Dinamički odzivi sustava s jednim stupnjem slobode

Vincek, Josip

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:169:996481

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering Repository, University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

RUDARSKO-GEOLOŠKO-NAFTNI FAKULTET

Preddiplomski studij rudarstva

DINAMIČKI ODZIVI SUSTAVA S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE

Završni rad

Josip Vincek

R4059

Zagreb, 2020.

KLASA: 602-04/20-01/151
URBROJ: 251-70-03-20-3
U Zagrebu, 06.07.2020.

Josip Vincek, student

RJEŠENJE O ODOBRENJU TEME

Na temelju Vašeg zahtjeva primljenog pod KLASOM 602-04/20-01/151, UR.BR. 251-70-12-20-1 od 05.05.2020. godine priopćujemo temu završnog rada koja glasi:

DINAMIČKI ODZIVI SUSTAVA S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE

Za voditeljicu ovog završnog rada imenuje se u smislu Pravilnika o završnom ispitu izv. prof. dr. sc. Antonia Jaguljnjak-Lazarević, izvanredna profesorica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Voditeljica

(potpis)

Izv. prof. dr. sc. Antonia Jaguljnjak-Lazarević

(titula, ime i prezime)

Predsjednik povjerenstva za završne i diplomske ispite

(potpis)

Doc. dr. sc. Želimir Veinović

(titula, ime i prezime)

Prodekan za nastavu i studente

(potpis)

Izv. prof. dr. sc. Dalibor Kuhinek

(titula, ime i prezime)

Sveučilište u Zagrebu
Rudarsko-geološko-naftni fakultet

Završni rad

DINAMIČKI ODZIVI SUSTAVA S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE

Josip Vincek

Rad izrađen: Sveučilište u Zagrebu
Rudarsko-geološko-naftni fakultet
Zavod za rudarstvo i geotehniku
Pierottijeva 6, 10 000 Zagreb

Sažetak

Razmatraju se odzivi sustava s jednim stupnjem slobode za četiri slučaja: slobodno harmonijsko gibanje s i bez prigušenja te prisilno harmonijsko gibanje s i bez prigušenja. Prikazat će se utjecaj različitih rubnih uvjeta na odziv. U radu su obrađeni matematički modeli jednostavnih sustava koji mogu imati primjenu u rudarstvu.

Ključne riječi: harmonijsko gibanje, statička kondenzacija, prigušenje, dinamički faktor, krutost, rezonancija.

Završni rad sadrži: 52 stranice, 36 slika i 5 referenci.

Jezik izvornika: Hrvatski

Završni rad pohranjen: Knjižnica Rudarsko-geološko-naftnog fakulteta, Pierottijeva 6, Zagreb

Mentor: Dr sc. Antonia Jaguljnjak - Lazarević, izv.prof. RGN fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
Ocjenjivači: Dr sc. Antonia Jaguljnjak - Lazarević, izv.prof. RGN fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
Dr. sc. Tanja Mališ, doc. RGN fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
Dr. sc. Krešimir Pavlić, doc. RGN fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Datum obrane: 10. srpanj 2020., Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagreb

Sadržaj

Popis slika III

Popis korištenih oznaka i pripadajuće SI jedinice V

1. Uvod 1

2. Vrste dinamičkog opterećenja 2

2.1. Prema ovisnosti o vremenu 2

2.2. Prema pouzdanosti 3

2.3. Modeli dinamičkih sustava 3

2.4. Zadaća dinamike konstrukcija 5

3. Matematički model 7

3.1. Općenito 7

3.2. Sustav s jednim stupnjem slobode 7

3.3. Odnos sile i pomaka 8

3.3.1. Linearno-elastični sustavi 9

3.4. Primjer 1 11

3.5. Jednadžbe gibanja-vanjska sila 12

4. Linearne oscilacije točke; sustavi s jednim stupnjem slobode 15

4.1. Slobodne neprigušene oscilacijske točke 15

4.2. Slobodne prigušene oscilacije točke 20

4.2.1. Slučaj kada je $\xi < 1$ ili slučaj „malog prigušenja“ 23

4.2.2. Slučaj kada je $\xi > 1$ ili slučaj „velikog prigušenja“ 26

4.2.3. Slučaj kada je $\xi = 1$ ili „granični slučaj prigušenja“ 27

4.2.4. Mjerenje stvarnog relativnog prigušenja u konstrukciji s jednim stupnjem slobode 27

4.3. Prisilne neprigušene oscilacije točke 28

4.4. Prisilne prigušene oscilacije točke 35

4.5. Prikaz harmonijskih prisilnih oscilacija u kompleksnom obliku 44
4.6. Periodična poremećajna sila u slučaju rotora s ekscentričnom masom 47
4.7. Izoliranje oscilacija 48
Zaključak 51
Popis literature 52

Popis slika

Slika 2-1 Harmonijske sile (Mihanović, 1995.) 2
Slika 2-2 Periodične složene sile (Mihanović, 1995.) 2
Slika 2-3 Neperiodične kratkotrajne sile (Mihanović, 1995.) 3
Slika 2-4 Neperiodične dugotrajne sile (Mihanović, 1995.) 3
Slika 2-5 Raspodijeljeni sustav (Mihanović, 1995.) 4
Slika 2-6 Diskretni sustav s koncetracijom masa (Mihanović, 1995.) 4
Slika 2-7 Diskretni sustav - izravna koncetracija (Mihanović, 1995.) 4
Slika 2-8 Diskretni sustav - posredna koncentracija (Mihanović, 1995.) 5
Slika 3-1 (a) idealizirana nadstrešnica; (b) idealizirani vodospremnik;(c)slobodne vibracije zbog početnog pomaka (Chopra, 2011.) 7
Slika 3-2 Sustav s jednim stupnjem slobode: (a) primijenjena sila p(t); (b) gibanje tla uzrokovano potresom (Chopra, 2011.) 8
Slika 3-3 Odnos sila-pomak (Chopra, 2011.) 9
Slika 3-4 Stanja proračuna krutosti (Chopra, 2011.) 10
Slika 3-5 Varijacija lateralne krutosti k (Chopra, 2011.) 11
Slika 3-6 Odnos sila- pomak (a) početni sustav; (b) lateralni pomak; (c) rotacije oko čvorova (Chopra, 2011.) 11
Slika 3-7 Jednadžba gibanja- vanjska sila (Chopra, 2011.) 12
Slika 3-8 (a) sustav; (b) komponenta krutosti; (c) prigušna komponenta; (d) komponenta mase (Chopra, 2011.) 14
Slika 4-1 Matematički model sustava s jednim stupnjem slobode (Čaušević, 2010.) 15
Slika 4-2 Grafička prezentacija odziva sustava s jednim stupnjem slobode (Čaušević, 2010.) 18
Slika 4-3 Predstavljanje sile otpora viskoznog trenja (Čaušević, 2010.) 20
Slika 4-4 Konstrukcija s jednim stupnjem slobode (a) i njen dinamički model (b) i matematički model (c) (Čaušević, 2010.) 21
Slika 4-5 Grafički prikaz slobodnih prigušenih oscilacija (Čaušević, 2010.) 25
Slika 4-6 Gibanje točke u slučaju velikog prigušenja $\xi > 1$ (Čaušević, 2010.) 26
Slika 4-7 Eksperimentalno određivanje prigušenja u konstrukciji (Čaušević, 2010.) 27
Slika 4-8 Ovisnost dinamičkog faktora o koeficijentu poremećaja (Čaušević, 2010.) 32
Slika 4-9 Prisilne oscilacije točke pri pojavi rezonancije (Čaušević, 2010.) 33

Slika 4-10 Prikaz slučaja udara (Čaušević, 2010.)..... 34
Slika 4-11 Matematički model prisilnih prigušenih oscilacija sustava s jednim stupnjem slobode (a) D'Alembertovo načelo (b) (Čaušević, 2010.)..... 35
Slika 4-12 Prisilne prigušene oscilacijske točke (Čaušević, 2010.)..... 39
Slika 4-13 Vrijednosti dinamičkog faktora μd(r, ξ) (Čaušević, 2010.)..... 40
Slika 4-14 Prikaz kuta fazne razlike γ(r, ξ) (Čaušević, 2010.)..... 43
Slika 4-15 Vektorski prikaz pomaka i svih prisilnih prigušenih oscilacija (Čaušević, 2010.)..... 44
Slika 4-16 Definicija kompleksnog broja (Čaušević, 2010.)..... 44
Slika 4-17 Rotor s ekscentričnom masom (Čaušević, 2010.)..... 47
Slika 4-18 Centrifugalna sila Φ (Čaušević, 2010.)..... 48
Slika 4-19 Rotirajući stroj na elastičnoj podlozi (Čaušević, 2010.)..... 49
Slika 4-20 Vrijednost stupnja prenosivosti TR (Čaušević, 2010.)..... 50

Popis korištenih oznaka i pripadajuće SI jedinice

m	masa	kg
k	krutost	N/m
c	viskozno prigušenje	Ns/m
u	pomak (3. poglavlje)	m
x	pomak (4.poglavlje)	m
$\dot{u}$	brzina	m/s
$\ddot{u}$	ubrzanje	m^2/s
f_S	vanjska statička sila	N
L	duljina	m
h	visina	m
E	modul elastičnosti	Pa
I_b, I_c	dinamički momenti tromosti	kgm^2
t	vrijeme	s
A	amplituda	m
f	frekvencija	Hz
T	period	s
δ	koeficijent prigušenja	Nm/s
c_{cr}	kritično prigušenje	/
ξ	relativno prigušenje	/
ω_d	kružna frekvencija slobodnih prigušenih oscilacija	1/s
r	koeficijent poremećaja	/
f_D	amplituda pomaka dinamičkog karaktera	m
γ	fazno kašnjenje	/
μ_d	dinamički faktor	/
$\bar{A}$	kompleksna amplituda	m
TR	stupanj prenosivosti	/

1. Uvod

Ovim završnim radom cilj mi je bio obuhvatiti problematiku potresnog inženjerstva i vibracija, koji nama kao rudarskim inženjerima mogu biti od iznimne važnosti prilikom miniranja, ali i samih prirodnih nepogoda, na primjer potresa.

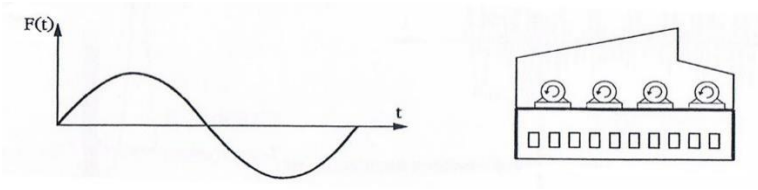
Nastojao sam problem dinamike okvirnih konstrukcija u rudnicima, iskazati preko matematičkog modela te odnosom sile i pomaka u vidu jednadžbe gibanja te ga ujedno svesti i pojednostaviti na pojmove i oznake s kojima smo se služili u sklopu Rudarsko-geološkog-naftnog fakulteta.

2. Vrste dinamičkog opterećenja

2.1. Prema ovisnosti o vremenu

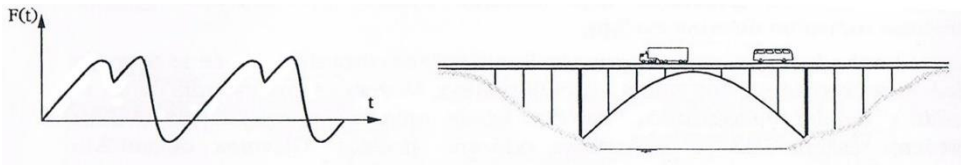
Razlikujemo sljedeće sile: (1) harmonijske sile, (2) periodične složene sile, (3) neperiodične kratkotrajne sile i (4) neperiodične dugotrajne sile. Budući da se mnoga opterećenja nalaze na granici, nije ih moguće smjestiti samo u jednu skupinu te se zato ovu podjelu ne treba striktno shvaćati.

(1) Harmonijske sile. To su sile koje uzrokuju uređaji ili strojevi koji rade na principu rotacije. Kao rezultat nesavršenosti ili uz postojanje ekscentriciteta mase iz konstrukcijskih razloga, uzročno se javljaju harmonijske inercijalne sile kao opterećenje konstrukcije na kojoj se sustav nalazi.



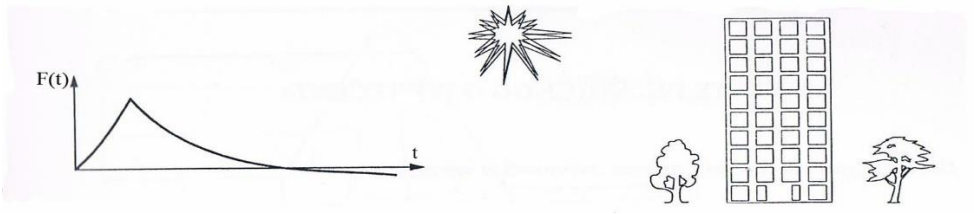
Slika 2-1 Harmonijske sile (Mihanović, 1995.)

(2) Periodične složene sile. Uzrokovane su kretanjem neke mase odnosno tijela po promatranom sustavu, primjerice vozila na mostovima, fluida u cjevovodima, gledatelja na stadionima i slično.



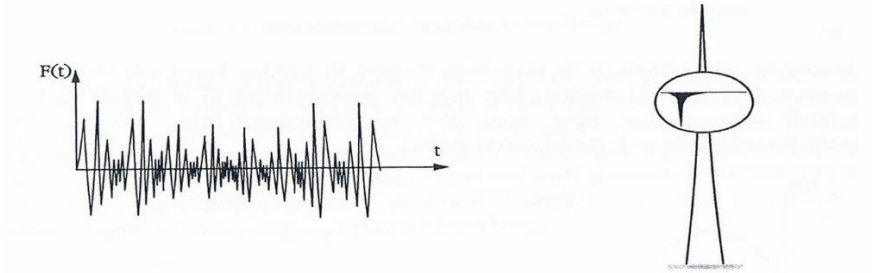
Slika 2-2 Periodične složene sile (Mihanović, 1995.)

(3) Neperiodične kratkotrajne sile. Predstavnik ove pojave su sile nastale kao posljedica eksplozija. U ovu skupinu pripadaju udari vozila kod prometnih nezgoda kao i udari vjetra ili potresa, ali kao iznimna, a ne uobičajena stanja.



Slika 2-3 Neperiodične kratkotrajne sile (Mihanović, 1995.)

(4) Neperiodične dugotrajne sile. Predstavnici ovog tipa opterećenja su sile nastale djelovanjem potresa i vjetra kad isti nemaju udarni karakter, zatim opterećenja morskih struja ili valova na obalne i izvanobalne konstrukcije.



