Određivanje vrijednosti američkih opcija

Žanetić, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:729330

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

zir.nsk.hr

dabar
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Marija Žanetić

Određivanje vrijednosti američkih opcija

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Nela Bosner

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____ , predsjednik
2. _____ , član
3. _____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 O američkim opcijama i modelu financijskog tržišta **1**
2.1 Funkcija isplate 2
2.2 A priori granice i uvjeti 2
2.3 Svojstva opcija 3
2.4 Model financijskog tržišta 3

3 Temelji za numeričke metode računanja **5**

4 Metode konačnih diferencija **7**
4.1 Aproksimacija diferencijama 7
4.2 Mreža 9
4.3 Eksplicitna metoda 10
4.4 Stabilnost eksplicitne metode 12
4.5 Implicitna metoda 14
4.6 Crank-Nicolsonova metoda 15

5 Rubni uvjeti **18**
5.1 Krivulja ranog iskorištavanja 19
5.2 Problem slobodnih rubova 21
5.3 Black - Scholesova nejednadžba 22
5.4 Linearni komplementarni problem 24
5.5 Diskretizacija jednostavnog problema 25
5.6 Linearna komplementarnost za američke put opcije 26

6 Računanje Američkih opcija **27**
6.1 Diskretizacija pomoću konačnih diferencija 27
6.2 Reformulacija i analiza linearnog komplemenarnog problema . 30
6.3 Algoritam za računanje Američkih opcija 32

7 Točnost **33**
7.1 Elementarna kontrola grešaka 34

8 Analitičke metode **35**
8.1 Aproksimacija zasnovana na interpolaciji 36
8.2 Analitička metoda linija 38

9 Numerički testovi **39**

A Prvi dodatak **42**

Literatura **43**

Sažetak **45**

Summary **47**

Životopis **49**

1 Uvod

Američke opcije spadaju pod standardne ili *vanilla* opcije i određivanje njihovih vrijednosti se svodi na rješavanje određenih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Njihova cijena ovisi o raznim tržišnim parametrima i želimo ju odrediti za svaki vremenski trenutak do dospijeća vrijednosnice. Prilikom računanja vrijednosti američkih opcija moramo uzeti u obzir i činjenicu da se one mogu iskoristiti u bilo kojem trenutku do datuma dospijeća te također i isplate dividendi ukoliko je dionica financijska imovina na koju glasi opcija. Model tržišta kojeg ovdje uzimamo je Black - Scholes -Mertonov model, stoga je temelj za računanje vrijednosti opcija pretpostavka da vrijednost američkih opcija zadovoljava Black - Scholesovu parcijalnu diferencijalnu nejednadžbu. Numeričke metode koje se koriste za računanje vrijednosti opcija u ovom radu su metode konačnih diferencija, a ukratko se obrađuju i neke analitičke metode. U sklopu rada je izrađen program u Matlabu koji implementira algoritam za računanje vrijednosti opcija.

2 O američkim opcijama i modelu financijskog tržišta

Opcija je pravo, ali ne i obveza da prodamo, odnosno kupimo rizičnu imovinu po dogovorenoj cijeni unutar dogovorenog vremenskog razdoblja. Ta rizična imovina je uglavnom dionica ili paket dionica nekog poduzeća no može se raditi i o dioničkim indeksima, valutama ili robama. Budući da vrijednost opcija ovisi o vrijednosti imovine kojom se trguje, opcije spadaju pod financijske izvedenice.

Definicija 2.1 (Američka put (call) opcija)**.** *Američka call (put) opcija s cijenom izvršenja K i dospijećem T je ugovor koji vlasniku tog ugovora daje pravo, ali ne i obvezu, na kupnju (prodaju) dionice piscu opcije po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do trenutka T. Vlasnik opcije je kupio opciju po tržišnoj cijeni koju zovemo premija.*

Kako izračunati poštenu vrijednost premije, odnosno cijenu opcije, je glavna tema ovog diplomskog rada.
Vlasnik američke opcije u trenutku t ima 4 mogućnosti:

1. Prodati opciju po njezinoj trenutnoj tržišnoj cijeni (za $t < T$)
2. Zadržati opciju i ne napraviti ništa
3. Iskoristiti opciju (za $t \leq T$)
4. Pustiti da opcija postane bezvrijedna (za $t \geq T$)

2.1 Funkcija isplate

U trenutku t, vlasnik američke call opcije će provjeriti trenutnu cijenu dionice. On može i ne mora iskoristiti opciju, a to ovisi o minimalnom trošku. Označimo cijenu dionice sa S. Opciju će iskoristiti samo ako je $S > K$. U tom slučaju, nakon što kupi dionicu po cijeni K, može ju odmah prodati na spot tržištu po tržišnoj cijeni S i tako ostvariti profit koji iznosi $S - K$ po dionici. U ovoj situaciji, isplata je $S - K$. (Tu smo zanemarili transakcijske troškove). U slučaju $S < K$, vlasnik neće iskoristiti opciju jer dionicu može kupiti po jeftinijoj cijeni S. U ovom slučaju, opcija je bezvrijedna, tj. isplata je 0.
Slično, za američku put opciju ima smisla iskoristiti opciju samo za S < K. Dakle, funkcija isplate za američku call opciju je

$$(S_t - K)^+, \forall t \leq T, \tag{1}$$

a za američku put opciju je

$$(K - S_t)^+, \forall t \leq T, \tag{2}$$

gdje je $(x)^+ := \max\{x, 0\}$.

Kod američkih opcija, vrijednost isplate ovisi samo o trenutnoj cijeni dionice S_t , a za egzotične opcije ta isplata ovisi o cijelom putu cijene dionice S_t.

2.2 A priori granice i uvjeti

Bez obzira kakvi su uvjeti pojedine opcije ili kako se financijsko tržište ponaša, vrijednosti opcije uvijek moraju zadovoljavati određene granice. Te granice zovemo a priori granice. Princip koji je dovoljno jak da posluži kao temelj za računanje vrijednosti opcija je princip nemogućnosti arbitraže. Arbitraža je proces kupnje ili prodaje nečega da bi se iskoristila razlika u cijeni i tako ostvario bezrizičan profit. Ako mogućnost za arbitražu postoji, arbitražeri će ju iskoristiti i tako smanjiti mogućnost za daljnju arbitražu. U idealiziranom tržištu (kakvog ovdje pretpostavljamo), informacije se šire brzo i zato se prilike za arbitražom brzo iskoriste. Zbog toga možemo pretpostaviti da uopće nema mogućnosti arbitraže. Nadalje, zbog te pretpostavke, vrijednost američkih opcija ne može biti manja od isplate, za svaki S i svaki t. Da bismo pokazali zašto je to tako, prvo pretpostavimo suprotno, tj. da

je vrijednost put opcije manja od isplate (slično se pokazuje i za call opciju). Sa V ćemo označavati vrijednost opcije. Mora svakako vrijediti da je $V \geq 0$ jer je $V < 0$ u suprotnosti s definicijom. Dakle, za $S < K$ vrijedi $0 \leq V < K - S$. ($K - S$ je isplata). Ova situacija dopušta arbitražu. Naime, proveli bi slijedeću strategiju; posudili bi iznos $S + V$ i od toga kupili dionicu na spot tržištu po cijeni S te opciju po cijeni V. Zatim bi odmah iskoristili opciju i prodali dionicu po cijeni izvršenja K. Time bismo ostvarili profit u iznosu $K - S - V > 0$. To je u suprotnosti sa principom nepostojanja arbitraže. Dakle, za vrijednosti američkih opcija mora vrijediti:

1. Za put opciju $V_P^{Am} \geq (K - S)^+$
2. Za call opciju $V_C^{Am} \geq (S - K)^+$

2.3 Svojstva opcija

Vrijednost opcije ne ovisi samo o cijeni dionice S i vremenskom trenutku t. Ovisnost o cijeni izvršenja K i dospijeću T je očigledna. Tržišni parametri koji utječu na vrijednost opcije su kamatna stopa r, volatilnost cijene σ te dividende u slučaju da se one isplaćuju. Kamatna stopa r je kamatna stopa koja se obračunava na nerizičnu imovinu kao što je depozit u banci. Parametar σ se može definirati kao standardna devijacija fluktuacija cijene S_t. Dakle, što su veće fluktuacije cijena dionice, to je veća volatilnost σ, a to je teže predvidjeti buduću cijenu dionice. Prema tome, volatilnost je standardna mjera rizika. Ponekad zapisujemo $V(S, t; T, K, r, \sigma)$ kada želimo naglasiti ovisnost vrijednosti opcije o tržišnim parametrima.
Daljnje pretpostavke su da je vrijeme mjereno u godinama, a da su kamatna stopa i volatilnost godišnje stope. Za vrijeme trajanja opcije vrijedi $t_0 \leq t \leq T$, no mi bez smanjenja općenitosti koristimo $t_0 = 0$. Dakle, T je vrijeme trajanja opcije i $0 \leq t \leq T$. Cijene S_t su stohastički proces. Kako bismo pojednostavnili model i analizu, pretpostavljamo da su r i σ konstantni za svaki t.

2.4 Model financijskog tržišta

Tržište je to koje odlučuje o vrijednosti opcije. Ako želimo izračunati razumnu vrijednost opcije, moramo postaviti matematički model tržišta. On će nam poslužiti kao aproksimacija i idealizirani oblik pravog financijskog

tržišta koje je u stvarnosti puno kompleksnije. Black-Merton-Scholesov model tržišta se pokazao kao uspješan i često korišten za računanje vrijednosti opcija. Niz pretpostavki nam omogućava da funkcije $V(S,t)$ prikažemo kao rješenja određenih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi ili parcijalnih diferencijalnih nejednadžbi. Ovaj model tržišta karakterizira popularna Black-Scholesova jednadžba koja je predložena još 1973.

Definicija 2.2 (Black-Scholesova jednadžba)**.**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\sigma S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{3}$$

Jednadžba (3) je parcijalna diferencijalna jednadžba za funkciju $V(S,t)$. U nastavku pišu pretpostavke koje vode do jednadžbe (3).

Pretpostavka 2.3. (Black-Merton-Scholesov model tržišta)

1) Nema mogućnosti za arbitražu.

2) Tržište je efikasno. To znači da nema transakcijskih troškova, kamatne stope za posuđivanje i pozajmljivanje novca su jednake, svi sudionici na tržištu imaju potpun pristup svim dostupnim informacijama i svi vrijednosni papiri i krediti su dostupni u bilo kojem trenutku i u bilo kojoj veličini. Posljedično, sve varijable su savršeno djeljive, tj. njihove vrijednosti mogu poprimiti bilo koji realni broj. Nadalje, individualno trgovanje ne utječe na cijene.

3) Cijena imovine prati geometrijsko Brownovo gibanje.

4) r i σ su konstantne za $0 \leq t \leq T$. Dividende se ne isplaćuju u tom vremenskom razdoblju.

Neke od tih pretpostavki su dosta jake, ali se mogu olabaviti. To ćemo riješiti kasnije u ovom radu. Funkcija $V(S,t)$ nije u potpunosti definirana zahtjevom da rješava jednadžbu (3) i zadovoljava uvjete $S > 0$ i $0 \leq t \leq T$. Dodatno, ona mora zadovoljavati još neke terminalne i rubne uvjete. Terminalni uvjet za $t = T$ je $V(S,t) = \psi(S)$, gdje ψ označava funkciju isplate (1) ili (2) ovisno o tipu opcije. U nastavku rada će se detaljnije opisati rubni uvjeti.

3 Temelji za numeričke metode računanja

Američke i europske opcije spadaju pod standardne ili vanilla opcije. Prvo ćemo obraditi numeričke metode računanja za standardne opcije, a zatim se orijentirati samo na američke opcije. Standardne metode podrazumijevaju metode konačnih diferencija koje ćemo detaljno obraditi, a kao temelj za računanje koristimo Black-Scholesovu diferencijalnu jednadžbu. Dakle, nije nam sada cilj riješiti tu diferencijalnu jednadžbu (analitičke metode su obrađene u poglavlju 8) već pronaći numeričko rješenje. Ukoliko nas zanima samo vrijednost $V(S,0)$, primijenit ćemo binomnu metodu (koja ne spada pod metode konačnih diferencija) no to nam nije dovoljno. Mi želimo procijeniti $V(S,t)$ za sve $S > 0$ i $0 \leq t \leq T$.

Američke opcije zadovoljavaju nejednadžbe tipa Black-Scholes. Radi slučaja u kojem iskorištavamo opciju prije dospijeća, trebamo oslabiti Pretpostavku 2.3. Nadalje, moramo uzeti u obzir isplate dividendi. Prvo ćemo započeti sa nerealistično pojednostavnjenim rubnim uvjetima, a zatim ćemo definirati potpune rubne uvjete. Na kraju ćemo implementirati algoritam konačnih diferencija koji može računati vrijednosti američkih opcija.

