ...$, koja u današnjim oznakama glasi:

$$u = l \cdot \operatorname{ctg} \varphi,$$

odnosno za $l = 1$

$$u = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Tablica je omogućila određivanje visine Sunca uz pomoć duljine sjene. U slučaju horizontalnog gnomona okomitog na vertikalnu stijenu, također je sastavio tablicu kruženja sjene, tj. $u' = l \operatorname{tg} \varphi$, $u' = \operatorname{tg} \varphi$.



Slika 2.13: Al-Habashova skica gnomona

Iz toga vidimo da pojmovi tangens i kotangens, kao i prve njihove trigonometrijske tablice, nisu nastale iz promatranja trigonometrijske kružnice, nego iz učenja o sunčanim satovima. Al-Habashu se pripisuje i prva upotreba sekansa.

Za al-Habasha se zna da je umro u gradu Samarri koji se nalazi u današnjem Iraku. Godina smrti nije poznata, ali pretpostavlja se da je umro nakon 869. godine.

Među arapskim matematičarima svakako je potrebno spomenuti i **al-Jawharija**, punim imenom Al-Abbas ibn Said al-Jawhari. Rođen je oko 800. godine u Bagdadu, a umro je oko 860. godine također u Bagdadu. O životu al-Jawharija, koji je bio najpoznatiji po svom radu na području geometrije, vrlo malo se zna osim da je bio zaposlen u službi al-Mamuna u Bagdadu.

Al-Jawhari je najpoznatiji po svom pokušaju dokaza Euklidovog petog postulata. Dio svoga rada *Usavršavanje knjige Elemenata* (poznatije pod nazivom *Komentari Euklidovih Elemenata*), posvetio je dokazivanju petog postulata. Taj rad nam je poznat samo po dijelovima navedenim u djelu al-Tusija *Diskusija koja raspršuje sumnje koje se odnose na paralelne linije*.

Al-Jawharijev dokaz se temelji na sljedećoj, samoj po sebi, jasnoj tvrdnji: *Ako pravac c siječe dva pravca a, b tako da su im unakrsni kutovi jednaki, tada to svojstvo ima svaki pravac koji siječe pravce a i b; pravci a i b su pritom uvijek jednako udaljeni jedan od drugoga.*

Tvrdnja koju je al-Jawhari koristio, a ekvivalentna je petom postulatu, jest da je geometrijsko mjesto točaka (koje su jednako udaljene od pravaca i nalaze se s njegove iste strane) također pravac. Pritom je al-Jawhari dokazao poučak kojim se tvrdi da se kroz svaku točku unutar kuta može provući pravac koji presjeca oba njegova kraka, a taj poučak je također ekvivalentan petom postulatu. Taj poučak je krajem 18. stoljeća koristio francuski matematičar Legendre[32] za jedan od svojih dokaza petog postulata.

Sljedeći važan arapski matematičar je **al-Mahani**, punim imenom Abu Abd Allah Muhammad ibn Isa al-Mahani. Rođen je oko 820. godine u gradu Mahanu u današnjem Iranu, a umro je oko 880. godine u Bagdadu. O životu ovog perzijskog matematičara i astronoma imamo vrlo malo informacija, a veći dio njegovih djela je izgubljen. Iz djela kasnijih autora koja citiraju al-Mahanija znamo da je pisao o astronomiji, geometriji i aritmetici.

O al-Mahanijevom doprinosu astronomiji saznajemo iz djela ibn Yunusa[33], *Al-Zij al-Kabir al-Hakimi*. U tom djelu ibn Yunus piše o al-Mahanijevim opažanjima o pomrčinama Mjeseca i Sunca. Također, iz ibn Yunusovog djela se može zaključiti da je al-Mahani ta opažanja napravio između 853. i 866. godine.

Al-Mahani je pisao komentare Euklidovih i Arhimedovih djela, pa je pokušao rješiti problem kojeg je ranije neuspješno pokušavao riješiti Arhimed. Rješavajući Arhimedov problem dijeljenja kugle presijecanjem ravninom u zadanom omjeru, al-Mahani je došao do kubne jednadžbe oblika

$$x^3 + c^2 b = cx^2,$$

koja se njemu u čast naziva al-Mahanijevom jednadžbom.

Njegova ideja o svođenju geometrijskih problema, kao što je problem duplikacije kocke, na algebarske probleme bio je vrlo važan korak naprijed u matematici tog doba.