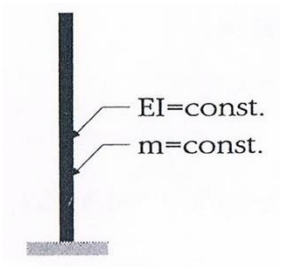
Slika 2-4 Neperiodične dugotrajne sile (Mihanović, 1995.)

2.2. Prema pouzdanosti

Dinamička opterećenja za koja gotovo sigurno znamo da će se pojaviti i kakvu će vremensku ovisnost imati nazivamo deterministčkim. Osim deterministčkih opterećenja, u stvarnosti su najčešća stohastička, ona za koje ne možemo ustvrditi kada će se dogoditi niti kakav će intenzitet imati, poput vjetra ili potresa.

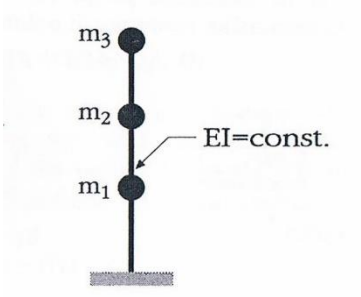
2.3. Modeli dinamičkih sustava

Dinamički sustav je okarakteriziran krutošću, tromošću i prigušenjem. Matematički modeli krutosti i tromosti opredjeljuju i model čitavog dinamičkog sustava. U slučaju raspodijeljenog tretmana krutosti i mase podrazumijeva se i raspodijeljen tretman prigušenja, pa tada govorimo o raspodijeljenom odnosno distribuiranom sustavu. U dinamičkom smislu radi se o sustavima s beskonačno stupnjeva slobode. Matematički zapis stanja gibanja dan je parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.



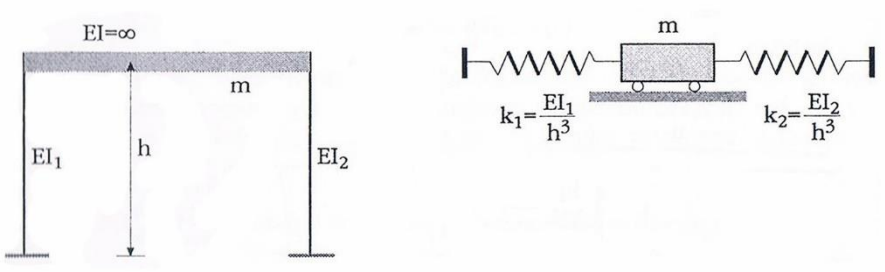
Slika 2-5 Raspodijeljeni sustav (Mihanović, 1995)

Kada se u nekom sustavu izravno koncentriraju mase u konačan broj točaka ili dijelova, kažemo da se radi o diskretnom sustavu odnosno o diskretnom sustavu s koncentriranim masama. Sustav tada ima konačan broj stupnjeva slobode gibanja koji je upravo jednak zbroju svih stupnjeva slobode gibanja pojedinačnih masa. Primjer diskretnog sustava s koncentriranim masama prikazan je slikom 2-6.



Slika 2-6 Diskretni sustav s koncetracijom masa (Mihanović, 1995.)

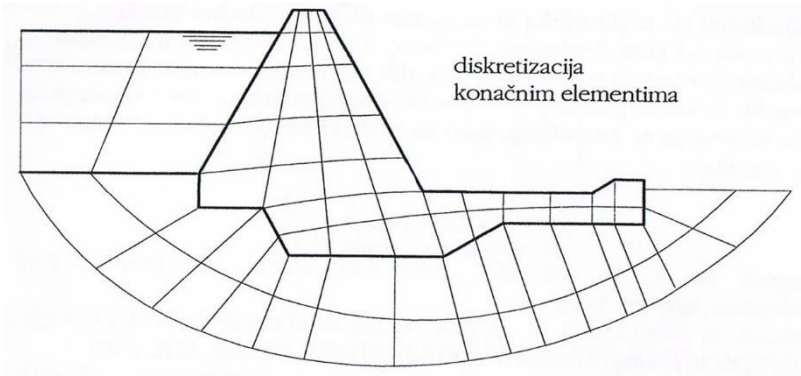
Diskretni sustav može nastati izravnom koncentracijom krutosti i masa. Koncentracija krutosti ne mijenja broj stupnjeva slobode gibanja, ali redovito pojednostavljuje sustav i njegovu analizu. Primjer izravne koncentracije krutosti i masa prikazan je slikom 2-7.



Slika 2-7 Diskretni sustav - izravna koncetracija (Mihanović,1995.)

Danas najrašireniji način diskretizacije sustava nastaje posrednom diskretizacijom krutosti i masa, kao posljedicom primjene diskretnih modela konačnih elemenata i njemu primjerenih numeričkih postupaka. Već sama diskretizacija konačnim elementima

implicira konačnost parametara krutosti i broja stupnjeva slobode gibanja sustava. Primjer diskretizacije dinamičkog sustava prikazana je slikom 2-8.



Slika 2-8 Diskretni sustav - posredna koncentracija (Mihanović, 1995.)

S gledišta geometrije prostora kojeg zauzima, dinamičke sustave možemo podijeliti na one s konačnim dimenzijama i one koji se protežu u beskonačnost. Prethodna podjela na raspodijeljene i diskretne sustave odnosila se na geometrijski konačan prostor. Međutim i sustave s beskonačnim granicama može se modelirati kao raspodijeljene ili diskretne. U diskretnim modelima simulacija beskonačnosti pomoću konačnih rubova predstavlja danas još uvijek neistraženo područje. Pojava radijacijskog prigušenja u geometrijski neograničenim sustavima postaje zapažena.

2.4. Zadaća dinamike konstrukcija

Glavna zadaća dinamike konstrukcija je nalaženje odziva promatranog dinamičkog sustava na zadane pobude. Pod odzivom podrazumijevaju se veličine pomaka, brzine i ubrzanja svake relevantne točke konstrukcije, kao i veličine deformacija, naprezanja i unutarnjih sila na svakom zadanom mjestu i u svakom zahtijevanom trenutku.

Sam zadatak se obavlja matematičkim metodama ili fizikalnim pokusima. Faze u realizaciji zadaće su:

1. prepoznavanje opterećenja kao dinamičkog u odnosu na konstrukciju,
2. određivanje vrste opterećenja i primjeren mu model praćenja odnosno nanošenja,
3. izbor primjerenog matematičkog ili fizikalnog modela konstrukcije u smislu brojeva stupnjeva slobode i prilagođenosti dinamičnoj pobudi, kako bi ju mogli dovoljno točno obuhvatiti,
4. izvršenje analize ili fizikalnog pokusa.

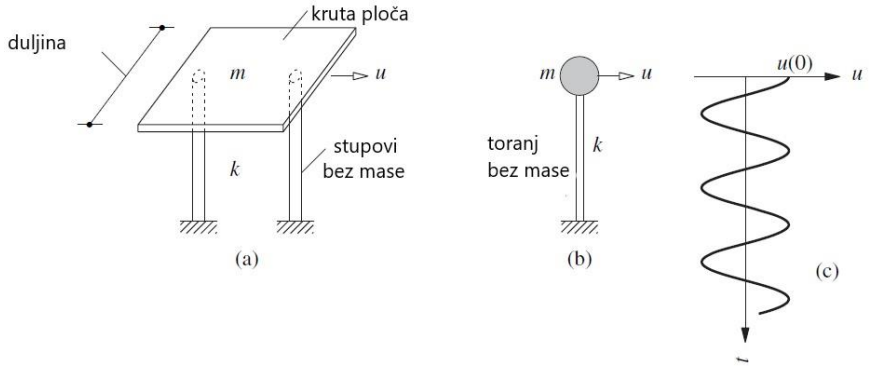
Nalaženje odziva nije najbitnija stavka, cilj je provjeriti promatrani konstrukcijski element, konstrukciju ili čak konstrukcijski koncept te povratno utjecati na izmjenu elemenata konstrukcije ili njene koncepcije.

Posljedica ovakvih mogućnosti dinamike konstrukcija su sigurne i racionalne konstrukcije, uz prihvatljiv utrošak materijalnih i umnih resursa, što je glavni zadatak inženjera.

3. Matematički model

3.1. Općenito

Jednostavni sustavi poput povišenog spremnika vode sa slike 3-1 (b) uzimaju se za matematički model iz razloga što se takve jednostavne strukture mogu idealizirati preko koncentrirane mase *m* poduprte strukturom bez mase, krutosti *k* u horizontalnom smjeru. Drugi pojednostavljeni sustav prikazan je na slici 3-1 (a) parom stupova koji pridržavaju krov. Krov je vrlo čvrst, a stupovi u potpunosti osiguravaju fleksibilnost konstrukcije u horizontalnom smjeru. Taj sustav ima koncentriranu masu *m* koja je jednaka masi prikazanog krova, dok mu je krutost *k* jednaka zbroju krutosti pojedinih stupova.



Slika 3-1 (a) idealizirana nadstrešnica ; (b) idealizirani vodospremnik ; (c) slobodne vibracije zbog početnog pomaka (Chopra, 2011.)

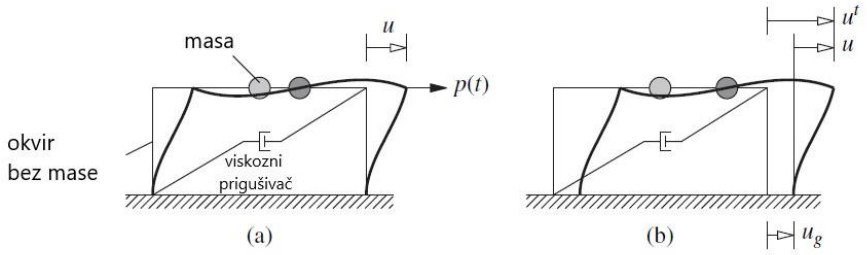
Pretpostavlja se da je horizontalni pomak tih struktura malog iznosa jer se potporne konstrukcije deformiraju unutar svoje linearno-elastične granice.

3.2. Sustav s jednim stupnjem slobode

Promatrat će se sustav na slici 3-2 koji se sastoji od mase *m* koncentrirane u razini krova te okvira bez mase koji pruža krutost *k* sustavu i viskoznog prigušivača *c* koji raspršuje vibracijsku energiju sustava. Viskozni prigušivač je element za prigušenje, a ono je mehanizam za prikaz propadanja gibanja tijekom ispitivanja slobodne vibracije neke građevine.

Ovaj sustav se može smatrati idealizacijom jednokatne strukture. Svaki konstrukcijski član stvarne konstrukcije doprinosi inerciji (masa), elastičnosti (krutosti ili fleksibilnosti) i svojstvima rasipanja (prigušivanja) energije. Međutim, u idealiziranim sustavima svako od tih svojstava je koncentrirano u tri odvojene komponente: masa, krutost i prigušenje.

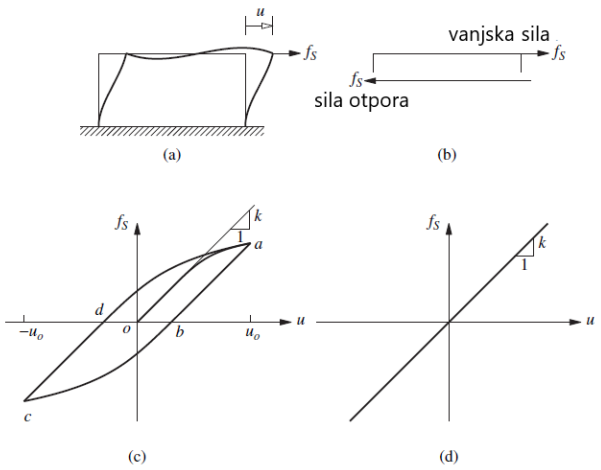
Broj neovisnih pomaka potrebnih za definiranje pomičnih položaja svih masa u odnosu na njihov početni položaj naziva se ***brojem stupnjeva slobode*** *(engl. degree of freedom)* za dinamičku analizu. Promatramo jednokatni okvir sa slike 3-2 ograničen na kretanje u smjeru sile. Problem **statičke analize** kojim bi se odredila lateralna krutost okvira se svodi na tri stupnja slobode: 1 horizontalni pomak i 2 rotacije u ležajevima. Suprotno tome, za **dinamičku analizu** konstrukcija postoji samo jedan stupanj slobode, ako je idealiziran koncentriranom masom na jednom mjestu, a to je horizontalni pomak. Razmatrat će se dvije vrste dinamičke pobude: (1) vanjska sila *p(t)* u horizontalnom smjeru (slika 3-2 (a)) i (2) gibanje tla izazvano potresom $u_g(t)$ (slika 3-2 (b)). U oba slučaja je *u* relativni pomak mase i baze konstrukcije.



Slika 3-2 Sustav s jednim stupnjem slobode: (a) primijenjena sila p(t); (b) gibanje tla uzrokovano potresom (Chopra, 2011.)

3.3. Odnos sile i pomaka

Razmatrat će se sustav (slika 3-3 (a)) bez dinamičke pobude, podvrgnut vanjskoj statičkoj sili F_S duž *u*. Unutarnja sila koja se suprotstavlja pomaku *u* jednaka je i suprotna vanjskoj sili F_s (slika 3-3 (b)). Potrebno je odrediti odnos između sile F_S i relativnog pomaka *u* povezan s deformacijama u strukturi tijekom oscilatornog gibanja. Taj odnos sila-pomak bio bi linearan kod malih deformacija, ali postao bi nelinearan kod većih deformacija (slika 3-3 (c)); uzimaju se u obzir linearni i nelinearni odnosi (slika 3-3 (c) i (d)). Standardni problem u statičkoj strukturnoj analizi je određivanje odnosa između F_s i *u*.



Slika 3-3 Odnos sila-pomak (Chopra, 2011.)

3.3.1. Linearno-elastični sustavi

Za linearni sustav odnos između sile F_S i i rezultirajuće deformacije u je linearan, tj.

$$F_s = \mathrm{k} \cdot \mathrm{u} \tag{3-1}$$

Gdje je: *k*- lateralna krutost sustava $\left[\frac{N}{m}\right]$

U jednadžbi vrijedi pretpostavka da je linearni odnos F_S-u određen za male i velike deformacije. Iz linearnog odnosa proizlazi da je sila F_S jednoznačna funkcija pomaka u. Područje djelovanja sustava je elastično, a odnos linearan, stoga koristimo naziv linearno-elastični sustav kako bi naglasili oba od svojstava.

