

# Gibanje magneta u magnetskom polju

---

**Pavlešić, Mate**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:040256>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-19**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mate Pavlešić

**GIBANJE MAGNETA U MAGNETSKOM**  
**POLJU**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Izv.prof.dr.sc. Damir Pajić

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Damiru Pajiću na strpljenju, korisnim savjetima i izvrsnom vođenju prilikom izrade ovog diplomskog rada.*

*Zahvaljujem mag. phys. Filipu Toriću na pomoći s analizom rezultata mjerenja.*

*Hvala svim prijateljima i kolegama koji su obogatili moje studentske dane.*

*Zahvaljujem svojoj životnoj partnerici Ivani na razumijevanju i potpori.*

*Za kraj, hvala mojoj obitelji na ukazanom povjerenju i pruženoj podršci tijekom čitavog školovanja.*



# Sadržaj

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Sadržaj</b>   | <b>iv</b> |
| <b>Uvod</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1 Teorijski uvod</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1 Uvod u magnetizam . . . . .  | 3         |
| 1.2 Kinematički zakoni i dinamika . . . . .                            | 15        |
| <b>2 Mjerni postav</b>   | <b>19</b> |
| <b>3 Rezultati i rasprava</b>  | <b>27</b> |
| 3.1 Kinematički opis gibanja magneteta . . . . .                       | 27        |
| 3.2 Ovisnost induciranog napona o udaljenosti među magnetima . . . . . | 32        |
| 3.3 Sila kao gradijent magnetske potencijalne energije . . . . .       | 39        |
| 3.4 Ravnotežni položaj i magnetski moment . . . . .                    | 42        |
| 3.5 Gubitak energije . . . . .   | 44        |
| 3.6 Usporedba rezultata dobivenih različitim metodama . . . . .        | 46        |
| <b>4 Zaključak</b>   | <b>49</b> |
| <b>Bibliografija</b>   | <b>51</b> |

# Uvod

Ljepota fizike kao znanosti je, osim u tome što je svakodnevno svuda oko nas, u tome što se istim fizikalnim problemima može pristupiti na različite načine, a rješavanjem jednog problema može se doći do rješenja nekih problema koji u tom trenutku možda i nisu bili predmetom našeg istraživanja.

U ovom radu, problemu je pristupljeno eksperimentalno; napravljen je određeni broj mjerenja i dobiveni su konkretni rezultati koji su pomogli da ostvarimo zadani cilj, a on je bio opisati kako se giba magnet u magnetskom polju. Znamo da kad približimo dva stalna magneta oni će se ili privlačiti ili odbijati, ovisno o tome kako smo uparili njihove polove, ali kako točno ta sila među njima utječe na magnet u gibanju, to je pitanje na koje ćemo pokušati dati odgovor.

Prvo poglavlje daje nam kratak povijesni uvod u otkriće i razvoj magnetizma, te nas upoznaje sa samom pojavom magnetizma i iznosi određene teorijske činjenice i razmatranja. Saznat ćemo kako se uopće definira magnetsko polje i što ga stvara. Zatim ćemo promatrati magnetski dipol i izvesti izraz za njegovo magnetsko polje. Upoznat ćemo se s pojmom magnetizacije i objasniti kakvu ulogu u svemu tome imaju elektroni. Iako je u istraživanju korišten permanentni neodimijski magnet koji je vezan uz pojavu feromagnetizma, važno će biti poznavati karakteristike po kojima se feromagnetizam razlikuje od dijamagnetizma ili paramagnetizma. Objasnit ćemo što omogućuje da neki materijali imaju sposobnost ostati magnetizirani i nakon što se ukloni vanjsko magnetsko polje koje je djelovalo na taj materijal. Dio poglavlja vezan uz magnetizam završava izrazom za silu

magnetskog dipola, dok na kraju samog poglavlja donosimo neke kinematičke i dinamičke zakone koji će nam pomoći pri opisu gibanja magneta.

U drugom poglavlju do detalja ćemo opisati mjerni postav korišten pri istraživanju i potanko ćemo objasniti na koji način i s kojom svrhom su mjerenja provedena. Poglavlje je obogaćeno slikama koje omogućuju čitatelju lakše razumijevanje i bolju predodžbu opisanih postupaka.

Treće, a ujedno i zadnje poglavlje, obuhvaća obradu prikupljenih podataka, provedene račune, dobivene rezultate te komentare i obrazloženja istih. Gibanje magneta opisali smo kinematički iz dobivenog  $t(x)$  grafa. Zatim smo promatrali kako ovisi inducirani napon o udaljenosti među magnetima i što sve iz toga možemo dobiti i zaključiti. Slijedi energijski pristup rješavanja problema, odnosno, računanje sile kao gradijenta magnetske potencijalne energije. Iz ravnotežnog položaja magneta odredili smo njegov magnetski moment te izračunali magnetsko polje koje on stvara. Za kraj su određeni gubici energije koji su nas pratili prilikom izvođenja mjerenja.

# Poglavlje 1

## Teorijski uvod

### 1.1 Uvod u magnetizam

Najpopularnija legenda o otkriću magneta seže četiri tisućljeća prije našeg vremena i vezana je uz Kretskog pastira Magnusa. Čuvajući svoje stado, na području zvanom Magnezija, primijetio je da su mu čavli u cipelama bili čvrsto privučeni za veliki crni kamen na kojem je stajao. Kamenje koje ga je privlačilo u sebi je sadržavalo magnetit ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), prirodni magnetni materijal koji je postepeno dobio ime po pokrajini Magneziji, ili čak po samom Magnusu.

Od Magnusa nadalje, teorija magnetizma sporo je napredovala, a prvi značajan rezultat iznesen je 1600. godine kada William Gilbert dolazi do zaključka da je i sama Zemlja jedan veliki magnet, iako to saznanje ne predstavlja gotovo nikakav napredak u shvaćanju same pojave magnetizma. Po tom pitanju, prvi veliki iskorak napravio je danski fizičar i kemičar Hans Christian Oersted 1820. godine, tako što je uspostavio vezu između elektriciteta i magnetizma. On je demonstrirao skretanje magnetske igle u slučaju kada se magnetni kompas nalazi u blizini žice kojom teče električna struja. Konačno, nepobitnu vezu između elektriciteta i magnetizma izlaže nam škotski fizičar James Clerk Maxwell nekoliko desetljeća kasnije, a njegove naočigled jednostavne jednadžbe osnova su cjelokupne elektromagnetske teorije [1].

Danas, na spomen riječi magnetizam ili magnet, vjerojatno većini prvo padne na pamet magnetna igla u kompasu ili raznorazni ukrasi na hladnjacima koji se tamo zadržavaju zahvaljujući magnetu. Magneti se također pojavljuju u raznim igračkama pa se dobar dio populacije susreće s njihovim djelovanjem već u ranom djetinjstvu. Većina tih magneta, čiji učinci su vidljivi golim okom u svakodnevnom životu, vežu se uz pojavu feromagnetizma i pripadaju skupini tzv. permanentnih (stalnih) magneta. Uglavnom su napravljeni od spojeva sa željezom i princip rada s njima vrlo je jednostavan; sve što je potrebno je naći pravu površinu uz koju će se magnet htjeti "priljubiti". U suštini stvar je ipak malo kompliciranija i, s teorijskog gledišta, feromagnetni spadaju u skupinu najkompleksnijih magneta s kojima se susreće u praksi. Koje su još skupine magneta i zašto su za teorijskog fizičara feromagnetni najkompliciraniji, prikazano je u nastavku ovog teksta.

## **Magnetsko polje**

Štapni magneti prvi su primjer s kojima se počinje učiti o magnetizmu i pomoću kojih se objašnjava rad magnetnog kompasa. Model je pojednostavljen utoliko što se nigdje ne spominje naboj u gibanju, nego se štapu jednostavno pridjele dva magnetna pola, jedan kraj štapa je sjeverni, a drugi kraj je južni magnetski pol. Ukoliko se razmatraju dva štapna magnetna u blizini, raznoimeni polovi štapova će se privlačiti, a istoimeni odbijati. Ovakav pristup omogućuje i jednostavno objašnjenje rada magnetnog kompasa. Sama Zemlja je jedan veliki magnet čiji je južni magnetski pol blizu geografskog sjevernog pola, i obrnuto, sjeverni magnetski pol Zemlje blizu je južnog geografskog pola. Puštajući magnetsku iglu da slobodno rotira i imajući na umu da se suprotni magnetni polovi privlače, jasno je da će sjeverni pol magnetske igle pokazivati u smjeru sjevera, a južni u smjeru juga. Iako je ovaj pristup vrlo zgodan i može se činiti sličan onom s električnim nabojima, gdje su sjeverni i južni magnetski pol analogija pozitivnom i negativnom električnom naboju, ta poveznica ipak nije ispravna. Razlog leži u tome što nema eksperimentalnog dokaza izoliranih magnetskih polova, oni uvijek dolaze u paru. Na koliko god dijelova rastavili magnetni štap, svaki taj dio će opet imati i sjeverni i južni magnetski pol [2].

Magnetsko djelovanje povezuje se s pojmom magnetskog polja koje u biti nastaje zbog gibanja električnog naboja. U definiranju magnetskog polja pomoći će nam Lorentzov izraz za magnetsku silu na naboj koji se giba u magnetskom polju :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1.1)$$

pri čemu je  $\vec{B}$  oznaka za magnetsko polje,  $q$  je testni naboj,  $\vec{v}$  je njegova brzina, a  $\vec{F}$  je sila koja djeluje na naboj. U slučaju kada je uz magnetsko polje prisutno i električno ( $\vec{E}$ ), Lorentzova sila jednaka je:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.2)$$

Sad možemo reći da je magnetsko polje vektor koji određuje dio ukupne sile koja djeluje na naboj u gibanju. Drugim riječima, pomoću relacije 1.2 možemo izračunati smjer i jakost magnetskog polja. Prvo, treba uzeti česticu poznatog naboja  $q$ . Nakon toga izmjeri se sila na tu česticu dok miruje jer će se iz te sile moći odrediti  $\vec{E}$  na zadanom položaju. Zatim se izmjeri sila na česticu kada prolazi istim položajem brzinom  $\vec{v}$  i odredi se  $\vec{B}$  koji zadovoljava sve te rezultate [3]. Jasno je da ovaj postupak ne predstavlja objašnjenje zašto je uvijek moguće naći  $\vec{B}$  iz ove jednostavne relacije, ali to i nije predmet našeg istraživanja tako da nećemo previše ulaziti u dubinu tog objašnjenja.

## Magnetski dipol

Gore spomenuti magnetski štap je makroskopski primjer magnetskog dipola čija ćemo svojstva promatrati na strujnoj petlji kroz koju teče struja jakosti  $I$ . Za takvu petlju definiramo njen magnetski dipolni moment kao:

$$\vec{m} = I\vec{a}, \quad (1.3)$$

gdje je  $\vec{a}$  vektor elementa plohe kojoj je petlja rubna crta, iz čega možemo uočiti da je  $\vec{m}$  vektor koji leži na normalni ravnine u kojoj se nalazi strujna petlja. Biot-Savartov zakon kaže da je za strujnu petlju kojom teče struja magnetsko polje jednako:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{I} \times \hat{r}}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

gdje  $\vec{r}$  predstavlja vektor položaja, a  $\mu_0$  je prirodna konstanta magnetske permeabilnosti za vakum i iznosi:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ . Magnetski dipolni moment  $\vec{m} = -m_z \hat{k}$  smjestimo u ishodište u yz ravninu i tada, prema 1.4, y i z komponenta magnetskog polja iznose:

$$\begin{aligned} B_y &= -\frac{3\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin \theta \cos \theta, \\ B_z &= -\frac{3\mu_0 m}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

U sfernim koordinatama  $(r, \theta, \phi)$ , radialna i polarna komponenta magnetskog polja mogu se pisati kao:

$$\begin{aligned} B_r &= B_y \sin \theta + B_z \cos \theta = -\frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos \theta, \\ B_\theta &= B_y \cos \theta - B_z \sin \theta = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Sad je ukupno magnetsko polje jednako:

$$\vec{B} = B_\theta \hat{\theta} + B_r \hat{r} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), \quad (1.7)$$

pri čemu  $\hat{r}$  predstavlja jedinični vektor položaja [4].

Ukoliko se želi izbjeći ovaj zapis s koordinatama, analogan izraz za magnetsko polje dipola glasi:

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}), \quad (1.8)$$

Koji god izraz preferirali, jedno je jasno: jakost magnetskog polja dipola opada s  $r^3$ . Rezultat koji se možda i očekivao s obzirom na veliku sličnost s poljem električnog dipola.

Potencijalna energija magnetskog dipola u magnetskom polju je skalarni produkt magnetskog dipolnog momenta i magnetskog polja:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (1.9)$$

Iz ove definicije očito je da je potencijalna energija jednaka nuli u slučaju kada su magnetski dipolni moment i magnetsko polje okomiti. Primjetimo još da će magnetski dipol u magnetskom polju osjećati zakretni moment, jednako kao što električni dipol osjeća kad se nađe u električnom polju. Zakretni moment bit će maksimalan kad su magnetski moment

i magnetsko polje okomiti, odnosno, bit će jednak nuli u slučaju kad su  $\vec{m}$  i  $\vec{B}$  paralelni ili antiparalelni. To nas dovodi do jednakosti za magnetski zakretni moment:

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (1.10)$$

## Magnetizacija

Sve magnetske pojave povezane su s električnim nabojem u gibanju, kako na makroskopskoj, tako i na mikroskopskoj razini. Štoviše, ukoliko istražujemo neki magnetski materijal na atomskoj razini, naći ćemo sićušne struje u vidu kutne količine gibanja elektrona koji kruži oko jezgre, ali i u vidu spina elektrona. Za makroskopske svrhe, te kružne petlje su toliko male da ih možemo tretirati kao magnetske dipole. U principu, oni se poništavaju zbog nasumične orijentacije atoma, ali kad uključimo magnetsko polje, možemo uočiti poravnavanje tih magnetskih dipola i sredstvo postaje magnetski polarizirano, odnosno, magnetizirano [5]. Magnetizaciju nekog sredstva  $\vec{M}$  definiramo kao magnetski moment po jedinici volumena:

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V}. \quad (1.11)$$

Magnetizacija je svojstvo materijala i ovisi o individualnim magnetskim momentima sastavnih iona, atoma ili molekula, ali ovisi i o tome kako ti magnetski momenti međudjeluju [6].

Za magnetski moment atoma postoje tri različita doprinosa: spin elektrona, orbitalna kutna količina gibanja, koja je posljedica gibanja elektrona oko jezgre, te djelovanje vanjskog magnetskog polja. Očito su prva dva doprinosa usko vezana uz sam atom dok je treći vezan uz okolinu tog atoma i njegov utjecaj se može kontrolirati.