Sljedeći važan arapski matematičar je **Abu Kamil**, punim imenom Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad ibn Shuja. Najvjerojatnije je bio iz Egipta, rođen je oko 850. godine, a umro je oko 930. godine. Abu Kamil je dao važan doprinos algebri i geometriji, a o njegovom životu se zna samo da je bio nasljednik al-Khwarizmija, kojeg nikad nije osobno upoznao.

Abu Kamil je bio prvi arapski matematičar koji je znao riješavati algebarske jednadžbe s potencijama sve do 8, ali te potencije naravno nisu zapisane simbolima. Također, poznaje i identitet koji danas zapisujemo $x^m x^n = x^{m+n}$.

Abu Kamilova *Algebra* je proširenje al-Khwarizmijeve *Algebre*, a u njoj Abu Kamil za rješenja kvadratnih jednadžbi dobiva cijele brojeve, razlomke, ali i iracionalne brojeve po čemu je bio prvi. Također, iracionalne brojeve koristi i za koeficijente kvadratne jednadžbe. Evo jednog Abu Kamilovog zadatka iz *Algebre*.

Zadatak 2. *Prikažite broj* 10 *kao zbroj dvaju brojeva, tako da je zbroj omjera tih brojeva jednak* $\sqrt{5}$.

[32] Adrien-Marie Legendre, (1752. –1833.), francuski matematičar.

[33] Ibn Yunus (950. – 1009.), egipatski musliman, astronom i matematičar.

Rješenje. Sastavljamo kvadratnu jednadžbu:

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5},$$

iz čega sređivanjem jednadžbe dobivamo

$$x^2(2+\sqrt{5}) + 100 = x(20+\sqrt{500}).$$

Slijedi množenje s $\sqrt{5}-2$, nakon čega se dobiva da je

$$x^2 + \sqrt{50000} - 200 = 10x,$$

odnosno

$$x = 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50000}}.$$

Abu Kamil je prikazao i drugo, jednostavnije rješenje, pomoću zamjene $\frac{10-x}{x} = y$.

Abu Kamil je bio jedan od prvih matematičara koji je prepoznao al-Khwarizmijev doprinos u algebri te ga je opisao kao *izumitelja algebre*. Također, radovi Abu Kamila su utjecali na druge matematičare, kao što je Fibonacci, čime je Abu Kamil imao trajan utjecaj na razvoj algebre u Europi.

Abu Kamil se u jednom svom radu bavi praktičnom geometrijom i daje aproksimaciju $\pi = \frac{22}{7}$. Za peterokut i deseterokut pravila koja Abu Kamil daje u potpunosti su dokazana u njegovoj *Algebri*. U *Algebri* primjenjuje algebru na geometrijske probleme koristeći kombinaciju grčkog, praktičnog al-Khwarizmijevog i babilonskog pristupa. Zanimljivo je da je Abu Kamil prvi arapski matematičar koji je znao riješavati diofantske jednadžbe, a da Diofantova *Arithmetica* još nije bila poznata arapskom svijetu.

Abu Ali al-Husayn ibn Abd Allah ibn al-Hassan ibn Ali ibn Sina, poznat pod latinizmom **Avicenna**, rođen je 973. godine u gradu Buhari u današnjem Uzbekistanu. Avicenna, jedan od najutjecajnijih srednjevijekovnih arapskih znanstvenika, studirao je filozofiju, medicinu, matematiku, teologiju, fiziku i logiku u Isfahanu. Nakon školovanja je preselio u Teheran gdje je postao dvorski liječnik.

Promjena političke situacije natjerala ga je na bijeg u Hamadan (grad u središtu današnjeg Irana) gdje je 1023. godine napisao svoje najvažnije djelo *Knjigu liječenja*. Knjiga sadrži cijelo grčko-rimsko i arapsko medicinsko znanje, a sastoji se od četiri dijela. Jedan dio je posvećen matematici koju dijeli na geometriju, astronomiju, aritmetiku i glazbu.

Geometrijski dio Avicenna temelji na Euklidovim *Elementima* te se u njemu bavi pravcima, kutevima, ravninama, paralelama, trokutima, konstrukcijama ravnalom i šestarom,

Slika 2.14: Avicenna (slika preuzeta s Wikipedije)

površinama paralelograma i trokuta, pravilnim poligonima, svojstvima i površinama krugova, volumenima poliedara i kugle. U aritmetičkom dijelu bavi se, među ostalim, problemima djeljivosti.