Osvrnuvši se na stupove učvršćene na dnu sa slike 3-4 širine L, visine h, modula elastičnosti E i momenta inercije[1] oko osi savijanja = I_b i I_c za gredu, stupove, točnije: stupove učvršćene na dnu. Lateralna krutost okvira može se odrediti za dva ekstremna slučaja:

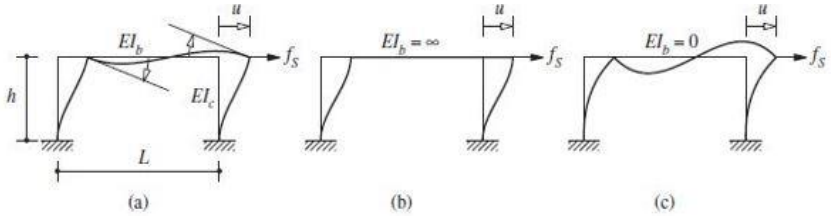
a) Sustav s izuzetno krutom gredom($EI_b = \infty$):

$$k = \sum_{stupovi} \frac{12EI_c}{h^3} \tag{3-2}$$

[1] Dinamički moment tromosti ili inercije je veličina koja pored mase ovisi i o geometrijskim svojstvima tijela. Obično su to integralni oblici koji se izračunavaju za svako tijelo neovisno o gibanju, a kao i masa mjera su otpora protiv promjene gibanja. (Jecić, 1989.)

b) Sustav s gredom bez krutosti ($EI_b = 0$)

$$k = \sum_{stupovi} \frac{3EI_c}{h^3} \tag{3-3}$$



Slika 3-4 Stanja proračuna krutosti (Chopra, 2011.)

Uzeti u obzir da je lateralna krutost za oba ekstrema krutosti grede neovisna o *L*.

Stvarna krutost okvira može se izračunati standardnim postupcima statičke strukturne analize. Matrica krutosti okvira formulirana je u odnosu na tri stupnja slobode: horizontalni pomak i dvije rotacije u ležajevima.

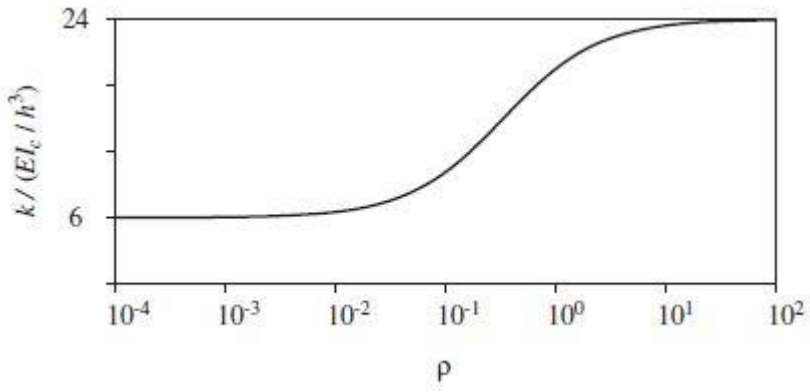
Statičkom kondenzacijom ili eliminacijom rotacijskih stupnjeva slobode, odnos bočne sile i pomaka ostaje dan jednadžbom (3-1). Primjenjujući ovaj postupak na okvir s $L=2h$ i $EI_b=EI_c$, dobije se njegova lateralna krutost:

$$k = \frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3} \tag{3-4}$$

Lateralna krutost okvira može se izračunati na sličan način za bilo koje vrijednosti I_b, I_c, L i h koristeći koeficijente krutosti za ujednačene fleksibilne elemente. Ako se zanemare bočne deformacije u elementima, rezultat se zapisuje u obliku:

$$k = \frac{24EI_c}{h^3}\frac{12\rho + 1}{12\rho + 4} \tag{3-5}$$

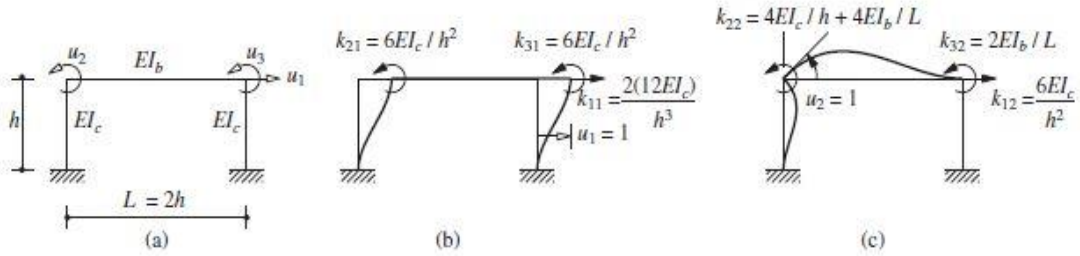
Gdje je: $\rho = \frac{EI_b}{L} \div \frac{2EI_c}{h}$ omjer krutosti od grede do stupa. Za $\rho = 0,\ \infty$ i $¼$, zadnja jednadžba se svodi na prethodne (3-2), (3-3) i (3-4). Lateralna krutost prikazana je kao funkcija ρ na slici 3-5; lateralna krutost povećava se za faktor 4 kako se ρ povećava od nule do beskonačnosti.



Slika 3-5 Varijacija lateralne krutosti k, s omjerom krutosti od grede do stupca ρ (Chopra, 2011.)

3.4. Primjer 1

Izračun bočne krutosti okvira na slici 3-6, pretpostavljajući da su elementi aksijalno kruti



Slika 3-6 Odnos sila-pomak (a) početni sustav ; (b) lateralni pomak ; (c) rotacije oko čvorova (Chopra, 2011.)

Ovaj problem je moguće analizirati bilo kojom od standardnih metoda, uključujući raspodjelu momenata. Koristit ćemo se definicijom koeficijenata utjecaja krutosti da bismo riješili problem.

Sustav ima tri stupnja slobode kao što je prikazano na slici 3-6 (a). Da bismo dobili prvi stupac matrice krutosti 3x3, ostvarujemo pomak u smjeru u_1, dok za u_2=u_3=*0*.

Uzimajući u obzir da je unutarnja sila F_S jednaka umnošku krutosti i pomaka na slici 3-6 (b) uočavamo sile k_{i1} potrebne za održavanje ovog „izmaklog“ okvira. Određuju se koristeći koeficijente krutosti za jednolični fleksibilni element.

Na slici 3-6 (c) nalaze se elementi k_{i2} u drugom stupcu matrice čvrstoće koji se određuju zadavanjem $u_2=1$ i $u_1=u_3=0$, odnosno rotacija oko jednog zgloba jednaka je jedan dok su rotacija oko drugog zgloba te horizontalni pomak jednaki nuli.

Dakle, poznata je matrica krutosti čiji se treći stupac dobije analogno slici 3-6 (c) gdje je $u_3=1$ i $u_1=u_2=0$. Za okvir s $I_b=I_c$ podvrgnut bočnoj sili F_s, je:

$$\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix}24 & 6h & 6h\\ 6h & 6h^2 & h^2\\ 6h & h^2 & 6h^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_s\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{3-6}$$

Gdje je prvi član jednadžbe $\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix}24 & 6h & 6h\\ 6h & 6h^2 & h^2\\ 6h & h^2 & 6h^2\end{bmatrix}$ - matrica krutosti, a drugi član $\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}$ - matrica pomaka koje u linearno-elastičnom odnosu daju silu $\begin{Bmatrix}F_s\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$.

Rotacije u čvorovima mogu se iskazati lateralnim pomakom, iz druge i treće jednadžbe:

$$\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}6h^2 & h^2\\ h^2 & 6h^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6h\\ 6h\end{bmatrix},\qquad u_1=-\frac{6}{7h}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{3-7}$$

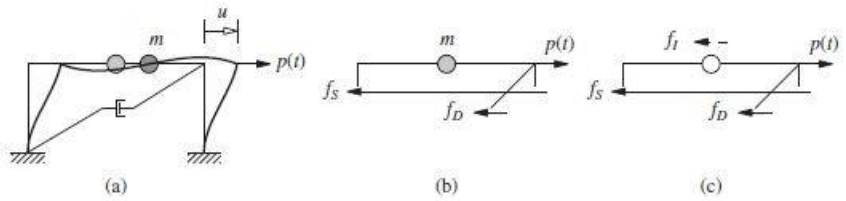
Zamjena ovog izraza u gornju jednadžbu daje:

$$F_s=\left(\frac{24EI_c}{h^3}-\frac{EI_c}{h^3}\frac{6}{7h}\langle 6h \quad 6h\rangle\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)\ u_1=-\frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3}u_1 \tag{3-8}$$

S obzirom da je riječ o **statičkoj kondenzaciji**, postupku uklanjanja rotacija čvora, dobivamo sljedeći izraz za krutost:

$$k=\frac{96}{7}\frac{EI_c}{h^3} \tag{3-9}$$

3.5. Jednadžbe gibanja-vanjska sila



Slika 3-7 Jednadžba gibanja - vanjska sila (Chopra, 2011.)

Na slici 3-7 (a) prikazan je jednokatni okvir ranije podvrgnut vanjskoj primijenjenoj dinamičnoj sili *p(t)* u smjeru *u*. Ovaj zapis znači da sila varira u vremenu.

Rezultirajući pomak mase također varira u vremenu; označava se *u(t)*. Diferencijalna jednadžba koja određuje pomicanje *u(t)* dobije se primjenom:

a) II. Newtonovog zakona kretanja

Sile koje djeluju na masu u nekom trenutku prikazane su na slici 3-7 (b). Tu spadaju vanjska sila *p(t)*, elastična (ili neelastična) otporna sila F_S i sila otpora prigušivanja F_D. Uzima se da je vanjska sila pozitivna u smjeru x-osi, kao i pomak *u(t)*, brzina $\dot{u}(t)$ i ubrzanje $\ddot{u}$(t). Prikazane su elastične sile i sile prigušenja zato što su one ujedno unutarnje sile koje se odupiru deformaciji i brzini.

Rezultirajuća sila duž osi x je p-F_S-F_D, a II. Newtonov zakon daje:

$$p - F_s - F_D = m\ddot{u}(a) \;\; ili \; m\ddot{u} + f_D + f_S = p(t)(b) \tag{3-10}$$

Nakon zamjene $F_S = ku$ i $F_D = c\dot{u}$ postaje:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{3-11}$$

Ovo je jednadžba gibanja koja upravlja pomakom *u(t)* idealiziranog sustava sa slike 3-7 (a), za koji se pretpostavlja da je linearno-elastičan, podvrgnut vanjskoj dinamičkoj sili *p(t)*.

Ova derivacija se lako može proširiti i na neelastične sustave. Jednadžba $m\ddot{u} + f_D + f_S = p(t)$ još uvijek vrijedi i sve što treba napraviti je zamjeniti $F_S = ku$, ograničenu na linearne sustave s $f_S = f_S(u)$, koja vrijedi za neelastične sustave. Zatim jednadžba glasi:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u) = p(t) \tag{3-12}$$

b) Dinamička ravnoteža

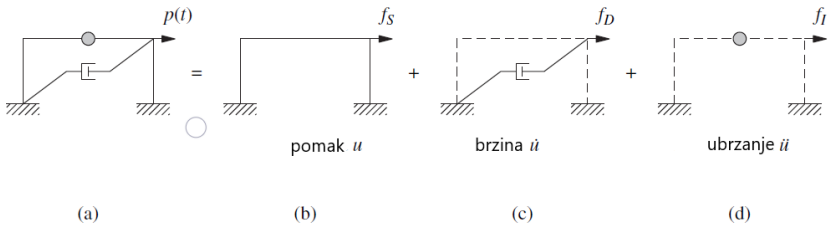
U smislu ravnoteže sila, možemo smatrati D'Alembertov princip dinamičke ravnoteže posebno privlačnim. Ovaj se princip temelji na pojmu fiktivne inercijske sile, sile jednake proizvodu mase koja je veća od njezinog ubrzanja i koja djeluje u smjeru suprotnom od ubrzanja. Sustav je u svakom trenutku u ravnoteži s uključenim silama inercije. Tako se može nacrtati dijagram

slobodnog tijela pokretne mase, a načela statike mogu se koristiti za izradu jednadžbe gibanja.

Slika 3-7 (c) je dijagram slobodnog tijela u vremenu *t* s masom zamijenjenom njegovom inercijskom silom, što je prikazano isprekidanom linijom kako bi se ta fiktivna sila razlikovala od stvarnih sila. Postavljanje zbroja svih sila jednakih nuli daje jednadžbu (3-10), koja je izvedena ranijim korištenjem II. Newtonovog zakona kretanja.

c) Krutost, prigušivanje i masne komponente

U ovom je odjeljku vladajuća jednadžba idealiziranog jednokatnog okvira formulirana na temelju alternativnog gledišta. Pod djelovanjem vanjske sile *p(t)* stanje sustava opisuje pomicanje *u(t)*, brzina $\dot{u}$(t) i ubrzanje $\ddot{u}$(t); slika 3-8 (a). Prikazujući sustav kao kombinaciju tri čiste komponente: (1) komponente krutosti: okvir bez prigušivanja ili mase (slika 3-8 (b)); (2) prigušne komponente: okvir sa svojstvom prigušivanja, ali bez krutosti ili mase (slika 3-8 (c)); i (3) komponente mase: krovna masa bez krutosti ili prigušivanja okvira (slika 3-8 (d)).



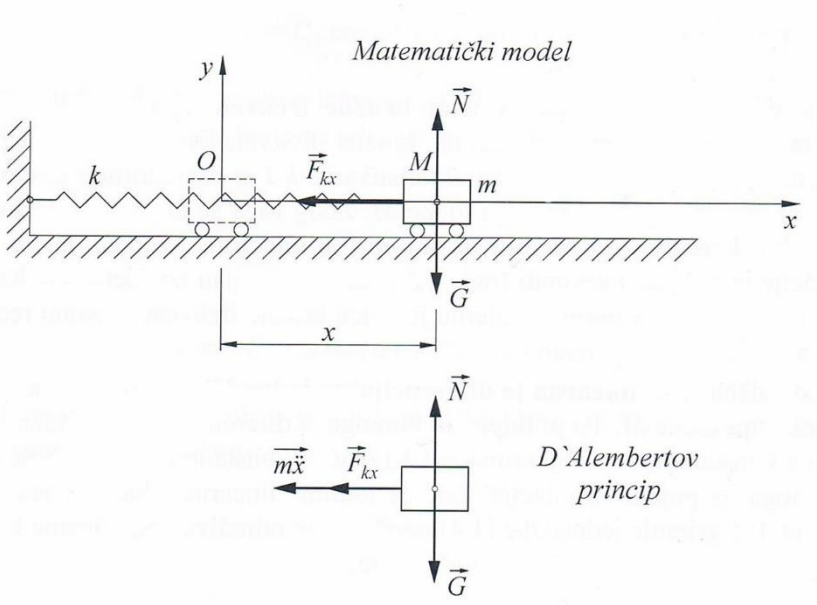
Slika 3-8 (a) sustav ; (b) komponenta krutosti ; (c) prigušna komponenta ; (d) komponenta mase (Chopra, 2011.)