Pretpostavimo da se elektron oko jezgre giba nekom brzinom  $v$  po kružnici polumjera  $r$ . Tada je taj slučaj ekvivalentan strujnoj petlji površine  $r^2\pi$ . Da bismo mogli primijeniti relaciju 1.3, potrebno je još odrediti struju u toj petlji. Prisjetimo se da je prosječna struja jednaka prosječnom naboju koji proteče u jedinici vremena, a za naš slučaj ukupni naboj jednak je naboju elektrona  $e$ , dok je traženo vrijeme u biti vrijeme jedne revolucije,



odnosno,  $T = 2\pi r/v$ . Dakle,  $I = ev/2\pi r$ . Konačno, magnetski moment iznosi:

$$m = Ia = \frac{ev}{2\pi r} r^2 \pi = \frac{evr}{2}. \quad (1.12)$$

Imajući na umu da je kutna količina gibanja čestice u kružnoj orbiti jednaka  $L = m_e vr$  (ovdje  $m_e$  predstavlja masu čestice, u našem slučaju elektrona), slijedi da je

$$m = \frac{e}{2m_e} L. \quad (1.13)$$

U Bohrovom modelu atoma  $L = nh/2\pi = n\hbar$ , pri čemu je  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Za osnovno stanje ( $n = 1$ ), relacija 1.13 postaje  $m = (e/2m_e)\hbar$ . Ova vrijednost je prirodna jedinica za magnetski moment i nazivamo je Bohrov magneton te označavamo s  $\mu_B$ :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}. \quad (1.14)$$

Numerička vrijednost Bohrovog magnetona je

$$\mu_B = 5.788 \times 10^{-5} \text{ eV/T} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2.$$

Primijenimo ovaj rezultat na vodikov atom. On kaže da elektron u osnovnom stanju vodikova atoma ima orbitalni magnetski moment magnitude  $\mu_B$ , što bi bilo u redu da se to ne protivi sa Schrödingerovom slikom koja kaže da elektron u tom stanju ima kutnu količinu gibanja jednaku nuli pa samim time i orbitalni magnetski moment mora biti jednak nuli. Drugim riječima, rezultat koji je dobiven iz Bohrovog modela atoma moramo korigirati tako da rezultat bude u skladu sa Schrödingerovim modelom.

Pretpostavimo da je magnetsko polje  $\vec{B}$  u  $+z$  smjeru, tada je

$$m_z = -\frac{e}{2m_e} L_z, \quad (1.15)$$

gdje je za Schrödingerovu valnu funkciju  $L_z = m_l \hbar$ , pri čemu je  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ . Ovdje je  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ , što odgovara atomskim orbitalama s, p, d, f... Minus predznak u relaciji 1.15 je zato što je naboj elektrona u biti negativan pa su magnetski i orbitalni kutni moment u suprotnim smjerovima[7]. Sada tu relaciju možemo zapisati kao:

$$m_z = -m_l \frac{e\hbar}{2m_e}, \quad (1.16)$$

ili, koristeći definiciju Bohrovog magnetona:

$$m_z = -m_l \mu_B. \quad (1.17)$$

Osim orbitalnoga momenta vrtnje, elektron ima i svoj vlastiti moment količine gibanja, spin, koji bi se mogao shvatiti kao posljedica vrtnje elektrona oko vlastite osi. Zbog te vrtnje elektron dobiva i vlastiti magnetski moment [8]. Spinski kvantni broj (oznaka  $s$ ) uvijek ima vrijednost  $1/2$ , a spinski magnetni kvantni broj (oznaka  $m_s$ ) je jednak:  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ . Pretpostavimo opet da mjerimo  $z$ -komponentu spinske kutne količine gibanja; jedine moguće vrijednosti su:

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar. \quad (1.18)$$

Magnituda spinskog angularnog momenta iznosi:

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar. \quad (1.19)$$

Gledajući relaciju 1.17, rezultat koji očekujemo je:  $m_z = -m_s \mu_B$ , ali ta pretpostavka je netočna i teorija kvantne elektrodinamike daje nam sljedeći rezultat:

$$m_z = -g_e \frac{e}{2m_e} S_z, \quad (1.20)$$

pri čemu je  $g_e = 2.002319$  i nazivamo ga  $g$ -faktor elektrona. Primjetimo da je numerička vrijednost spinskog magnetnog momenta približno jednaka jednom Bohrovom magnetonu.

### **Dija, para i feromagnetizam**

Ovisno o njihovom ponašanju u prisustvu vanjskog magnetskog polja, materijali se dijele na dijamagnete, paramagnete i feromagnete. Postoje još i antiferomagneti te ferimagneti, ali njih ćemo samo spomenuti.

Dijamagnetski efekt možemo uočiti stavljanjem dijamagnetskog materijala, kao što je npr. bizmut, ugljik, živa..., u magnetsko polje. Efekt će se očitovati u tome što će se materijal odkloniti iz područja jačeg u područje slabijeg magnetskog polja. Ovdje valja napomenuti da je dijamagnetizam svojstvo svih materijala, ali kako je dijamagnetski efekt uvijek slab, on će se moći vidjeti samo u slučaju kad su ostali magnetski efekti nedovoljno izraženi. Raspravimo još malo taj efekt koji se možda čini kontra-intuitivnim, ali ako malo bolje razmislimo uvidjet ćemo da ustvari itekako ima smisla. Uključivanjem magnetskog

polja u atomu se stvaraju nove struje izazvane elektromagnetskom indukcijom. Lenzovo pravilo govori da su te struje u takvom smjeru da se protive promjeni magnetskog polja, odnosno, inducirani magnetski momenti su suprotnog smjera od vanjskog magnetskog polja. Što je to polje jače, magnetizacija je "negativnija" [6].

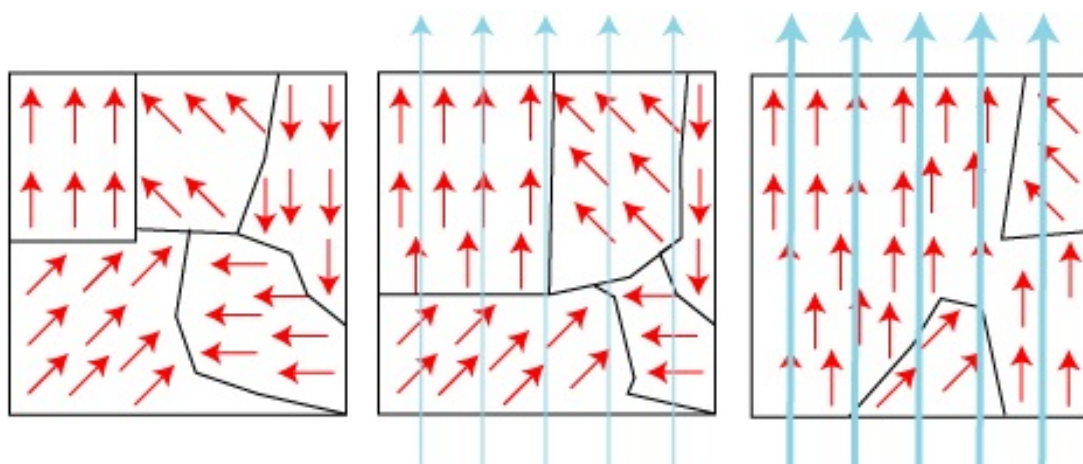
U atomu se u većini slučajeva različiti orbitalni i spinski magnetski momenti elektrona zbroje u nulu, ali u nekim slučajevima, kada nisu svi elektroni spareni, ukupni magnetski moment je reda veličine Bohrovog magnetona. Ako se takav materijal stavi u magnetsko polje, ono na svaki magnetski moment tog materijala stvara okretni moment prema relaciji 1.10. U tom slučaju dipolni magnetski momenti nesparenih elektrona usmjere se pretežno u smjeru polja i tako nastoje povećati ukupno polje. Materijal se magnetizira, a ukupna magnetizacija računa se prema relaciji 1.11. Ispostavlja se da je ukupno magnetsko polje nastalo zbog magnetizacije jednako  $\mu_0 \vec{M}$ , pri čemu je  $\mu_0$  konstanta permeabilnosti vakuuma i iznosi  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ . Ako se takav materijal nalazi u primijenjenom polju  $B_0$ , ukupno magnetsko polje u materijalu je:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}. \quad (1.21)$$

Za materijal koji je upravo opisan kaže se da je paramagnetičan [7]. Ukratko, to je materijal kod kojeg se magnetski momenti elektrona orijentiraju u smjeru vanjskog magnetskog polja.

U feromagnetskim materijalima, kao što su npr. željezo, kobalt i nikal, postoje mikroskopska područja ( $10^{-8} - 10^{-12} \text{ m}^3$ ) spontane uspostavljene magnetizacije, tzv. feromagnetne ili Weissove domene. Drugi naziv potječe od francuskog fizičara Pierre-Ernest Weissa (1865.-1940.) jer je upravo on razjasnio pojavu feromagnetizma uvodeći hipotezu o domenama. U svakoj domeni svi atomi (kojih u domeni ima oko  $10^{20}$ ) imaju paralelne magnetske dipolne momente pa se domena ponaša kao mali permanentni magnet. U nemagnetiziranom materijalu smjerovi magnetskih momenata domena nasumično su raspoređeni pa materijal kao cjelina nije magnetičan. Vanjsko polje dvojako utječe na orijentaciju domena: domene u smjeru polja povećavaju se na račun onih kod kojih je smjer suprotan polju, dok jača magnetska polja mogu zarotirati domene i tako ih orijentirati u smjeru polja [8].

Dobar prikaz toga možemo vidjeti na slici 1.1. Crne linije na slici predstavljaju granice među domenama i nazivamo ih domenskim zidovima. Oni predstavljaju prijelaze između različitih orijentacija dipola, a promjenom magnetskog polja ti zidovi se pomiču [9].

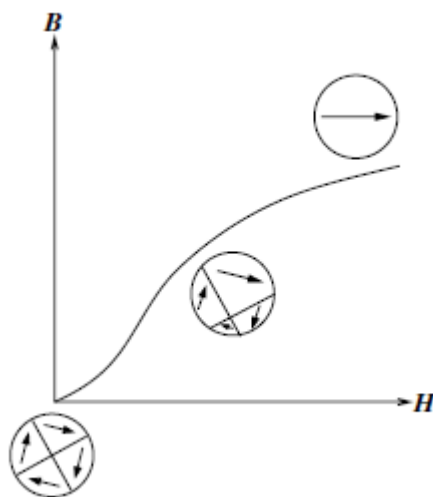


(a) bez prisutnosti vanjskog magnetskog polja (b) uz prisutnost slabijeg magnetskog polja (c) uz prisutnost jačeg magnetskog polja

Slika 1.1: Weissove domene [9].

Dok je za dijamagnetske i paramagnetske materijale magnetska indukcija strogo razmjerna jakosti magnetskog polja, za feromagnetske materijale stvar je poprilično drugačija. Krivulja magnetiziranja feromagnetskog materijala prikazana je na slici 1.2. Na toj slici se također vrlo dobro uočava promjena u strukturi Weissovih domena u ovisnosti o magnetskom polju. Ako se željezo nađe u vanjskom magnetskom polju, Weissove domene kojih je spontana magnetizacija paralelna vanjskom polju povećavaju se na račun drugih domena i tako se magnetska indukcija povećava s porastom jakosti magnetskoga polja. Kada se svi elementarni dipoli u željezu usmjere prema magnetskom polju, magnetizacija poprima maksimalnu vrijednost i daljnje povećanje polja ne mijenja magnetizaciju željeza. Željezo se magnetski zasitilo [8].

Uklanjanjem vanjskog magnetskog polja, dipoli se vraćaju u svoje prvobitno stanje, a magnetski moment duž polja smanjuje se. Rotacija magnetskih dipola je u potpunosti reverzibilan proces, ali pomicanje zidova domena nije. Rezultat toga je da dolazi do histereze krivulja magnetizacije i dio magnetizacije ostaje u uzorku čak i kad se vanjsko magnetsko

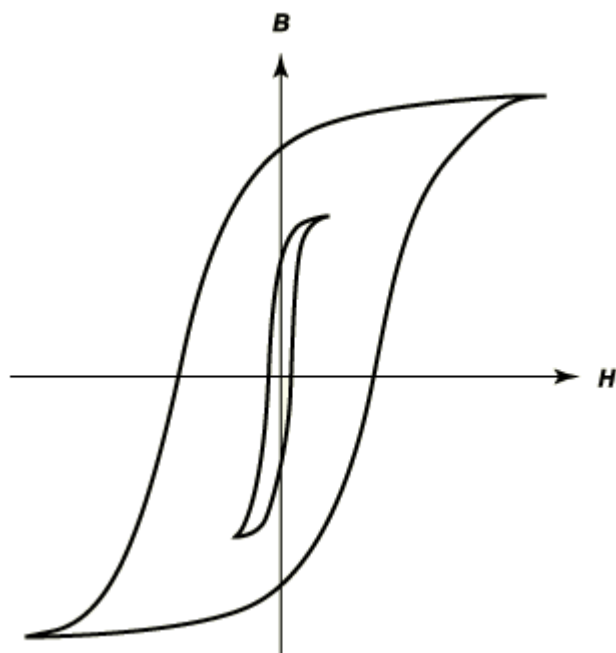


Slika 1.2: Krivulja magnetiziranja feromagnetskog materijala [6].

polje u potpunosti ukloni. Kako bi se magnetizacija uzorka svela na nulu, potrebno je vanjsko polje suprotnog smjera od onog koje je izazvalo magnetizaciju. Koliko magnetizacije ostaje u uzorku nakon isključivanja polja uvelike ovisi o njegovoj čistoći i kvaliteti. Za uzorke s puno nečistoća i nedostataka trebat će jako polje kako bi se magnetiziralo, ali će takav materijal zadržati dobar dio magnetizacije nakon što se polje isključi. Razlog tome je što nečistoće i površinski i volumni defekti čine centre zapinjanja domenskih zidova, i što je veći broj tih centara to je pokretljivost zidova manja [10]. Ovo svojstvo karakterizira tvrde magnetske materijale koji su pogodni za stvaranje permanentnih, odnosno, stalnih magneta. S druge strane, postoje i meki magnetski materijali. To su materijali visoke čistoće koje je lako magnetizirati i demagnetizirati [6]. Razlika u magnetizaciji i demagnetizaciji mekih i tvrdih magnetskih materijala prikazana je na slici 1.3, gdje se dobro vidi koliko je veća petlja histereze kod tvrdih magnetskih materijala.

### Neodimijski magnet

Neodimijski magnet, poznat i kao NdFeB ili Neo magnet, je permanentni magnet načinjen od legure neodimija, željeza i bora. Kemijska formula mu je  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  i ima tetragonsku



Slika 1.3: Krivulja histereze mekog i tvrdog magnetskog materijala [11].

kristalnu strukturu. Izumljen je 1982. godine, a razvili su ga General Motors i Sumitomo Special Metals. Neodimijski magneti su najjači permanentni magneti dostupni za komercijalne svrhe i koriste se u bežičnim uređajima, tvrdim diskovima, zvučnicima te magnetskim zatvaračima. Takve ćemo magnete koristiti i u ovom eksperimentalnom istraživanju.

Veliku ulogu u jakosti tih magneta ima njihova struktura. Kristali materijala preferencijalno se magnetiziraju duž specifičnih kristalnih osi i teško se magnetiziraju u drugim smjerovima. Ta činjenica iskorištena je na način da se prilikom proizvodnje kristali slažu tako da sve magnetske osi budu u istom smjeru. Jaka anizotropija daje neodimijskom magnetu veliku otpornost na proces demagnetizacije. Još jedan razlog njihove velike magnetizacije leži u tome što atom neodimija ima 7 nesparenih elektrona, dok željezo ima samo 3. U magnetu, nespareni elektroni usmjereni su tako da stvaraju magnetski dipolni moment, a samim time i magnetsko polje, u istom smjeru.

Neodimijski magneti podložni su koroziji pa su često premazani zaštitnim slojem nikla. Valja još spomenuti da treba biti oprezan prilikom korištenja tih magneta jer već i magneti

veliĉine nekoliko kubiĉnih centimetara mogu uzrokovati tjelesne ozljede ukoliko se neki dio tijela ukljeŝti izmeĊu dva takva magneta [12].