Pretpostavljamo da se dividende isplaćuju neprekidno na konstantnoj razini. U slučaju diskretne isplate, isplata može biti pretvorena u neprekidnu kamatu. Moramo uzeti u obzir da u trenutku diskretne isplate dividendi, cijena imovine $S(t)$, momentalno pada i to za iznos isplate. Ovo mora vrijediti zbog pretpostavke o nemogućnosti arbitraže. Neprekidan tok dividendi je modeliran smanjenjem cijene S u svakom vremenskom intervalu dt i to za iznos $\delta S dt$, za konstantni $\delta \geq 0$. To možemo lako ugraditi u Black-Scholesov okvir. Po pretpostavci, cijene dionica prate geometrijsko Brownovo gibanje pa model kretanja cijene dionica (ne uključujući isplate dividendi) glasi :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

W_t je standardno Brownovo gibanje. Sa μ označavamo očekivanu stopu povrata, a sa σ volatilnost. Ovaj model pretpostavlja da se relativna promjena cijene $\frac{dS}{S}$ u vremenskom intervalu dT sastoji od deterministčkog kretanja μdt i stohastičkih fluktuacija oblika σdW_t. Geometrijsko Brownovo gibanje je referentni model na kojem se bazira Black-Scholes-Mertonov pristup. Uzimajući u obzir isplate dividendi, dobivamo generalizirani model Brownovog gibanja:

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \delta)dt + \sigma dW \tag{4}$$

Odgovarajuća Black-Scholesova jednadžba za funkciju $V(S,t)$ glasi:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{5}$$

Ova jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{6}$$

za $y(x,\tau)$ s $0 \leq \tau$, $x \in \mathbb{R}$. Ekvivalencija se može dokazati korištenjem sljedećih transformacija:

$$\begin{aligned} S = Ke^x, t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, q := \frac{2r}{\sigma^2}, q_\delta := \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}, \\ V(S,t) = V(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) =: v(x,\tau), \\ v(x,\tau) =: K \exp\{-\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x - (\frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2 + q)\tau\} y(x,\tau) \end{aligned} \tag{7}$$

Transformacija je motivirana uočavanjem da Black-Scholesova jednadžba (5) ima varijabilne koeficijente S^j čije potencije odgovaraju redu derivacije po S. Tj. odgovarajući izrazi iz (5) su oblika:

$$S^j \frac{\partial^j V}{\partial S^j}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Linearne diferencijalne jednadžbe s takvim izrazima su poznate kao Eulerove diferencijalne jednadžbe te njihova analiza sugerira transformaciju $S = Ke^x$. Transformirana verzija u jednadžbi (6) ima konstantne koeficijente (=1), što olakšava implementiranje numeričkog algoritma.

Što se tiče vremenske transformacije iz (7), vrijeme isteka opcije $t = T$ je sada reprezentirano novim vremenom $\tau = 0$, a $t = 0$ je sada $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 T$. Dakle, skaliranjem po $\frac{1}{2}\sigma^2$, τ predstavlja preostalo vrijeme trajanja opcije. Domena na kojoj ćemo aproksimirati rješenje $y(x,\tau)$ od (6) postaje

$$-\infty < x < \infty, 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

Nakon tog izračuna, ponovno ćemo primijeniti transformacije (7) kako bismo od $y(x,\tau)$ izveli vrijednost opcije $V(S,t)$ u originalnim varijablama.

Koristeći transformacije (7), terminalni uvjeti (1) i (2) postaju inicijalni uvjeti za $y(x,0)$. Npr. call opcija zadovoljava

$$V(S,T) = \max\{S-K,0\} = K\max\{e^x - 1, 0\}.$$

Iz (7) dobivamo:

$$V(S,T) = K\exp\{-\frac{x}{2}(q_\delta - 1)\}y(x,0),$$

i prema tome vrijedi:

$$y(x,0) = \exp\{\frac{x}{2}(q_\delta - 1)\}\max\{e^x - 1, 0\}.$$

Koristeći

$$\exp\{\frac{x}{2}(q_\delta - 1)\}(e^x - 1) = \exp\{\frac{x}{2}(q_\delta + 1)\} - \exp\{\frac{x}{2}(q_\delta - 1)\}$$

inicijalni uvjeti $y(x,0)$ za nove varijable su:

$$call : y(x,0) = \max\{e^{\frac{x}{2}(q_\delta+1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta-1)}, 0\} \tag{8}$$

$$put : y(x,0) = \max\{e^{\frac{x}{2}(q_\delta-1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta+1)}, 0\} \tag{9}$$

Problem graničnih vrijednosti je gotov uvođenjem rubnih uvjeta za $x \to -\infty$ i $x \to \infty$.

Metode koje se koriste za rješavanje problema možemo direktno primijeniti na (5) no to može stvarati probleme pa je lakše te metode primijeniti na (6).

4 Metode konačnih diferencija

U ovom poglavlju se opisuju metode konačnih diferencija koje se primjenjuju na parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (6). Obradit ćemo tri takve metode, ali prije toga ćemo proći temelje potrebne da ih primijenimo.

4.1 Aproksimacija diferencijama

Svaka dvaput neprekidno diferencijabilna funkcija f zadovoljava

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi)$$

gdje je ξ broj između x i $x+h$. Ta jednadžba se dobije iz Taylorovih redova. Naime, znamo da Taylorov red za neku funkciju $f(x)$ u točki a glasi:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (10)$$

pri čemu je $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$, $0 < \theta < 1$ Lagrangeov oblik ostatka.
Gornji izraz možemo zapisati i na slijedeći način:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + R_1(x).$$

Kada u gornji izraz umjesto x uvrstimo $x+h$ i umjesto a stavimo x dobivamo jednadžbu s početka poglavlja. ξ odgovara izrazu $(x - \theta(x-a))$ u Lagrangeovom ostatku $R_1(x)$.

Mi diskretiziramo $x \in \mathbb{R}$ uvođenjem jednodimenzionalne mreže diskretnih točaka x_i :

$$... < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < ...$$

Npr., mi ćemo odabrati ekvidistantnu mrežu sa udaljenošću čvorova $h = x_{i+1} - x_i$. Iako je x sada diskretna varijabla, vrijednosti $f_i = f(x_i)$ nisu. Za $f \in \mathcal{C}^2$, f'' je ograničena i izraz $-\frac{h}{2} f''(\xi)$ se može prikladno zapisati kao $\mathcal{O}(h)$ pa dobivamo sljedeću notaciju:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h).$$

Analogan izraz vrijedi i za parcijalnu derivaciju od $y(x,\tau)$ koja uključuje diskretizaciju od τ. Zbog toga ćemo kasnije izraz h zamijeniti sa Δx ili $\Delta\tau$. Izraz $\mathcal{O}(h^p)$ je greška p-tog reda. U gornjoj jednadžbi imamo grešku prvog reda, a greške drugog reda se dobivaju pomoću centralnih diferencija:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2), f \in C^3$$

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2), f \in C^4 \quad (11)$$

Obje jednadžbe se mogu dobiti iz Taylorovih redova. Naime, za dobiti prvu jednadžbu koristimo formule

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x+\theta_1 h)h^3$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 - \frac{1}{3!}f'''(x-\theta_2 h)h^3$$

koje se dobiju jednostavnim uvrštavanjem u formulu za Taylorov red (10). Kada drugu jednadžbu oduzmemo od prve i zatim podijelimo s $2h$ dobivamo

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{12}[f'''(x+\theta_1 h) + f'''(x-\theta_2 h)]. \qquad (12)$$

Umjesto zadnjeg izraza na desnoj strani jednostavno pišemo $\mathcal{O}(h^2)$. Uvrštavanjem $h = x_{i+1} - x_i$ i $f_i = f(x_i)$ dobivamo prvu jednadžbu centralnih diferencija. Druga jednadžba centralnih diferencija se dobiva na sličan način. Za njezino izvođenje koristimo slične formule kao za prvu jednadžbu centralnih diferencija:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x+\theta_1 h)h^4$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 - \frac{1}{3!}f'''(x)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x-\theta_2 h)h^4.$$

Zbrajanjem te dvije jednadžbe, dijeljenjem s h^2 te oznakom $\mathcal{O}(h^2)$ za Lagrangeov ostatak dobivamo jednadžbu za drugu centralnu diferenciju.

Budući da su ekvidistantne mreže povoljne za algoritme koji se lako implementiraju te se greške lako računaju, mi ćemo njih koristiti kod računanja.

4.2 Mreža

Promatramo mrežu gdje je os apcisa x, a ordinata τ. Ili x ili τ ili obje osi mogu biti diskretizirane. Mi ćemo napraviti i od x i τ diskretne varijable tako da dobijemo dvodimenzionalnu mrežu. Neka su Δx i $\Delta\tau$ razlike između susjednih x i τ. Korak kod brojeva τ je $\Delta\tau := \frac{\tau_{max}}{\nu_{max}}$ pri čemu je ν_{max} prikladni prirodni broj, a $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma^2 T$. Izbor za odabir diskretnih brojeva x je kompliciraniji. Za početak, beskonačni interval unutar kojeg je x definiran moramo svesti na konačan, tj. $a \leq x \leq b$. Rubovi inetervala $a = x_{min} < 0$ i $b = x_{max} > 0$ moraju biti pažljivo odabrani i to tako da za $S_{min} = Ke^a$ i $S_{max} = Ke^b$ i interval $S_{min} \leq S \leq S_{max}$ bude osigurana dovoljna kvaliteta aproksimacije. Za odgovarajući prirodni broj m, korak kod brojeva x je definiran kao $\Delta x := \frac{b-a}{m}$. Dodatne notacije za mrežu su sljedeće:

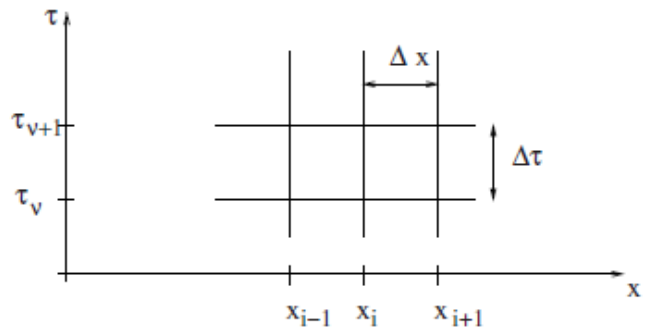
$$\tau_\nu := \nu\Delta\tau, \nu = 0, 1, ..., \nu_{max}$$

$$x_i := a + i\Delta x, i = 0, 1, ...m$$

$$y_{i\nu} := y(x_i, \tau_\nu),$$

$$w_{i\nu} \text{ je aproksimacija za } y_{i\nu}$$

Na taj način smo definirali dvodimenzionalnu uniformnu mrežu po x i τ kao na Slici 1.



Slika 1

Transformiranje (x, τ)-mreže koristeći (7) kako bi dobili (S, t) ravninu vodi do neuniformne mreže s nejednakim udaljenostima na linijama mreže $S = S_i = Ke^{x_i}$. Točke u kojima se sijeku linije x i τ se nazivaju čvorovi. U suprotnosti sa teoretskim rješenjem $y(x, \tau)$ koje je definiramo na kontinuumu, $w_{i\nu}$ je definirano jedino na čvorovima. Greška $w_{i\nu} - y_{i\nu}$ ovisi o parametrima x_{max}, x_{min}, m i ν_{max}. Na početku mi ne znamo koji izbor parametara daje prihvatljivu grešku. U praksi se pokazalo da je $x_{min} = -5$ i $x_{max} = 5$ razuman izbor za široki raspon vrijednosti r i σ. Prava greška je onda kontrolirana pomoću paramatera ν_{max} i m.

4.3 Eksplicitna metoda

Uvrštavanjem jednadžbi

$$\frac{\partial y_{i\nu}}{\partial \tau} = \frac{y_{i,\nu+1} - y_{i\nu}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau)$$

$$\frac{\partial^2 y_{i\nu}}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1,\nu} - 2y_{i\nu} + y_{i-1,\nu}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

u (6), dobivamo slijedeću jednadžbu za aproksimiranu vrijednost w:

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i\nu}}{\Delta\tau} = \frac{w_{i+1,\nu} - 2w_{i\nu} + w_{i-1},\nu}{\Delta x^2}$$

Iz te jednadžbe dobivamo rješenje za $w_{i,\nu+1}$:

$$w_{i,\nu+1} = w_{i\nu} + \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}(w_{i+1,\nu} - 2w_{i\nu} + w_{i-1,\nu}).$$

Uvrstimo li još $\lambda := \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$ u gornju jednadžbu, dobivamo sljedeće:

$$w_{i,\nu+1} = \lambda w_{i-1,\nu} + (1 - 2\lambda)w_{i\nu} + \lambda w_{i+1,\nu} \tag{13}$$

Jednadžba (13) predlaže procjenu organiziranu po vremenskim nivoima. Svi čvorovi istog indeksa ν čine ν-ti vremenski nivo. Za fiksirano ν, vrijednosti $w_{i,\nu+1}$ se izračunaju za svako i, a zatim nastavljamo na sljedeći vremenski nivo. Dakle, (13) je eksplicitni izraz za $w_{i,\nu+1}$; vrijednosti w na nivou $\nu + 1$ nisu povezane. Ova metoda se zato zove eksplicitna metoda ili metoda diferencija unaprijed.

Postupak računanja je slijedeći:

Za $\nu = 0$, vrijednosti w_{i0} su date inicijalnim uvjetima $w_{i0} = y(x_i, 0)$ za y iz (8) i (9), $i = 0, ..., m$. $w_{0\nu}$ i $w_{m\nu}$ za $1 \leq \nu \leq \nu_{max}$ su određeni rubnim uvjetima, ali o tome ćemo detaljnije u slijedećem poglavlju. Za sada ćemo jednostavno staviti da je $w_{0\nu} = w_{m\nu} = 0$. Za daljnu analizu, korisno je sve vrijednosti w iz istog vremenskog nivoa staviti u jedan vektor:

$$w^{(\nu)} := (w_{1\nu}, ..., w_{m-1,\nu})^\tau.$$

Zatim uvodimo konstantnu tridijagonalnu matricu dimenzije $(m-1)\times(m-1)$:

$$A := A_{expl} := \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} \tag{14}$$

Sada, koristeći vektorski zapis $w^{(\nu)}$ te (13), dobijamo slijedeće:

$$w^{(\nu+1)} = Aw^{(\nu)},\ \nu = 0, 1, 2, ... \tag{15}$$

Zapisi (14) i (15) se koriste samo za teoretska ispitivanja, dok se za računalne programe radije koristi zapis (13).