Vanjska sila F_S na komponentu krutosti povezana je s pomakom $F_S=ku$, ako je sustav linearno-elastičan, vanjska sila F_D na komponentu prigušivanja povezana je s brzinom $\dot{u}$ prema $f_D = c\dot{u}$, a vanjska sila F_I na komponentu mase povezana je ubrzanjem za $f_I = m\ddot{u}$. Vanjska sila *p(t)* koja se primjenjuje na cijeli sustav može se stoga prikazati kao raspodijeljena između tri komponente konstrukcije, a $F_S + F_D + F_I$ mora biti jednako primijenjenoj sili *p(t)* koja vodi do jednakosti $m\ddot{u} + f_D + f_S = p(t)$.

4. Linearne oscilacije točke; sustavi s jednim stupnjem slobode

4.1. Slobodne neprigušene oscilacijske točke

Na vodoravnoj nepomičnoj glatkoj ravnini nalazi se točka M mase *m*, koja je u početnom položaju O vezana za nedeformiranu oprugu krutosti *k*. U istom položaju O statičke ravnoteže točke M na nju djeluju njena težina $\vec{G}$ i reakcija $\vec{N}$ idealno glatke ravnine. Te se dvije sile uzajamno poništavaju. Kada se točka M izvede iz ravnotežno položaja nekim vanjskim virtualnim poremećajem i taj poremećaj odmah ukloni, onda osim uravnoteženog sustava sila težine i reakcije na točku djeluje i elastična sila opruge (sila uspostavljanja ili restitucijska sila opruge) $\overrightarrow{Fk}$, koja nastoji točku vratiti u ravnotežni položaj O, tj. nastoji uspostaviti prvobitni položaj (Čaušević, 2010.).



Slika 4-1 Matematički model sustava s jednim stupnjem slobode (Čaušević, 2010.)

Matematički model opisuje prirodnu pojavu, a to je u ovom slučaju slobodno osciliranje tijela s jednim stupnjem slobode, jer je za definiranje položaja točke M u proizvoljnom trenutku *t* potrebno znati samo jednu koordinatu, tj. zakonitost x(t).

Vrijednost elastične sile opruge je:

$$\vec{F}_{kx} = -k \cdot \vec{x}i \qquad (4\text{-}1)$$

Diferencijalna jednadžba pravocrtnog gibanja točke M duž osi x može se napisati na dva načina:

a) Primjenom osnovnog zakon dinamike (II. Newtonov zakon)

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \tag{4-2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{4-3}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \tag{4-4}$$

b) Primjenom D' Alembertovog principa

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

Kvocijent $\frac{k}{m}$ predstavlja kvadrat kružne frekvencije slobodnih neprigušenih oscilacija. Uočava se da kružna frekvencija slobodnih neprigušenih oscilacija ovisi o prirodnim karakteristikama k i m oscilacijskog sustava, a ne ovisi o početnim uvjetima gibanja točke M. Zbog toga se ω još naziva prirodna ili vlastita kružna frekvencija slobodnih oscilacija. Jedinica mjere kružne frekvencije je radijan u sekundi ($rad \cdot s^{-1}$). Kako je radijan izvedena veličina za kut ($rad = m/m$), može se pisati za mjernu jedinicu kružne frekvencije samo recipročna sekunda (s^{-1}).

Jednadžba (4-4) linearna je diferencijalna jednadžba slobodnih neprigušenih oscilacija točke M. To je linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog stupnja s konstantnim koeficijentima k i m (znači s konstantnom vrijednošću ω^2) te se radi toga uz pojam „oscilacije“ dodaje termin „linearne“. Integriranje jednadžbe (4-4) izvršit će se određivanjem njezine karakteristične jednadžbe zamjenom $x = A \cdot e^{\lambda \cdot t}$ te je:

$$\dot{x} = A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t}$$
$$\ddot{x} = A \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$
$$\lambda^2 = -\omega^2$$

Korijeni ove karakteristične jednadžbe su:

$$\lambda_1 = i \cdot \omega$$
$$\lambda_2 = -i \cdot \omega$$

Opće rješenje (opći integral) diferencijalne jednadžbe (4-4) ima oblik:

$$x = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2 \cdot e^{-i\omega t} \tag{4-5}$$

Koristeći Eulerov obrazac:

$$e^{\pm i\omega t} = cos\omega t \pm i \cdot sin\omega t$$

Opći integral (4-5) može se napisati na sljedeći način:

$$x = A_1(cos\omega t + isin\omega t) + A_2(cos\omega t - isin\omega t)$$

$$x = (A_1 + A_2)cos\omega t + i(A_1 - A_2)sin\omega t$$

$$x = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t \tag{4-6}$$

Ovdje su C_1 i C_2 proizvoljne integracijske konstante koje se određuju prema početnim uvjetima gibanja. Pretpostavlja se da je u početnom trenutku $t_0=0$:

$$x = x_0$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega \cdot sin\omega t + C_2 \cdot \omega \cdot cos\omega t \tag{4-7}$$

Vraćanjem ovih početnih uvjeta u jednadžbe (4-6) i (4-7), dobiju se sljedeće vrijednosti integracijskih konstanti:

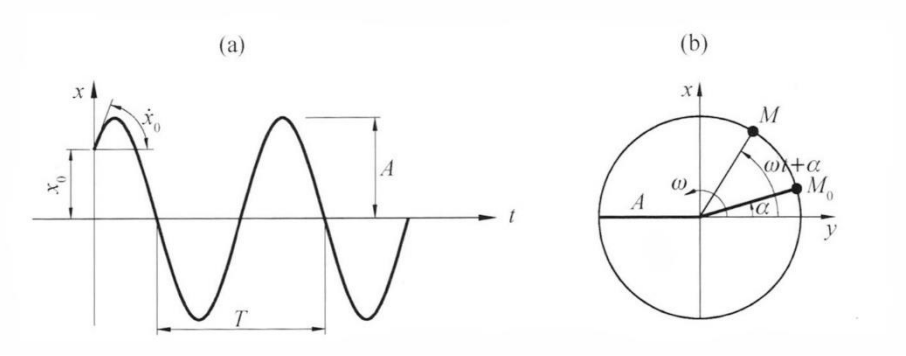
$$C_1 = x_0$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \tag{4-8}$$

pa opći integral za dane početne uvjete glasi:

$$x = x_0 cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} sin\omega t \tag{4-9}$$

Kao što se iz rješenja (4-9) uočava, gibanje točke u ovom slučaju se sastoji od dva harmonijska gibanja koja imaju iste kružne frekvencije ω, a različite amplitude. Zato se razmatrane oscilacije nazivaju i harmonijske slobodne neprigušene oscilacije točke koje su, prema obliku rješenja (4-9), moguće samo ako postoje početni uvjeti gibanja različiti od nule. Njihova grafička prezentacija dana je slikom 4-2 (a).



Slika 4-2 Grafička prezentacija odziva sustava s jednim stupnjem slobode (Čaušević, 2010.)

Dva harmonijska gibanja od kojih se sastoji jednadžba (4-9) moguće je matematički svesti na jedno harmonijsko gibanje iste kružne frekvencije ω. S tim ciljem uvesti će se dvije nove konstante A i α:

$$C_1 = A\sin\alpha$$

$$C_2 = A\cos\alpha$$

Koje će se zamijeniti u jednadžbu (4-6) i dobiti :

$$x = A\sin\alpha\cdot\cos\omega t + A\cos\alpha\cdot\sin\omega t$$

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{4-10}$$

$$y = A\cos(\omega t + \alpha)$$

Znači da je funkcija (4-10) harmonijska i periodična, a njena prezentacija je dana na slici 4-2 (b). Veličina A u jednadžbi (4-10) predstavlja amplitudu slobodnih harmonijskih oscilacija točke koja ima vrijednost:

$$A = \sqrt{(C_1^2 + C_2^2)} = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \tag{4-11}$$

Kut ($\omega t+\alpha$) u jednadžbi (4-10) naziva se fazom oscilacija točke, a kut α predstavlja faznu razliku između rezultirajućeg gibanja točke i gibanja određenog dijelom $x_0\cos\omega t$ iz rješenja (4-9) koje predstavlja primarnu komponentu u rezultirajućem gibanju. Kut fazne razlike α ima vrijednost:

$$tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega\cdot x_0}{\dot{x}_0} \tag{4-12}$$

Budući da svakoj vrijednosti tangensa odgovaraju dva kuta u granicama od *0* do *2π*, da bi se odredila vrijednost fazne razlike kuta *α* potrebno je odrediti i *sinα* i *cosα*:

$$sin\alpha = \frac{C_1}{A} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (\frac{\dot{x}_0}{\omega})^2}}$$

$$cos\alpha = \frac{C_2}{A} = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\omega^2 \cdot x_0^2 + \dot{x}_0^2}}$$

Broj prijeđenih punih ciklusa (punih rotacija) ostvarenih u jedinici vremena (sekundi) je frekvencija f, čija se vrijednost izražava u hertzima (Hz).

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{4-13}$$

Period slobodnih neprigušenih oscilacija točke T ima vrijednost:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4-14}$$

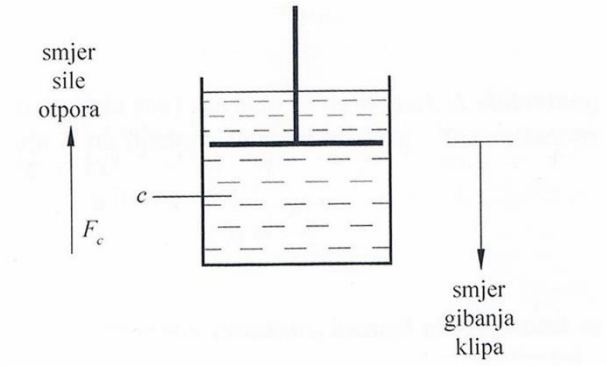
Period oscilacija *T* i kružna frekvencija *ω* ne ovise o početnim uvjetima gibanja točke. Povećanjem krutosti neke konstrukcije smanjuje se njezin period osciliranja *T* te se za sustav s malim periodom osciliranja uvodi pojam kruti sustav.

4.2. Slobodne prigušene oscilacije točke

Osim elastične sile na točku djeluje i sila otpora, koja je uvijek usmjerena suprotno od smjera gibanja točke. Postoji nekoliko vrsta sila otpora:

a) sila otpora viskoznog trenja linearna je funkciji brzine točke;
b) sila otpora suhog trenja naziva se Coulombovo trenje, a konstantnog je intenziteta;
c) sila otpora zraka pri malim je brzinama točke linearno proporcionalna brzini točke, dok je pri većim brzinama linearno proporcionalna kvadratu brzine točke;
d) sila otpora ovisna o pomaku, odnosno, generalno o stanju deformacija konstrukcije naziva se histerezna sila otpora, koja je povezana s trošenjem energije što se u konstrukciju unosi u potresu.

Ovdje će se u analizi slobodnih prigušenih oscilacija točke pretpostaviti sila otpora viskoznog trenja što se slikovito može prikazati gibanjem klipa u cilindru s tekućinom određenog viskoziteta. (Čaušević, 2010.)



Slika 4-3 Predstavljanje sile otpora viskoznog trenja (Čaušević, 2010.)

Gibanjem klipa u cilindru se stvara sila otpora, za koju kažemo da joj je intenzitet linearno proporcionalan brzini gibanja klipa, a smjer suprotan smjeru gibanja klipa. Koeficijent proporcionalnosti koji karakterizira otpor sredine, tj. otpor viskozne tekućine označit će se oznakom *c*. To je numerička konstanta i zvat će se koeficijent viskoziteta *c* ili prigušenje. U ovom slučaju sila otpora viskoznog trenja $\vec{F}_c$ ima sljedeću vrijednost:

$$\vec{F}_c = -c \cdot \dot{\vec{x}} = -c \cdot \vec{v} \tag{4-15}$$

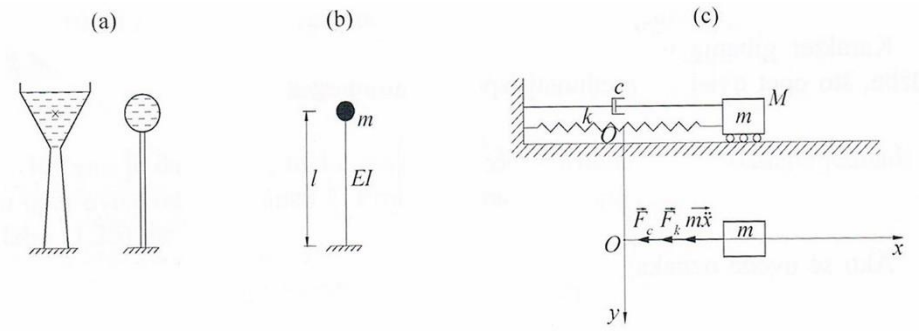
gdje je $\vec{v}$ brzina materijalne točke M.

Promatrat će se ravnoteža točke M mase *m* matematičkog modela na slici 20. (c) koji predstavlja neku realnu konstrukciju kao na slici 4-4 (a), na koju djeluju: elastična sila, sila otpora te inercijalna sila.

$$\vec{F}_k = -k \cdot x \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_c = -c \cdot \dot{x} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_{in} = -m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{i}$$



Slika 4-4 Konstrukcija s jednim stupnjem slobode (a) i njen dinamički model (b) i matematički model (c) (Čaušević, 2010.)