### Sila izmeĊu dva magnetska dipola

Pretpostavimo da imamo dva magnetska dipola, ĉiji su magnetski momenti  $\vec{m}_1$  i  $\vec{m}_2$ , orijentirana duŝ  $z$ -osi i udaljeni za  $r$ . Iz relacije 1.7 moŝemo napisati jednadŝbu za magnetsko polje prvog dipola:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (1.22)$$

Sila na magnetski dipol koji se nalazi u nekom polju  $\vec{B}$  jednaka je gradijentu skalarnog produkta tog polja i magnetskog momenta dipola:

$$\vec{F} = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}), \quad (1.23)$$

ŝto znaĉi da ċe sila na drugi dipol koji se nalazi u magnetskom polju prvog biti jednaka:

$$\vec{F} = \nabla (\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1). \quad (1.24)$$

Kako smo pretpostavili da su magnetski momenti dipola orijentirani duŝ  $z$ -osi, tako je  $\vec{m}_2 = m_2 \hat{z}$ , iz ĉega dobivamo da je:

$$\vec{m}_2 \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^3} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (1.25)$$

Sada iz 1.24 dobivamo:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^4} [-3 (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \hat{r} - 6 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}]. \quad (1.26)$$

Kako smo na poĉetku pretpostavili da su dipoli orijentirani duŝ  $z$ -osi, to znaĉi da je  $\theta = 0$ , pa konaĉno imamo:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi r^4} \hat{r} \\ &= -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi r^4} \hat{z} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Oĉito drugi dipol osjeĉa privlaĉnu silu prema prvom dipolu [13].

Dva paralelna permanentna magneta jednakih dimenzija koji se mogu gibati samo po jednom pravcu poistovjetit ćemo s ovim slučajem dva infinitezimalna dipola i doći do zaključka da će sila između ta dva magneta biti obrnuto proporcionalna četvrtoj potenciji udaljenosti među njima. Ovisno o tome kako su okrenuti polovi magneta, ta sila može biti privlačna ili odbojna. Valja spomenuti da ova analogija nije idealna, ali daje poprilično dobar opis ponašanja magneta u danoj situaciji.

## 1.2 Kinematički zakoni i dinamika

### Jednoliko ubrzano gibanje po pravcu

Kinematika je dio mehanike koji proučava i opisuje gibanje tijela, ne obazirući se pritom na uzroke gibanja[14]. Za gibanje možemo reći da je promjena položaja nekog objekta u prostoru koja se dogodila u nekom vremenu. Od sad pa nadalje podrazumijeva se da promatramo gibanje tijela pravocrtno duž jedne osi, neka to bude  $x$ -os. U tom slučaju, promjena položaja tijela definira se kao:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad (1.28)$$

pri čemu  $x_1$  označava početni, a  $x_2$  konačni položaj tijela. Analogno tome, promjena u vremenskom intervalu bit će  $\Delta t = t_2 - t_1$ , pri čemu je opet  $t_1$  početno, a  $t_2$  konačno vrijeme. U slučaju kad su te dvije varijable poznate, možemo izračunati srednju brzinu tijela kao:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.29)$$

Ova informacija govori nam o brzini tijela u određenom vremenskom intervalu, ali mi želimo precizniji podatak i zanima nas brzina tijela u nekom točno određenom trenutku. Do nje dolazimo na sljedeći način:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.30)$$

Ovo je izraz za trenutnu brzinu tijela u trenutku  $t$ . Nadalje, promjenu brzine u nekom vremenskom intervalu nazivamo ubrzanjem i definiramo sljedećom relacijom:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (1.31)$$



pri čemu je, naravno,  $\Delta v = v_2 - v_1$ , gdje je  $v_1$  početna, a  $v_2$  konačna brzina. Analogno trenutnoj brzini, trenutno ubrzanje definiramo kao:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.32)$$

U nastavku teksta navedeni su neki korisni izrazi koji se upotrebljavaju za računanje u slučaju kad imamo jednoliko gibanje po pravcu stalnim ubrzanjem:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2, \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0), \end{aligned} \quad (1.33)$$

pri čemu su  $x_0$  i  $v_0$  početni položaj i brzina, a  $x$  i  $v$  položaj i brzina nakon vremena  $t$ .

## Dinamika

Dinamika je dio mehanike koji proučava veze između sila koje djeluju na tijela i gibanja tih tijela [14]. Temelje te veze postavio je Isaac Newton (1642.-1717.) u svoja tri zakona o gibanju.

Prvi Newtonov zakon kaže da svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu dok god je suma svih vanjskih sila koje djeluju na to tijelo jednaka nuli. Simbolima to možemo zapisati na sljedeći način:

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

Drugi Newtonov zakon uspostavlja proporcionalnu vezu između sile na tijelo i promjene količine gibanja tijela:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (1.34)$$

Budući da se zakon odnosi samo na tijela konstante mase  $m$ , možemo ga pisati:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, \quad (1.35)$$

što će reći da je sila koja djeluje na tijelo proporcionalna ubrzanju tijela, s konstantom proporcionalnosti  $m$ .

Konačno, tu je i treći Newtonov zakon, zakon akcije i reakcije, koji kaže da ako dva tijela međudjeluju, onda je sila kojom prvo tijelo djeluje na drugo, po veličini jednaka sili kojom drugo tijelo djeluje na prvo, ali je suprotnog smjera [14]. Simbolima:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}. \quad (1.36)$$

## Gravitacija i slobodan pad

1687. godine Newton objavljuje zakon o gravitaciji koji kaže da svaka čestica u svemiru privlači svaku drugu česticu u svemiru silom koja je proporcionalna umnošku masa tih čestica i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti između njih [7]. Predočimo li ove riječi u jednadžbu, izgledat će ovako:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.37)$$

gdje su  $m_1$  i  $m_2$  mase tih čestica (tijela), a  $r$  je udaljenost između njihovih središta masa. Ovdje se pojavljuje i gravitacijska konstanta  $G$  čija je numerička vrijednost jednaka  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ . Promatramo li silu između Zemlje i nekog objekta koji se nalazi na njenoj površini, u gore navedenu formulu moramo uvrstiti masu Zemlje, masu tog objekta te polumjer Zemlje. S obzirom na to da polumjer Zemlje iznosi 6370 km, formulu možemo koristiti i za objekte koji nisu striktno na samoj površini Zemlje, bitno je samo da su dovoljno blizu da ta razlika u udaljenosti ne utječe prekomjerno na promjenu sile. Imajući to na umu, i koristeći II. Newtonov zakon, možemo izračunati ubrzanje tijela prilikom pada s neke visine na površinu Zemlje:

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{m_z}{r_z^2}, \quad (1.38)$$

gdje smo s  $m_z$  i  $r_z$  označili masu i polumjer Zemlje. To ubrzanje nazivamo ubrzanjem Zemljine sile teže i označavamo ga s  $g$ . S obzirom na to da Zemlja nije savršena kugla, numerička vrijednost te akceleracije nije svugdje ista, ali u principu se uzima da je  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Podignemo li neko tijelo na određenu visinu i pustimo ga, ono će se približavati

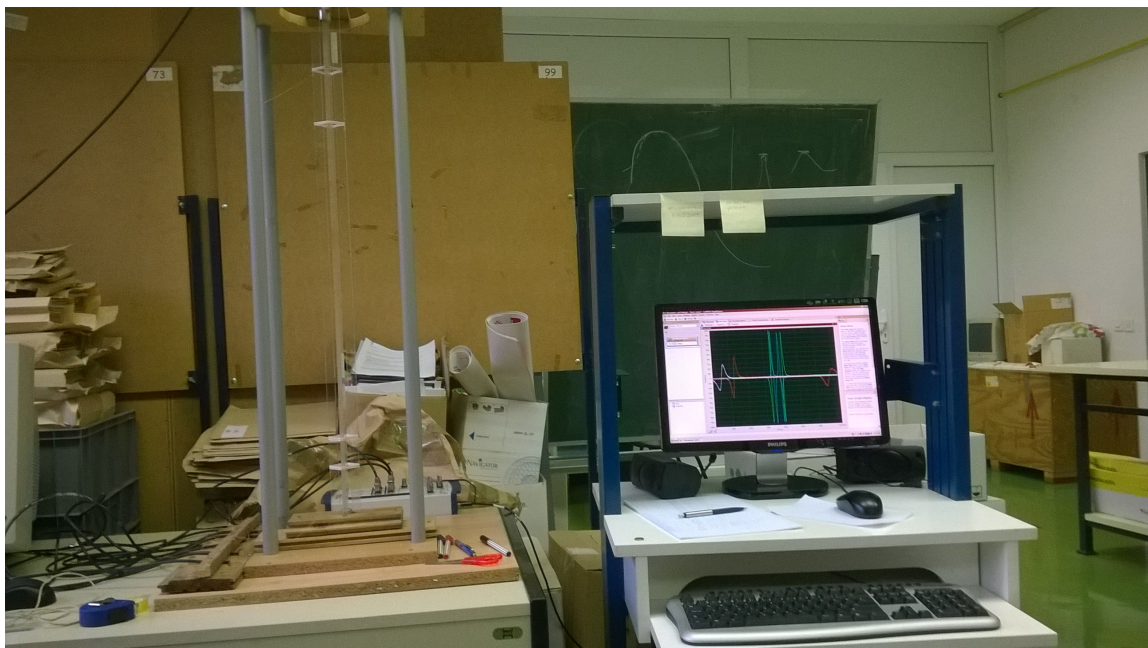
Zemlji upravo tom akceleracijom. Takvo gibanje nazivamo slobodnim padom, a iz upravo izrečenog možemo zaključiti da je slobodni pad ništa drugo doli jednoliko ubrzano gibanje sa stalnom akceleracijom  $g$ . Naravno, ova tvrdnja vrijedi samo ukoliko prihvatimo sve gore navedene aproksimacije.

## Poglavlje 2

### Mjerni postav

Kompletan mjerni postav sa svim uređajima potrebnim za izvođenje eksperimenta, mjerenje i prikupljanje rezultata mjerenja nalazi se na slici 2.1. Sastoji se od računala, drveno-plastičnog stalka, četiri štapa od pleksiglasa, četiri zavojnice od bakrene žice, četiri koaksijalna kabla, NI USB-6251 BNC uređaja za mjerenje električnog napona i dva neodimijska magneti. Većinski dio drveno-plastičnog stalka preuzet je iz prijašnjeg istraživanja koje je proveo Filip Frntić [15], a promijenjen je utoliko što je cijev od borosilikatnog stakla zamijenjena s četiri štapa od pleksiglasa (slika 2.2) koji služe kao vodilice za magnet. Štapovi su pravokutnog profila dimenzija  $15 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$  i duljine 1 m. Štapovi su paralelno postavljeni dovoljno široko da se magnet može slobodno gibati, ali i dovoljno usko da se magnet giba samo po jednom pravcu, dakle, omogućena mu je samo promjena visine na kojoj se nalazi. Cilj zamjene bio je smanjiti trenje i omogućiti protok zraka oko štapova.

Neodimijski magneti su oblika valjka s promjerom 20,0 mm i istom tolikom visinom. Jedan magnet fiksiran je na dnu stalka dok je drugi pomičan kako bi mogli izvoditi mjerenja. Na slici 2.3 možemo vidjeti kako u ravnotežnom položaju jedan magnet lebdi iznad drugog, odbojna sila među magnetima dovoljno je velika da svlada težinu gornjeg magneti. Uočimo na toj istoj slici bijele papirnate trakice koje obavijaju štape od pleksiglasa. Prije nego objasnimo njihovu ulogu, osvrnimo se malo na sam princip mjerenja.



Slika 2.1: Cjelokupan eksperimentalni postav.

U svrhu određivanja sile među magnetima, koristeći kinematičke zakone, mjerenja provodimo na sljedeći način. Kao što smo već rekli, jedan od magneta je fiksiran na dnu postolja, dok drugi magnet dižemo na određenu visinu i puštamo ga da slobodno pada, pazеći da magnetu, prilikom ispuštanja, ne dajemo nikakav dodatan impuls sile. Sile koje djeluju na magnet prilikom pada su sila teža, odbojna sila između dva magneta, sila otpora zraka te sila trenja između magneta i štapova od pleksiglasa. Ovdje nam najveći problem stvara sila trenja jer je ne možemo egzaktno odrediti tako da jedino što nam preostaje je pokušati je minimizirati i kasnije u računu zanemariti. Silu trenja minimizirali smo na dva načina. Prvo smo, prilikom konstrukcije postolja, štapove od pleksiglasa postavili tako da je prilikom spuštanja magneta dodirna površina između njega i štapova što manja; magnet i štapovi se zapravo dodiruju duž četiri linije. Kako bi dodatno smanjili faktor trenja, štapove i magnet premazali smo tankim slojem ulja za podmazivanje. Također je vrlo bitno što oko štapova ima dosta slobodnog prostora pa zrak oko magneta može slobodno strujati.



Slika 2.2: Drveno-plastični stalak.

Na bijelim papirnatim trakicama nalaze se zavojnice koje služe za detekciju prolaska magneta. Faradayev zakon indukcije kaže da je inducirani elektromotorni napon u zatvorenoj petlji jednak negativnoj vrijednosti promjene magnetskog toka kroz tu petlju. Simbolima:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (2.1)$$

gdje je s  $\Phi_B$  označen tok magnetskog polja kroz neku površinu. Za infinitezimalni komad površine  $d\vec{A}$  u magnetskom polju  $\vec{B}$  vrijedi:

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (2.2)$$

a u slučaju nehomogenog magnetskog polja

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (2.3)$$



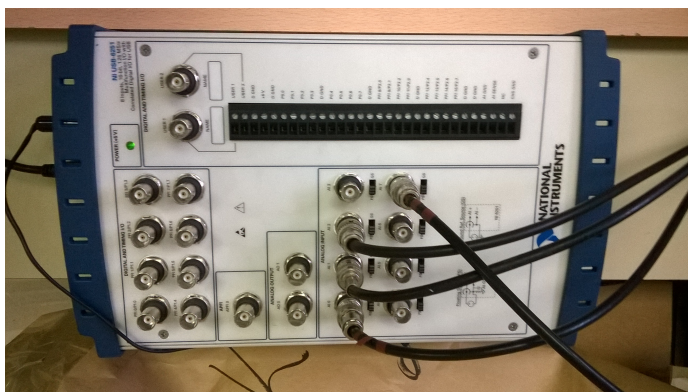
Slika 2.3: Magneti u ravnotežnom položaju.

Ukoliko imamo zavojnicu s  $N$  navoja, i vrijednost promjene toka jednaka je kroz svaki navoj, ukupan inducirani elektromotorni napon iznosi:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (2.4)$$

Drugim riječima, kada magnet prolazi kroz zavojnice, u njima se inducira elektromotorni napon. Krajeve zavojnica zalemili smo za koaksijalni kabel koji smo uključili u NI USB-6251 BNC uređaj za mjerenje električnog napona (slika 2.4). Taj uređaj omogućuje prikupljanje podataka brzinom od 1.25 milijuna očitavanja u sekundi što znači da s velikom preciznošću može mjeriti brze promjene napona. Spajanjem tog uređaja na računalo, uz pomoć računalnog programa LabView Signal Express, na ekranu smo mogli vidjeti graf ovisnosti induciranoeg elektromotornog napona o vremenu, za sve četiri zavojnice. Primjer

jednog takvog grafa možemo vidjeti na slici 2.5.



Slika 2.4: NI USB-6251 uređaj za mjerenje električnog napona.