4.4 Stabilnost eksplicitne metode

Provest ćemo analizu greške za iteraciju $w^{(\nu+1)} = Aw^{(\nu)}$. Općenito, koristimo istu notaciju w za teoretsku definiciju od w i vrijednosti w koji su dobivene numeričkim računanjem na računalu. Budući da sada pričamo o greškama, moramo razdvojiti ta dva pojma. Neka $w^{(\nu)}$ označuje vektor iz definicije (kod njega ne postoje greške pri zaokruživanju), a $\bar{w}^{(\nu)}$ vektor dobiven numeričkom analizom na računalu. Označimo vektor grešaka sa:

$$e^{\nu} = \bar{w}^{(\nu)} - w^{(\nu)}, \nu \geq 0.$$

Rezultat na računalu možemo zapisati kao

$$\bar{w}^{(\nu+1)} = A\bar{w}^{(\nu)} + r^{(\nu+1)},$$

gdje su vektori $r^{(\nu+1)}$ greške pri zaokruživanju kod računanja $A\bar{w}^{(\nu)}$. Skoncentrirajmo se sada na efekt zaokruživanja greške koji se događa za proizvoljno ν, npr. ν^*. Zanima nas kako se širi(povećava) ova greška za $\nu > \nu^*$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $\nu^* = 0$ i jednostavnosti radi uzmimo da je $r^{(\nu)} = 0$ za $\nu > 1$. Dakle, u ovom slučaju ispitujemo koliki efekt na iteracije ima samo početno zaokruživanje greške. Inicijalna greška $e^{(0)}$ predstavlja greške zaokruživanja prilikom evaluacije inicijalnih uvjeta (8) i (9) kada se računa $\bar{w}^{(0)}$. Imamo da je $\bar{w}^{(\nu+1)} = A\bar{w}^{(\nu)}$. Dobijamo relaciju

$$Ae^{(\nu)} = A\bar{w}^{(\nu)} - Aw^{(\nu)} = \bar{w}^{(\nu+1)} - w^{(\nu+1)} = e^{(\nu+1)}$$

i ako je uzastopno uvrštavamo u izraz za grešku dobivamo:

$$e^{(\nu)} = A^{\nu}e^{(0)}.$$

Dakle, da bi metoda bila stabilna, prethodne greške moraju biti prigušene. Dolazimo do zahtjeva koji mora biti ispunjen kako bi imali stabilnu metodu: $A^{\nu}e^{(0)} \to 0$ kada $\nu \to \infty$. To znači $lim_{\nu\to\infty}\{(A^{\nu})_{ij}\} = 0$ za $\nu \to \infty$ i za bilo koji par indeksa (i, j). Sljedeća lema donosi kriterij za taj zahtjev.

Lema 4.1.

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow A^{\nu}z \to 0, \text{ za sve } z \text{ i } \nu \to \infty \Leftrightarrow lim_{\nu\to\infty}\{(A^{\nu})_{ij}\} = 0$$

($\rho(A)$ je spektralni radijus od A.)

Dokaz. [2]. □

Kao posljedicu leme, zahtijevamo radi stabilnosti da su sve svojstvene vrijednosti matrice A po apsolutnoj vrijednosti manje od 1. Sada zapišimo matricu A na slijedeći način:

$$A = I - \lambda G, \quad G := \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Preostaje izračunati svojstvene vrijednosti te matrice. Za to nam treba sljedeća lema.

Lema 4.2. Neka je $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 \\ \gamma & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ $N \times N$ matrica.

Svojstvene vrijednosti μ_k^G i svojstveni vektori $v^{(k)}$ od G dani su sa:

$$\mu_k^G = \alpha + 2\beta\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\cos\frac{k\pi}{N+1}, \ k = 1, ..., N$$

$$v^{(k)} = (\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\sin\frac{k\pi}{N+1}, (\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}})^2\sin\frac{2k\pi}{N+1}, ..., (\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}})^N\sin\frac{Nk\pi}{N+1})^\tau.$$

Dokaz. [1]. □

Primijenit ćemo Lemu 4.2 za $N = m-1, \ \alpha = 2, \beta = \gamma = -1$ da bi dobili svojstvene vrijednosti μ_k^G za G, a zatim i svojstvene vrijednosti μ_k^A za A:

$$\mu_k^G = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{m} = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2m})$$

$$\mu_k^A = 1 - 4\lambda\sin^2(\frac{k\pi}{2m})$$

Sada možemo kriterij za stabilnost iz Leme 4.1, tj. $|\mu_k^A| < 1$ zapisati kao:

$$|1 - 4\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2m}| < 1, \ k = 1, ..., m-1.$$

Iz toga dobivamo dvije nejednakosti:

$$\lambda > 0$$

$-1 < 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{k\pi}{2m}$, što se može zapisati kao: $\frac{1}{2} > \lambda \sin^2 \frac{k\pi}{2m}$.
Najveći $\sin^2 \frac{k\pi}{2m}$ je $\sin^2 \frac{m-1\pi}{2m}$ jer za rastuće m, taj izraz monotono raste i približava se 1.

Zaključno, dobivamo sljedeći uvjet za stabilnost:

Za $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, ekplicitna metoda $w^{(\nu+1)} = Aw^{(\nu)}$ je stabilna.

Uzimajući u obzir da je $\lambda = \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$, ovaj kriterij za stabilnost možemo zapisati i kao:

$$0 < \Delta\tau \leq \frac{\Delta x^2}{2} \tag{16}$$

Dakle, eksplicitna metoda je stabilna samo dok je uvjet (16) zadovoljen. Kao posljedicu toga, parametre m i ν_{max} ne možemo izabrati individualno već u ovisnosti jedan o drugome. Ako su zahtjevi za preciznošću jako visoki, veličina koraka Δx mora biti mala, što prema (16) ograničava $\Delta\tau$ kvadratično. Ova situacija sugerira potragu za metodom koja nema uvjete za stabilnost.

4.5 Implicitna metoda

Za razliku od ekplicitne metode gdje smo aproksimirali pomoću diferencija unaprijed (unaprijed gledano iz ν-tog vremenskog nivoa), ovdje to radimo pomoću diferencija unatrag:

$$\frac{\partial y_{i\nu}}{\partial \tau} = \frac{y_{i\nu} - y_{i,\nu-1}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau)$$

Pomoću toga, dobivamo alternativu za (13):

$$-\lambda w_{i+1,\nu} + (2\lambda + 1)w_{i\nu} - \lambda w_{i-1,\nu} = w_{i,\nu-1} \tag{17}$$

Ta jednadžba povezuje vremenske nivoe ν i $\nu - 1$. Zbog prijelaza iz $\nu - 1$ do ν, jedino je vrijednost $w_{i,\nu-1}$ na desnoj strani te jednadžbe poznata, dok su na lijevoj strani tri nepoznate vrijednosti w koje moramo izračunati. Ne postoji jednostavna ekplicitna formula pomoću koje možemo izračunati te nepoznanice jedne pomoću drugih. Umjesto toga, rješavat ćemo sustav jednadžbi. Ponovno ćemo skupiti sve vrijednosti w iz istog vremenkog nivoa u jedan vektor : $w^{(\nu)} = (w_{1\nu}, ..., w_{m-1,\nu})$ te ćemo definirati slijedeću matricu

A:

$$A := A_{impl} := \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \dots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \tag{18}$$

Sada je vektor $w^{(\nu)}$ implicitno definiran kao rješenje sustava linernih jednadžbi:

$$Aw^{(\nu)} = w^{(\nu-1)},\ \nu = 1, ..., \nu_{max} \tag{19}$$

Ovdje ponovno pretpostavljamo da je $w_{0\nu} = w_{m\nu} = 0$. Potrebno je za svaki ν riješiti odgovarajući sustav jednadžbi.

Ova se metoda ponekad zove implicitna metoda, ali kako bi je razlikovali od ostalih implicitnih metoda, zovemo je potpuno implicitna ili metoda diferencija unatrag, ili još preciznije backward time centered space scheme (BTCS).

Ova metoda je bezuvjetno stabilna za sve $\Delta\tau > 0$. To se pokazuje analogno kao kod eksplicitne metode. Troškovi ove metode su mali s obzirom da je matrica A konstantna i tridijagonalna. Inicijalno, za $\nu = 0$, LR-dekompozicija se izračuna jednom. Nadalje je trošak za svaki ν samo reda $\mathcal{O}(m)$.

4.6 Crank-Nicolsonova metoda

Kod prethodne dvije metode, diskretizacije od $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ su bile reda $\mathcal{O}(\Delta\tau)$. Bilo bi dobro koristiti metodu gdje je diskretizacija od $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ boljeg reda, recimo $\mathcal{O}(\Delta\tau^2)$ i gdje je stabilnost bezuvjetna. Ponovno ćemo koristiti jednadžbu (6) koja je ekvivalent Black-Scholesovoj jednadžbi. Crank i Nicolson su predložili uprosječiti metode diferencija unaprijed i unatrag. Sada skupljamo temeljne pristupe prošlih dviju metoda:

unaprijed za ν:

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i\nu}}{\Delta\tau} = \frac{w_{i+1,\nu} - 2w_{i\nu} + w_{i-1,\nu}}{\Delta x^2}$$

unatrag za $\nu + 1$:

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i\nu}}{\Delta\tau} = \frac{w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}}{\Delta x^2}$$

Zbrajanjem te dvije jednadžbe i dijeljenjem s 2 dobivamo:

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i\nu}}{\Delta\tau} = \frac{1}{2\Delta x^2}(w_{i+1,\nu} - 2w_{i\nu} + w_{i-1,\nu} + w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}) \tag{20}$$

Ta jednadžba uključuje u svakom od vremenskih nivoa ν i $\nu + 1$ po 3 vrijednosti od w.
Svojstva ove metode su navedena u sljedećem teoremu.

Teorem 4.3 (Crank - Nicolson)**.** Pretpostavimo da je y glatka u smislu $y \in C^4$. Tada vrijedi:

1. Red metode je $O(\Delta\tau^2) + O(\Delta x^2)$

2. Za svaki ν, linearni sustav jednostavne tridijagonalne strukture se mora riješiti.

3. Metoda je stabilna za svaki $\Delta\tau > 0$.

Dokaz. 1. Red: Desnu stranu jednadžbe (20) smo dobili zbrajanjem dvije jednadžbe centralnih diferencija. Svaka od te dvije jednadžbe ima grešku reda $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. To vidimo iz jednadžbe (11). Dakle, i zbroj takve dvije jednadžbe ima grešku reda $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. Još moramo pokazati da izraz na lijevoj strani jednadžbe (20) ima grešku reda $\mathcal{O}(\Delta\tau^2)$

Iz Taylorovih redova, tj. jednadžbe (10), dobivamo slijedeće jednadžbe:

$$f(x+h) = f(x + \frac{h}{2}) + \frac{f'(x + \frac{h}{2})}{1!}\frac{h}{2} + \frac{f''(x + \frac{h}{8})}{2!}\frac{h^2}{4} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f(x) = f(x + \frac{h}{2}) - \frac{f'(x + \frac{h}{2})}{1!}\frac{h}{2} + \frac{f''(x + \frac{h}{8})}{2!}\frac{h^2}{4} - \mathcal{O}(h^3)$$

Kada oduzmemo drugu jednadžbu od prve i podijelimo s h dobivamo:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \frac{h}{2}) + \mathcal{O}(h^2)$$

Uvrštavanjem $h = \Delta\tau = \tau_{\nu+1} - \tau_\nu$ i $f(\tau_\nu) = y(x_i, \tau_\nu) = y_{i\nu}$ dobivamo

$$\frac{y_{i,\nu+1} - y_{i,\nu}}{\Delta\tau} = \frac{\partial y}{\partial\tau}(x_i, \tau_{\nu+\frac{\Delta\tau}{2}}) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2).$$

Izraz na lijevoj strani gornje jednadžbe odgovara lijevoj strani jednadžbe (20) jer je w aproksimacija egzaktog rješenja y, stoga ona ima grešku reda $\mathcal{O}(\Delta\tau^2)$.

Dakle, za grešku vrijedi

$$\epsilon = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta\tau^2). \tag{21}$$

2. Sustav jednadžbi: Koristeći zapis $\lambda = \dfrac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$, jednadžba (20) se može zapisati kao:

$$-\frac{\lambda}{2}w_{i-1,\nu+1}+(1+\lambda)w_{i,\nu+1}-\frac{\lambda}{2}w_{i+1,\nu+1} = \frac{\lambda}{2}w_{i-1,\nu}+(1-\lambda)w_{i\nu}+\frac{\lambda}{2}w_{i+1,\nu} \tag{22}$$

Vrijednosti u novom vremenskom nivou $\nu+1$ su implicitno dane sustavom jednadžbi (22). Za najjednostavnije rubne uvjete $w_{0\nu} = w_{m\nu} = 0$, jednadžba (22) je sustav od $m-1$ jednadžbi. Definirajmo matrice:

$$\begin{aligned} A := A_{CN} &:= \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & \dots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{pmatrix} \\ B := B_{CN} &:= \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & \dots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

Sada sustav (22) možemo zapisati kao:

$$Aw^{(\nu+1)} = Bw^{(\nu)} \tag{24}$$

Svojstvene vrijednosti od A su realne i imaju vrijednost između 1 i $1+2\lambda$. (Ta tvrdnja slijedi iz Gerschgorinovog teorema.) Prema tome, A nema svojstvenu vrijednost 0 pa A mora biti regularna matrica i rješenje od (24) mora biti jedinstveno.