Primjenom II. Newtonovog zakona ili D'Alembertovog principa, kada se za koordinatni početak osi x usvoji točka O, slika 4-4 (c), koja odgovara položaju statičke ravnoteže točke M, dobije se sljedeća diferencijalna jednadžba:

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{F}_k + \vec{F}_c$$

$$m \cdot \ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \qquad (4\text{-}16)$$

Ovo je diferencijalna jednadžba slobodnih prigušenih oscilacija točke M. To je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog stupnja s konstantnim koeficijentima m, k i c, čija karakteristična jednadžba nakon smjene $x = A \cdot e^{\lambda t}$ ima sljedeći oblik:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} \cdot \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

$$x = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Karakter gibanja točke ovisi o prirodi korijena karakteristične jednadžbe, što opet ovisi o vrijednosti ispod kvadratnog korijena. Uvedemo li oznaku:

$$\frac{c}{m} = 2\delta$$

pri čemu je simbolom δ nazvan koeficijent prigušenja, posljednja diferencijalna jednadžba dobiva oblik:

$$\ddot{x} + 2 \times \delta \times \dot{x} + \omega^2 \times x = 0 \qquad (4\text{-}17)$$

Kritično prigušenje c_{cr} ona je veličina za koju je vrijednost ispod kvadratnog korijena jednaka nuli.

$$\frac{{c_{cr}}^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\omega^2 \times m \times m} = 2 \times m \times \omega \qquad (4\text{-}18)$$

Ako se uvede sljedeće obilježavanje za kvocijent stvarnog prema kritičnom prigušenju ξ

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \qquad (4\text{-}19)$$

koji se naziva relativno prigušenje, koeficijent $\frac{c}{m}$ u diferencijalnoj jednadžbi (4-16) imat će sljedeći oblik:

$$\frac{c}{m} = \frac{\xi c_{cr}}{m} = \frac{\xi \cdot 2m\omega}{m} = 2\xi\omega \qquad (4\text{-}20)$$

pa se diferencijalna jednadžba (4-16) može napisati u obliku:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (4\text{-}21)$$

Korijeni njene karakteristične jednadžbe imaju vrijednost:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2\omega^2 - \omega^2} = \omega(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \qquad (4\text{-}22)$$

Rečeno je da gibanje točke ovisi o prirodi korijena karakteristične jednadžbe, koji opet ovise od vrijednost ξ. Promatrat će se tri tipa rješenja diferencijalne jednadžbe (4-21) za:

$\xi<1$; $\xi=1$; $\xi>1$.

4.2.1. Slučaj kada je $\xi < 1$ ili slučaj „malog prigušenja“

U ovom su slučaju korijeni karakteristične jednadžbe (4-22) konjugirano kompleksni:

$$\lambda_{1,2} = \omega(-\xi \pm \mathrm{i}\sqrt{1-\xi^2})$$

pa rješenje diferencijalne jednadžbe (4-21) ima oblik:

$$x = A_1 e^{\omega\left(-\xi+\mathrm{i}\sqrt{1-\xi^2}\right)t} + A_2 e^{\omega\left(-\xi-\mathrm{i}\sqrt{1-\xi^2}\right)t} \qquad (4\text{-}23)$$

Radi skraćenja pisanja primjenjuje se prije uvedeno obilježavanje:

$$\frac{c}{m} = 2\delta = 2\xi\omega$$

te je:

$$\delta = \xi\omega$$

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} \qquad (4\text{-}24)$$

(indeks *d* je od *engl. damping*, a u skladu s praksom primijenjenom u konstrukcijskim euronormama, u kojima se za simbole i indekse koristi početno slovo određenog pojma na engleskom jeziku)

Rješenje (4-23) ima oblik:

$$x = A_1 e^{(-\delta+i\omega_d)t} + A_2 e^{(-\delta-i\omega_d)t} = e^{-\delta t}\left[A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_\delta t}\right]$$

gdje je ω_d kružna frekvencija slobodnih prigušenih oscilacija.

Ako se primjeni Eulerov obrazac ($e^{\pm i\omega_d t} = cos\omega_d t \pm isin\omega_d t$) na posljednju jednadžbu, opći integral, uz zamjenu $C_1 = A_1 + A_2; C_2 = i(A_1 - A_2)$, dobiva se u sljedećem obliku:

$$x = e^{-\delta t}(C_1 cos\omega_d t + C_2 sin\omega_d t) \qquad (4\text{-}25)$$

I ovdje su C_1 i C_2 proizvoljne integracijske konstante određene prema početnim uvjetima gibanja koji će se pretpostaviti kao i u prethodnom poglavlju:

Za $t_0=0$ je:

$$x = x_0; \dot{x} = \dot{x}_0$$

Opći integral (4-25) za zadane početne uvjete ima sljedeći oblik:

$$x = e^{-\delta t}(x_0 cos\omega_d t + \frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{\omega_d} sin\omega_d t) \quad (4\text{-}26)$$

Prema obliku rješenja (4-26) uočava se da je zakon gibanja točke određen superpozicijom dva harmonijska gibanja istih kružnih frekvencija ω_d, a različitih amplituda. Ove amplitude nisu ovdje više konstantne već ovise o vremenu, tako da se tijekom vremena smanjuju zbog člana $e^{-\delta t}$.

I ovdje će se zakon gibanja (4-26) napisati u jednostavnijem obliku uvodeći umjesto konstanti C_1 i C_2 nove integracijske konstante A i α, stavljajući:

$$C_1 = Asin\alpha;\ C_2 = Acos\alpha \quad (4\text{-}27)$$

Zamjenom ovih konstanti u opći integral (4-25) dobije se zakon gibanja točke u sljedećem obliku:

$$x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_d t + \alpha) \quad (4\text{-}28)$$

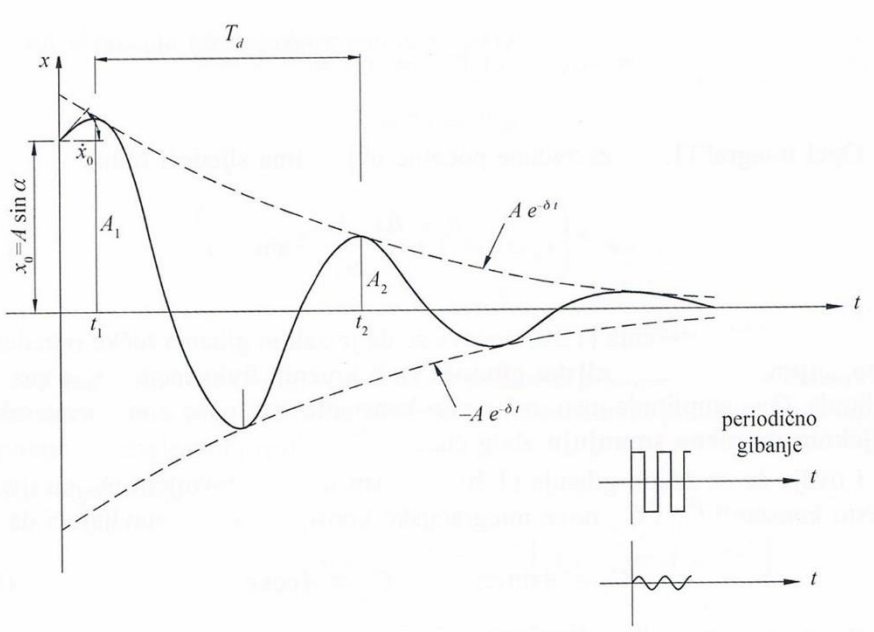
gdje je amplituda A:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\delta x_0 + \dot{x}_0}{\omega_d}\right)^2}$$

a kut fazne razlike α:

$$tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega_d x_0}{\delta x_0 + \dot{x}_0}$$

U rješenju (4-28) za slučaj prigušenih oscilacija amplitude x teže nuli kada vrijeme *t* teži beskonačnosti, slika 4-5.



Slika 4-5 Grafički prikaz slobodnih prigušenih oscilacija (Čaušević, 2010.)

Iz grafičkog prikaza ovog gibanja uočava se da je ono neperiodično jer se s vremenom maksimalni odmaci točke od ravnotežnog položaja smanjuju. Međutim, iako gibanje nije periodično, ono je harmonijsko i oscilatornog karaktera jer je funkcija sinusa harmonijska, a interval vremena koje protekne između dvije susjedne amplitude uvijek je isti i ima vrijednost T_d. Zbog toga se ovo gibanje naziva prigušeno oscilatorno gibanje.

Period slobodnih prigušenih oscilacija ima vrijednost:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \tag{4-29}$$

Vrijednosti relativnog prigušenja ovise o vrsti materijala konstrukcije i načinu ostvarivanja spojeva te se za metalne zavarene konstrukcije kreću od 2% do 4%, za metalne vijčane konstrukcije od 4% do 7%, za prednapete betonske kontrukcije od 2% do 5%, a za armiranobetonske konstrukcije od 5% do 10%.

Budući da se u ovom slučaju razmatraju „mala prigušenja“, kvadrat kritičnog prigušenja ξ^2 zanemarivo je mali u odnosu na jedinicu pa se može pisati da je :

$$T_d \cong T$$

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} \cong \omega \tag{4-30}$$

Ako se uoče dvije uzastopne amplitude sa slike 4-5, i napiše logaritam njihovog kvocijenta, dobije se: $D = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$. Taj izraz naziva se logaritamsko opadanje prigušenih

oscilacija točke. Na temelju njegove vrijednosti može se ocijeniti brzina prigušivanja oscilacija u određenoj konstrukciji. Budući da logaritamsko opadanje ovisi samo o relativnom prigušenju ξ te kada je relativno prigušenje vrlo malo logaritamsko opadanje ima vrijednost $D=2\pi\xi$.

4.2.2. Slučaj kada je ξ>1 ili slučaj „velikog prigušenja“

U ovom su slučaju korijeni (4-22) karakteristične jednadžbe realni i različiti :

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2\omega^2 - \omega^2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm m$$

Opći integral diferencijalne jednadžbe (4-21) u ovom slučaju je:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x = e^{-\xi\omega t}(A_1 e^{mt} + A_2 e^{-mt})$$

Uvođenjem zamjene: $e^{\pm mt} = ch\ mt \pm sh\ mt$

Opći integral može se napisati u obliku:

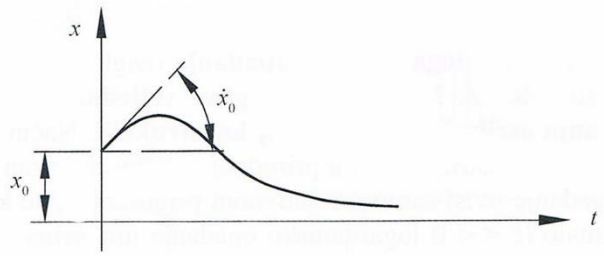
$$x = e^{-\xi\omega t}(C_1 ch\ mt + C_2 sh\ mt) \qquad (4\text{-}31)$$

gdje su:

$$C_1 = A_1 + A_2;\ C_2 = A_1 - A_2$$

proizvoljne integracijske konstante koje se određuju iz početnih uvjeta gibanja točke.

Prema rješenju (4-31) gibanje točke u ovom je slučaju aperiodično i prigušeno i nije oscilatorno. Kada vrijeme teži beskonačnosti, tada se točka M asimptotski približava položaju ravnoteže bez oscilatornog gibanja, slika 4-6.



Slika 4-6 Gibanje točke u slučaju velikog prigušenja ξ >1 (Čaušević, 2010.)

Ovaj oblik grafikona točke odgovara sljedećim početnim uvjetima:

$$x_0 > 0;\ \dot{x}_0 > 0$$

4.2.3. Slučaj kada je ξ=1 ili „granični slučaj prigušenja“

U ovom slučaju korijeni karakteristične jednadžbe su realni i međusobno jednaki:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta = -\xi\omega = -\frac{c}{c_{kr}}\omega = -\frac{c}{2m\omega}\omega = -\frac{c}{2m}$$

$$x_1 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = Ae^{-\xi\omega t}$$

Vidljivo je kako sljedeće rješenje zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (4-21):

$$x_2 = Bte^{-\xi\omega t}$$

pa opći integral diferencijalne jednadžbe (4-21) ima oblik:

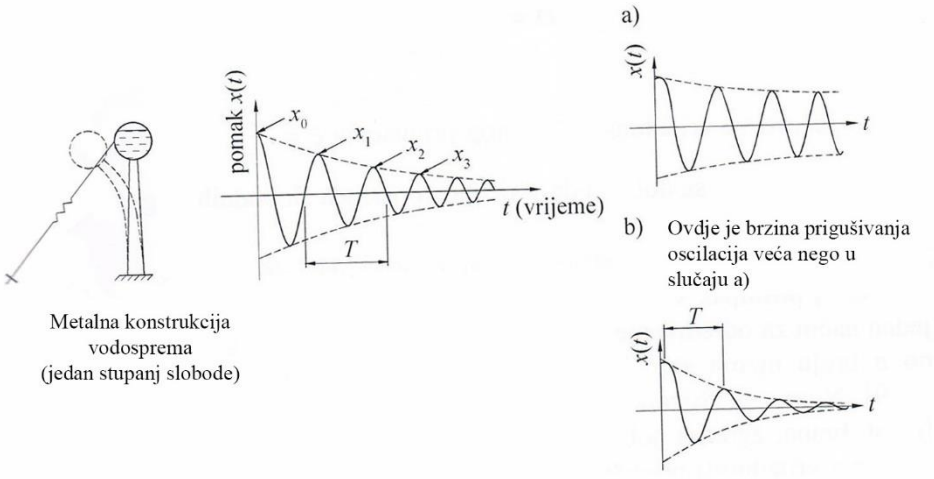
$$x = (A + Bt)e^{-\xi\omega t} \tag{4-32}$$

Gibanje točke i u ovom slučaju je neperiodično i nije oscilatorno, a grafikon ovog gibanja za iste početne uvjete ne razlikuje se suštinski od grafikona za slučaj velikog prigušenja.

4.2.4. Mjerenje stvarnog relativnog prigušenja u konstrukciji s jednim stupnjem slobode

Budući da nije moguće analitički odrediti prigušenje c (niti relativno prigušenje ξ), njegova se vrijednost određuje eksperimentalno. Ono se radi na sljedeći način:

1) pobudi se konstrukcija i izvede iz ravnotežnog stanja u stvarni oblik osciliranja nekim poremećajem, pa se taj poremećaj ukloni,
2) na posebnom se uređaju registrira slobodno osciliranje konstrukcije i na taj način se dobije dijagram x(t) sa slike 4-7,



Slika 4-7 Eksperimentalno određivanje prigušenja u konstrukciji (Čaušević, 2010.)

3) iz tako dobivenog dijagrama računa se logaritamsko opadanje, pri čemu se dobije točniji rezultat ako se međusobno podijele amplitude x_i i x_{i+j} ,gdje je j>3;

$$D = \frac{1}{j} ln \frac{x_i}{x_{i+j}} = 2\pi\xi$$

4) računa se vrijednost relativnog prigušenja $\xi = \frac{D}{2\pi}$,

5) mjerenjem se dolazi do vrijednosti perioda slobodnih prigušenih oscilacija $T \cong T_d$.