Signal za svaku zavojnicu označen je drugačijom bojom, iako je i bez toga jasan redoslijed zavojnica jer znamo da se prvo napon inducira u najvišoj zavojnici, zatim u sljedećoj do nje, i tako redom. Tu činjenicu iskoristili smo kako bi maksimizirali praktičnost prikupljenih podataka. Naime, jednom kad se program pokrene, on će prikupljati podatke o induciranom naponu na svakoj zavojnici dok god se ne da naredba da prestane. No postoji i opcija da se odredi točan vremenski interval prikupljanja podataka i da se odredi trenutak u kojem će se ti podaci početi prikupljati. To nam je omogućilo da najvišu zavojnicu postavimo kao "trigger", na način da kad se na njoj inducira napon veći od 5 mV, podaci se počinju prikupljati.

Program također omogućuje postavljanje željene frekvencije prikupljanja podataka, a mi smo je postavili na 80 kHz jer smo ispitivanjem došli do zaključka da je to idealna frekvencija jer nam daje taman dovoljan broj podataka koje trebamo, a s druge strane nije nam potrebna veća vremenska razlučivost, odnosno, vremenska udaljenost između dvije točke dovoljna je da iščitamo sve potrebne podatke. Vremenska udaljenost između dvije susjedne točke pritom iznosi  $1.25 \times 10^{-5}$  s.



Primijetimo da za jedan prolaz magneta kroz zavojnicu postoje dva maksimuma iznosa inducirano napona, jedan na pozitivnoj, a drugi na negativnoj strani  $y$ -osi. Na prvi pogled možda malo čudno, ali već na drugi stvar je prilično jasna. Dovoljno je prisjetiti se Faradayevog zakona indukcije kako bi zaključili da signal s jedne strane  $y$ -osi nastaje kad se magnet približava zavojnici dok signal s druge strane  $y$ -osi nastaje kada se magnet udaljava od zavojnice. Ovdje nam je upravo taj prijelaz ključan jer taj trenutak, u kojem krivulja siječe  $x$ -os, je trenutak u kojem je središte magneta u ravnini sa zavojnicom. Drugim riječima, može se točno očitati trenutak u kojem magnet prolazi kroz središte zavojnice. Zato je važno da je zavojnica što tanja, a to je ostvareno tako da se sastoji od samo pet namotaja vrlo tanke bakrene lakirane žice.

Prisjetimo se da je cilj ovog istraživanja otkriti kako sila među magnetima ovisi o njihovoj međusobnoj udaljenosti što znači da bi nam podatak o tome koliko magnetu treba vremena da dođe u određenu točku bio vrlo koristan jer bi odmah znali i ovisnost  $x(t)$ , što bi nam omogućilo da dobijemo  $v(t)$  i  $a(t)$ , odnosno, koristeći II. Newtonov zakon mogli bismo odrediti  $F(t)$ . Istina je da mi u biti tražimo  $F(x)$ , ali to onda nije problem jer znamo u kakvom su odnosu  $x$  i  $t$ . Dakle, mjerenjima trebamo odrediti vremena u kojima se magnet nalazi u nekom položaju  $x$ , gdje smo s  $x$  označili udaljenost između dvaju magneta. Kako bi ta ovisnost bila što preciznija, pomoću ovog mjernog postava, trebali bismo, cijelom duljinom kojom magnet pada, postaviti što više zavojnica tako da je razmak među njima što manji. Zvuči kao puno nepraktičnog posla što nas dovodi do odgovora na pitanje čemu služe papirnate bijele trakice oko kojih su omotane zavojnice. One su tu kako bi zavojnice mogli pomicati i fiksirati na visinu koju želimo. Na većim udaljenostima, gdje očekujemo manji utjecaj magnetske sile, zavojnice smo pomicali po 2 mm, a na manjim udaljenostima po 1 mm (napomenimo da najvišu zavojnicu nismo pomicali jer nam je ona služila kao "trigger"). Tako smo uz pomoć trakica, sa samo nekoliko zavojnica, mogli izmjeriti vremena prolaska magneta duž cijelog istraživanog razmaka od 67.3 cm.

Ponovimo ukratko princip mjerenja. Jedan magnet stoji fiksiran na dnu mjernog postava tako da je njegova visina 0.7 cm od nulte točke od koje mjerimo visinu. Drugi magnet podižemo i puštamo da slobodno pada iz položaja takvog da se donji rub magneta nalazi

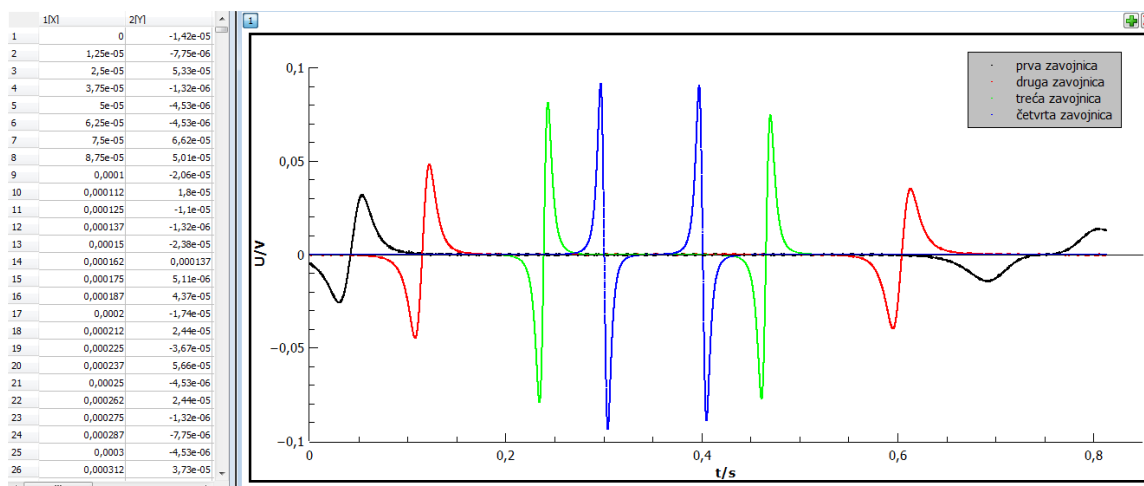


Slika 2.5: Graf ovisnosti induciranog napona o vremenu na četiri zavojnice.

na visini od 85 cm, odnosno, središte magneta je na visini od 86 cm. Najviša zavojnica, koja služi kao "trigger" nalazi se na visini od 80.2 cm. Nakon što magnet prođe najvišu zavojnicu, počinje prikupljanje podataka. Drugu zavojnicu pomicali smo od 69.7 cm visine do 39.9 cm u razmacima od po 2 mm. Treću zavojnicu pomicali smo od visine 40.1 cm-20.3 cm u razmacima od po 2 mm, a od 20.3 cm-0.7 cm u razmacima od po 1 mm. Četvrtu zavojnicu pomicali smo od 19.8 cm-0.7 cm u razmacima od 1 mm. Kako na visinama na kojima se nalazila druga zavojnica ne očekujemo gotovo nikakav utjecaj magnetske sile, ona će nam služiti za računanje akceleracije Zemljine sile teže i kao provjera ispravnosti mjernog postupka.

Rezultate svakog pojedinog mjerenja možemo vidjeti na ekranu, kao što je prikazano na slici 2.5, ali to nam nije dovoljno kako bi mogli iščitati potrebne podatke. Iz tog razloga, sve potrebne podatke smo kopirali i spremili ih u računalnom programu QtiPlot. Podaci se spremaju u obliku tablice na način da su u jednom stupcu vremenski periodi, a u drugom vrijednosti induciranog napona za određeni vremenski trenutak. Traženi podaci mogu se

sad iščitavati iz tablice, a jednostavniji način je crtanje i iščitavanje iz grafa. Primjer tablice i nacrtanog grafa u računalnom programu QtiPlot može se vidjeti na slici 2.6.



Slika 2.6: Tablica i graf u računalnom programu QtiPlot.

Na istom postolju radit ćemo još jedan eksperiment, ali za njega nam neće biti potrebno mjerenje vrijednosti induciranog napona. Naime, ispuštat ćemo magnet s određenih visina i mjeriti do koje se visine ponovno podigao. Na taj način dobit ćemo ovisnost postotka izgubljenje energije o visini s koje se magnet ispušta. Kad bi na magnet djelovale samo gravitacijska i magnetska sila, koje su konzervativne, prema zakonu o očuvanje energije, magnet bi se trebao podići na istu visinu s koje smo ga i pustili. Iz razlike u visini s koje smo pustili magnet i do koje se vratio, možemo izračunati razliku gravitacijske potencijalne energije i magnetske potencijalne energije za ta dva slučaja. Tu razliku energija očito smo "izgubili" na svladavanje sile trenja i sile otpora zraka.

Problem pri ovom mjerenju može predstavljati to što kad se magnet uzdigne do određene visine, on ponovno počinje padati tako da moramo biti vrlo oprezni prilikom promatranja i označavanja do koje visine se magnet popeo. Za označavanje može se koristiti flomaster jer se lako briše sa pleksiglasa što nam odgovara za daljnja mjerenja.

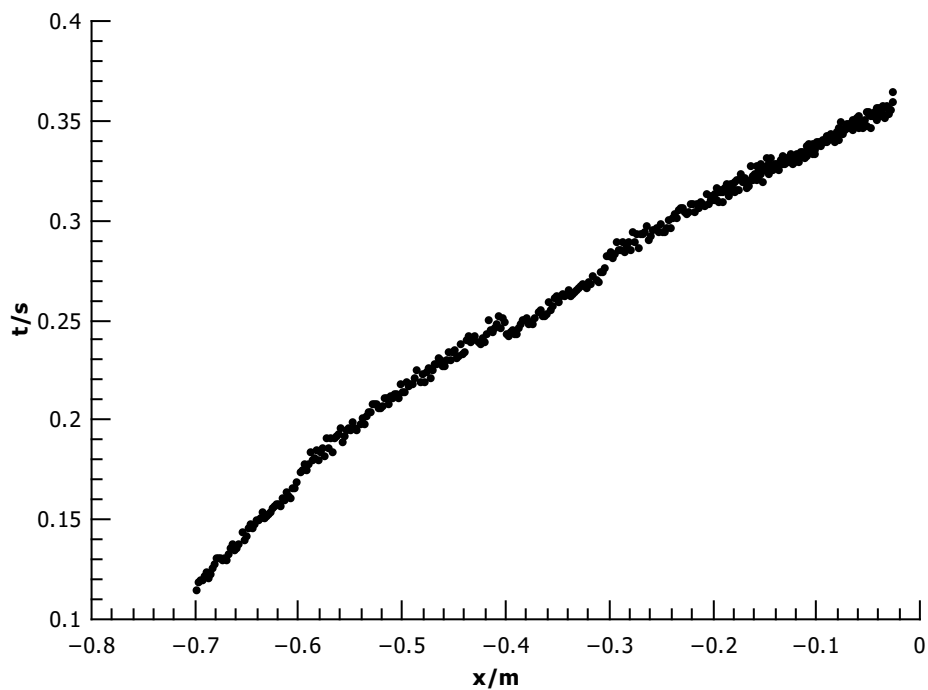
# Poglavlje 3

## Rezultati i rasprava

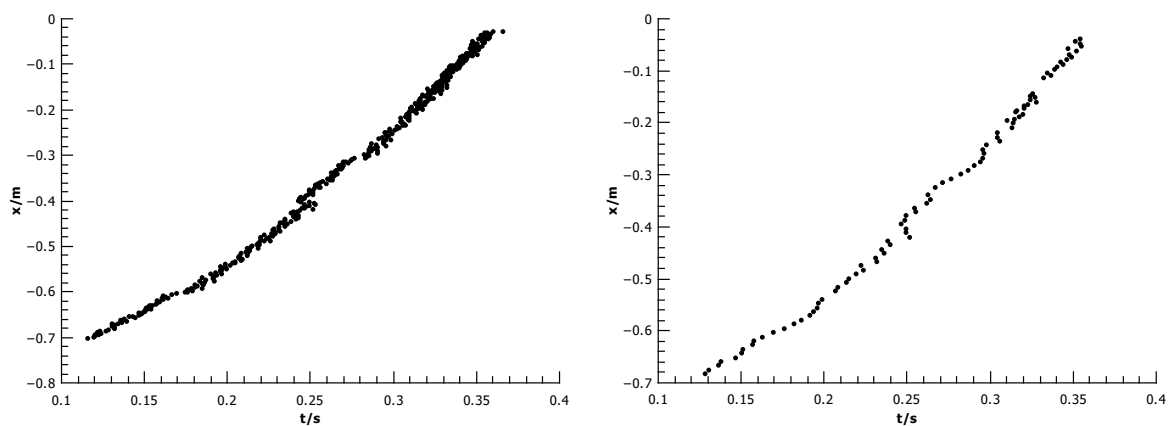
### 3.1 Kinematički opis gibanja magneta

Kao što je objašnjeno u prethodnom poglavlju, mjerenja provodimo tako da je jedan magnet fiksiran u dnu mjernog postava dok drugi ispuštamo s određene visine i iz krivulje inducirano napona očitavamo vremena prolaska magneta kroz zavojnicu. Navedeni postupak ponovili smo gotovo 300 puta, odnosno, napravili smo približno 300 različitih mjerenja. Iščitavanjem rezultata dobili smo krivulju ovisnosti vremena o udaljenosti među magnetima (slika 3.1). Uočimo da je vrijednost od  $x$  negativna što znači da smo os postavili tako da je u donjem magnetu ishodište, a smjer rasta vrijednosti  $x$  je prema dolje (prema središtu Zemlje). Ova je konvencija korištena prilikom crtanja svih grafova. Valja još naglasiti da odsad pa nadalje, kad god pričamo o udaljenosti među magnetima, govorimo o udaljenosti između njihovih središta.

Kako bi ovu ovisnost iskoristili za dobivanje brzine i ubrzanja magneta, potreban nam je  $x(t)$  graf kojeg dobijemo invertiranjem funkcije  $t(x)$ , i kojeg možemo vidjeti na slici 3.2(a). Nakon izgladivanja grafa algoritmom dobijemo malo ljepši prikaz koji možemo vidjeti na slici 3.2(b). Algoritam radi na principu usrednjavanja većeg broja točaka u jednu točku, odnosno, na principu linearne interpolacije uzimajući nekoliko okolnih točaka.



Slika 3.1: Ovisnost vremena o udaljenosti među magnetima.



(a) očitani podaci

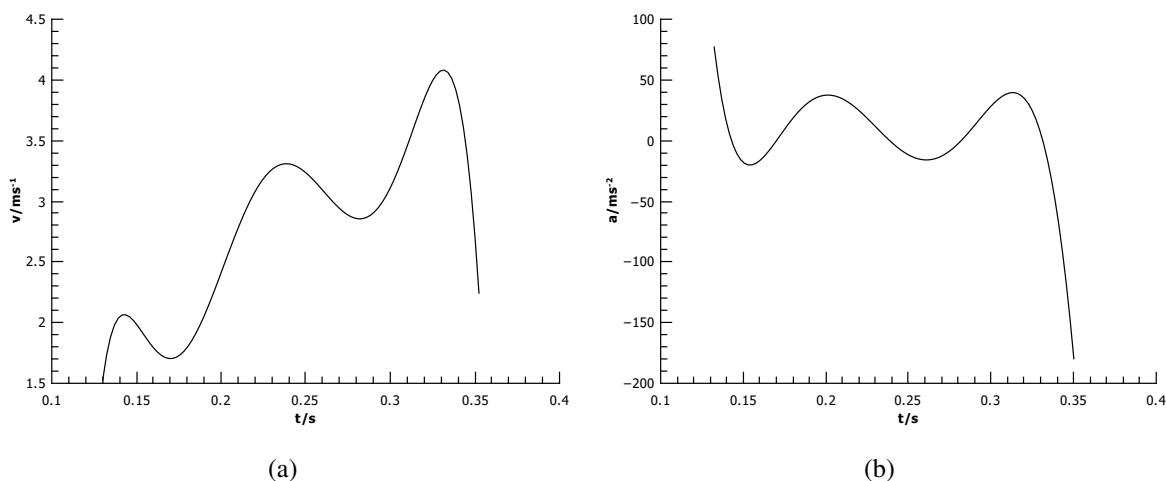
(b) izgladeni podaci

Slika 3.2: Ovisnost udaljenosti među magnetima o vremenu.