3. Stabilnost: Matrice A i B se mogu zapisati na slijedeći način:

$$A = I + \frac{\lambda}{2}G,\ G := \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = I - \frac{\lambda}{2}G.$$

Kada to uvrstimo u jednadžbu (24), dobijamo:

$$(2I + \lambda G)w^{(\nu+1)} = (2I - \lambda G)w^{(\nu)} = (4I - 2I - \lambda G)w^{(\nu)}$$

Uz oznaku $C := 2I + \lambda G$, imamo:

$$Cw^{(\nu+1)} = (4I - C)w^{(\nu)},$$

što vodi do ekplicitne iteracije:

$$w^{(\nu+1)} = (4C^{-1} - I)w^{(\nu)} \tag{25}$$

Svojstvene vrijednosti μ_k^C od C za $k = 1, ..., m-1$ znamo iz Leme (4.2):

$$\mu_k^C = 2 + \lambda\mu_k^G = 2 + \lambda(2 - 2\cos\frac{k\pi}{m}) = 2 + 4\lambda\sin^2\frac{k\pi}{m} > 2.$$

Zbog (25), tražimo stabilnu metodu tako da za svaki k:

$$|\frac{4}{\mu_k^C} - 1| < 1.$$

To je zagarantirano jer je $\mu_k^C > 2$. Posljedično, Crank-Nicolsonova metoda je bezuvjetno stabilna za svaki $\lambda > 0$ ($\Delta\tau > 0$).

□

5 Rubni uvjeti

Black-Scholesova jednadžba (5), njezina transformirana verzija (6) i diskretizirane verzije iz prethodnog poglavlja zahtijevaju rubne uvjete. Preciznije, vrijednosti

$V(S,t)$ za $S = 0$ ili $S \to \infty$,
$y(x,\tau)$ za x_{min} i x_{max},
$w_{0\nu}$ i $w_{m\nu}$ za $\nu = 1, ..., \nu_{max}$,

moraju biti propisane rubnim uvjetima. Pojednostavnjeni rubni uvjeti $w_{0\nu} = w_{m\nu} = 0$ koje smo koristili u prethodnom poglavlju ne odgovaraju Black-Merton-Scholes scenariju. Sada moramo odrediti realistične rubne uvjete. Rubni uvjeti pri dospijeću $t = T$ su očiti. Nadalje, za $t < T$, motivirani jednadžbama (1) i (2) dobijamo da vrijednosti call, odnosno put opcije moraju zadovoljavati:

$$\begin{aligned} V_C(S,t) &= 0, \ za\ S = 0,\ i \\ V_P(S,t) &= 0, \ za\ S \to \infty \end{aligned} \tag{26}$$

To vrijedi za američke opcije sa i bez pretpostavke o isplaćivanju dividendi. Druga dva rubne uvjeta za S gdje je vrijednost opcije različita od nule je teže za odrediti.

Još u drugom poglavlju smo zaključili da su vrijednosti američkih opcija veće ili jednake vrijednostima funkcije isplate zbog pretpostavke o nemogućnosti arbitraže, tj.vrijedi:

$$\begin{aligned} V_P^{Am}(S,t) &\geq (K-S)^+, \ \textit{za svaki } (S,t) \\ V_C^{Am}(S,t) &\geq (S-K)^+, \textit{za svaki } (S,t) \end{aligned} \tag{27}$$

5.1 Krivulja ranog iskorištavanja

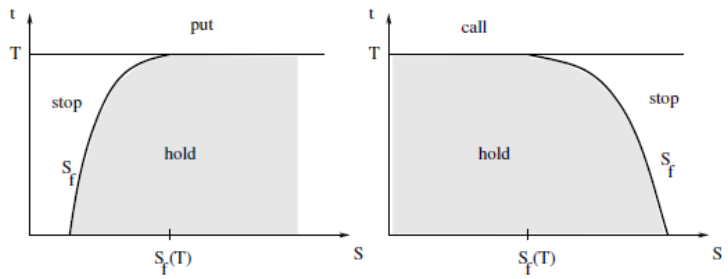
Uzmimo sada proizvoljni $t < T$ i za početak promatrajmo američku put opciju. Zbog definicije put opcije, $V(S,t)$ je monotono padajuća funckija po S, tj. što je veća cijena dionice S, to je vrijednost put opcije manja. Naime, što je veća cijena dionice, manji je profit koji bismo ostvarili iskorištavanjem opcije jer je profit jednak cijeni K koju bismo dobili prodajom dionice umanjenoj za cijenu S po kojoj smo kupili tu istu dionicu. Zbog nejednakosti (27) te monotonosti i neprekidnosti funkcije $V(S,t)$, postavlja se pitanje o postajanju određene točke S_f koju zovemo točka kontakta. U toj točki vrijedi $V_P^{Am}(S_f,t) = K - S_f$. Budući da mora vrijediti nejednakost (27) i $V(S,t)$ je monotona funkcija, postavit ćemo da se $(K-S)^+$ i $V_P^{Am}(S,t)$ podudaraju za sve vrijednosti od S koje su manje od S_f. Kada crtamo graf gdje su vrijednosti od S na osi apcisa, a vrijednosti $V(S,t)$ na osi ordinata, graf od $V(S,t)$ mora biti ravna linija za $0 < S \leq S_f$ jer je i $(K-S)^+$ ravna linija. Dakle, točka kontakta S_f je definirana kao:

$$\begin{aligned} V_P^{Am}(S,t) &> (K-S)^+, \ S > S_f \\ V_P^{Am}(S,t) &= (K-S)^+, \ S \leq S_f \end{aligned} \tag{28}$$

Za $S < S_f$, vrijednost put opcije je jednaka $(K-S)^+$ pa u tom slučaju ne moramo ništa računati. Također, gornja situacija vrijedi za svaki $t < T$, ali točka kontakta S_f ovisi o t, tj. $S_f = S_f(t)$.

Za sve $0 \leq t < T$, točke kontakta $S_f(t)$ formiraju krivulju u (S,t) - poluravnini. Na slijedećoj slici su prikazane te krivulje za put, odnosno call opciju:

Na lijevoj strani slike je prikazana krivulja S_f za put opciju. Vidimo da S_f razdvaja područje gdje je $V > \textit{isplata}$, tj. gdje je $S > S_f$ (osjenčano područje) i područje gdje je $V = \textit{isplata}$, tj. $S \leq S_f$. Na početku, točna



Slika 2

lokacija krivulje S_f je nepoznata, tj. krivulja je "slobodna". Zbog toga se problem računanja $V_P^{Am}(S,t)$ za $S > S_f$ zove i problem slobodnih granica.

U slučaju američke call opcije, kontakt se događa samo u trenutku isplaćivanja dividendi. U slučaju da nema isplaćivanja dividendi ($\delta = 0$) vrijedi:

$$V_C^{Am} \geq V_C^{Eur} \geq S - Ke^{-r(T-t)} > S - K$$

Vrijednost američke opcije je uvijek veća od vrijednosti europske opcije i za put i za call opcije jer američka opcija uključuje iskorištavanje opcije u trenutku $t = T$ koje je kod europske opcije jedino moguće te dodatno uključuje ranije iskorištavanje za $t < T$. Druga nejednakost slijedi iz rubnih uvjeta za europsku opciju u slučaju neisplaćivanja dividendi ($\delta = 0$). Dakle, $V_C^{Am} > S - K$ za $\delta = 0$ implicira da se ranije iskorištavanje opcije ($t < T$) ne isplati. Krivulja kontakta za američku call opciju u slučaju $\delta \neq 0$ je prikazana u desnom dijelu gornje slike.

Krivulju S_f zovemo i krivulja ranog iskorištavanje jer pokazuje trenutak u kojem je poželjno iskoristiti opciju. Vremenski trenutak t_s u kojem proces cijena S_t dotakne krivulju ranog iskorištavanja je optimalno vrijeme zaustavljanja. To ćemo objasnitit u slučaju američke put opcije, a argumenti su slični za call opciju gdje vrijedi $\delta \neq 0$.

Za $S > S_f$, rano iskorištavanje opcije povlači momentalni gubitak jer (28) implicira $-V + K - S < 0$. Odnosno, cijena izvršenje K koju primimo kad iskoristimo opciju ne kompenzira gubitak od S i V. Prema tome, vlasnik opcije neće iskoristiti opciju za $S > S_f$. Zbog toga se područje gdje je $S > S_f$ zove područje "nastavljanja" ili hold (osjenčano područje na slici).

S druge strane krivulje S_f vrijedi $V = K - S$, tj. svaka promjena od S je

kompenzirana promjenom od V. U ovom slučaju, jedini način da ostvarimo profit je iskoristiti opciju i uložiti dobiveni iznos K po bezrizičnoj kamatnoj stopi r na preostalo vrijeme $T-t$. Ostvareni profit će biti jednak:

$$Ke^{r(T-t)} - K.$$

S obzirom da nam je cilj maksimizirati profit, vlasnik opcije želi maksimizirati $T-t$ i prema tome, opciju će iskoristiti čim se dostigne $V \equiv S-K$. Zbog toga se područje za koje vrijedi $S \leq S_f$ zove područje zaustavljanja.

Svojstva krivulje $S_f(t)$ su da je diferencijabilno neprekidna u t te da je monotono padajuća odnosno rastuća u ovisnosti radi li se o put ili call opciji. Nadalje, vrijede slijedeće granice za $t \to T(t < T, \delta \neq 0)$:

$$\textit{put:} \lim_{t \to T^-} S_f(t) = \min(K, \frac{r}{\delta}K) \tag{29}$$

$$\textit{call:} \lim_{t \to T^-} S_f(t) = \max(K, \frac{r}{\delta}K) \tag{30}$$

Te tvrdnje nećemo dokazivati nego uzeti kao dane.

5.2 Problem slobodnih rubova

Ponovno gledajmo put opciju. Da bismo izračunali vrijednosti S_f, trebamo dodatne uvjete. Za američku opciju, lijevi rub za S je zadan krivuljom S_f. Promatrajmo nagib $\frac{\partial V}{\partial S}$ krivulje $V_P^{Am}(S,t)$ u točki $S_f(t)$ gdje ona dira ravnu liniju $K-S$ koja ima nagib -1. Možemo isključiti slučaj u kojem je $\frac{\partial V(S_f(t),t)}{\partial S} < -1$ jer bi inače krivulja $V(S,t)$ za vrijednosti od S koje su jako blizu S_f pala ispod krivulje isplate, tj. vrijednost opcije bi bila manja od isplate što ne dozvoljamo. To smo naglasili u (27). Možemo isključiti i da je $\frac{\partial V(S_f(t),t)}{\partial S} > -1$ jer kada bi to vrijedilo, postojala bi mogućnost arbitraže. To ćemo pokazati tako da pretpostavimo suprotno, tj. da je $\frac{\partial V(S_f(t),t)}{\partial S} > -1$. Pretpostavimo i da posjedujemo portfelj koji se sastoji od jedne dionice i jedne put opcije koja glasi na tu dionicu te da je trenutna cijena te dionice S_f. Vrijednost portfelja označimo s Π. Postoje dva slučaja koja se sada mogu realizirati:

1. $dS \leq 0$

Vrijednost opcije je tada $K - (S_f + dS)$ jer je $S_f + dS \leq S_f$, a znamo da je u tom slučaju vrijednost opcije jednaka isplati. Stoga slijedi da je $d\Pi = 0$.

2. $dS > 0$

U tom slučaju je $dV < 0$ jer je V padajuća u S, no u apsolutnoj vrijednosti je dV manje od dS jer smo pretpostavili da je $\frac{\partial V(S_f(t),t)}{\partial S} > -1$. Dakle mora vrijediti $d\Pi = dS + dV > 0$ čime smo ostvarili bezrizičan profit.

Promatrajući ta dva slučaja, svaki investitor može zaključiti da mu se isplati imati takav portfelj jer ne postoji mogućnost gubitka već samo zarade. To je u kontradikciji s pretpostavkom o nemogućnosti arbitraže. Dakle, mora vrijediti $\frac{\partial V(S_f(t),t)}{\partial S} = -1$. To znači da $V(S,t)$ dira funkciju isplate $(K - S)^+$ tangencijalno. Taj uvjet tangencionalnosti se često zove uvjet visokog kontakta ili glatko lijepljenje. Za hipotetski slučaj trajne opcije ($T = \infty$), točka tangencijalnog diranja se može izračunati analitički. Zaključno, dva rubna uvjeta moraju vrijediti u točki konktakta $S_f(t)$:

$$\begin{aligned} V_P^{Am}(S_f(t),t) &= K - S_f(t) \\ \frac{\partial V_P(S_f(t),t)}{\partial S} &= -1 \end{aligned} \tag{31}$$

Kao i prije, desni rubni uvjet $V(S,t) \to 0$ moramo promatrati za $S \to \infty$.

Za američku call opciju, pri čemu je $\delta > 0$ i $r > 0$, vrijede analogni uvjeti:

$$\begin{aligned} V_C^{Am}(S_f(t),t) &= S_f(t) - K \\ \frac{\partial V_C(S_f(t),t)}{\partial S} &= 1 \end{aligned} \tag{32}$$

5.3 Black - Scholesova nejednadžba

Ponovno promatrajmo put opciju. Black - Scholesova jednadžba (5) vrijedi na području zadržavanja opcije, tj.na osjenčanom području na Slici 2. Za domenu računanja vrijednosti opcije ćemo uzeti cijelu poluravninu $S > 0$ uključujući područje iskorištavanja opcije (zaustavljanja). Pomoću ovoga ćemo moću odrediti krivulju S_f. Pitanje je kako ćemo iskoristiti Black - Scholes jednažbu za područja zaustavljanja gdje je vrijednost opcije jednaka isplati.