4.3. Prisilne neprigušene oscilacije točke

Analizirat će se oscilacije točke M mase *m* po vodoravnoj glatkoj ravnini na koju djeluju:

- sila elastičnosti opruge $\vec{F}_k = -k \cdot x\vec{\imath}$,
- inercijska sila $\vec{F}_{in} = -m \cdot \ddot{x} \cdot \vec{\imath}$,
- vanjska poremećajna sila $\vec{F}_\Omega$ uslijed npr. rada nekog stroja s ekscentrom.

Primjenom D'Alembertovog principa može se napisati:

$$\vec{F}_\Omega + \vec{F}_k + m\vec{\ddot{x}} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = F_\Omega$$

U ovoj analizi će se pretpostaviti da je vanjska poremećajna sila periodična funkcija vremena i da se mijenja po harmonijskom zakonu:

$$F_\Omega = F_0 \sin(\Omega t + \beta) \qquad (4\text{-}33)$$

Gdje je: F_0 amplituda,

Ω kružna frekvencija,

(Ωt+β) faza, a β početna faza poremećajne sile.

I ovdje je početak O koordinatne osi O-x usvojen u položaju statičke ravnoteže točke M. Na temelju D'Alembertovog principa ili na temelju osnovnog zakona dinamike je:

$$m\ddot{x} = F_\Omega - kx$$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t + \beta)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h sin(\Omega t + \beta) \qquad (4\text{-}34)$$

pri čemu je uvedeno sljedeće obilježavanje:

$$h = \frac{F_0}{m} \tag{4-35}$$

Diferencijalna jednadžba prisilnih neprigušenih oscilacija točke (4-34) je linearna nehomogena diferencijalna jednadžba drugog stupnja s konstantnim koeficijentima. Njezin opći integral jednak je zbroju integrala homogene jednadžbe x_h i partikularnog integrala nehomogene jednadžbe x_p.

$$x = x_h + x_p$$

$$x_h = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t$$

Partikularni integral za slučaj $\omega \neq \Omega$ tražit će se u obliku u kojemu je i funkcija poremećajne sile.

$$x_p = Csin(\Omega t + \beta) \tag{4-36}$$

gdje je *C* nepoznata konstanta.

$$\ddot{x}_p = -C\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \tag{4-37}$$

Zamjenom (4-36) i (4-37) u diferencijalnu jednadžbu (4-34) dobije se konstanta *C*.

$$C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{4-38}$$

Konstanta *C* ne ovisi o početnim uvjetima gibanja. Sada se opće rješenje diferencijalne jednadžbe (4-34) može napisati u sljedećem obliku:

$$x = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \beta) \tag{4-39}$$

ili u obliku:

$$x = Asin(\omega t + \alpha) + Csin(\Omega t + \beta) \tag{4-40}$$

To rješenje (4-40) predstavlja zbroj dvaju harmonijskih gibanja, različitih amplituda, različitih kružnih frekvencija i različitih faza. Proizvoljne integracijske konstante C_1 i C_2 u rješenju (4-39) odredit će se iz početnih uvjeta gibanja. Za $t=t_0=0$ je:

$$x = x_0$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \tag{4-41}$$

Ako se ovi početni uvjeti gibanja zamjene u jednadžbu (4-39), dobije se:

$$x_0 = C_1 + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} sin\beta; \;\; \dot{x}_0 = \omega C_2 + \frac{\Omega h}{\omega^2 - \Omega^2} cos\beta$$

$$C_1 = x_0 \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} sin\beta;\ \ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} cos\beta$$

pa se za jednadžbu gibanja (4-39) i početne uvjete (4-41) dobiva sljedeće konačno rješenje:

$$x = x_0 cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} sin\omega t - \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\left(sin\beta cos\omega t + \frac{\Omega}{\omega} cos\beta sin\omega t\right) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \beta) \tag{4-42}$$

Iz jednadžbe (4-42) slijedi da je rezultirajuće gibanje točke određeno superpozicijom:

1) slobodnih neprigušenih oscilacija točke prema zadanim početnim uvjetima gibanja (prva dva člana rješenja),
2) neprigušenih oscilacija koje imaju prirodnu kružnu frekvenciju ω, ali su rezultat djelovanja poremećajne sile,
3) i čisto prisilnih oscilacija (posljednji član rješenja).

U stvarnim uvjetima postoje sile otpora pa se slobodne oscilacije vrlo brzo amortiziraju (prigušuju) i nemaju utjecaja na rezultirajuće gibanje, kako je prikazano prije. Znači da primarnu važnost imaju prisilne oscilacije (3) u rješenju (4-42), koje se ne prigušuju niti pri postojanju sile otpora. Detaljno će se poručiti ovisnost amplitude prinudnih oscilacija od frekvencije Ω poremećajne sile.

Dio (3) rješenja (4-42) nazvano je „ustaljene“ oscilacije (*engl. steady-state response*), jer se zapravo na njih svodi problem prisilnih neprigušenih oscilacija, tj. osciliranje materijalne točke „ustali“ se po zakonitosti danoj dijelom (3) rješenja (4-42).

Uvođenjem obilježavanja f_s za statičko izduženje opruge nastalo djelovanjem konstante poremećajne sile, npr. sile F_0, iz uvedenog obilježavanja (4-35) dobije se:

$$F_0 = mh = kf_s$$

odakle je:

$$f_s = \frac{mh}{k} = \frac{h}{\omega^2} \tag{4-43}$$

Sada partikularni integral (4-36), tj. posljednji dio rješenja (4-42) ima sljedeći oblik:

$$x_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\sin(\Omega t + \beta) = \frac{\frac{h}{\omega^2}}{1 - (\frac{\Omega}{\omega})^2}\sin(\Omega t + \beta)$$
$$= \frac{f_s}{1 - (\frac{\Omega}{\omega})^2}\sin(\Omega t + \beta) \quad (4\text{-}44)$$

Kvocijent frekvencije poremećajne sile Ω i prirodne ili vlastite kružne frekvencije slobodnih oscilacija ω naziva se koeficijent poremećaja (*engl. frequency ratio*), koji će se obilježiti oznakom *r*:

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \quad (4\text{-}45)$$

Imajući u vidu uvedena obilježavanja (4-43) i (4-45) partikularni integral (4-44) dobiva sljedeći oblik:

$$x_p = \frac{f_s}{1 - r^2}\sin(\Omega t + \beta) = f_d \sin(\Omega t + \beta) \quad (4\text{-}46)$$

gdje je f_d amplituda pomaka kada je vanjska sila dinamičkog karaktera. Kvocijent maksimalnih amplituda pomaka pri dinamičkom (f_d) i statičkom (f_s) djelovanju poremećajne sile naziva se dinamički faktor (*engl. dynamic factor*) i obilježava se oznakom μ_d:

$$\mu_d = \frac{f_d}{f_s} = \frac{1}{1 - r^2} \quad (4\text{-}47)$$

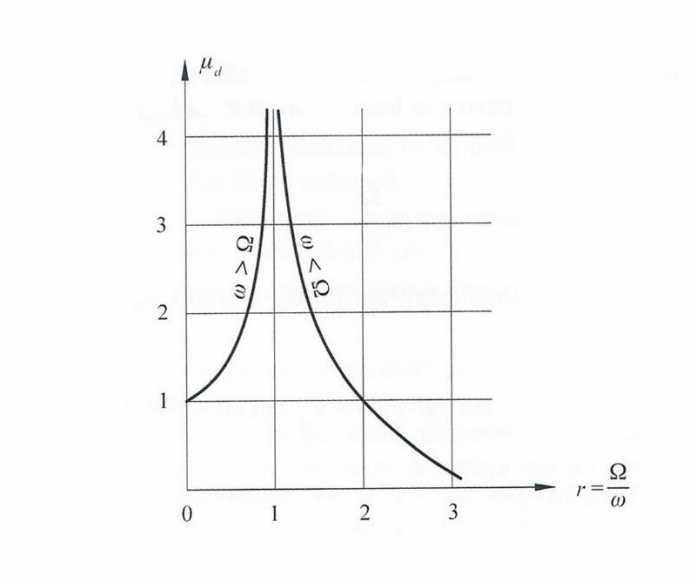
U (4-46) pretpostavlja se da je r<1. Za slučaj kada je r>1, dinamički faktor (4-47) postaje:

$$\mu_d = \frac{1}{r^2 - 1}, r > 1 \quad (4\text{-}48)$$

Sada izraz za partikularni integral ima sljedeći oblik:

$$x_p = \mu_d f_s \sin(\Omega t + \beta) \quad (4\text{-}49)$$

Veličina amplitude prisilnih oscilacija ovisi o dinamičkom faktoru μ_d, koji je funkcija koeficijenata poremećaja *r* prema dijagramu na slici 4-8.



Slika 4-8 Ovisnost dinamičkog faktora o koeficijentu poremećaja (Čaušević, 2010.)

Iz slike se uočava da se pri povećanju kružne frekvencije poremećajne sile Ω od $\Omega=0$ do $\Omega=\omega$, dinamički faktor raste od 1 do ∞. Pri daljnjem povećanju Ω do njene beskonačne vrijednosti, dinamički faktor μ_d opada na nulu. Za slučaj kada je $\Omega=\omega$ (ili $r=1$), dinamički faktor μ_d postaje beskonačan kao i amplitude prisilnih oscilacija. Taj slučaj kada je kružna frekvencija slobodnih oscilacija jednaka kružnoj frekvenciji prisilnih oscilacija, naziva se rezonancija. Iz slike 4-8, također se uočava da se za vrijednost $\Omega<\omega$ dinamički faktor μ_d može smanjiti najviše do jedinice pa se u tom slučaju amplitude prisilnih oscilacija, pri dinamičkom djelovanju poremećajne sile, mogu smanjiti najviše do veličine amplitude pri statičkom djelovanju poremećajne sile. Također se uočava da za vrijednost $\Omega>\omega$, kada r->∞, dinamički faktor μ_d->0, što znači da se u području kada je $\Omega>\omega$ može postići da amplituda prisilnih oscilacija teži nuli, tj. da je manja od amplitude pri statičkom djelovanju. U slučaju ($r=1$) partikularni intergral ne može se napisati u obliku (4-49), već se pretpostavi sljedeći oblik:

$$x_p = Btcos(\Omega t + \beta) \tag{4-50}$$

Konstanta B odredit će se na način da se jednadžba (4-50) i njena druga derivacija uvrsti u diferencijalnu jednadžbu prisilnih oscilacija (4-39).

$$\ddot{x}_p = -2B\Omega \sin(\Omega t + \beta) - B\Omega^2 tcos(\Omega t + \beta) \tag{4-51}$$

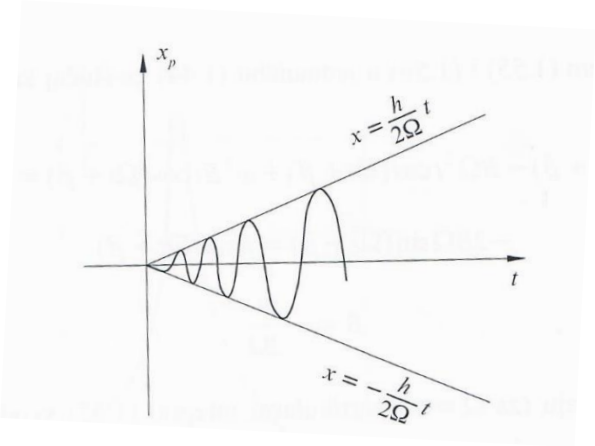
Uvrštavanjem (4-50) i (4-51) u jednadžbu (4-39) za slučaj kada je $\omega=\Omega$, dobije se:

$$B = -\frac{h}{2\Omega} \tag{4-52}$$

U ovom slučaju (za $\Omega=\omega$) partikularni integral (4-50) svodi se na sljedeći oblik:

$$x_p = \frac{h}{2\Omega} t sin\left[(\Omega t + \beta) - \frac{\pi}{2}\right] \tag{4-53}$$

Znači da faza pomaka $[(\Omega t + \beta) - \frac{\pi}{2}]$ kod prisilnih oscilacija u slučaju rezonancije ($\Omega=\omega$) zaostaje za fazom ($\Omega t+\beta$) poremećajne sile za vrijednost $\frac{\pi}{2}$.



Slika 4-9 Prisilne oscilacije točke pri pojavi rezonancije (Čaušević, 2010.)

Iz slike 4-9 uočava se kako amplituda prisilnih oscilacija pri pojavi rezonancije raste neograničeno tijekom vremena. Grafikon ovih oscilacija točke nalazi se unutar područja ograničenog pravcima danim jednadžbom:

$$x = \pm\frac{h}{2\Omega} t$$

Na kraju će se razmotriti i slučaj kada se kružna frekvencija Ω poremećajne sile veoma malo razlikuje od kružne frekvencije ω slobodnih oscilacija točke, kada nastaje pojava nazvana udari (*engl. beating*). Da bi se objasnila ova pojava, proučit će se slučaj osciliranja za koji je rješenje dano jednadžbom (4-42). U to se rješenje uvrštavaju sljedeći početni uvjeti:

$$x_0 = \dot{x}_0 = 0$$

za koje su slobodne oscilacije jednake nuli te se dobije:

$$x = -\frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\left(sin\beta cos\omega t + \frac{\Omega}{\omega} cos\beta sin\omega t\right) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}\sin(\Omega t + \beta) \tag{4-54}$$

Ako je u slučaju udara $\frac{\Omega}{\omega} \cong 1$, jednadžba (4-54) postaje:

$$x = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}[sin(\Omega t + \beta) - \sin(\omega t + \beta)] \tag{4-55}$$

Izraz u srednjoj zagradi posljednje jednadžbe napisat će se koristeći trigonometrijsku vezu:

$$sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha - \beta}{2}cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

i uzevši da je $\frac{\Omega+\omega}{2} \approx \Omega$, jednadžba (4-55) postaje:

$$x = \frac{2h}{\omega^2 - \Omega^2}sin\frac{\Omega - \omega}{2}tcos(\Omega t + \beta) \tag{4-56}$$

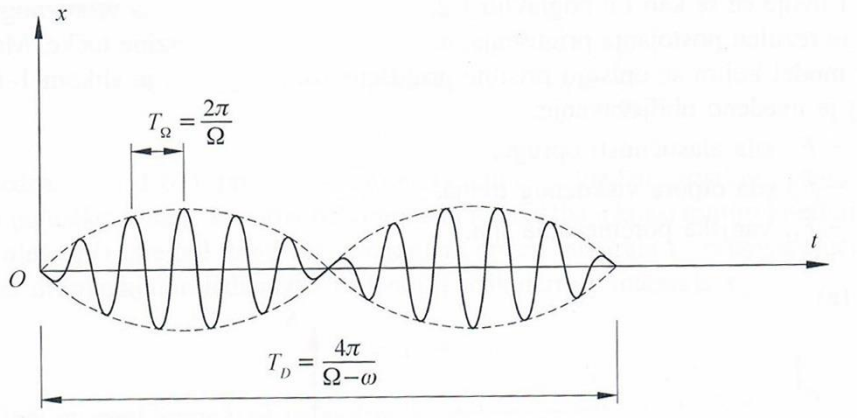
Uvođenjem oznake:

$$D(t) = \frac{2h}{\omega^2 - \Omega^2}sin\frac{\Omega - \omega}{2}t \tag{4-57}$$

jednadžba (4-55) može se napisati u konačnom obliku :

$$x = D(t)\cos(\Omega t + \beta) \tag{4-58}$$

Uočava se da je jednadžbi (4-58) amplituda gibanja točke *D(t)* periodična funkcija vremena, a gibanje točke dano jednadžbom može se smatrati kao oscilatorno gibanje kružnom frekvencijom Ω i periodom $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$, slika 4-10.