U astronomiji je Avicenna bio prethodnik nekih današnjih pretpostavki za stvaranje svemira. Pripisuje mu se oko 100 radova, ali mnogi od njih imaju samo nekoliko stranica. Avicenna je umro 1037. godine u Hamedanu.

Ibn Yahya al-Maghribi **Al-Samawal** (oko 1130. –1180.) rođen je u Bagdadu kao sin židovskih roditelja. Ispočetka se zanimao za medicinu te je postao liječnik, ali se s 18 godina zainteresirao i za matematiku, koju je sam naučio jer u Bagdadu tog doba više nije bilo kvalitetnih učitelja matematike. Već s 19 godina napisao je svoje najpoznatije djelo o algebri. Ono je posebno značajno jer se radi o prvom arapskom djelu koje sustavno obrađuje negativne brojeve.

Al-Ishbili Abu Muhammad Jabir ibn Aflah, često poznat pod latinizmom **Geber** rođen je oko 1100. godine u Sevilli, a umro je oko 1160. godine. Iako nije bio među najvažnijim arapskim matematičarima, vrlo je važan jer su mu mnoga djela prevedena na latinski jezik, te tako postala poznata europskim matematičarima (za razliku od mnogih značajnijih arapskih matematičara). O njegovom životu imamo vrlo malo informacija. Jedino što je poznato da je dolazio iz Seville što govori dio njegovog imena „al-Ishbili”, što znači „iz Seville”.

Najvažnija Geberova djela su o sfernoj trigonometriji. Poznate su njegove kritike Ptolemejevom *Almagestu* koje je iznio u svojem najpoznatijem djelu *Ispravak Almagesta*. Posebno je kritizirao matematičke osnove rada, na primjer, korištenje Menelajevog teorema. Mnoge od teorema iz *Ispravka Almagesta* otkrili su arapski matematičari, poput Abu'l Wafe, još tijekom 10. stoljeća. Geber na nijednom mjestu ne citira nikoga od ranijih arapskih matematičara, pa je autentičnost njegovih otkrića diskutabilna.

Utjecaj Gebera na europske matematičare je bio vrlo velik, a znamo da je posebno jako utjecao na Regiomontanusa[34]. On je u svojoj četvrtoj knjizi djela *De triangulis* prepisao dijelove Gerberovog rada bez da ga je naveo kao autora. Zbog toga je Cardano[35] žestoko kritizirao Regiomontanusa.

[34]Johann Muller Regiomontanus (1436. – 1476.), njemački matematičar, astronom, astrolog i prevoditelj.
[35]Girolamo Cardano (1501. – 1576.), talijanski matematičar, fizičar, liječnik, filozof i astrolog.

Poglavlje 3

Usporedba arapskih matematičkih doprinosa i školskih programa matematike

Nastavnici matematike često se pitaju koja je uloga povijesti matematike u nastavi matematike te kako se može integrirati u nastavni plan i program matematike. Zapravo, nastavnike zanimaju opća pitanja koja se odnose na prednosti, primjedbe, poteškoće i načine integriranja povijest matematike u učionice. Mnogi vjeruju da integracija povijesti matematike u nastavu može mnogo doprinijeti poboljšanju poučavanja i učenja matematike te razvijanju poštovanja prema matematici. S jedne strane, jasno je da povijest matematike može motivirati učenike na učenje i pomaže im da bolje razumiju matematiku, ali s druge strane, duboko proučavanje povijesti matematike zahtijeva prilično jako znanje matematike i povijesti.

Proučavanje primjene povijesti matematike u nastavi, uključujući biografija matematičara te povijesnih pregleda određenih matematičkih tema, je još uvijek u početnoj fazi. Samim time, nastavnici imaju vrlo malo znanja o integriranju povijesti matematike u svoju nastavu. Nedostatak znanja o povijesti matematike i njezinoj integraciji u nastavi nije jedini razlog za stanje u učionicama diljem svijeta. Uvjerenja nastavnika o prirodi matematike te o nastavi i učenju mogu duboko utjecati na njihovu spremnost da se integriraju povijest matematike u svoju nastavu. Doista, ako se, kako to mnogi čine, vidi matematiku kao fiksan i gotov opseg znanja, a podučavanje matematike smatra prijenosom znanja s nastavnika na učenike, onda teško postoji prostor za povijest matematike u procesu učenja i poučavanja.