Uočimo da krivulja koju smo dobili nije glatka što znači da se mogu očekivati problemi prilikom obrade. Razlog tome je utjecaj ljudskog faktora prilikom izvođenja mjerenja. Za početak, prilikom ispuštanja magneta, poprilično je teško svaki put ispustiti magnet na isti način ne dajući mu pritom nikakvu početnu količinu gibanja, a i prilikom odmicanja ruke nakon ispuštanja magneta možemo zapeti za mjerni postav ili ga zatresti. Također, pitanje je jesu li štapovi od pleksiglasa međusobno idealno razmaknuti cijelom svojom duljinom. Ukoliko nisu, dodir između magneta i štapova neće biti cijelom duljinom isti. Za svako novo mjerenje zavojnicama mijenjamo visinu pa već samim dodirom možemo proizvesti neka neželjena pomicanja u mjernom sustavu. Nadalje, zavojnica bi svaki put trebala biti okomita na putanju magneta, a to je parametar koji je vrlo nezgodan za određivanje golim okom. I sama pomicanja zavojnica od po 1 mm nisu dovoljno precizna, ta skala bi trebala biti manja da bi se preciznije odredio položaj, a i samo mjerenje udaljenosti ravnalom nije dovoljno precizno jer zbog zavojnica oko štapova ne možemo dovoljno blizu prići magnetu. Svi ovi utjecaji koje smo nabrojili problematični su za naša mjernja i stvaraju veliki šum iz kojeg proizlaze nedovoljno precizni rezultati.

Usprkos tome, iz mjerenja se može i dosta toga iščitati i zaključiti o gibanju magneta. Ako gledamo čitav graf uočiti ćemo da je na početku riječ o jednolikom ubrzanom gibanju, a pri kraju imamo blago usporavanje. To i je ono što smo očekivali jer se u početku magnet giba jednoliko ubrzano pod utjecajem gravitacijske sile, a kako se udaljenost među magnetima smanjuje, odbojna magnetska sila počinje dolaziti do izražaja i magnet usporava. Uočimo da na nekim mjestima postoje određeni skokovi koji su posljedica očitavanja podataka sa različitih zavojnica, odnosno, očitavanja različitih signala.

Radi opisa gibanja magneta, dobivenu funkciju derivirali smo dva puta kako bi dobili  $v(t)$  i  $a(t)$  graf. Nažalost, šum je toliko velik da iz tih grafova nismo mogli gotovo ništa iščitati. No ipak smo uspjeli izvući neke rezultate i to na način da smo na  $x(t)$  graf prilagodili polinom osmog stupnja i potom derivirali da bi dobili ovisnost brzine o vremenu, a potom još jednom derivirali da bi dobili ovisnost ubrzanja o vremenu, što je prikazano na slici 3.3.

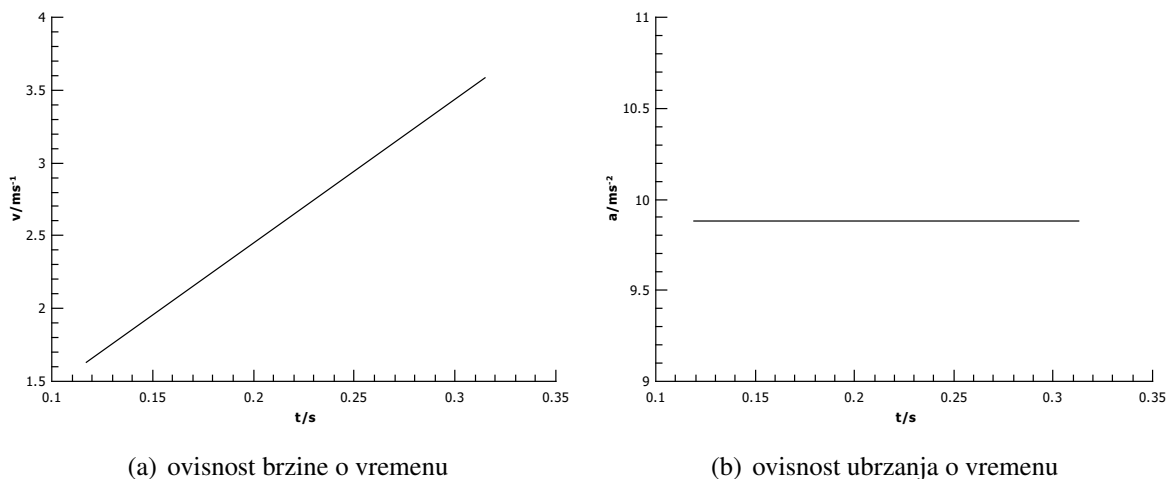


Slika 3.3: Ovisnost brzine (a) i ubrzanja (b) o proteklom vremenu.

Iako postoje lokalni maksimumi i minimumi, brzina globalno raste do otprilike 4 m/s i nakon toga počinje naglo padati. Izuzev oscilacija prilikom rasta brzine, to je ponašanje kakvo smo očekivali. To što je krivulja valovita nema nikakvu fizikalnu pozadinu, dobivene oscilacije su ništa drugo doli posljedica deriviranja polinoma. Te oscilacije odrazile su se i na krivulju  $a(t)$  pa se ubrzanje mijenja na dijelu na kojem treba biti konstantno i jednako ubrzanju Zemljine sile teže. Kad su magneti dovoljno blizu, krivulja naglo počne padati što je u skladu s našim očekivanjima. Ako pogledamo iznose ubrzanja kad su magneti blizu uočit ćemo da je ono puno veće od ubrzanja Zemljine sile teže što će reći i da je odbojna magnetska sila među magnetima puno veća od gravitacijske. Na slici 3.4 nalaze se ovisnosti brzine i ubrzanja o vremenu za interval u kojem se magnet giba samo pod utjecajem Zemljine sile teže. Uzeli smo točke u kojima su magneti dovoljno daleko da u njima ne očekujemo značajniji utjecaj odbojne magnetske sile te na njih prilagodili polinom drugog stupnja (kod jednolikog ubranog gibanja prijeđeni put ovisi kvadratično o vremenu). Prva derivacija te krivulje daje  $v(t)$  graf dok druga derivacija daje  $a(t)$  graf. Sada, iz slike 3.4(b) možemo vidjeti, a iz derivacije kvadratične prilagodbe očitati da smo za vrijednost ubrzanja Zemljine sile teže dobili:

$$a = (9.9 \pm 0.5) \text{ m/s}^2,$$

što je poprilično dobar rezultat s obzirom na sve navedene probleme.



Slika 3.4: Ovisnost brzine (a) i ubrzanja (b) o proteklom vremenu u području bez utjecaja magnetske sile.

Prema formuli:

$$F = m_m(a - g), \quad (3.1)$$

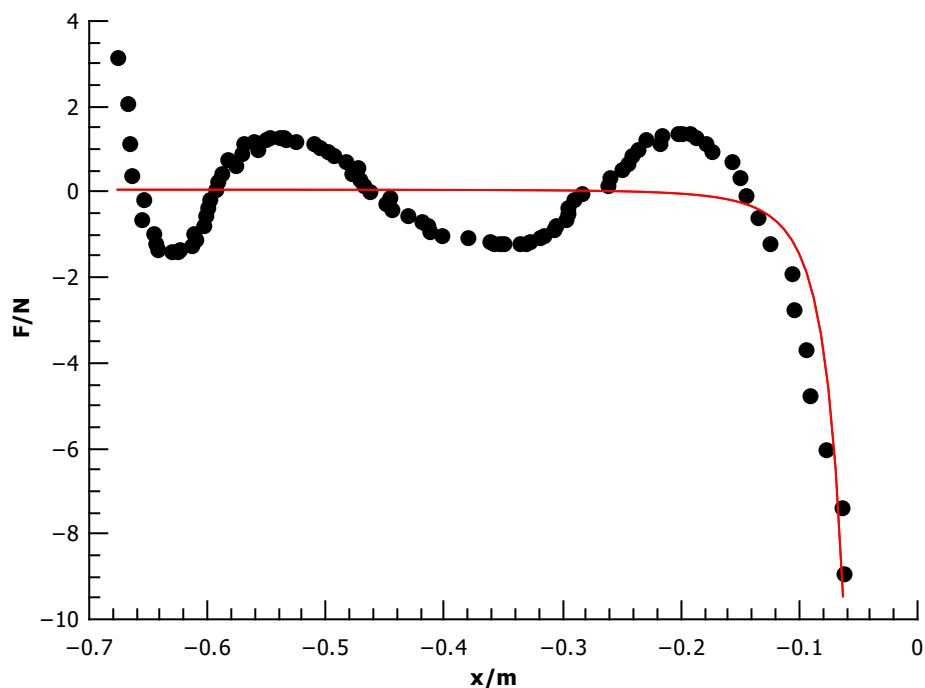
gdje je s  $m_m$  označena masa magneta, iz krivulje  $a(t)$  možemo dobiti vrijednost sile u svakom pojedinom trenutku, a zamjenom varijable  $t$  s  $x$  dobivamo ovisnost magnetske sile o udaljenosti među magnetima (slika 3.5). Crvena linija predstavlja prilagodbu funkcije za silu među dipolima:

$$F = \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi r^4}.$$

Možemo uočiti da, izuzev oscilacija za koje smo već komentirali da su posljedica deriviranja polinoma, imamo dobro slaganje između dobivenog grafa i krivulje prilagodbe. Iz očitanih parametara krivulje prilagodbe izračunali smo vrijednost magnetskog momenta:

$$m = (16 \pm 4) \text{ A}\cdot\text{m}^2.$$





Slika 3.5: Ovisnost sile o udaljenosti među magnetima.

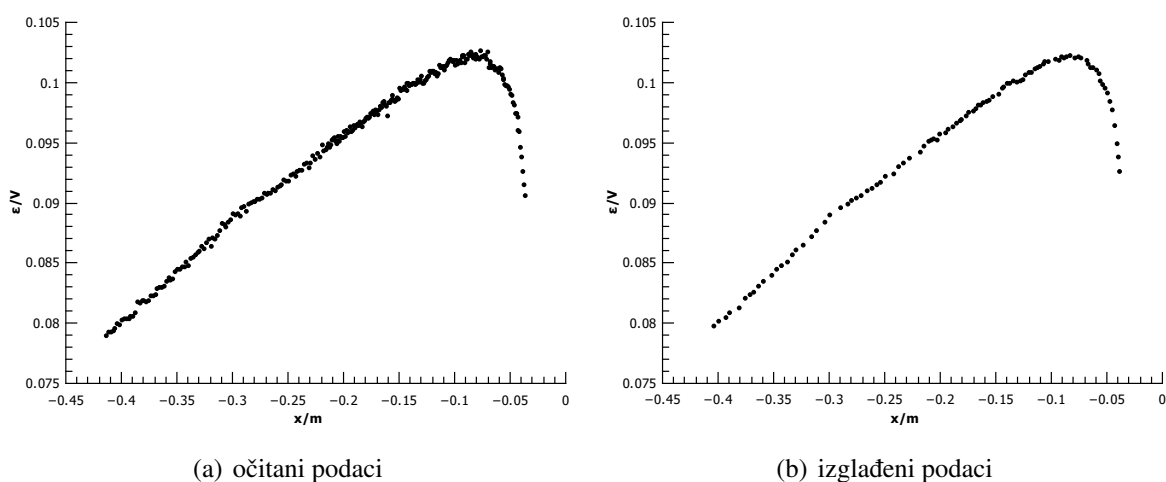
Zbog oscilacija krivulje uzrokovanih deriviranjem polinoma i zbog ne baš dobrog poklapanja krivulje s podacima pri malim udaljenostima, smatramo da dobivena vrijednost nema veliku pouzdanost.

## 3.2 Ovisnost induciranog napona o udaljenosti među magnetima

Prisjetimo se relacije 2.4 za vrijednost induciranog napona kroz zavojnicu s  $N$  navoja. Primijetimo da će u našem slučaju eventualne razlike u vrijednosti induciranog napona ovisiti jedino o brzini prolaska magneta kroz zavojnicu jer su svi ostali parametri konstantni. Drugim riječima, veći inducirani napon znači veću brzinu magneta i obrnuto, ako magnet prolazi većom brzinom kroz zavojnicu, inducirat će se veći elektromotorni napon

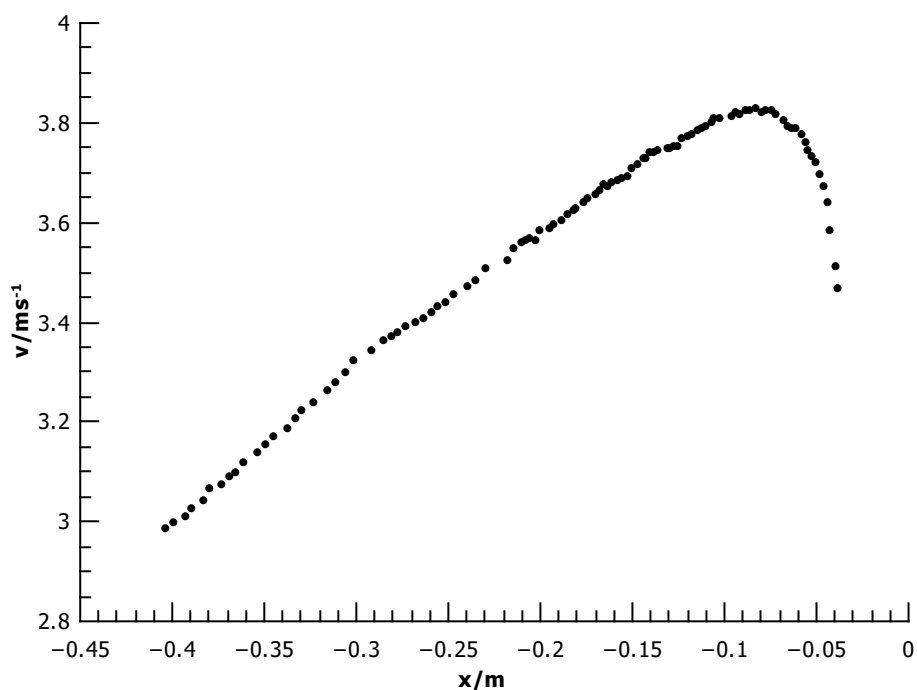
[16]. Dakle, iz očitavanja napona na različitim visinama zavojnica, možemo odrediti brzinu magneta na određenoj udaljenosti od drugog magneta.

Promatranjem vrijednosti induciranog napona na različitim zavojnicama uočeno je da se na različitim zavojnicama postavljenim na jednakim visinama (što ujedno povlači i istu brzinu magneta jer ga cijelo vrijeme puštamo s iste visine) induciraju naponi različitih vrijednosti, što znači da zavojnice nisu identične i da su ova mjerenja morala biti provedena pomoću jedne zavojnice. Odlučili smo da je najbolje analizirati rezultate na zavojnici koju smo pomicali od 0.404 m-0.027 m jer nam ona daje najviše zanimljivih informacija o gibanju magneta.