Slika 4-10 Prikaz slučaja udara (Čaušević, 2010.)

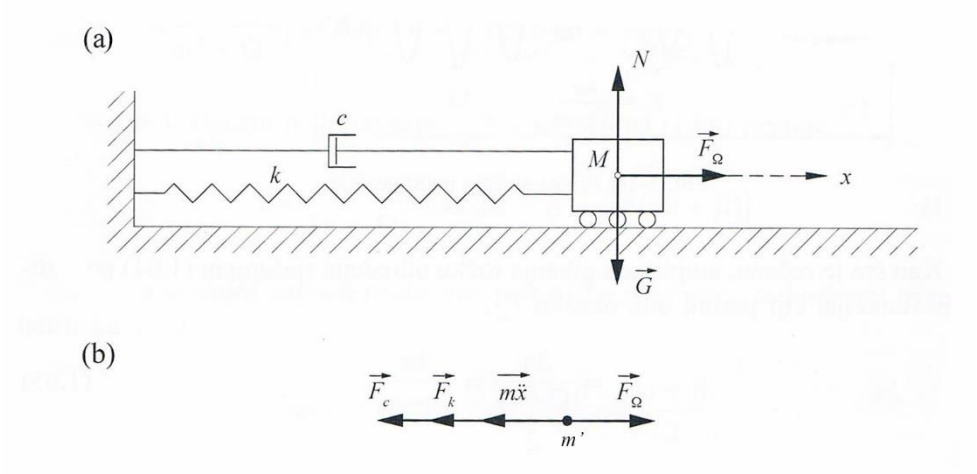
Kao što je rečeno, amplituda gibanja točke određena rješenjem (4-58) periodična je funkcija, čiji period ima oznaku T_D.

$$T_D = \frac{2\pi}{\frac{\Omega - \omega}{2}} = \frac{4\pi}{\Omega - \omega} \tag{4-59}$$

S obzirom da je $\Omega \cong \omega$, period T_D amplitude daleko je veći od perioda osciliranja točke T_Ω.

4.4. Prisilne prigušene oscilacije točke

I ovdje će se pretpostaviti sila otpora viskoznog trenja koja je rezultat postojanja prigušenja, a linearna je funkcija brzine točke. Matematički model kojim se opisuju prisilne prigušene oscilacije prikazan je slikom 4-11, na kojoj je uvedeno obilježavanje:



Slika 4-11 Matematički model prisilnih prigušenih oscilacija sustava s jednim stupnjem slobode (a) D'Alembertovo načelo (b) (Čaušević,2010.)

- $\vec{F}_k$ sila elastičnosti opruge,
- $\vec{F}_c$ sila otpora viskoznog trenja,
- $\vec{F}_\Omega$ vanjska poremećajna sila.

Pri djelovanju navedenih sila točka M mase m giba se po horizontalnoj nepomičnoj idealno glatkoj ravnini. Poremećajna sila $\vec{F}_\Omega$ mijenja se po harmonijskom zakonu, a njena projekcija na os x ima vrijednost kao i u prošlom poglavlju:

$$F_\Omega = F_0 \sin(\Omega t + \beta)$$

Diferencijalna jednadžba gibanja točke M koja se giba duž osi x glasi:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t + \beta) \tag{4-60}$$

Ili

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = hsin(\Omega t + \beta) \tag{4-61}$$

gdje je uvedeno sljedeće obilježavanje:

$$\delta = \xi\omega, \qquad \xi = \frac{c}{c_{kr}}, \qquad h = \frac{F_0}{m}$$

Jednadžba (4-61) predstavlja diferencijalnu jednadžbu prisilnih prigušenih oscilacija točke. Ona je linearna nehomogena jednadžba s konstantnim koeficijentima, a njen opći integral dobije se zbrajanjem općeg integrala x_h odgovarajuće homogene diferencijalne jednadžbe i njenog partikularnog integrala x_p.

$$x = x_h + x_p$$

Opći integral homogene jednadžbe x_h dobiven je u poglavlju 4.2. za slučajeve $\xi<1, \xi=1$ i $\xi>1$. Budući da je samo za slučaj $\xi<1$ moguće oscilatorno gibanje točke, u ovoj analizi primijenit će se od ranije poznato rješenje za x_h kada je $\xi<1$:

$$x_h = e^{-\delta t}(C_1 cos\omega_d t + C_2 sin\omega_d t)$$

C_1 i C_2 su integracijske konstante, dok je ω_d dano sljedećim, otprije poznatim izrazom:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

Partikularni integral x_p diferencijalne jednadžbe (4-61) pretpostavit će se u sljedećem obliku:

$$x_p = Asin(\Omega t + \beta - \gamma) \tag{4-62}$$

gdje su A i γ nepoznate konstante. Rješenjem oblika (4-62) pretpostavlja se da se prisilne prigušene oscilacije vrše konstantnom amplitudom A i da je njihova kružna frekvencija identična kružnoj frekvenciji Ω poremećajne sile te da postoji fazno kašnjenje γ pomaka u odnosu na poremećajnu silu. Konstante A i γ odredit će se na sljedeći način:

$$\dot{x}_p = A\Omega\cos(\Omega t + \beta - \gamma)$$

$$\ddot{x}_p = -A\Omega^2\sin(\Omega t + \beta - \gamma)$$

Iz jednadžbe (4-61) dobije se:

$$-A\Omega^2 \sin(\Omega t + \beta - \gamma) + A2\delta\Omega \cos(\Omega t + \beta - \gamma) + A\omega^2 \sin(\Omega t + \beta - \gamma) = h\sin(\Omega t + \beta) \tag{4-63}$$

Dio posljednje jednadžbe desno od znaka jednakosti transformirat će se na sljedeći način:

$$h\sin(\Omega t + \beta) = h\sin[(\Omega t + \beta - \gamma) + \gamma] = h\sin(\Omega t + \beta - \gamma)\cos\gamma + h\cos(\Omega t + \beta - \gamma)\sin\gamma$$

Zamjenom ovog izraza u jednadžbu (4-63) nakon izjednačavanja koeficijenata uz iste trigonometrijske funkcije dobiva se:

$$A(\omega^2 - \Omega^2) = h\cos\gamma$$

$$A2\delta\Omega = h\sin\gamma \tag{4-64}$$

Iz jednadžbi (4-64) dobivaju se amplituda A i kut fazne razlike γ prinudnih prigušenih oscilacija:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \tag{4-65}$$

$$tg\gamma = \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{4-66}$$

Sada se može napisati opći integral diferencijalne jednadžbe (4-61):

$$x = e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_d t + C_2\sin\omega_d t) + A\sin(\Omega t + \beta - \gamma) \tag{4-67}$$

U kojem su konstante A i γ dane izrazima (4-65) i (4-66).

Integracijske konstante C_1 i C_2 odredit će se iz uvjeta:

$$t = t_0 = 0 \rightarrow x = x_0;\ \dot{x} = \dot{x}_0$$

$$\dot{x} = -\delta e^{-\delta t}(C_1\sin\omega_d t + C_2\cos\omega_d t) + \omega_d e^{-\delta t}(-C_1\sin\omega_d t + C_2\cos\omega_d t) + A\Omega\cos(\Omega t + \beta - \gamma) \tag{4-68}$$

Unosom ovih početnih uvjeta u posljednju jednadžbu i jednadžbu (4-68) dobije se:

$$x_0 = C_1 + A\sin(\beta - \gamma)$$

$$\dot{x}_0 = -\delta C_1 + \omega_d C_2 + A\Omega\cos(\beta - \gamma)$$

odakle je:

$$C_1 = x_0 - A\sin(\beta - \gamma)$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_d}[\dot{x}_0 + \delta x_0 - \delta A sin(\beta - \gamma) - A\Omega \cos(\beta - \gamma)]$$

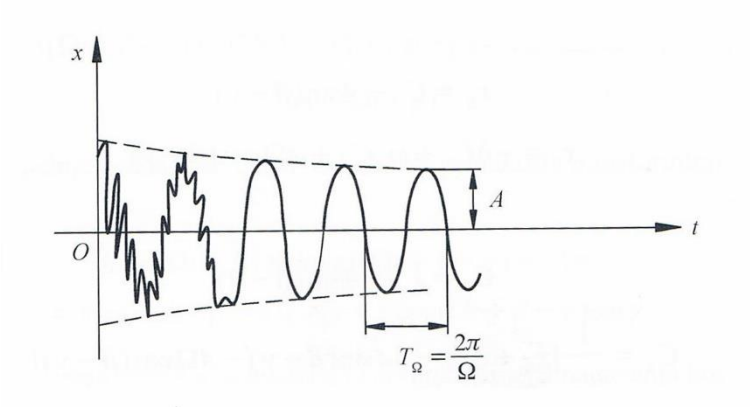
Zamjenom vrijednosti za C_1 i C_2 u jednadžbu (4-67) ona postaje:

$$\begin{aligned} x = e^{-\delta t}\left(x_0 cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{\omega_d} sin\omega_d t\right) \\ - e^{-\delta t}\left(A sin(\beta - \gamma) cos\omega_d t \right. \\ \left. + \frac{A}{\omega_d}[\delta \sin(\beta - \gamma) + \Omega \cos(\beta - \gamma)] sin\omega_d t\right) \\ + A sin(\Omega t + \beta - \gamma) \end{aligned} \tag{4-69}$$

i predstavlja konačan oblik jednadžbe gibanja točke u slučaju prinudnih prigušenih oscilacija za dane početne uvjete.

1) Iz jednadžbe (4-69) slijedi da je rezultirajuće gibanje točke određeno superpozicijom:
   slobodnih prigušenih oscilacija točke uvjetovanim danim početnim uvjetima gibanja;
2) prigušenih oscilacija točke koje imaju prirodnu kružnu frekvenciju Ω, ali su rezultat djelovanja poremećajne sile;
3) čisto prisilnih ustaljenih oscilacija.

Prvi i drugi dio u jednadžbi (4-69) tijekom vremena se prigušuju i nestaju pa se kao osnovne oscilacije koje određuju karakter gibanja točke javljaju prisilne oscilacije (3) amplitude A i kružne frekvencije Ω, slika 4-12, koje su fazno pomaknute u odnosu na poremećajnu silu za vrijednost γ (Čaušević, 2010.).



Slika 4-12 Prisilne prigušene oscilacijske točke (Čaušević,2010.)

Prema obliku rješenja (4-69) zaključujemo da su prisilne oscilacije točke pri postojanju viskoznog trenja harmonijske oscilacije, čija se amplituda *A* tijekom vremena ne mijenja. Znači, prisilne prigušene oscilacije tijekom vremena ne prigušuju se, jer poremećajna sila održava oscilatorni karakter gibanja točke pa cijelo vrijeme amplituda *A* ima konstantnu vrijednost. Ove se oscilacije zbog toga razlikuju od slobodnih prigušenih oscilacija (čija se amplituda tijekom vremena smanjuje) i zato se zovu ustaljene oscilacije.

Budući da su kružna frekvencija Ω i period T_Ω prisilnih oscilacija, slika 4-12, pri postojanju otpora viskoznog trenja jednaki kružnoj frekvenciji i periodu prinudne sile, znači da otpor viskoznog trenja nema utjecaja na vrijednost kružne frekvencije i perioda prinudnih oscilacija. Ovaj zaključak je suprotan onom što je rečeno za vrijednost ω_d i T_d pri analizi slobodnih prigušenih oscilacija, jer su ω_d i T_d ovisili o otporu viskoznog trenja.

U nastavku će se detaljnije analizirati prisilne oscilacije dane dijelom (3) jednadžbe (4-69), jer one, kako je objašnjeno, imaju primarnu važnost. Dobivena vrijednost amplitude prinudnih oscilacija (4-65) može se napisati i u sljedećem obliku:

$$A = \frac{h}{\omega^2\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2}} \tag{4-70}$$

Ovdje su:

$r = \frac{\Omega}{\omega}$ koeficijent poremećaja,

$\xi = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{\delta}{\omega}$ relativno prigušenje (bezdimenzionalni koeficijent).

Uvedeno je obilježavanje f_s za statičko izduženje opruge:

$$f_s = \frac{h}{\omega^2};\ \ h = \frac{F_o}{m};\ \ \omega^2 = \frac{k}{m};$$

$$F_0 = mh = kf_s;\ \ f_s = \frac{F_0}{k} = \frac{mh}{k} = \frac{h}{\omega^2}$$

Ako se amplituda pri statičkom djelovanju poremećajne sile shvati kao statički progib i obilježi oznakom A_s :

$$A_s = f_s = \frac{h}{\omega^2} \tag{4-71}$$

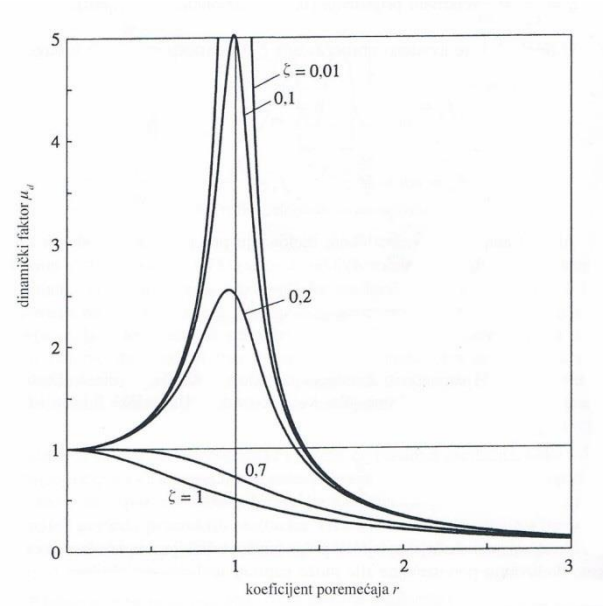
može se iz (4-70) uspostaviti kvocijent između amplituda pri dinamičkom i statičkom djelovanju poremećajne sile, koji se naziva dinamički faktor (*engl. dynamic factor*) μ_d :

$$\mu_d = \frac{A}{A_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2}} \tag{4-72}$$

Znači da se u slučaju prisilnih prigušenih oscilacija amplituda A pri dinamičkom djelovanju poremećajne sile može napisati u sljedećem obliku:

$$A = \mu_d \cdot f_s = \mu_d \cdot A_s \tag{4-73}$$

Na slici 4-13 prikazat će se promjena dinamičkog faktora μ_d u funkciji od koeficijenta poremećaja (*engl. frequency ratio*) *r* za određene vrijednosti relativnog prigušenja ξ.