Međutim, znamo da je povijest matematike puna zanimljivih priča i anegdota, pa bi nam njezina integracija u nastavi mogla poslužiti za hvatanje pozornosti i razvijanje znatiželje o matematici. Proučavanje povijesti matematike i njena sama integracija u nastavi može mijenjati i nastavnikova vlastita uvjerenja o matematici te mu omogućiti bolje razumijevanje matematičkih pojmova. Povijest matematike u nastavi može pomoći učenicima vidjeti kako su matematičke ideje bile razvijane u prošlosti i njeno uključivanje u nastavu pomaže ispravljanju upravo navedenog krivog stava o matematici kao zatvorenom skupu znanja koji se ne razvija. Također, povijest matematike pruža učenicima brojne mogućnosti za istraživanje drevnih kultura i društva i tako povezivanje s drugim nastavnim predmetom, povijesti.

Unatoč svim prednostima, integracija povijesti matematike u nastavu može dovesti do nekih argumenata protiv takvog učenja kod nastavnike i kod učenika. Među takvim argumentima su: povijest matematike može zbuniti učenike, a ne pomoći im da bolje razumiju temu; za integraciju povijesti matematike u nastavu potrebno je puno vremena; velikoj većini nastavnika nedostaje znanje i stručnost u povijesti matematike; itd.

Možemo zaključiti da je povijest matematike u nastavi matematike važno pažljivo i razumno dozirati, da bi tako povijest matematike postala sredstvo za učinkovitije učenje i poučavanje. Jasno je da integriranje povijesti matematike u nastavu neće rezultirati čudesnim promjenama učenika u motivaciji za učenje, ali daje novi pogled na matematiku kao dio ljudskog djelovanja (preuzeto iz [14]).

Kako smo vidjeli u prethodnom dijelu rada, mnogi standardni nastavni sadržaji matematike osnovne i srednje škole bili su poznati matematičarima srednjevjekovnog islamskog, odnosno arapskog svijeta (jer su ih preuzeli od Grka ili Indijaca te doradili, primjerice geometrijske konstrukcije ili teoriju omjera), za neke se u njih pojavljuju prve naznake (primjerice, al-Karaji je prethodnik metode matematičke indukcije), a neke su bitno razvili ili čak prvi uveli (tu posebno treba istaknuti algebru i trigonometriju kao zasebne matematičke discipline). Štoviše, u mnogočemu je arapski pristup matematici sličniji suvremenom nego starogrčki. Stoga arapska matematika posebno dobro može poslužiti u gore navedene svrhe.

U školskoj matematici odmah u prvom razredu susrećemo se s jednim od najvažnijih arapskih doprinosa, arapskim brojkama. Učenici prvo uočavaju potrebu za prebrojavanjem i njegovim efikasnim zapisivanjem na nizu aktivnosti. Zatim tijekom nižih razreda osnovne škole učenici usvajaju dekadski brojevni sustav i operacije u njemu, koje su doduše indijskog porijekla, ali su do nas stigle posredstvom arapskih matematičara i do suvremenog doba se nebitno mijenjale. Ovdje učenicima zasigurno može biti zanimljivo upoznati se i s ranijim oblicima arapskih brojki, kao i saznati da dekadski pozicijski sustav nije „oduvijek" u uporabi. Tu ih se može usporedbom s primitivnijim sustavima i računom u istima (primjerice, s rimskim ili staroegipatskim brojkama) potaknuti da otkriju vrijednost ovog indijsko-arapskog doprinosa.

Nekolicinu arapskih doprinosa aritmetici susrećemo kroz osnovnu školu. U petom razredu učenici uče određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika dvaju prirodnih brojeva, što je koristio i Abu'l Wafa u svojim djelima. Također, kako smo vidjeli razlomcima su se bavili mnogi arapski matematičari. Gradivo razlomaka u nas se uči u petom i šestom razredu. Tu je zgodno osvrnuti se na, za današnji pristup, neobičnu Abu'l Wafinu klasifikaciju razlomaka, njene prednosti i mane. Zgodno je saznati i da je razlomačka crta arapskog porijekla; nije poznato tko ju je osmislio, ali se smatra da potječe iz 12. stoljeća. U Europu ju je uveo Fibonacci u 13. stoljeću. Naravno, najveći arapski doprinos razlomcima je al-Kashijevo uvođenje decimalnih razlomaka. Uspoređujući s ranijim alternativama lako će biti uočiti koliko je to velik napredak bio za znanost.