Za početak, definirajmo Black - Scholesov operator kao:

$$\mathcal{L}_{BS}(V) := \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV.$$

S ovom notacijom, Black - Scholesova jednadžba glasi (za $S > S_f$):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) = 0.$$

Za $S \leq S_f$ vrijedi:

$$V = K - S \ , \ \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \ , \ \frac{\partial V}{\partial S} = -1 \ , \ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0.$$

Zbog toga:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) = -(r-\delta)S - r(K-S) = \delta S - rK.$$

Također, znamo ako je $S \leq S_f$ da ćemo iskoristiti opciju jer se to više isplati. Onda iznos rK koji bi ostvarili ukamaćivanjem mora biti veći od iznosa koji bi dobili od isplate dividendi u slučaju neiskorištavanja opcije, tj. $\delta S < rK$ pa iz toga slijedi:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) < 0.$$

Dakle, na području zaustavljanja, Black - Scholes jednadžba prelazi u Black - Scholes nejednadžbu. Ista nejednakost vrijedi i za call opciju. Zaključno, na cijeloj poluravnini $S > 0$, američke opcije moraju zadovoljavati nejednakost tipa Black - Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0. \tag{33}$$

Nejednakosti (27) i (33) vrijede za sve (S,t). U slučaju da stroga nejednakost vrijedi u (27), onda jednakost vrijedi u (33). Granica S_f dijeli poluravninu $S > 0$ na područje zadržavanja i područje zaustavljanja i za svaki od njih vrijedi svoja verzija od V:

put:

$$V_P^{Am} = K - S, \text{ za } S \leq S_f \text{ (zaustavljanje)}$$

V_P^{Am} je rješenje Black - Scholes jednadžbe (5), za $S > S_f$ (zadržavanje)

call:

$$V_C^{Am} = S - K, \text{ za } S \geq S_f \text{ (zaustavljanje)}$$

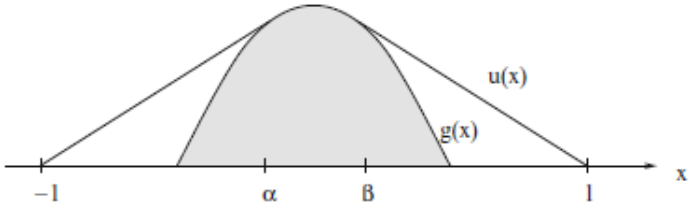
V_C^{Am} je rješenje Black - Scholes jednadžbe (5), za $S < S_f$ (zadržavanje)

Izvod gornjih rezultata za call opciju je analogan izvodu za put opciju. Jedina je razlika što call opcija zadovoljava Black - Scholesovu jednadžbu za $S < S_f$, a nejednadžbu za $S \geq S_f$.

Pri numeričkom računanju vrijednosti opcija, moramo tražiti metode u kojima simultano računamo V s nepoznatim S_f.

5.4 Linearni komplementarni problem

U ovom dijelu ćemo opisati jednostavni problem čije rješenje možemo primjeniti za rješavanje problema slobodnih granica, tj. za određivanje krivulje S_f. Promatrajmo funkciju $g(x)$ sa slijedećim svojstvima: $g(x) > 0$ za $\alpha < x < \beta$, $g \in \mathcal{C}^2$, $g'' < 0$ i $g(-1) < 0$, $g(1) < 0$. Primjer takve funkcije je prikazan na donjoj slici.



Slika 3

Iznad funkcije g je nategnuta funkcija u. Između $x = \alpha$ i $x = \beta$ krivulja u prianja uz g. U α i β susrećemo uvjete visokog kontakta jer tu krivulja u tangencijalno dodiruje g. Te dvije vrijednosti $x = \alpha$ i $x = \beta$ su na početku nepoznate. Zbog toga je ovaj problem samo pojednostavljeni problem slobodnih granica.

Cilj nam je preformulirati taj problem tako da se problem slobodnih granica ne pojavljuje eksplicitno. Tako ćemo imati prednosti kod računanja. Funkcija u prikazana kao na gornjoj slici je definirana zahtjevom $u \in \mathcal{C}[-1, 1]$ i sa:

za $-1 < x < \alpha$: $u'' = 0$ (tada je $u > g$)
za $\alpha < x < \beta$: $u = g$ (tada je $u'' = g'' < 0$)
za $\beta < x < 1$: $u'' = 0$ (tada je $u > g$)

Karakterizacija za dva vanjska intervala je identična. Situacija se može zapisati u slijedećem obliku:

ako je $u > g$, onda je $u'' = 0$;
ako je $u = g$, onda je $u'' < 0$.

Retrospektivno, jasno je da se problem računanja američkih opcija može zapisati na analogan način:

ako je $V >$ isplata, tada vrijedi Black-Scholesova jednadžba $\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) = 0$
ako je $V =$ isplata, tada vrijedi Black-Scholesova nejednakost $\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) < 0$

Ova analogija nam daje motivaciju za traženje rješenja jednostavnog problema s funkcijama g i u. On se može reformulirati na slijedeći način:

pronađi funkciju u tako da:

$$\begin{aligned} u''(u-g) = 0,\ -u'' \geq 0,\ u - g \geq 0, \\ u(-1) = u(1) = 0,\ u \in \mathcal{C}^1[-1,1]. \end{aligned} \tag{34}$$

(34) je linearni komplementarni problem (LCP). Ovakva formulacija nigdje eksplicitno ne spominje slobodne rubne uvjete u $x = \alpha$ i $x = \beta$. To je prednost jer su α i β nepoznati. Ako je rješenje od (34) poznato, tada se α i β iščitaju iz rješenja. Zbog toga ćemo razviti proceduru numeričkog rješavanja problema (34).

5.5 Diskretizacija jednostavnog problema

Aproksimacija konačnih diferencija za u'' na mreži $x_i = -1 + i\Delta x$ s korakom $\Delta x = \frac{2}{m}$ te oznakom $g_i = g(x_i)$ vodi do:

$$\begin{aligned} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})(w_i - g_i) = 0, \\ -w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} \geq 0,\ w_i \geq g_i \end{aligned}$$

za $0 < i < m$ i $w_0 = w_m = 0$. w_i su aproksimacije od $u(x_i)$. Uvest ćemo slijedeće oznake:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix},\ w := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{m-1} \end{pmatrix},\ g := \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{m-1} \end{pmatrix}$$

Tada se diskretizirani komplementarni problem može zapisati u slijedećem obliku:

$$\begin{aligned} (w-g)^t Bw = 0, \\ Bw \geq 0,\ w \geq g \end{aligned} \tag{35}$$

5.6 Linearna komplementarnost za američke put opcije

Sada ćemo iz jednostavnog problema koji je objašnjen prije izvesti linearni komplementarni problem za američke opcije. Opet ćemo se posvetiti put opciji u slučaju $\delta = 0$. Općeniti slučaj ćemo proći kasnije.

Transformacije (7) vode do

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ \textit{dok je}\ V_P^{Am} > (K-S)^+.$$

Također je i transformiran i uvjet (27). Relacija

$$V_P^{Am}(S,t) \geq (K-S)^+ = K \max\{1-e^x, 0\}$$

vodi do nejednakosti:

$$\begin{aligned} &y(x,\tau) \geq \exp\{\tfrac{1}{2}(q-1)x + \tfrac{1}{4}(q+1)^2\tau\} \max\{1-e^x, 0\} \\ &= \exp\{\tfrac{1}{4}(q+1)^2\tau\} \max\{(1-e^x)e^{\frac{1}{2}(q-1)x}, 0\} \\ &= \exp\{\tfrac{1}{4}(q+1)^2\tau\} \max\{e^{\frac{1}{2}(q-1)x} - e^{\frac{1}{2}(q+1)x}, 0\} =: g(x,\tau) \end{aligned}$$

Funkcija g nam omogućuje da početni uvjet (9) zapišemo u obliku $y(x,0) = g(x,0)$. Dakle, mi zahtijevamo slijedeće: $y_\tau = y_{xx}$, $y(x,0) = g(x,0)$ i $y(x,\tau) \geq g(x,\tau)$, te dodatno rubne uvjete i $y \in \mathcal{C}^1$ s obzirom na x. Sve

zajedno, računanje vrijednosti američke put opcije se može formulirati kao slijedeći linearni komplementarni problem:

$$\begin{cases} (\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2})(y-g) = 0, & \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0, & y - g \geq 0 \\ y(x,0) = g(x,0), & y(x_{min},\tau) = g(x_{min},\tau), \\ y(x_{max},\tau) = g(x_{max},\tau), & y \in \mathcal{C}^1 \text{ obzirom na } x. \end{cases}$$

Ovdje x_{min} i x_{max} odgovaraju vrijednostima a i b iz jednostavnog problema. Analogna formulacija vrijedi i za američku call opciju.

6 Računanje Američkih opcija

U prethodnim poglavljima smo izveli linearni komplementarni problem i za put i call opciju. Sumirat ćemo rezultate u Problemu 6.1. Tu pretpostavljamo $r > 0$ za put opciju i $\delta > 0$ za call opciju.

Problem 6.1 (Linearni komplementarni problem)**.**

$$\begin{cases} q = \frac{2r}{\sigma^2}; \quad q_\delta = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}; \\ \textit{put:} \quad g(x,\tau) := \exp\{\frac{\tau}{4}((q_\delta - 1)^2 + 4q)\} \max\{e^{\frac{x}{2}(q_\delta - 1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta + 1)}, 0\} \\ \textit{call:} \quad g(x,\tau) := \exp\{\frac{\tau}{4}((q_\delta - 1)^2 + 4q)\} \max\{e^{\frac{x}{2}(q_\delta + 1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta - 1)}, 0\} \\ (\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2})(y-g) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0, \quad y - g \geq 0 \\ y(x,0) = g(x,0), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T \\ \lim_{x\to\pm\infty} y(x,\tau) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x,\tau) \end{cases}$$

Sada preostaje diskutirati o numeričkom rješenju Problema 6.1.

6.1 Diskretizacija pomoću konačnih diferencija

Koristit ćemo istu ekvidistantnu mrežu kao i u poglavlju 4 gdje je $w_{i\nu}$ označavalo aproksimaciju za $y(x_i, \tau_\nu)$. Zapisujemo $g_{i\nu} := g(x_i, \tau_\nu)$ za $0 \leq i \leq m$, $0 \leq \nu \leq \nu_{max}$. Implicitna, eksplicitna i Crank-Nicolsonova metoda se mogu zapisati pomoću jedne formule:

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i\nu}}{\Delta\tau} = \theta \frac{w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}}{\Delta x^2} +$$

$$(1-\theta)\frac{w_{i+1,\nu}-2w_{i\nu}+w_{i-1,\nu}}{\Delta x^2},$$

gdje je $\theta = 0$ (ekplicitna metoda), $\theta = \frac{1}{2}$ (Crank-Nicolsonova metoda) ili $\theta = 1$ (implicitna metoda). Ova familija metoda parametrizirana sa θ se često zove i $\theta - metoda$.

Koristeći zadnju formulu, umjesto diferencijalne nejednadžbe $\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0$ koristimo diskretiziranu verziju:

$$\begin{aligned} w_{i,\nu+1} - \lambda\theta(w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}) \\ -w_{i\nu} - \lambda(1-\theta)(w_{i+1,\nu} - 2w_{i\nu} + w_{i-1,\nu}) \geq 0, \end{aligned} \tag{36}$$

gdje je $\lambda := \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$. Koristeći oznake:

$b_{i\nu} := w_{i\nu} + \lambda(1-\theta)(w_{i+1,\nu} - 2w_{i\nu} + w_{i-1,\nu}), \quad i = 2, ..., m-2$
$b_{1\nu}$ i $b_{m-1,\nu}$ traže rubne uvjete za definiciju
$b^{(\nu)} := (b_{1\nu}, ..., b_{m-1,\nu})^t$
$w^{(\nu)} := (w_{i\nu}, ..., w_{m-1,\nu})^t$
$g^{(\nu)} := (g_{1\nu}, ..., g_{m-1,\nu})^t$

te

$$A := \begin{pmatrix} 1+2\lambda\theta & -\lambda\theta & \dots & 0 \\ -\lambda\theta & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}, \tag{37}$$

izraz (36) se može zapisati kao:

$$Aw^{(\nu+1)} \geq b^{(\nu)} \text{ za svaki } \nu.$$

Nejednakost $y - g \geq 0$ vodi do

$$w^{(\nu)} \geq g^{(\nu)}$$

te $(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2})(y-g) = 0$ postaje

$$(Aw^{(\nu+1)} - b^{(\nu)})^t(w^{(\nu+1)} - g^{(\nu+1)}) = 0.$$

Početni i rubni uvjeti su:

$w_{i0} = g_{i0}, \quad i = 1, ..., m-1, \quad (w^{(0)} = g^{(0)});$
$w_{0\nu} = g_{0\nu}, \quad w_{m\nu} = g_{m\nu}, \quad \nu \geq 0$
Rubni uvjeti se koriste pri računanju vektora $b^{(\nu)}$ na slijedeći način:

$$\begin{aligned} b_{2\nu}, ..., b_{m-2,\nu} &\text{ se računaju po gornjoj definiciji} \\ b_{1\nu} &= w_{1\nu} + \lambda(1-\theta)(w_{2\nu} - 2w_{1\nu} + g_{0\nu}) + \lambda\theta g_{0,\nu+1} \\ b_{m-1,\nu} &= w_{m-1,\nu} + \lambda(1-\theta)(g_{m\nu} - 2w_{m-1,\nu} + w_{m-2,\nu}) + \lambda\theta g_{m,\nu+1} \end{aligned} \tag{38}$$

Sada rezimiramo diskretnu verziju Problema (6.1) u algoritam:

Algoritam 6.2 (Računanje Američkih opcija)**.**

Za $\nu = 0, 1, ..., \nu_{max} - 1$*:*
Izračunaj vektore $g := g^{(\nu+1)}$*,*
$b := b^{(\nu)}$ *iz (37) i (38)*
Izračunaj vektor w *kao rješenje problema*
$Aw - b \geq 0$*,* $w \geq g$*,* $(Aw - b)^t(w - g) = 0$*.*
$w^{\nu+1} := w$

Još nam preostaje riješiti komplementarni problem u matrično-vektorskom obliku u Algoritmu 6.2. Preciznije, kako izračunati w iz izraza u predzadnjoj liniji Algoritma 6.2:

$$Aw - b \geq 0, \quad w \geq g, \quad (Aw - b)^t(w - g) = 0. \tag{39}$$

Već prije smo napomenuli da $V(S,t)$ nije klase $\mathcal{C}^2$ na krivulji S_f. Ta činjenica je izvor moguće nepreciznosti. Efekt koji će se stvoriti zbog toga što ta funkcija nije glatka na cijeloj domeni ovisi o nekoliko stvari. To su:

- izbor transformacije (moguće je ne koristiti nikakve transformacije, transformaciju samo za $\tau := Tt$ i transformacije (7))
- vrsta diskretizacije, odnosno koju metodu konačnih diferencija ćemo koristiti (implicitnu, eksplicitnu ili Crank-Nicolson)
- izbor metode za rješavanje (39).