Slika 3.6: Ovisnost induciranog napona o udaljenosti među magnetima.

Kako bi se uopće moglo raditi na ovakvoj vrsti analize mjerenja, bitno je sljedeće: kao što smo zaključili da u trenutku kad je središte magneta u ravnini sa zavojnicom, inducirani napon mijenja predznak i njegova krivulja siječe os apscisa, tako i sada zaključujemo da ako je krivulja induciranog napona u maksimumu, rub magneta je u ravnini sa zavojnicom, odnosno, središte magneta je za pola njegove duljine udaljeno od zavojnice. Takav zaključak donijeli smo na osnovu sljedećeg primjera.



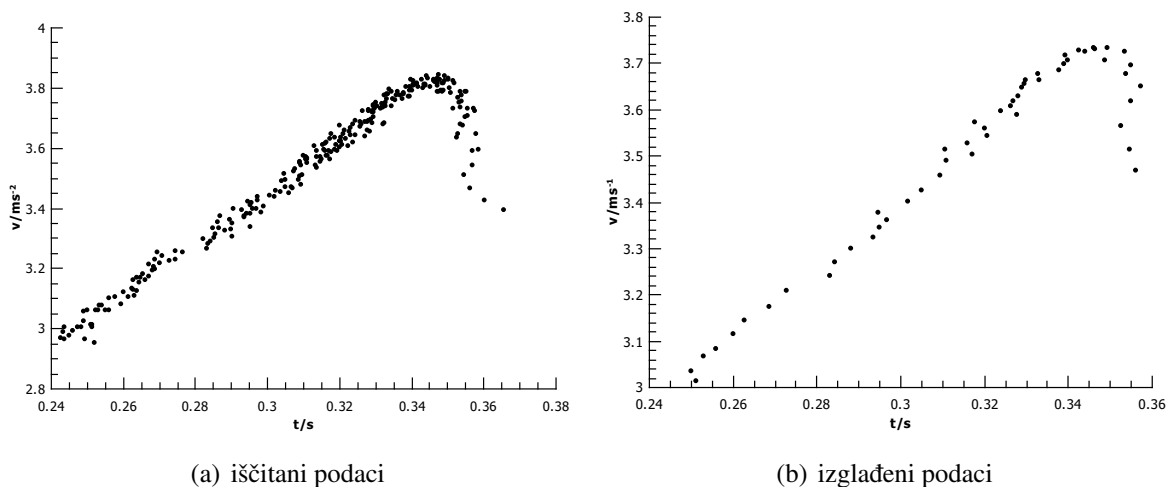
Slika 3.7: Ovisnost brzine magneta o međusobnoj udaljenosti među magnetima

Gledajmo magnet koji se približava zavojnici. Kako se njihova udaljenost smanjuje tako i vrijednost induciranog napona raste. Jednom kada donji rub magneta prođe zavojnicu, počinje rasti induciranog napon suprotnog predznaka od onog početnog što znači da se taj mora smanjivati. Dakle, maksimum induciranog napon bio je baš u trenutku kad je donji rub magneta bio u ravnini sa zavojnicom, a razlog tome je što rub magneta ima najveći gradijent magnetskog polja. Magnet se nastavlja gibati; kad je njegovo središte u ravnini sa zavojnicom graf siječe nulu, a kad je gornji rub magneta u ravnini sa zavojnicom imamo još jedan maksimum, samo suprotnog predznaka od početnog. Naravno da je, po apsolutnoj vrijednosti, iznos tog drugog maksimuma drugačiji jer je magnet prošao još neki put te pritom promijenio brzinu, i baš zbog toga prilikom očitavanja podataka iz grafa moramo biti vrlo oprezni da uvijek očitavamo vrijednosti induciranog napona istog predznaka. Očitavanje smo, kao i dosad, radili u računalnom programu QtiPlot, zumiranjem

grafa i opcijom "data reader", koja očitava podatke iz zapisa.

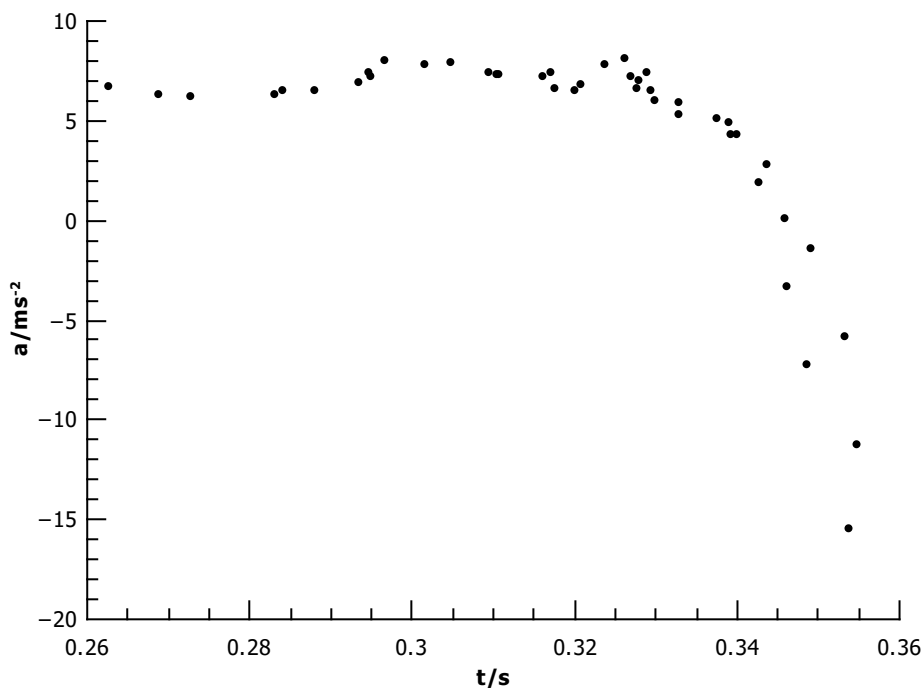
Graf ovisnosti induciranog napona o udaljenosti između magneta, koji smo dobili samo iščitavanjem podataka, možemo vidjeti na slici 3.6(a). Na slici 3.6(b) podaci su sređeni algoritmom za izgladivanje kojim nastojimo što više smanjiti utjecaj loših mjerenja na konačan rezultat.

Iz grafova možemo uočiti da vrijednost induciranog napona polako raste kako se udaljenost između magneta smanjuje, ali samo do određene točke, nakon koje se taj rast počinje smanjivati i prelazi u nagli pad. Rekli smo da su vrijednost induciranog napona i brzina magneta proporcionalne veličine pa isto ponašanje očekujemo i za  $v(x)$  graf. Do koeficijenta proporcionalnosti između brzine magneta i induciranog napona dolazimo na sljedeći način.



Slika 3.8: Ovisnost brzine magneta o proteklom vremenu.

Iz teorijskih razmatranja, očekujemo da magnetska sila među magnetima opada s četvrtom potencijom udaljenosti što znači da je na većim udaljenostima ta sila toliko mala da je možemo zanemariti. Drugim riječima, na većim udaljenostima smatramo da na magnet djeluje jedino gravitacijska sila. Ako je tome tako, onda je ubrzanje kojim se giba magnet



Slika 3.9: Ovisnost ubrzanja magneta o proteklom vremenu.

jednako upravo ubrzanju Zemljine sile teže  $g$ . Kombiniranjem izraza iz 1.33 dobije se da je brzina magneta:

$$v = \sqrt{2g(x - x_0)}, \quad (3.2)$$

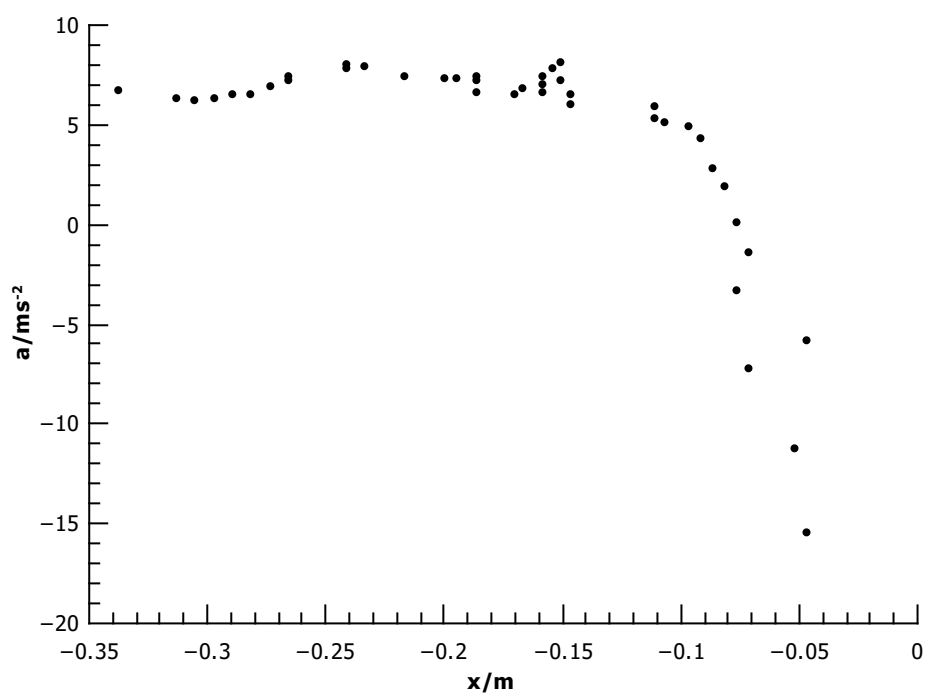
pri čemu je  $(x - x_0)$  ustvari put prevaljen u gravitacijskom polju Zemlje.

Uvrstivši odgovarajuće početne uvjete dobili smo da je brzina magneta, u točki u kojoj međusobna udaljenost magneta iznosi 0.414 m, jednaka  $v = 2.958$  m/s, a inducirani napon za tu brzinu inosi  $\varepsilon = 0.079$  V. Koeficijent proporcionalnosti brzine i induciranog napona iznosi:

$$k = \frac{v}{\varepsilon} = (37.4 \pm 0.1) \text{ms}^{-1} \text{V}^{-1}.$$

Dobivenu vrijednost provjerili smo za više mjerenja i uvjerali se u njenu konzistentnost.

Sada, do svih ostalih brzina dolazimo tako da inducirani napon u određenoj točki pomnožimo s  $k$ . Tako dobiveni graf  $v(x)$  možemo vidjeti na slici 3.7.

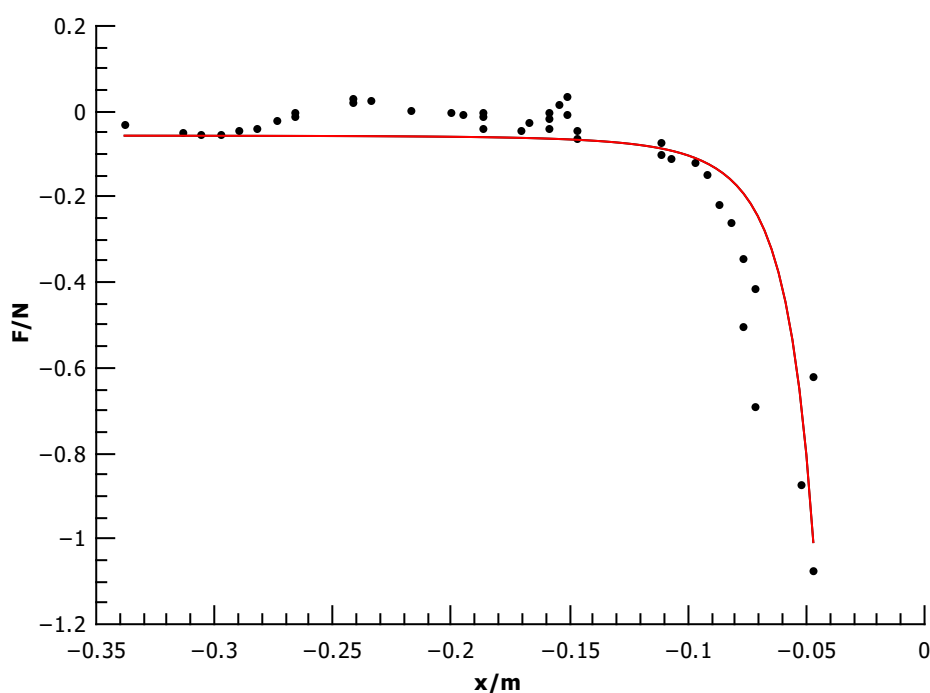


Slika 3.10: Ovisnost ubrzanja o udaljenosti među magnetima.

Rezultat se slaže s našim očekivanjima. Vidimo da brzina u početku raste linearno s konstantnim nagibom pravca, sve dok magneti ne dođu dovoljno blizu da odbojna magnetska sila počne smanjivati brzinu magneta. Da bi saznali kako se ponaša ta sila moramo doći do krivulje  $a(t)$ , a nju ćemo dobiti derivacijom funkcije  $v(t)$  do koje lako dolazimo zamjenom parametra  $x$  s  $t$  jer ovisnost  $x(t)$ , odnosno  $t(x)$  znamo otpočetak. Graf koji dobijemo zamjenom parametra  $x$  s  $t$  možemo vidjeti na slici 3.8(a). Kako taj graf izgleda nakon sređivanja prikazuje slika 3.8(b).

Nadalje, derivirajući dobiveni graf po varijabli  $t$ , dobivamo graf ubrzanja magneta u ovisnosti o proteklom vremenu, koji možemo vidjeti na slici 3.9. Zamjenom varijable  $t$

s  $x$  prikazat ćemo ovisnost ubrzanja o udaljenosti među magnetima (slika 3.10). Uočimo da ubrzanje na početku oscilira iako bi trebalo biti konstantno do trenutka dok magnetska sila ne počne značajnije djelovati. Kako se magneti približavaju, smanjuje se ubrzanje magneta koji se giba, a kad  $a$  postane negativan nastupa usporavanje. Dio na kojem smo očekivali konstantno ubrzanje je dio gdje se jako slabo osjeća utjecaj magnetske sile i na tom dijelu bi ubrzanje trebalo biti jednako  $g$ . Kroz točke za koje očekujemo takvo ponašanje povukli smo linearnu funkciju prilagodbe i za ubrzanje Zemljine sile teže dobili  $a = 7.5 \pm 0.5 \text{ m/s}^2$ , što nije dovoljno dobar rezultat, ali uzrokovan je gubitkom energije, nedovoljno preciznim mjerenjima te šumom koji nas je pratio tijekom cijelog istraživanja, a sve to prilikom deriviranja jako utječe na konačan rezultat.



Slika 3.11: Ovisnost sile o udaljenosti među magnetima.

Konačno, ovisnost sile o udaljenosti među magnetima možemo vidjeti na slici 3.11, a dobivamo je iz relacije 3.1. Crvenom linijom označena je funkcija prilagodbe za silu među

dipolima. Iz nje smo iščitali odgovarajuće koeficijente i izračunali magnetski moment. Dobivena vrijednost je:

$$m = (2.8 \pm 0.8) \text{ A}\cdot\text{m}^2.$$

Iz slike 3.11 je očito da dobivena vrijednost nema toliku pouzdanost jer bi uklanjanje samo jedne točke (one kojoj je koordinata  $x$  najbliže nuli) značajno promijenilo čitavu krivulju.