U šestom razredu obrađuju se cijeli brojevi i operacije s njima. Vidjeli smo da su se negativni brojevi, iako indijskog porijekla, u arapskom svijetu samo sporo „probijali". Problemi s negativnim brojevima koje su imali arapski (i mnogi drugi) matematičari, primjerice nemogućnost njihove fizičke interpretacije kao iznose mjere veličine, olakšat će nastavniku shvaćanje poteškoća koje učenici imaju s tim konceptom, a mogu mu dati i ideje kako ih nadvladati. Abu'l Wafina pravila za račun s negativnim brojevima i njihova interpretacija kao duga zasigurno su jedan od standardnih načina za objašnjenje tih pojmova.

Već u najstarijim sačuvanim matematičkim tekstovima (egipatskim papirusima, sumersko-babilonskim glinenim pločicama) susreću se linearne i kvadratne jednadžbe. One su u Grka poprimile geometrijski oblik, a tek arapski matematičari objedinili su praktične istočne i geometrijske grčke pristupe i stvorili algebru. Štoviše, rekli smo da je riječ algebra arapskog porijekla, izvedena iz naslova al-Khwarizmijevog djela. U nas se učenici s algebrom prvi put susreću u šestom razredu, gdje upoznaju linearne jednadžbe, vrlo brzo u modernom simboličkom obliku. Koristeći primjere iz arapskog doba, koji su, podsjećamo, bili opisivani isključivo riječima, lako se unaprijedi razumijevanje koncepta nepoznanice, ali i usporedbom s modernom simbolikom otkriju njezine prednosti te omogući bolje povezivanje apstraktnog simbola i stvarnog smisla nepoznanice. Dodatno, kako su mnogi arapski (i drugi stari) problemi koji se svode na linearne jednažbe praktičnog tipa, korištenjem istih se razvija uporaba matematike u kontekstu, a uočavajući povijesne specifičnosti (primjerice, zastarjele jedinice mjere) postižemo i korelaciju s drugim nastavnim predmetom, povijesti. Analogni komentari vrijede za kvadratne jednadžbe, koje se u nas obrađuju u drugom razredu srednje škole. Za njih je dodatno uočljivo kako al-Khwarizmijevo geometrijsko svođenje na potpun kvadrat ilustira današnji formalni postupak, kako se njegove naizgled različite metode za rješavanje različitih tipova kvadratnih jednadžbi uz uporabu negativnih brojeva svode na jedinstvenu, danas iskazanu poznatom formulom, te kako Khayyamovo rješavanje kvadratnih i kubnih jednadžbi povezuje te teme s krivuljama drugog reda, koje su gradivo trećeg razreda srednje škole.

U prvom razredu srednje škole učenici se susreću s množenjem potencija jednakih baza, koje nalazimo primjerice kod Abu Kamila, a rad s algebarskim izrazima opisan je primjerice kod al-Khwarizimja, dok monome definira al-Karaji.

Povezano s nastavnim programima za peti razred je i razlikovanje vrsta trokuta, a to je pak tema kojom se bavio al-Khwarizmi. Iako je njegov pristup povezan s Pitagorinim poučkom, koji se uči kasnije, zgodno je usporediti zaključke dobivene mjerenjem kutova i račun površina kvadrata nad stranicama, te tako naslutiti Pitagorin poučak i bez njegova formalnog uvođenja. Naravno, ovaj je pristup još prikladniji kad se u osmom razredu stvarno obrađuje Pitagorin poučak. Zgodno je spomenuti da je to upravo jedan način za primjenu suvremene metode otkrivanja u nastavi matematike (više detalja može se naći u [13]). Spomenemo i da se kao dokaz Pitagorinog poučka može umjesto nekog drugog primjerice navesti opisani Thabitov. Također, u šestom razredu zgodno je usporediti današnju i al-Khwarizmijevu klasifikaciju četverokuta.

Naposljetku, s disciplinom koja je postala potpuno matematička upravo zaslugom arapskih matematičara, trigonometrijom, učenici se susreću u drugom i trećem razredu srednje škole. Prateći razvoj i koristeći arapske primjere ne samo da se nastava te teme može dopuniti, već i bolje objasniti razloge uvođenja i korist trigonometrije.