Postoje dvije metode za rješavanje (39). To su direktna eliminacijska metoda ili iterativna indirektna metoda. U praksi se pokazalo da je direktni pristup brži.

6.2 Reformulacija i analiza linearnog komplemenarnog problema

Za svaki vremenski nivo ν u Agoritmu 6.2, linearni komplementarni problem (39) se mora riješiti što je puno računanja. Prije nego krenemo s numeričkim rješavanjem, analizirat ćemo linearni komplementarni problem. Pošto se u ovom dijelu govori samo o numeričkoj analizi nezavisnoj o financijskom okviru, privremeno ćemo koristiti vektore x, y i r (ovdje x nema isto značenje kao kod transformacija (7), r nije kamatna stopa i y nije rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe). Za analizu ćemo transformirati problem (39) koristeći:

$$\begin{aligned} x &:= w - g \\ y &:= Aw - b. \end{aligned} \tag{40}$$

Lako se vidi da je računanje w iz izraza (39) ekvivalentno slijedećem problemu:

Problem 6.3 (Cryer)**.**

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Pronađi vektore } x \textit{ i } y \textit{ tako da je za } \hat{b} := b - Ag \\ Ax - y = \hat{b}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^t y = 0. \end{array}} \tag{41}$$

Prvo se moramo uvjeriti da Problem 6.3 ima jedinstveno rješenje. Slijedeća Lema pokazuje da je Problem 6.3 ekvivalentan problemu minimizacije.

Lema 6.4. *Problem 6.3 je ekvivalentan problemu minimizacije:*

$$\min_{x \geq 0} G(x), \ \textit{gdje je } G(x) := \frac{1}{2}(x^t A x) - \hat{b}^t x \ \textit{strogo konveksna.} \tag{42}$$

Dokaz. Prva i druga derivacija od G su $G_x = Ax - \hat{b}$ i $G_{xx} = A$. 4.2 implicira da A ima pozitivne svojstvene vrijednosti što znači da je Hesseova matrica G_{xx} simetrična i pozitivno definitna. Prema tome, G je strogo konveksna pa ima jedinstveni minimum na svakom konveksnom skupu u $\mathbb{R}^n$, npr. na $x \geq 0$. Ostatak dokaza slijedi iz Kuhn - Tuckerovog teorema i može se pronaći u [3]. □

Kod korištenja iterativnih metoda za rješavanje sustava, sustav $Ax = b$ zapisujemo u obliku $Mx = (M - A)x + b$, gdje je M prikladna matrica. Za nesingularnu M, sustav $Ax = b$ je ekvivalentan jednadžbi $x = (I - M^{-1}A)x + M^{-1}b$ koja vodi do iteracije

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + M^{-1}b, \tag{43}$$

gdje je $B := I - M^{-1}A$. Matricu A zapišemo kao $A = D - L - U$, gdje je D dijagonalna, L strogo donje trokutasta, a U strogo gornje trokutasta matrica. Predikcijska matrica M se konstruira tako da se postigne brza konvergencija u (43). Kod SOR metode se uvodi parametar relaksacije ω_R koji se odabere tako da se ubrza konvergencija:

$$M := \frac{1}{\omega_R}D - L \Rightarrow M - A = (\frac{1}{\omega_R} - 1)D + U$$

$$(\frac{1}{\omega_R}D - L)x^{(k+1)} = ((\frac{1}{\omega_R} - 1)D + U)x^{(k)} + b$$

SOR metoda se može zapisati na slijedeći način:

$$\begin{cases} B_R := (\frac{1}{\omega_R}D - L)^{-1}((\frac{1}{\omega_R} - 1)D + U) \\ x^{(k+1)} = B_R x^{(k)} + (\frac{1}{\omega_R}D - L)^{-1}b \end{cases}$$

Za rješavanje našeg problema, često se preporuča uzimanje $\omega_R = 1$.

Može se izvesti iterativna metoda iz problema minimizacije u Lemi 6.4. Taj algoritam se zasniva na SOR metodi za rješavanje sustava linearnih jednadžbi oblika $Ax = b$. No (39) ima složeniji oblik od toga stoga će biti potrebna modifikacija standardne SOR metode. Iteracija SOR metode za $Ax = \hat{b} = b - Ag$ se zapisuje po komponentama kao iteracija za vektor greške $x_{(k)} - x_{(k-1)}$:

$$r_i^{(k)} := \hat{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - a_{ii}x_i^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} \tag{44}$$

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega_R \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}, \tag{45}$$

a jednostavnim uvrštavanjem se potvrdi da te jednadžbe stoje. Ovdje k označava broj iteracija, $n = m - 1$, te u slučajevima $i = 1$ i $i = m - 1$ jedna od suma u (44) je prazna. Parametar relaksacije ω_R je faktor koji se bira na način da se poboljša konvergencija iteracije. "Projicirana" SOR metoda za rješavanje (41) ima za početnu iteraciju vektor $x^{(0)} \geq 0$ i identična je standardnoj SOR metodi do na modifikaciju u (45) gdje još tražimo da je $x_i^{(k)} \geq 0$.

Algoritam 6.5 (PSOR, projicirani SOR za Problem 6.3)**.**

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{vanjska petlja:}\ \ k = 1, 2, ... \\ \textit{unutarnja petlja:}\ \ i = 1, ..., m-1 \\ \quad r_i^{(k)}\ \ \textit{kao u (44)} \\ \quad x_i^{(k)} = \max\{0, x_i^{(k-1)} + \omega_R \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}\} \\ \quad y_i^{(k)} = -r_i^{(k)} + a_{ii}(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}) \end{array}} \tag{46}$$

Dokaz konvergencije Algoritma 6.5 se bazira na Lemi 6.4. Naime, niz definiran u Algoritmu 6.5 minimizira G. Detaljan dokaz se nalazi u [4]. Kada se vratimo natrag računanju w u (39) pomoću tranformacija (40), Algoritam 6.5 rješava (39) te daje rješenje za Problem 6.6.:

Problem 6.6 (Cryer - reformulirani)**.**
Riješi $Aw = b$ tako da je zadovoljen uvjet $w \geq g$ po komponentama.

Prilagoditi Algoritam 6.5. s formulom (46) za računanje $w \geq g$ je lako. Zbog jedinstvenosti rješenja (Lema 6.4), isto rješenje w se dobije koristeći direktnu metodu umjesto iterativnog PSOR algoritma 6.5. no direktnu metodu nećemo obraditi.

6.3 Algoritam za računanje Američkih opcija

Sada se vraćamo originalnim značenjima varijabli x, y i r kao u (6) i (7). Još nam samo preostaje uvrstiti odgovaraći algoritam za računanje (39) u Algoritam 6.2. Iz prethodnog potpoglavlja smo vidjeli da za to imamo dvije opcije. Jedna je primijeniti iterativnu metodu, tj. Algoritam 6.5., a druga opcija je implementirati brzu direktnu metodu. Ovdje će se implementirati iterativna metoda. Iako koristimo Algoritam 6.5 u implementaciji Matlab programa, umjesto varijabli definiranih u tom algoritmu koristimo transformirane varijable koje direktno računaju w iz (39). Taj modificirani PSOR algoritam je preuzet iz [1].

Rezultati će se dobiti u terminima pomoćnih varijabli kao što su x_i, $g_{i\nu}$ i w_i pa nakon toga moramo korištenjem transformacija (7), iz tih pomoćnih varijabli dobiti originalne varijable koje možemo direktno primijeniti u financijskom svijetu.

U samom algoritmu za računanje opcija i u kodu za računanje opcija koji je u dodatku, na početku moramo sami zadati neke vrijednosti, npr. broj θ koji označava koju ćemo metodu konačnih diferencija koristiti te vremenski korak $\Delta\tau$ koji se zadaje pomoću ν_{max}. Iako ćemo zadati određene vrijednosti, uvijek je moguće napraviti modifikacije zbog kontroliranja grešaka. Ukoliko kod put opcije numerički dobivena vrijednost opcije padne ispod vrijednosti isplate za $S < S_f$, tada vrijednost opcije podešavamo na vrijednost isplate za sve $S < S_f$.

7 Točnost

Svaki rezultat koji smo dosad dobili je izložen greškama i u ovom poglavlju ćemo opisati koji su najčešći uzroci tome. Moramo prihvatiti da će postojati greške u računanju no želimo ih minimizirati. Mnoge greške se mogu zadržati ispod određenog nivoa tolerancije i u ovom poglavlju će biti objašnjeno kako. Sada navodimo 4 najčešće vrste grešaka.

1) Greška modela

Pretpostavke koje smo koristili za definiciju financijskog modela unutar kojeg radimo ne odgovaraju u potpunosti stvarnom financijskom tržištu. Pretpostavka 2.3 je samo idealizirani oblik stvarnog tržišta. Također, parametri jednadžbi koje koristimo (npr. volatilnost σ) su nepoznati i moramo ih procijeniti. Upravo zbog toga su jednadžbe modela samo aproksimacija stvarnosti.

2) Greške diskretizacije

Unutar ove skupine grešaka se nalaze one koje se pojavljuju kada neprekidnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu zamijenimo skupom jednadžbi koji ju aproksimiraju i definirane su na mreži. Najveća greška diskretizacije koja se javlja je razlika između diferencijalnih kvocijenata i diferencijskih kvocijenata. Npr.Crank-Nicolsonova diskretizacija je reda $O(\Delta^2)$ ako je Δ mjera za veličinu mreže i funkcija rješenja dovoljno glatka. Druge greške diskretizacije imaju manji utjecaj nego ta i tu spadaju greška uzrokovana prebacivanjem beskonačnog intervala $-\infty < x < \infty$ u konačni, implementacija rubnih uvjeta i kvantifikacijska greška kada $x = 0$ (tada je cijena dionice jednaka cijeni izvršenja) nije na mreži. Tu grešku možemo riješiti tako da stavimo $x_k = 0$ za neki k za jednu od točaka mreže.

3) Greška u rješavanju linearne jednadžbe

Iterativno rješenje linearnog sustava jednadžbi $Aw = b$ znači da se greška bliži 0 kada $k \to \infty$ gdje je k broj iteracija. No broj iteracija određujemo sa konačnim k_{max} tako da greška rješavanja sustava postoji. Greška je manja kod direktnih metoda rješavanja sustava.

4) Greška zaokruživanja

Konačni broj znamenki l u decimalnom zapisu nekog broja je razlog greške zaokruživanja.

Ne postoje točne informacije o veličini navedenih grešaka. Obično su greške modela veće nego greške diskretizacije i kod stabilne metode su greške zaokruživanja najmanji problem. U ovom radu se prvenstveno bavimo numeričkom analizom pa imamo ograničeni potencijal u manipulaciji greške modela stoga se koncentriramo na druge greške i to prvenstveno na greške diskretizacije.

7.1 Elementarna kontrola grešaka

Zanemarujemo greške modele i želimo riješiti slijedeći problem:

Problem 7.1 (Princip kontrole grešaka)**.** *Neka je egzaktno rješenje označeno s η^*. Aproksimacija η izračunata danim algoritmom ovisi o veličini mreže Δ, o k_{max}, o duljini decimalnog zapisa brojeva l i još o nekoliko dodatnih parametara što sve simbolički zapisujemo kao*

$$\eta = \eta(\Delta, k_{max}, l).$$

Trebamo izabrati Δ, k_{max} i l takve da apsolutna greška od η ne prelazi unaprijed određenu toleranciju ϵ,

$$|\eta - \eta^*| < \epsilon.$$

Kod rješavanja tog problema pokušavamo izbjeći nepotreban trud postizanja jako male greške, tj. $|\eta - \eta^*| \ll \epsilon$. Egzaktna veličina greške je nepoznata, ali njezin red veličine se može procijeniti na slijedeći način.

Pretpostavimo da je odabrana metoda za računanje reda p te da vrijedi slijedeće:

$$\eta(\Delta) - \eta^* = \gamma \Delta^p. \tag{47}$$

Parametar γ je na početku nepoznat, ali ga možemo jednostavno izračunati tako da izračunamo dvije aproksimacije rješenja, η_1 i η_2. To radimo tako da uzmemo dvije različine veličine mreže, Δ_1 i Δ_2,

$$\eta_1 := \eta(\Delta_1) = \gamma\Delta_1^p + \eta^*$$

$$\eta_2 := \eta(\Delta_2) = \gamma\Delta_2^p + \eta^*$$

Pomoću te dvije jednadžbe dobivamo izraz za γ:

$$\gamma = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\Delta_1^p - \Delta_2^p}$$

Jednostavan izbor za Δ_2 u drugoj aproksimaciji je $\Delta_2 = \frac{1}{2}\Delta_1$. Kada to uvrstimo u gornji izraz za γ dobijemo:

$$\gamma(\frac{\Delta_1}{2})^p = \frac{\eta_1 - \eta_2}{2^p - 1}. \tag{48}$$

Posebno, za $p = 2$ vrijedi

$$\gamma\Delta_1^2 = \frac{4}{3}(\eta_1 - \eta_2).$$

Koristeći (47), dobijemo da je u tom slučaju apsolutna greška aproksimacije η_1 jednaka

$$\frac{4}{3}|\eta_1 - \eta_2|. \tag{49}$$

Gornji postupak ne garantira da će greška biti ograničena sa ϵ zbog pojednostavnjenja kojega smo uveli pretpostavkom (47) te zbog zanemarivanja ostalih vrsta grešaka kao što su greške u rješavanju linearne jednadžbe. Ovdje smo pretpostavili i da je parametar γ konstantan koji u stvarnosti ovisi o parametrima modelima kao što je volatilnost σ. U praktičnim primjenama Crank-Nicolsonove metode se pokazalo da udvostručenje parametara m i ν_{max} smanjuje apsolutnu grešku približno 4 puta. Kako bi dobili neke informacije o greški, potrebno je algoritam za računanje opcije sprovesti barem dva puta, tj. za barem dvije različite veličine mreže. Tada se informacija o greški može iskoristiti za podešavanje veličine mreže kako bi se postigla željena točnost.