### 3.3 Sila kao gradijent magnetske potencijalne energije

Osim što silu možemo izračunati iz drugog Newtonovog zakona, ona je također negativni gradijent potencijalne energije. Vrijedi:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) = -\nabla U, \quad (3.3)$$

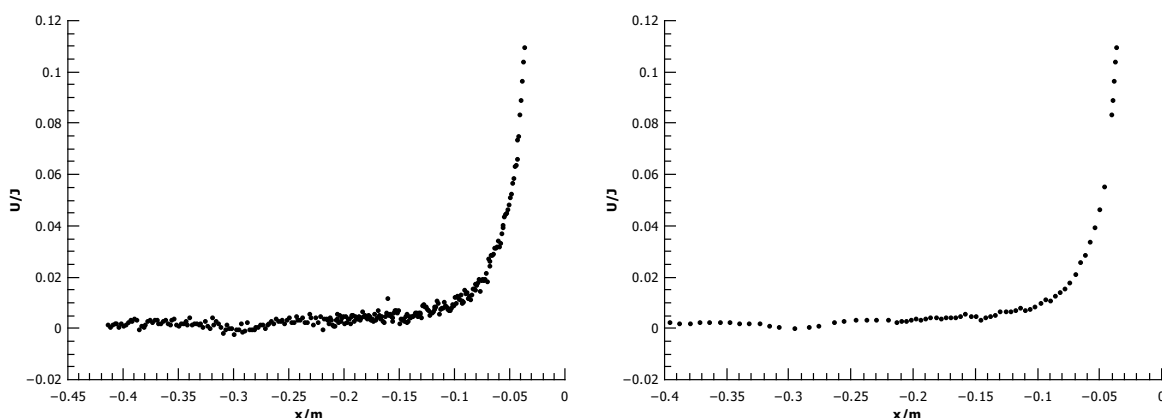
a ukoliko se gibanje odvija u jednoj dimenziji:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (3.4)$$

Ova činjenica je vrlo korisna ukoliko znamo potencijalnu energiju duž osi koju promatramo. Konkretno, u našem slučaju, ukoliko znamo magnetsku potencijalnu energiju duž cijele udaljenosti među magnetima, možemo odrediti ovisnost sile među magnetima o njihovoj udaljenosti.

Ukoliko zanemarimo energiju koju gubimo na trenje i otpor zraka, magnet u svakom trenutku ima određenu gravitacijsku potencijalnu, kinetičku te magnetsku potencijalnu energiju. Prema zakonu o očuvanju energije, zbroj iznosa tih energija mora biti konstantan u bilo kojem trenutku. To znači da ukoliko su nam poznate gravitacijska potencijalna i kinetička energija, možemo izračunati magnetsku potencijalnu energiju na svakom mjestu. Promjenu gravitacijske potencijalne energije lako izračunamo iz razlike visina magneta, a u prethodnom poglavlju smo prikazali kako ovisi brzina magneta o udaljenosti među magnetima, što znači da možemo izračunati i promjenu kinetičke energije iz promjene brzine magneta.





(a) iščitaní podaci

(b) izglađeni podaci

Slika 3.12: Ovisnost magnetske potencijalne energije o udaljenosti među magnetima.

Kao referentnu točku iznosa energije uzeli smo trenutak ispuštanja magneta u kojem ona ima samo gravitacijsku potencijalnu energiju koja iznosi

$$E_g = mgx_0, \quad (3.5)$$

pri čemu je  $x_0$  početna udaljenost među magnetima. Razliku u gravitacijskoj potencijalnoj energiji računat ćemo kao:

$$\Delta E_g = mg(x - x_0). \quad (3.6)$$

Promjenu kinetičke energije računamo prema:

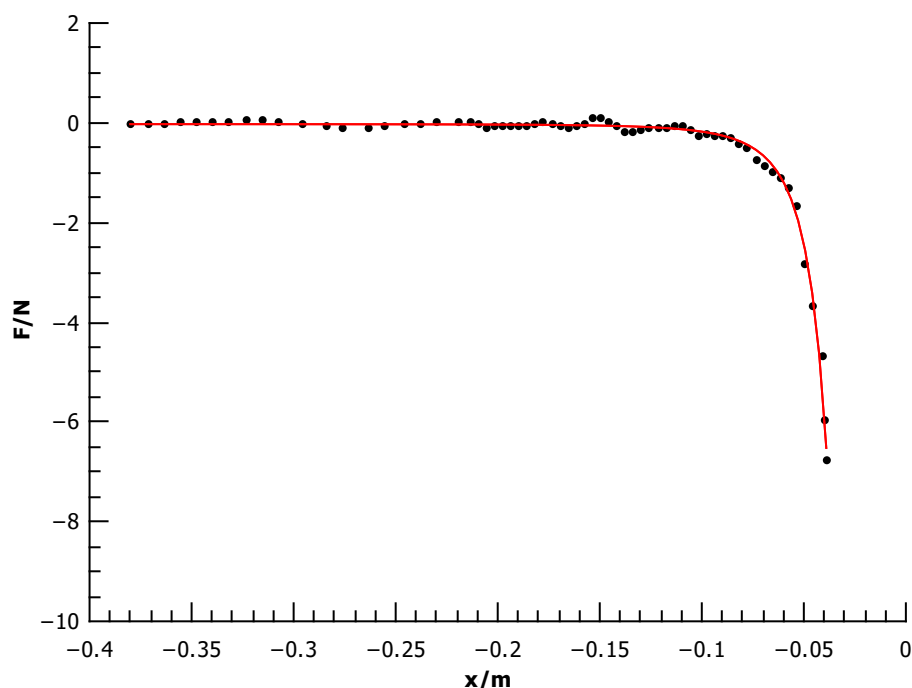
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_x^2 - v_0^2), \quad (3.7)$$

pri čemu je  $v_0$  početna brzina, a  $v_x$  brzina u točki  $x$ . No, kako je početna brzina magneta jednaka nuli tako će promjena kinetičke energije biti:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_x^2. \quad (3.8)$$

Magnetsku potencijalnu energiju (oznaka  $U$ ) definiramo tako da je jednaka nuli ako su magneti beskonačno udaljeni. U našem slučaju računat ćemo je kao:

$$\begin{aligned} U &= \Delta E_g - \Delta E_k = mg(x - x_0) - \frac{1}{2}mv_x^2 \\ &= \frac{1}{2}m(2g(x - x_0) - v_x^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$



Slika 3.13: Ovisnost sile o udaljenosti među magnetima.

Graf ovisnosti magnetske potencijalne energije o udaljenosti među magnetima, računajući magnetsku potencijalnu energiju prema relaciji 3.9, možemo vidjeti na slici 3.12(a) dok je na slici 3.12(b) isti taj graf algoritmom izgladen. Graf je u skladu s našim očekivanjima jer se na većim udaljenostima magnetska potencijalna energija kreće oko nule, a kako se magneti približavaju, magnetska potencijalna energija raste.

Kao što smo već rekli, negativna derivacija magnetske potencijalne energije dat će nam silu među magnetima, čiji graf možemo vidjeti na slici 3.13. Crvenom linijom označeno je očekivano ponašanje (sila je obrnuto proporcionalna četvrtoj potenciji udaljenosti među magnetima). Uočimo da se dobiveni rezultat vrlo dobro slaže s našim očekivanjima, uz mali šum uzrokovan nesavršenošću mjerenog postava i mjerenja.

Za kraj, iz krivulje prilagodbe dipolnom formulom (crvena linija), išitali smo koeficijente i izračunali magnetski moment. Dobiveni rezultat je:

$$m = (5.0 \pm 0.6) \text{ A}\cdot\text{m}^2.$$

### 3.4 Ravnotežni položaj i magnetski moment

Osvrnimo se još jednom na sliku 2.3 na kojoj su magneti u ravnotežnom položaju. Sile koje u tom trenutku djeluju na magnet koji lebdi su sila teža i odbojna sila između dva magneti. Te sile suprotnog su smjera, ali kako magnet miruje, prvi Newtonov zakon kaže nam da one moraju biti istog iznosa. Magnetna sila među magnetima definirana je relacijom 1.27, dok je sila teža, odnosno težina magneti, jednaka umnošku njegove mase i gravitacijske konstante  $g$ . Izjednačavanjem tih dviju sila dobivamo:

$$\begin{aligned} F_g &= F_{mag}, \\ m_m \cdot g &= \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi r^4}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

pri čemu je s  $m_m$  označena masa magneti, dok su  $m_1$  i  $m_2$  magnetski momenti. Kako su magneti napravljeni od istog materijala i jednakih su dimenzija, možemo pretpostaviti da su im magnetski momenti jednaki pa ćemo umjesto  $m_1$  i  $m_2$  pisati samo  $m$  za magnetske momente oba magneti. Sada, iz relacije 3.10 slijedi da je magnetski moment magneti jednak:

$$m = \sqrt{\frac{2\pi g r^4 m_m}{3\mu_0}}. \quad (3.11)$$

Izmjerena ravnotežna udaljenost između središta dvaju magneti iznosi 0.082 m, dok je vagom izmjerena masa magneti 0.047 kg. Uvrstimo li te brojke u relaciju 3.11, za iznos magnetskog momenta dobijemo:

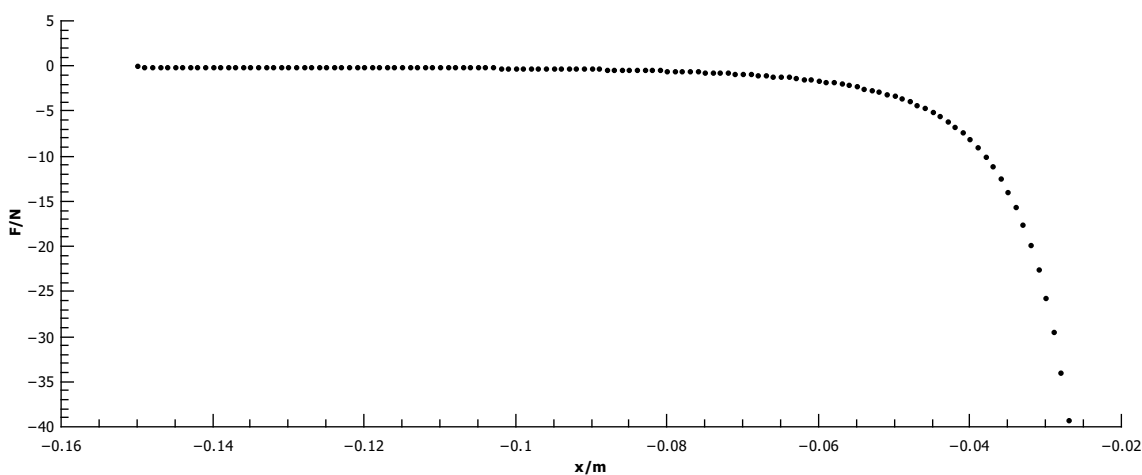
$$m = 5.89 \text{ A}\cdot\text{m}^2.$$

Za usporedbu, prisjetimo se da je vrijednost magnetskog momenta elektrona (Bohrov magneton) iznosila  $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ . Kako bi stekli još bolji dojam o iznosu magnetskog momenta magneti, vratimo se relaciji 1.3 koja kaže da je magnetski moment jednak

umnošku jakosti električne struje i površine petlje kojom ona teče. Uzimajući dimenzije našeg magneta, ispostavlja se da je iznos magnetskog momenta iste veličine kao da po obodu magneta teče struja jakosti:

$$I = \frac{m}{a} = 18758 \text{ A.}$$

Da bi uvidjeli koliko velik je taj broj, dovoljno je reći da već i struje od 50 mA mogu biti pogubne po život. Naravno, ovdje se ne radi o struji, već o spinovima elektrona na pojedinim atomima.



Slika 3.14: Ovisnost sile o udaljenosti među magnetima.

Poznavajući dimenzije magneta, možemo izračunati njihov volumen iz formule za volumen valjka ( $V = r^2\pi h$ ), što nam omogućuje da izračunamo magnetizaciju magneta prema jednadžbi 1.11. Dobiveni rezultat je :

$$M = 938590 \text{ A/m,}$$

a budući da je u našem slučaju  $\mu_0 M = 2B$  (magnetsko polje štapnog magneta dvostruko je veće u točkama duž linije na kojoj se on nalazi u odnosu na magnetsko polje njoj paralelnih linija), magnetsko polje magneta iznosi:

$$B = 0.59 \text{ T},$$

što je otprilike u skladu sa specifikacijama prezentiranim od strane proizvođača.

Kako smo iz poznate težine i ravnotežne udaljenosti izračunali magnetski moment magneteta, tako sad pomoću njega možemo izračunati silu među magnetima za bilo koje udaljenosti, i usporediti je s rezultatima dobivenim drugim metodama. Graf ovisnosti sile o udaljenosti dobiven na taj način možemo vidjeti na slici 3.14.

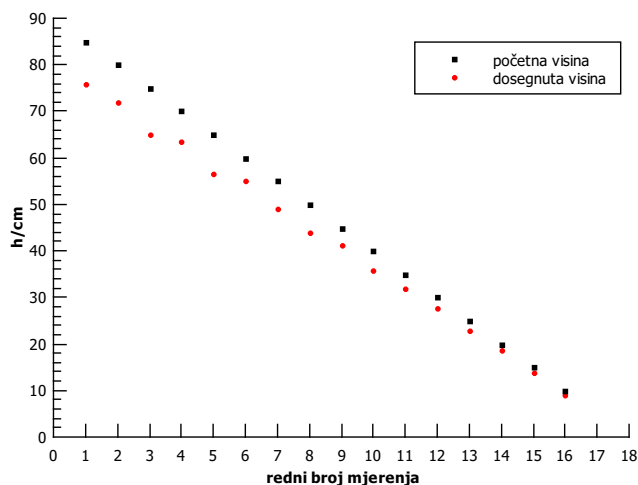
### 3.5 Gubitak energije

Ako bi na magnet koji se giba djelovale samo dvije sile, sila teža i odbojna sila među magnetima, nakon što pustimo magnet s neke visine, prema zakonu o očuvanje energije, magnet bi se trebao uspeti do iste visine s koje smo ga i pustili. Provodeći mjerenja uočili smo da to nije slučaj, što znači da postoje još neke sile koje djeluju na magnet, a to su sila trenja s vodilicama i sila otpora zraka. Dakle, dio energije magneteta prelazi u toplinu. Naravno da se energija ne može potrošiti, odnosno izgubiti, ali dio energije koji prelazi u toplinu neće se vratiti magnetu pa smo zato bili slobodni reći da gubimo energiju. Promjenu ukupne energije magneteta možemo računati iz promjene gravitacijske potencijalne energije magneteta, odnosno, iz razlike dviju visina, one s koje smo pustili magnet i one do koje se popeo. Simbolima:

$$\Delta E = E_{g2} - E_{g1} = mgh_2 - mgh_1 = mg\Delta h, \quad (3.12)$$

gdje je  $h_1$  početna, a  $h_2$  konačna visina.