Iz svega navedenog možemo zaključiti da se otkrića arapskih matematičara i matematika kojom su se služili, kao i problemi kojima su se bavili, susreću tijekom cijelog školskog obrazovanja te se primjeri iz arapskog dijela povijesti matematike mogu iznimno dobro upotrijebiti u svrhe koje smo naveli na početku ovog poglavlja.

Bibliografija

[1] A. Aaboe, Al-Kashi's iteration method for the determination of sin 1°, http://www.jphogendijk.nl/arabsci/Kashi-Aaboe.pdf (7.9.2016.)

[2] D. Berlinski, *Beskonačni uspon: kratka povijest matematike*, Alfa, Zagreb 2011.

[3] F. M. Brueckler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2014.

[4] V. Devide, *Matematike kroz kulture i epohe*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[5] G. Isakovič Gleizer, *Povijest matematike za školu*, Školske novine i HMD, 2003.

[6] D. Medić, *Povijest brojeva i njihove notacije*, Diplomski rad, Zagreb, 2011.

[7] J. O'Connor, E. Robertson, Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Karaji.html (7.9.2016.)

[8] R. Risojević, *Slavni arapski matematičari*, Nolit, Beograd, 1988.

[9] R. Risojević, *Veliki matematičari*, Nolit, Beograd, 1987.

[10] W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, New York, 1908./60.

[11] J. Stilwell, *Mathematics and Its History*, Springer Verlag, 2010.

[12] J. Stedall, *Povijest matematike: kratki uvod*, Element, Zagreb, 2014.

[13] B. van Etten, S. Adendorff, Discovering Pythagoras theorem through guided reinvention, https://www.academia.edu/7798261/RME_-_Discovering_the_Pythagorean_theorem_through_guided_reinvention (7.9.2016.)

[14] Integrating History of Mathematics into the Mathematics Classroom, http://cmup.fc.up.pt/cmup/preprints/2001-25.pdf (8.9.2016.)

Sažetak

U radu se susrećemo s arapskom matematikom, točnije: matematikom srednjevjekovnog islamskog svijeta, i njezinim doprinosima koji su nam vidljivi sve do danas. Svoj uspon arapska matematika započinje nakon osnivanja čuvene *Kuće mudrosti* u Bagdadu.

Prvo poglavlje rada nam daje pregled kako su Arapi preuzeli indijske brojke. U 13. stoljeću je Fibonacci svojim djelom *Liber Abbaci* te brojke predstavio Europi te su one nazvane arapskim, iako su sami Arapi isticali da je riječ o indijskom otkriću. U drugom poglavlju rada za svakog od velikih arapskih matematičara poput al-Khwarizmija, Abu'l Wafe, Omar Khayyama, al-Tusija, al-Kashija i drugih navodimo njihove biografske podatke. Nadalje, za svakoga od njih navodimo njihova otkrića i doprinose u matematici te drugim znanstvenim disciplinama. Posljednje poglavlje rada sadrži usporedbu navedenih arapskih matematičkih doprinosa s osnovnoškolskim i srednjoškolskim programima matematike uz komentare o integraciji povijesti matematike u nastavu matematike.

Summary

In this diploma thesis we decribe arabic mathematics, more precisely: mathematics of the medieval islamic world, and its contributions that are visible even today. Its rise begins with the founding of the *House of Wisdom* in Baghdad.

The first chapter describes how Arabs adopted Indian numerals. In the 13th century Fibonacci introduced them to Europe in his work *Liber Abbaci* and later the numerals were given the name Arabic, even if Arabs themselves emphasized their Indian origin. In the second chapter we present biographies of all major Arabic mathematicians, lik al-Khwarizmi, Abu'l Wafa, Omar Khayyam, al-Tusi, al-Kashi etc. For all of the we also describe their achievements and contributions to mathematics and other fields of science. Finally, we compare the Arabic mathematical achievements with contemporary primary and secondary educational programs in mathematics, including comments of integration of history of mathematics in the mathematics classroom.

Životopis

Sebastijan Kocijan rođen je 17. prosinca 1991. godine u Varaždinu. Pohađao je Osnovnu školu Metel Ožegović u Radovanu. Nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja upisuje prirodoslovno-matematički smjer u srednjoj školi Druga gimnazija Varaždin gdje završava svoje srednjoškolsko obrazovanje. Godine 2010. upisuje Preddiplomski sveučilišni studij matematike-smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odsjeku koji završava 2014. godine. Nakon toga, upisuje Diplomski sveučilišni studij matematike; smjer nastavnički i završava ga 2016. godine.