8 Analitičke metode

Numeričke metode su tipično osmišljene tako da je cilj postići konvergenciju u računanju. Na taj način se može postići svaka točnost i jedina ograničenja

su raspoloživo vrijeme potrebno računalu da izvrši program i hardverske restrikcije. U nekim slučajevima, ovaj veliki potencijal numeričkih metoda nije potreban. Umjesto toga, neke analitičke formule mogu biti dovoljne da dadu rješenje osrednje točnosti po niskoj cijeni stoga su se razvile neke analitičke metode. Iako one imaju ograničenu točnost, za njih je karakteristično jedno dobro svojstvo, a to je da su troškovi računanja jasni i unaprijed poznati.

U stvarnosti, ne postoji jasna i točno određena granica između numeričkih i analitičkih metoda. To je zato što numeričke metode zahtijevaju analizu za njihovo izvođenje dok analitičke metode uključuju i numeričke algoritme. Zapravo teško da postoji metoda koja je isključivo analitička.

Za europske opcije znamo rješenje Black-Scholesove jednadžbe pa zbog toga imamo formule koje računaju vrijednosti tih opcija:

$$\begin{aligned} d_1(S,\tau;K,r,\sigma) &:= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\{\log\frac{S}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau\} \\ d_2(S,\tau;K,r,\sigma) &:= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\{\log\frac{S}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau\} \\ V_P^{Eur}(S,\tau;K,r,\sigma) &= -SF(-d_1) + Ke^{-r\tau}F(-d_2) \\ V_C^{Eur}(S,\tau;K,r,\sigma) &= SF(d_1) - Ke^{-r\tau}F(d_2) \end{aligned} \tag{50}$$

Vrijeme pišemo u formi datuma do dospijeća $\tau = T - t$. F označava funkciju distribucije standardne normalne razdiobe. U ovom poglavlju ćemo proći kroz dvije analitičke metode.

8.1 Aproksimacija zasnovana na interpolaciji

Ukoliko su poznate gornja i donja granica vrijednosti američke put opcije $V^{low} \leq V_P^{Am} \leq V^{up}$, ideja je konstruirati α takav da vrijedi:

$$V_P^{Am} = \alpha V^{up} + (1-\alpha)V^{low}.$$

Parametar α, $0 \leq \alpha \leq 1$, definira interpolaciju između V^{low} i V^{up}. Budući da V_P^{Am} ovisi o tržišnim parametrima S, τ, K, r i σ, parametar α i gornja interpolacija ne mogu dati egzaktnu vrijednost od V_P^{Am}. (Egzaktna vrijednost bi značila da postoji egzaktna formula za računanje V_P^{Am}.) Radije se razvije formula za α kao funkcija od S, τ, K, r i σ tako da interpolacijska formula $\alpha V^{up} + (1-\alpha)V^{low}$ daje dobru aproksimaciju za širok raspon tržišnih podataka. Što je manja razlika između V^{low} i V^{up}, to je bolja aproksimacija.

Očiti kandidat koji se nameće za donju granicu V^{low} je vrijednost V_P^{Eur} koju nam daje (50),

$$V_P^{Eur}(S,\tau;K) \leq V_P^{Am}(S,\tau;K).$$

Iskoristit ćemo činjenicu da za europsku put opciju vrijedi rubni uvjet

$$V_P^{Eur}(S,t,K) = Ke^{-r\tau} - S, \quad S \approx 0.$$

Za cijenu izvršenja $Ke^{r\tau}$ europske put opcije i za $S = 0$ vrijedi

$$V_P^{Am}(0,\tau;K) = V_P^{Eur}(0,\tau;Ke^{r\tau}),$$

pošto su obje strane jednake K. Nadalje, iz svojstava američke put opcije i pomoću Jensenove nejednakosti se može dobiti (detaljnije u [1]) da za svaki S vrijedi

$$V_P^{Am}(S,\tau;K) \leq V_P^{Eur}(S,\tau;Ke^{r\tau}),$$

stoga kao gornju granicu uzimamo $V^{up} = V_P^{Eur}(S,\tau;Ke^{r\tau})$. Rezultat je slijedeća aproksimacijska formula:

$$\bar{V} := \alpha V_P^{Eur}(S,\tau;Ke^{r\tau}) + (1-\alpha)V_P^{Eur}(S,\tau;K) \tag{51}$$

Parametar α i $\bar{V}$ ovise o S, K, τ, r i σ no Black-Scholesova formula (50) predlaže da α i $\bar{V}$ ovise samo o 3 parametra

$$\frac{S}{K}, \quad r\tau \quad i \quad \sigma^2\tau.$$

[5] postavlja model za α s dva slobodna parametra a_0 i a_1, čije su vrijednosti dobivene regresijskom analizom baziranom na izračunatim vrijednostima od V_P^{Am}. Rezultat je:

$$\begin{gathered}\alpha := (\frac{r\tau}{a_0 r\tau + a_1})^{\beta}, \quad \beta := \frac{\ln(S/S_f)}{\ln(K/S_f)}, \\ a_0 = 3.9649, \quad a_1 = 0.032325.\end{gathered} \tag{52}$$

Model za α u (52) uključuje nepoznatu krivulju slobodnih granica koju aproksimiramo sa

$$\bar{S_f} := K(\frac{2r}{\sigma^2 + 2r})^{\gamma}, \tag{53}$$

za prikladni eksponent γ. [5] predlaže

$$\begin{gathered}\gamma := \frac{\sigma^2\tau}{b_0\sigma^2\tau + b_1}, \\ b_0 = 1.04083, \quad b_1 = 0.00963,\end{gathered} \tag{54}$$

gdje su konstantne b_0 i b_1 ponovno dobivene regresijskom analizom. $\bar{V}$ je aproksimacija za V_P^{Am} kada je $S > S_f$. (Inače je $V_P^{Am} = K - S$.)

8.2 Analitička metoda linija

Ova metoda se bazira na semidiskretizaciji gdje je domena, tj. poluravnina (S, τ) zamijenjena sa skupom paralelnih linija pri čemu je svaka od njih definirana s konstantnom vrijednošću od τ. Interval $0 \leq \tau \leq T$ je diskretiziran pomoću podintervala duljine ν_{max} tako da je $\tau_\nu := \nu \Delta\tau$, $\Delta\tau := \frac{T}{\nu_{max}}$, $\nu = 1, ..., \nu_{max} - 1$. Kako bi ova metoda zaslužila da se zove analitičkom, pretpostavljamo da je ν_{max} mali. Black-Scholesovu jednadžbu iz 5.3 i $S > S_f$ zapisujemo kao

$$-\frac{\partial V(S,\tau)}{\partial \tau} + \mathcal{L}_{BS}(V(S,\tau)) = 0, \tag{55}$$

gdje je negativan predznak posljedica tranformacije iz t u τ. Nadalje, parcijalnu dericaju $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ zamijenjujemo diferencijskim kvocijentom

$$\frac{V(S,\tau) - V(S,\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau}.$$

To daje semidiskretiziranu verziju od (55), odnosno diferencijalnu jednadžbu

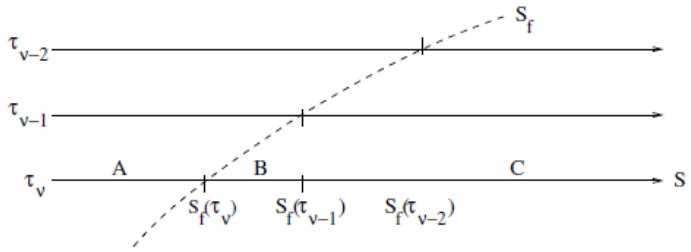
$$w(S,\tau - \Delta\tau) - w(S,\tau) + \Delta\tau \mathcal{L}_{BS}(w(S,\tau)) = 0, \quad S > S_f$$

Ovdje koristimo notaciju w umjesto V kako bismo ukazali na činjenicu da je uključena greška diskretizacije. Ova semidiskretizirana verzija se primjenjuje za svaku od paralelnih linija $\tau = \tau_\nu$, $\nu = 1, ..., \nu_{max} - 1$. Za svaku liniju $\tau = \tau_\nu$, vrijednost $w(S, \tau_{\nu-1})$ je poznata iz prethodne linije počevši od poznate isplate za $\tau = 0$. Dakle, jednadžba koja se mora riješiti za svaki $\tau = \tau_\nu$ je

$$\frac{1}{2}\Delta\tau\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + \Delta\tau r S \frac{\partial w}{\partial S} - (1 + \Delta\tau r)w = -w(\cdot\,, \tau_{\nu-1}). \tag{56}$$

To je obična diferencijalna jednadžba drugog reda za $w(S, \tau_\nu)$ s rubnim uvjetima u $S_f(\tau_\nu)$ i $S \to \infty$. Rješenje se dobiva analitički. Izraz $-w(S, \tau_{\nu-1})$ na desnoj strani jednažbe je poznat pa je to nehomogen član diferencijalne jednadžbe. Komplikacije u računanju se javljaju zbog krivulje S_f koja dijeli svaku od paralelnih linija τ_ν na dva dijela. Znamo otprije da je za put opciju krivulja S_f monotono padajuća za rastuće τ stoga točka separacije na svakoj prethodnoj liniji $\tau_{\nu-1}$ leži više desno u odnosu na točku separacije linije τ_ν. Zbog činjenice da S_f razdvaja svaku paralelnu liniju na dva dijela, nehomogen izraz $-w(S, \tau_{\nu-1})$ jednadžbe (58) se također sastoji od dva dijela. Uzimajući to sve u obzir, analitičko rješenje jednadžbe (58) za liniju τ_ν se sastoji od tri dijela, odnosno, definirano je na tri intervala:

$A:$ $\quad 0 < S < S_f(\tau_\nu)$
$B:$ $\quad S_f(\tau_\nu) \leq S < S_f(\tau_{\nu-1})$
$C:$ $\quad S_f(\tau_{\nu-1}) \leq S.$



Slika 4

Na intervalu A, w je jednak isplati i ne mora se ništa računati. Na intervalima B i C, formule koje daju rješenja su dosta kompleksne.

9 Numerički testovi

U ovom poglavlju su prikazani rezultati računanja vrijednosti američkih put i call opcija za različite vrijednosti cijene izvršenja K, datuma dospijeća T, kamatne stope r, volatilnosti σ i isplate dividendi δ. Također, u primjerima se koriste različite veličine mreže. Za računanje vrijednosti opcija se koristi program izrađen u sklopu diplomskog rada, a naveden je u dodatku.

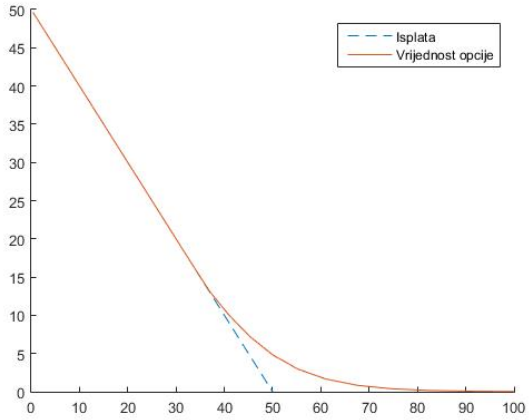
Primjer 9.1. Američka put opcija, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = \frac{5}{12}$, $\delta = 0.1$.

Vrijednosti koje smo koristili za konstrukciju ekvidistantne mreže su: $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $\nu_{max} = 100$, $m = 100$. Kao parametar relaksacije smo uzeli $\omega_R = 1$, a metoda koja je korištena je Crank - Nicolsonova, tj. $\theta = \frac{1}{2}$.

Slika 5 prikazuje vrijednosti u trenutku $t = 0$. Točka kontakta je $S_f = 33.5160$. Za cijene dionica $S < S_f$, krivulje vrijednosti opcije i isplate se podudaraju.

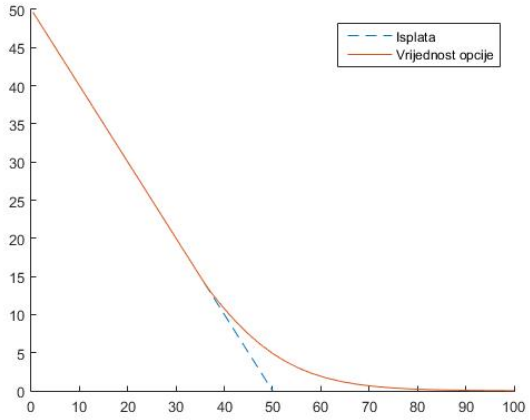
Primjer 9.2. Američka put opcija, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = \frac{5}{12}$, $\delta = 0.1$. (Isto kao u Primjeru 9.1.)