Na slici 3.15 možemo vidjeti, za svako pojedino mjerenje, s koje visine smo ispustili magnet i do koje visine je on ponovno došao. Uočavamo da što je visina s koje ispuštamo manja, to je i  $\Delta h$  manji, ali to nije podatak koji nam otkriva puno, zanimljivije bi bilo pogledati postotak izgubljene energije. Omjer gravitacijske potencijalne energije na kraju i na početku govori nam koliki dio energije je sačuvan pa je dio izgubljene energije jednak  $1 - \frac{mgh_2}{mgh_1}$ , odnosno, izraženo u postocima:  $(1 - \frac{mgh_2}{mgh_1}) \cdot 100\%$ . Grafički prikaz postotka

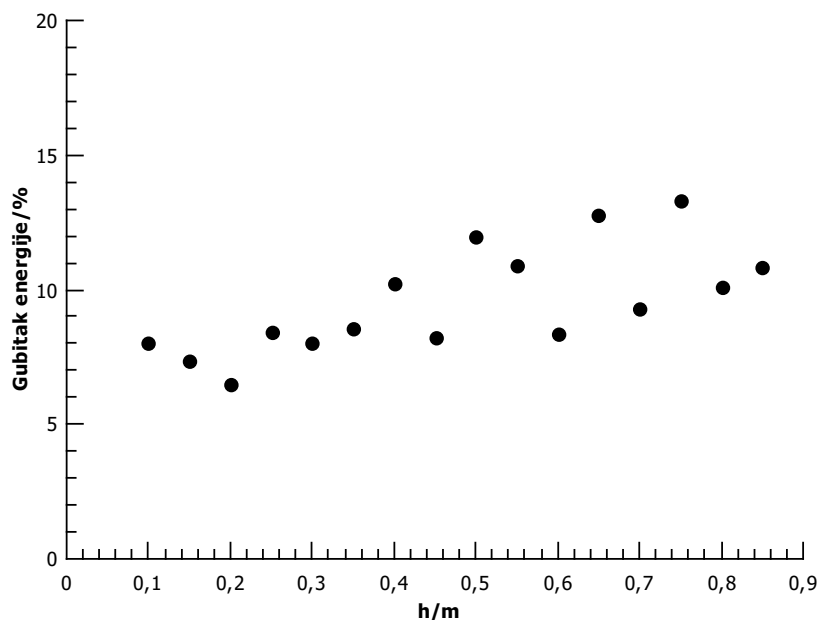


Slika 3.15: Ovisnost početne i dosegnute visine o rednom broju mjerenja.

izgubljene energije u ovisnosti o visini s koje smo pustili magnet možemo vidjeti na slici 3.16.

Uočimo da postotak izgubljene energije raste s povećanjem visine što je u skladu s očekivanjima. Naime, ako je visina s koje pustimo magnet veća, magnet će se gibati brže, a znamo da je sila otpora zraka proporcionalna kvadratu brzine. Fluktuacije u grafu proizlaze iz toga što magnet nakon uspona odmah mijenja smjer i ponovno počinje padati, a taj trenutak promjene smjera je toliko kratak da je iznimno teško toliko brzo vidjeti i zabilježiti do koje visine se magnet popeo.

No razlika u postocima za različite visine nije velika i možemo reći da se gubitak energije kreće oko 10% za sve visine s kojih smo puštali magnet. Taj dio energije otpada na zagrijavanje magneta i štapova od pleksiglasa, ali i zraka putem njegove viskoznosti. Možda se 10% ne čini puno, ali, za razinu preciznosti koju smo očekivali, itekako može imati utjecaja na rezultate mjerenja. No bez obzira na to, možemo reći da su mjere koje smo poduzeli prilikom konstrukcije mjernog postava te prilikom samih mjerenja, vrlo uspješno pridonijele tome da razinu očuvane energije zadržimo na visokoj razini.

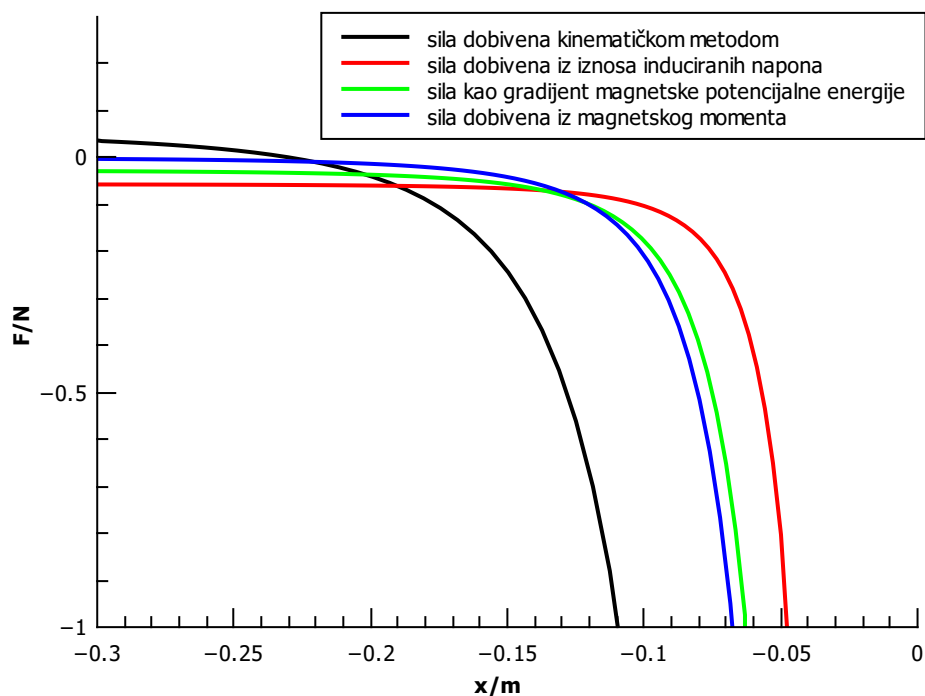


Slika 3.16: Ovisnost postotka izgubljene energije o visini ispuštanja.

### 3.6 Usporedba rezultata dobivenih različitim metodama

Na slici 3.17 možemo vidjeti krivulje sile dobivene različitim metodama. Sve četiri sile su konstantne na većim udaljenostima među magnetima i sve se kreću oko nule što vrlo dobro odgovara teorijskim očekivanjima. Najveće razlike među krivuljama su u trenucima kad se odbojna magnetska sila među magnetima počne povećavati. Uočimo da je najbolje slaganje između sile dobivene kao gradijent magnetske potencijalne energije i sile dobivene iz izračunatog magnetskog momenta, dok druge dvije malo odskaču. Sila dobivena kinematičkom metodom puno ranije počinje rasti od ostalih, a razlog tome nalazimo u fluktuacijama izazvanim deriviranjem polinoma. Sila dobivena iz iznosa induciranih napona pak kasnije počinje rasti, ali sjetimo se da je ona jako ovisila o jednoj jednoj točki koja je odskakala od ostalih tako da bi uklanjanjem te točke rezultat sigurno bio puno bliži rezultatima dobivenim drugim metodama. Podsjećamo još jednom da je iznos sile negativan jer smo na taj način definirali koordinatni sustav;  $x$ -os usmjerena je prema središtu Zemlje,

dok odbojna sila među magnetima djeluje u suprotnom smjeru.



Slika 3.17: Krivulje sile dobivene različitim metodama

Za vrijednosti magnetskih momenata dobili smo sljedeće rezultate:

- magnetski moment dobiven iz kinematičke metode:  $m = (16 \pm 4) \text{ A}\cdot\text{m}^2$ ,
- magnetski moment dobiven iz metode induciranih napona:  $m = (2.8 \pm 0.8) \text{ A}\cdot\text{m}^2$ ,
- magnetski moment iz metode magnetske potencijalne energije:  $m = (5.0 \pm 0.6) \text{ A}\cdot\text{m}^2$ ,
- magnetski moment izračunat iz ravnotežnog položaja:  $m = 5.89 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ .

Kao referentnu vrijednost magnetskog momenta uzimamo posljednju vrijednost jer smo nju dobili egzaktnim računom iz uvjeta ravnotežnog položaja, a iz nje smo također dobili vrijednost jakosti magnetskog polja koja je u skladu s onom koju proizvođač magnet



predstavlja. Možemo uočiti da je situacija ista kao i kod dobivenih sila, u najboljem slaganju su metoda ravnotežnog položaja i metoda magnetske potencijalne energije. Vrijednost dobivena iz metode induciranih napona malo se razlikuje, ali nije daleko od referentnog rezultata. Razlog opet nalazimo u točki grafa koja nije bila u skladu s ostalim točkama i koja je sigurno znatno utjecala na rezultat. Vrijednost magnetskog momenta dobivena iz kinematičke metode jako odskakače od ostalih i sa sigurnošću možemo reći da taj rezultat nije valjan, a razlog leži, kao što smo već konstatirali kod usporedbe sila, u fluktuacijama uzrokovanim deriviranjem polinoma i velikom šumu u prikupljenim podacima kako je raspravljeno ranije.

Sve u svemu, ako uzmemo u obzir sve probleme prilikom izvođenja mjerenja i obrade rezultata, možemo reći da su rezultati uglavnom konzistenti i da većinskim dijelom imamo dobro slaganje između rezultata dobivenih različitim metodama.

# Poglavlje 4

## Zaključak

Kad je riječ o magnetizmu, treba imati na umu da se radi o vrlo izazovnoj i zahtjevnoj temi, kako s teorijskog tako i s eksperimentalnog gledišta. Dobra stvar je ta što neke temeljne teze i zaključci mogu dati odgovore na puno kompleksnija pitanja. Također, problemi na mikroskopskoj razini mogu se poistovjetiti s onima na makroskopskoj, i obrnuto.

U našem istraživanju, dva permanentna neodimijska magnetna oblika valjka poistovjetili smo s dva magnetska dipola i promatrali kako se oni ponašaju u međusobnom prisustvu. Konkretno, jedan magnet smo fiksirali, a drugi smo puštali da se pod utjecajem gravitacijske sile približava prvom, fiksiranom magnetu. Polovi magnetna bili su okrenuti tako da između magnetna djeluje odbojna magnetska sila iz čega se vidi da je njen smjer suprotan smjeru gravitacijske sile što znači da će magnetska sila smanjivati ubrzanje uzrokovano gravitacijskom silom. Glavni cilj istraživanja bio je utvrditi kako ta odbojna magnetska sila ovisi o udaljenosti među magnetima. Problemu smo pristupili na više različitih načina, odnosno, korištenjem različitih metoda.

Kinematička metoda bila nam je problematična zbog neizbježnog šuma u prikupljenim podacima koji je funkciju  $x(t)$  činio vrlo teškom za deriviranje. Ipak, iako su derivacije funkcije bile valovite, globalno su pratile ponašanje u skladu s našim očekivanjima. Zbog toga krivulja sile u ovisnosti o udaljenosti među magnetima, i magnetski moment magnetna se bitno razlikuju od rezultata dobivenih ostalim metodama. No ova metoda dala je i jedan

odličan rezultat, a to je vrijednost ubrzanja Zemljine sile teže, koju smo izračunali iz dijela grafa na kojem smo očekivali da nema gotovo nikakvog utjecaja odbojne sile magneta jer su u tim točkama udaljenosti među magnetima dovoljno velike.

Metodom promatranja veličine induciranih napona, na određenim udaljenostima među magnetima, dobili smo nešto manju vrijednost magnetskog momenta od očekivane i magnetska sila počinje nešto kasnije rasti, ali tu nam problem predstavlja rasipanje nekih točaka od ostatka grafa i na taj način remeti konačan rezultat. Uklanjanjem te točke rezultat bi se dodatno približio očekivanom.

Metoda računanja sile kao gradijenta magnetske potencijalne energije i metoda promatranja ravnotežnog položaja daju vrlo slične rezultate i najbolje se slažu s našim očekivanjima. Razlog tome je što je prilikom tih mjerenja bila manja mogućnost pogreške i samim time rezultati su pouzdaniji. No, sve u svemu, uzevši u obzir određene probleme i neizbježne nepovoljne faktore, možemo tvrditi da smo s četiri različita pristupa pokazali istu ovisnost.

Za kraj napomenimo kako bi, uz malo mašte i truda, sličan eksperiment mogao naći mjesto u dodatnoj nastavi fizike u srednjim školama. Umjesto NI USB-6251 uređaja, za detektiranje prolaza magneta može se iskoristiti jednostavniji osciloskop ili zvučna kartica računala. Prednost ovakvog eksperimenta u školi je to što u svojoj izvedbi obuhvaća mnoga područja fizike, od elektromagnetizma do kinematike i Newtonovih zakona.

# Bibliografija

- [1] *How Magnets Work-History of Magnets*. <http://www.howmagnetwork.com/>.
- [2] Raymond A. Serway, Chris Vuille i Jerry S. Faughin: *College Physics*. Cengage Learning, 2008.
- [3] Edward M. Purcell: *Elektricitet i magnetizam*. Tehnička knjiga, 1988.
- [4] *Sources of Magnetic Fields*. <http://web.mit.edu/>.
- [5] David J. Griffiths: *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [6] Nicola A. Spaldin: *Magnetic Materials*. Cambridge University Press, 2010.
- [7] Hugh D. Young i Roger A. Freedman: *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics, 13th Edition*. Addison-Wesley, 2011.
- [8] Petar Kulišić i Vjera Lopac: *Elektromagnetske pojave i struktura tvari*. Školska knjiga, 1991.
- [9] *Making magnets speak: the Barkhausen effect*. <https://skullsinthestars.com/>.
- [10] Petar Popčević: *Utjecaj grebenja površine na petlje histereze amorfne trake, diplomski rad*. Fizički odsjek, PMF, SUZ, 2007.
- [11] *Inductive components*. <http://www.mtarr.co.uk/>.
- [12] Jacob Fraden: *Physics, Designs, and Applications*. Springer, 2010.

- [13] *Force between two magnetic dipoles*. <http://www.physicspages.com/>.
- [14] Nada Brković i Planinka Pećina: *Fizika u 24 lekcije*. Element, 2013.
- [15] Filip Frntić: *Kinematičko istraživanje sile među magnetima, diplomski rad*. Fizički odsjek, PMF, SUZ, 2014.
- [16] D. Amrani i P. Paradis: *Faraday's law of induction gets free-falling magnet treatment*. Physics Education, 2005. <http://iopscience.iop.org>.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu bavili smo se problemom gibanja magneta u magnetskom polju. Problemu smo pristupili eksperimentalno za što je bilo potrebno konstruirati mjerni postav. Koristili smo dva permanentna neodimijska magneta, od kojih je jedan bio fiksiran u dnu postolja, dok smo drugi puštali da s neke visine slobodno pada pod utjecajem gravitacijske sile i odbojne sile drugog magneta. Mjerenje smo provodili tako da smo pomoću vrlo preciznog voltmetra očitavali vremena prolaska magneta kroz zavojnicu. S četiri različita pristupa pokušali smo doći do istog cilja, a to je dobiti ovisnost sile među magnetima o njihovoj međusobnoj udaljenosti. Različite metode uspješno su nas dovele do gotovo istih rezultata.

# Summary

In this diploma thesis we studied moving of the magnet in the magnetic field. We wanted to investigate the problem experimentally so the measurement setup was constructed. There were two permanent neodymium magnets, one of them was fixed at the bottom of the stand, while we let other to fall freely under influence of the gravitaional force and repulsive force of the first magnet. With very precise voltmeter we measured time needed for magnet to pass through the coil. The goal was to investigate relationship between the force and distance between magnets, and four different methods successfully led us to the almost the same results.

# Životopis

Mate Pavlešić rođen je 6.5.1992. godine u Zagrebu. 1998. godine seli u Slunj gdje upisuje i završava Osnovnu školu Slunj. 2006. godine u Karlovcu upisuje srednju školu "Gimnazija Karlovac", prirodoslovno-matematički smjer. Maturira 2010. godine nakon čega upisuje Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij, Matematika i fizika; smjer:nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja redovito sudjelovao na općinskim i županijskim natjecanjima iz matematike i fizike.