Ovaj primjer se razlikuje od Primjera 9.1 samo u ekvidistantnoj mreži. Ovdje uzimamo mrežu koja je gušća, tj. $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $\nu_{max} = 200$, $m = 200$. Već od prije znamo da udvostručenje parametara m i ν_{max} smanjuje apsolutnu grešku 4 puta, stoga su vrijednosti dobivene u ovom



Slika 5

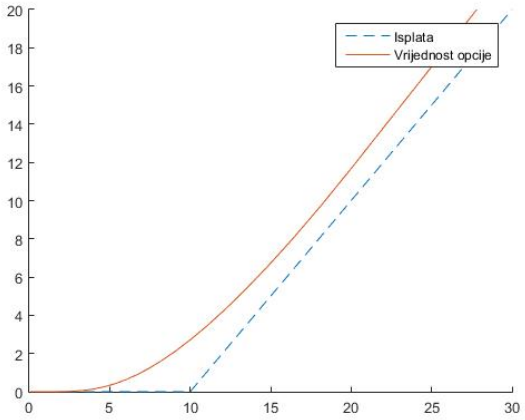
primjeru preciznije. Slika 6 prikazuje vrijednosti u trenutku $t = 0$. Točka kontakta je $S_f = 35.2344$.



Slika 6

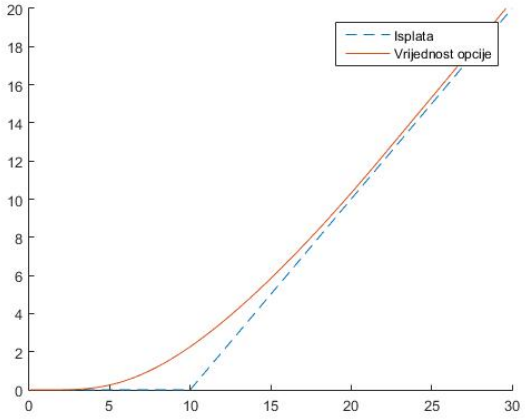
Primjer 9.3. Američka call opcija, $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$, $\delta = 0.2$.
Ukoliko koristimo ekvidistantnu mrežu $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $\nu_{max} = 100$, $m = 100$, parametar relaksacije ω_R te Crank - Nicolsonovu metodu, dobiju se rezultati prikazani na Slici 7. Primjećujemo da nema točke kontakta. Razlog tome može biti što nismo uzeli dovoljno dobru mrežu.

Primjer 9.4. Američka call opcija, $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$, $\delta = 0.2$.



Slika 7

Ovaj primjer je isti kao Primjer 9.3 samo što ovdje uzimamo drukčiju mrežu: $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $\nu_{max} = 200$, $m = 600$. Rezultati su prikazani na Slici 8. Opet nemamo točku kontakta, ali vidimo da se krivulja $V(S,t)$ približava krivulji isplate.



Slika 8

A Prvi dodatak

Ovdje je naveden kod u Matlabu koji računa vrijednosti opcija. Kod se sastoji od tri dijela, a to su kodovi za pomoćne funkcije g za call i put opciju te glavni kod.

Funkcija g za call opciju (g_call.m):

```
function [rj] = g_call(x,tau,q,q_delta)
pom1= (tau/4)*((q_delta - 1)^2 + 4*q);
pom1=exp(pom1);
pom2=exp((x/2)*(q_delta + 1)) - exp((x/2)*(q_delta - 1));
pom2=max(pom2,0);
rj=pom1*pom2;
end
```

Funkcija g za put opciju (g_put.m):

```
function [rj] = g_put(x,tau,q,q_delta)
pom1= (tau/4)*((q_delta - 1)^2 + 4*q);
pom1=exp(pom1);
pom2=exp((x/2)*(q_delta - 1)) - exp((x/2)*(q_delta + 1));
pom2=max(pom2,0);
rj=pom1*pom2;
end
```

Glavni dio koda:

```
delta_x=(x_max - x_min)/m;
delta_tau=((1/2)*(sigma^2)*T)/nu_max;
x=null(m+1);
for i=1:m+1
    x(i)=x_min+(i-1)*delta_x;
end

w_put=null(m-1);
w_call=null(m-1);

for i=1:m-1
    w_put(i)= g_put(x(i+1),0,q,q_delta);
    w_call(i)=g_call(x(i+1),0,q,q_delta);
end

lambda=delta_tau/(delta_x)^2;

alpha=lambda*theta;
w_put_m=zeros(m-1,nu_max-1);
g_pom_put=null(m-1);
g_pom_call=null(m-1);
b_put=null(m-1);
b_call=null(m-1);
v_put=null(m+1);
v_call=null(m+1);
V_put=null(m-1);
V_call=null(m-1);
S=null(m-1);

for nu=0:nu_max-1
tau_nu = nu*delta_tau;
    for i=1:m-1
        g_pom_put(i)=g_put(x(i+1),tau_nu,q,q_delta);
        g_pom_call(i)=g_call(x(i+1),tau_nu,q,q_delta);
    end

    for i=2:m-2
        b_put(i)=w_put(i) + lambda*(1-theta)*(w_put(i+1)-2*w_put(i)...
        +w_put(i-1));
        b_call(i)=w_call(i) + lambda*(1-theta)*(w_call(i+1)-2*w_call(i)...
        +w_call(i-1));
    end
    b_put(1)=w_put(1) + lambda*(1-theta)*(w_put(2)-2*w_put(1)+...
    g_put(x(1),tau_nu,q,q_delta));
    b_call(1)=w_call(1) + lambda*(1-theta)*(w_call(2)-2*w_call(1)+...
    g_call(x(1),tau_nu,q,q_delta));
    b_put(m-1)=w_put(m-1)+lambda*(1-theta)*(g_put(x(m+1),tau_nu,q,q_delta)...
    -2*w_put(m-1)+w_put(m-2));
```

```
49      b_call(m-1)=w_call(m-1)+lambda*(1-theta)*(g_call(x(m+1),tau_nu,q,q_delta)...
50      -2*w_call(m-1)+w_call(m-2));
51
52      v_put(2:m)=max(w_put,g_pom_put);
53      v_call(2:m)=max(w_call,g_pom_call);
54      v_new_put=zeros(1,m+1);
55      v_new_call=zeros(1,m+1);
56      v_put(m+1)=0;
57      v_call(m+1)=0;
58      while (norm(v_put(2:m)-v_new_put(2:m))>epsilon)
59          pom=v_put;
60          for i=2:m
61              ro=(b_put(i-1)+alpha*(v_new_put(i-1)+v_put(i+1)))/(1+2*alpha);
62              v_new_put(i)=max(g_put(x(i+1),(nu+1)*delta_tau,q,q_delta),...
63              v_put(i)+omega_R*(ro-v_put(i)));
64          end
65          v_put=v_new_put;
66          v_new_put=pom;
67      end
68      w_put_m(1:m-1,nu+1)=v_put(2:m);
69      w_put=v_put(2:m);
70
71      while (norm(v_call(2:m)-v_new_call(2:m))>epsilon)
72          pom=v_call;
73          for i=2:m
74              ro=(b_call(i-1)+alpha*(v_new_call(i-1)+v_call(i+1)))/(1+2*alpha);
75              v_new_call(i)=max(g_call(x(i+1),(nu+1)*delta_tau,q,q_delta),...
76              v_call(i)+omega_R*(ro-v_call(i)));
77          end
78          v_call=v_new_call;
79          v_new_call=pom;
80      end
81      w_call_m(1:m-1,nu+1)=v_call(2:m);
82      w_call=v_call(2:m);
83
84  end
85
86  for i=1:m-1
87      S(i)=K*exp(x(i+1));
88      V_put(i)=K*w_put(i)*exp((-x(i+1)/2)*(q_delta-1))*exp(-(1/2)...
89      *sigma^2*T*((1/4)*(q_delta-1)^2+q));
90      V_call(i)=K*w_call(i)*exp((-x(i+1)/2)*(q_delta-1))*exp(-(1/2)...
91      *sigma^2*T*((1/4)*(q_delta-1)^2+q));
92  end
93
94  eps_kapa=10^(-2);
95  i_f_put=0;
96  for i=1:m-1
97      if (V_put(i)+S(i)-K < eps_kapa && i>i_f_put)
98          i_f_put=i;
99      end
100 end
101
102 for i=1:i_f_put
103     V_put(i)=K-S(i);
104 end
105
106 i_f_call=m-1;
107 for i=1:m-1
108     if (abs(K-S(i)+V_call(i)) < eps_kapa && i<i_f_call)
109         i_f_call=i;
110     end
111 end
112
113 for i=i_f_call:m-1
114     V_call(i)=S(i)-K;
115 end
```

Literatura

[1] R. Seydel, *Tools for Computational Finance*, Springer, Berlin, 2009.

[2] E. Isaacson, H.B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley, New York, 1966.

[3] J. Stoer, C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer, Berlin, 1970.

[4] C. Cryer, *The solution of a quadratic programming problem using systematic overrelaxation*, SIAM J. Control 9 , 1971., 385 - 392.

[5] H.E. Johnson, *An analytic approximation for the American put price*, J. Financial Quantitative Analysis 18, 1983., 141-148.

Sažetak

Američka call (put) opcija se definira kao ugovor koji njegovom vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu kupiti (prodati) dionicu (ili neki drugi oblik financijske imovine) po cijeni izvršenja K u bilo kojem trenutku t do datuma dospijeća T. Isplata se definira kao funkcija razlike između trenutne cijene dionice i cijene izvršenja tako da ta razlika ne bude manja od nula.

Prije nego smo krenuli s opisivanjem numeričkih metoda računanja, uveli smo neke a priori granice koje vrijednosti opcija moraju zadovoljavati, naveli smo svojstva opcija te postavili model financijskog tržišta koji je zapravo idealizirani oblik stvarnog tržišta. Zatim smo opisali pretpostavke na kojima se metode računanja vrijednosti opcija zasnivaju. Tu spada tvrdnja da cijene dionica prate (geometrijsko) Brownovo gibanje te da funkcija vrijednosti opcije $V(S,t)$ rješava Black - Scholesovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu.

Numeričke metode za računanje vrijednosti opcija koje se koriste u ovom radu su metode konačnih diferencija. Obrađuju se tri takve metode: eksplicitna, implicitna i Crank - Nicolsonova metoda. Da bi mogli koristiti te metode, potrebno je prvo diskretizirati problem, odnosno uvesti mrežu na kojoj ćemo aproksimirati rješenja te pomoću Taylorovih redova izvesti jednadžbe centralnih diferencija i diferencija unaprijed i unatrag. Te jednadžbe koristimo u navedenim metodama. Zbog lakšeg računanja, te metode se primjenjuju na transformirane varijable. Nakon što se one izračunaju, od njih dobivamo originalne varijable kao što su cijena dionice i vrijednost opcije. Također smo obradili stabilnost i veličinu greške svake od tih metoda.

Naveli smo sve rubne uvjete i definirali točku kontakta koja ne mora uvijek postojati. Skup takvih točaka tvori krivulju ranog iskorištavanja. Pomoću točke kontakta možemo objasniti kada vrijednost opcije zadovoljava Black-Scholesovu jednakost, a kada nejednakost. Zatim uvodimo jedan jednostavan problem i želimo naći njegovo rješenje jer taj jednostavan problem možemo primijeniti na rješavanje linearnog komplementarnog problema u računanju vrijednosti opcija. Nakon što smo našli rješenje linearnog komplementarnog problema, možemo krenuti na računanje vrijednosti opcija. Pomoću svih dosad dobivenih rezultata, možemo konstruirati algoritam za računanje i koristeći njega, napisati kompjutorski program.

Postoje četiri glavne vrste grešaka koje se javljaju prilikom računanja vrijednosti. Budući da ovaj rad govori prvenstveno o numeričkoj analizi, obrađuju se samo greške diskretizacije koje možemo kontrolirati.

Nakon numeričkih metoda, ukratko se opisuju i dvije analitičke metode. Zovemo ih analitičkim iako one uključuju neke numeričke algoritme. U zadnjem poglavlju su navedena četiri primjera u kojima testiramo algoritam, odnosno program koji računa vrijednosti opcija.

Summary

American call (put) option is defined as a contract which gives its owner the right, but not obligation to buy (sell) stock (or some other financial assets) under the strike price K in any time t before the expiration T. Payoff is defined as a function of the difference between stock price and strike price so that the difference is not less than zero.

Before describing numerical methods, we had to set up some a priori bounds that the vaules of the options must satisfy. We also listed features of options and set the model of financial market which is actually an idealized form of real market. Then, we described assumptions on which the methods of calculation are based on. Among those assumptions is a claim that the asset price follows (geometric) Brownian motion and that the value function $V(S,t)$ solves the Black - Scholes partial differential equation.

Numerical methods used are the finite difference methods. Three of these methods are described: explicit, implicit and Crank - Nicolson method. To use these methods, we had to first discretize the problem; i.e, to induct the grid on which the solution will be approximated. Also, we had to derive the equations of central, backward and forward differences using Taylor expansions. In order to make the calculations easier, these methods are applied only on transformed variables. After those are calculated, from them we calculate the original variables such as stock price and value of the option. Stability and error order of each method are also described.

We listed all boundary conditions and defined the contact point (which does not always have to exist). A Set of those points is called the early exercise curve. By those contact points we can explain when value of an option satisfies the Black - Scholes equation, and when inequation. Then, we introduced one simple problem and we want to find its solution because we can apply it on our linear complementary problem. After we find that solution, we can start calculating vaules of the options. Using all obtained results, we can construct the algorithm for computation of American options and, by it, we can write a computer program.

There are the four main errors that occur during calculation. Since this work is primarily based on numerical analysis, only discretization errors, which we can control, are described.

After numerical methods, two analytical methods are shortly described.

We call them analytical although they include some numerical algorithms. In the last section, four examples are shown in which the algorithm and the program that calculates vaules of the options are tested.

Životopis

Marija Žanetić je rođena 16. veljače 1993. godine u Dubrovniku. Završila je Osnovnu školu Blato u Blatu na Korčuli, a zatim opću gimnaziju u Srednjoj školi Blato. 2011. godine je upisala preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij je zavrila 2014. čime je stekla akademski naziv sveučilišne prvostupnice matematike (bacc. univ. math.). Iste godine je upisala diplomski studij financijske i poslovne matematike.