Slika 4-13 Vrijednosti dinamičkog faktora $\mu_d(r, \xi)$ (Čaušević,2010.)

Kada je ξ=0 dinamički faktor μ_d dobiva vrijednost iz poglavlja 4.3. u kojem su analizirane neprigušene prisilne oscilacije:

$$\mu_d = \frac{1}{1-r^2}$$

pri čemu je za *r=1* dinamički faktor μ_d bio beskonačan, tj. amplitude prisilnih oscilacije bile su neograničene.

Međutim, pri postojanju sile viskoznog trenja dinamički faktor μ_d ima vrijednost različitu od beskonačne čak i u slučaju kada je $\Omega=\omega$, tj. kada je *r=1* (slučaj rezonancije):

$$(\mu_d)_{rez.}) = \frac{1}{2\xi} \tag{4-74}$$

U tom slučaju i amplituda prisilnih oscilacija ima konačnu vrijednost, koja se dobije iz (4-70):

$$(A)_{rez.} = \frac{h}{2\xi\omega^2} = \frac{2}{2\delta\omega} \tag{4-75}$$

Za *r=1* pri postojanju sile viskoznog trenja ($\xi \neq 0$) amplituda nema ekstremnu vrijednost, slika 4-13. Ekstremne vrijednosti amplitude A određuju se po pravilima diferencijalnog računa, tj. traži se pri kojim vrijednostima *r* dinamički faktor povećanja μ_d ima (za određenu vrijednost ξ) maksimalnu vrijednost $\mu_{d,max}$. Dinamički faktor μ_d dan izrazom (4-72) imat će maksimalnu vrijednost kada je veličina pod korijenom u nazivniku minimalna. Ako se za tu vrijednost uvede oznaka *y*, može se napisati:

$$y = (1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2 \tag{4-76}$$

$$\frac{dy}{dr} = -4r(1-r^2) + 8\xi^2 r = -4r + 8\xi^2 r + 4r^3 = r[4r^2 + (8\xi^2 - 4)] \tag{4-77}$$

$$\frac{d^2y}{dr^2} = -4 + 8\xi^2 + 12r^3 \tag{4-78}$$

Iz uvjeta $\frac{dy}{dx} = 0$ dobiju se sljedeća rješenja jednadžbe (4-77):

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = \sqrt{1-2\xi^2}, \qquad r_3 = -\sqrt{1-2\xi^2},$$

Za prvo rješenje r_1=0 je:

$$\mu_d = 1, \qquad A = A_s = \frac{h}{\omega^2}$$

Budući da treće rješenje ne ispunjava uvjet $r \geq 0$, neće se niti analizirati. Znači ostaje analizirati drugo rješenje r_2. Ako se r_2 zamijeni u drugu derivaciju dobije se:

$$\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right)_{r=r_2} = -4 + 8\xi^2 + 12(1-2\xi^2) = 8(1-2\xi^2) \tag{4-79}$$

Da bi nazivnik u izrazu (4-72) imao minimalnu vrijednost druga derivacija (4-79) treba biti veća od nule:

$$8(1-2\xi^2) > 0$$

a to je ispunjeno ako je:

$$(1-2\xi^2) > 0$$

odakle je:

$$2\xi^2 < 1;\ \ \xi = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \ \delta < \omega\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Zaključak: Dinamički faktor μ_d bit će maksimalan kada koeficijent poremećaja r ima sljedeću vrijednost:

$$r = r_2 = \sqrt{1-2\xi^2} \tag{4-80}$$

u tom slučaju je:

$$(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2 = (2\xi^2)^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2) = 4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4 = 4\xi^2 - 4\xi^4$$
$$= 4\xi^2(1-\xi^2)$$

$$\mu_{d,max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{4-81}$$

Uspoređivanjem izraza (4-74), koji daje vrijednost dinamičkog faktora povećanja u slučaju rezonancije ($r=1$), i izraza (4-81), može se napisati:

$$(\mu_d)_{rez} < \mu_{d,max} \tag{4-82}$$

što znači da je postignuta amplituda pri rezonanciji manja od amplitude kada je dinamički faktor $\mu_{d,max}$. Ako bi se na slici 4-13 točkastom crtom spojile maksimalne vrijednosti skupa krivulja $\mu_d=f(r,\xi)$, dobila bi se krivulja koja je veoma bliska pravcu čija je jednadžba $r=1$.

Na temelju dobivene vrijednosti (4-81) mogu se napisati maksimalne amplitude:

$$A_{max} = A_s \cdot \mu_{d,max} = \frac{h}{2\omega^2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{4-83}$$

Iz dijagrama na slici 4-13 uočava se da dinamički faktor μ_d ima velike vrijednosti u području u kojem su vrijednosti koeficijenata poremećaja r bliske jedinici. Zbog toga se uvodi pojam **područje rezonancije**, što podrazumijeva područje u kojem se koeficijent poremećaja r nalazi u sljedećim granicama:

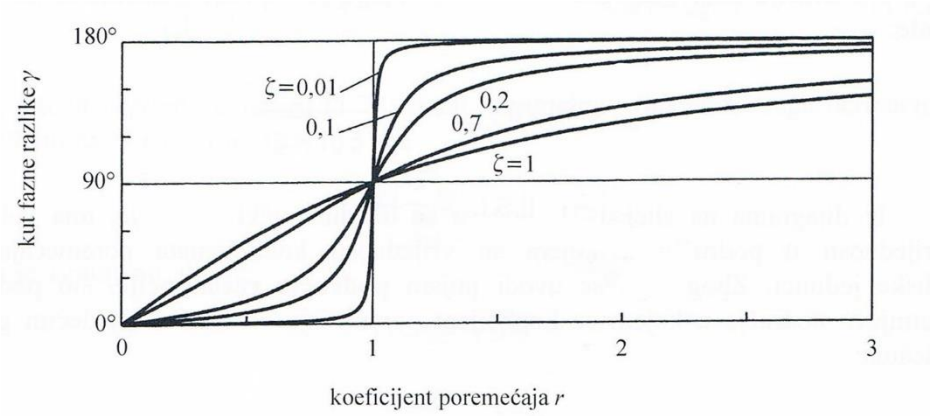
$$0{,}75 < r < 1{,}25$$

Za ove vrijednosti r amplitude prisilnih oscilacija točke imaju velike vrijednosti, što može izazvati trajne deformacije objekta osciliranja.

Već je rečeno da faza prinudnih oscilacija ($\Omega t+\beta-\gamma$) pri postojanju otpora viskoznog trenja zaostaje za fazom poremećajne sile ($\Omega t+\beta$) za kut fazne razlike γ, čiji je tangens dan vrijednošću (4-66), koja se može napisati i u sljedećem obliku:

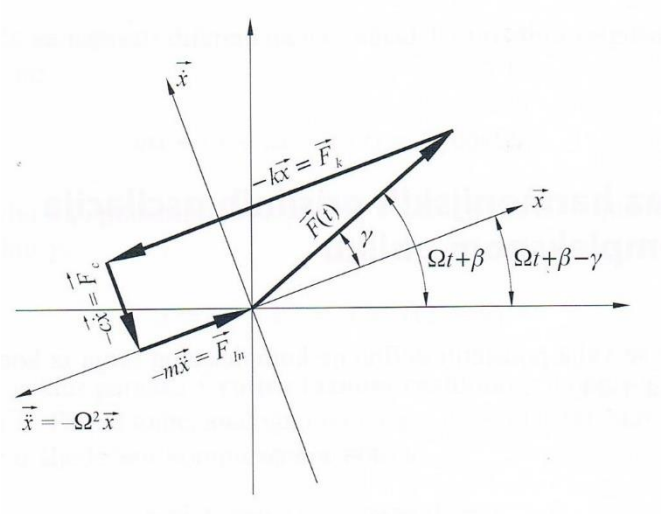
$$tg\gamma = \frac{2\xi \cdot r}{1 - r^2} \tag{4-84}$$

Znači da kut fazne razlike (*engl. phase angle*) γ ovisi o koeficijentu poremećaja r i relativnom prigušenju ξ. Slično prezentaciji slike 4-13 i sada se može pokazati funkcionalana ovisnost $\gamma(r)$ za razne vrijednosti relativnog prigušenja ξ, slika 4-14. Prema obliku rješenja za kut fazne razlike (4-84), za $\xi=0$ fazna razlika γ ima vrijednost 0 ili π. Nadalje, kada je $r=1$, tada je $tg\gamma = \infty$, tj. $\gamma=\pi/2$, što znači da sve krivulje na slici 4-14 prolaze kroz točku čija je apscisa $r=1$, a ordinata $\gamma=90°$ i asimptotski se približavaju pravcu $\gamma=\pi$.



Slika 4-14 Prikaz kuta fazne razlike γ(r, ξ) (Čaušević, 2010.)

Iz slike 4-14 uočava se da se vrijednost kuta fazne razlike γ znatno mijenja pri malim promjenama vrijednosti r u području u kojemu je $r \cong 1$. Nadalje, iz posljednje dvije slike može se generalno zaključiti da u području rezonancije sile otpora viskoznog trenja imaju znatan utjecaj vrijednosti i dinamičkog faktora μ_d i kuta fazne razlike γ.

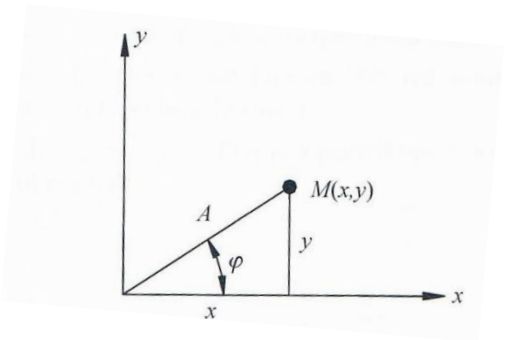


Slika 4-15 Vektorski prikaz pomaka i svih prisilnih prigušenih oscilacija (Čaušević, 2010.)

Na slici 4-15 dan je vektorski prikaz pomaka i svih sila u slučaju prinudnih prigušenih oscilacija:

- Pomak $\vec{x}$ zaostaje u odnosu na poremećajnu silu $\vec{F}(t)$ za kut γ,
- Elastična sila $\vec{F}_k = -k\vec{x}$ uvijek je orijentirana suprotno pomaku $\vec{x}$,
- Sila prigušenja $\vec{F}_c = -c\dot{\vec{x}}$ zaostaje za 90° iza pomaka i ima orijentaciju uvijek suprotnu od vektora brzine $\dot{\vec{x}}$,
- Inercijalna sila $\vec{F}_{in} = -m\ddot{\vec{x}}$ u fazi je s pomakom $\vec{x}$,a orijentirana je suprotno od vektora ubrzanja $\ddot{\vec{x}}$.

4.5. Prikaz harmonijskih prisilnih oscilacija u kompleksnom obliku



Slika 4-16 Definicija kompleksnog broja

Najprije se valja podsjetiti definicije kompleksnog broja iz kompleksne algebre, slika 4-16:

$$z = x + iy$$

$$x = A\cos\varphi;\ \ y = A\sin\varphi$$

$$z = A(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Ae^{i\varphi} \text{ (Eulerova formula)}$$

$$z = Ae^{i\varphi} \tag{4-85}$$

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = arctg(\frac{y}{x})$$

$$z = x - iy = A(\cos\varphi - i\sin\varphi) = Ae^{-i\varphi} \tag{4-86}$$

A je apsolutna vrijednost ili modul, dok je φ argument kompleksnog broja.

Ponovo će se napisati diferencijalna jednadžba prisilnih prigušenih oscilacija točke M mase *m*:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = F_0\cos\Omega t \tag{4-87}$$

U poglavlju 4.4. pokazano je da pomak x točke M kasni u odnosu na poremećajnu silu za kut γ:

$$x = x_h + x_p = A\cos(\Omega t - \gamma)$$

Znači da vektor pomaka $\vec{x}$ rotira faznom razlikom γ u odnosu na vektor poremećajne sile $\vec{F}$. Prema tome, sukladno izrazima (4-86) i (4-87), ako se poremećajna sila napiše u sljedećem kompleksnom obliku:

$$F(t) = F_0e^{-\Omega t} \tag{4-88}$$

rješenje (4-87) glasit će:

$$x(t) = Ae^{i(\Omega t-\gamma)} = Ae^{-i\gamma}\cdot e^{i\Omega t} = \bar{A}e^{-i\Omega t} \tag{4-89}$$

Ovdje je uvedena oznaka:

$$\bar{A} = Ae^{-i\gamma} \tag{4-90}$$

koja se naziva kompleksna amplituda, a predstavlja kut položaja pomaka x(t) prema F(t).

Kompleksna će se amplituda naći ako se pretpostavljeno rješenje (4-89) uvrsti u diferencijalnu jednadžbu (4-86):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0e^{-i\Omega t} \tag{4-91}$$

$$\dot{x} = i\Omega\bar{A}e^{i\Omega t}$$
$$\ddot{x} = -\Omega^2\bar{A}e^{i\Omega t} \tag{4-92}$$

$$\bar{A} = Ae^{-i\gamma} = \frac{F_0}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} \tag{4-93}$$

Ako se posljednji izraz za kompleksnu amplitudu pomnoži izrazom:

$$\frac{(k - m\Omega^2) - ic\Omega}{(k - m\Omega^2) - ic\Omega}$$

rješenje dobiva sljedeći oblik:

$$\bar{A} = \frac{F_0(k - m\Omega^2)}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} - i\frac{F_0 c\Omega}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} \tag{4-94}$$

S obzirom na relaciju (4-90) i definiciju kompleksnog broja (4-86), može se napisati:

$$\bar{A} = Ae^{-i\gamma} = x - iy$$

$$z = x + iy = A^{i\varphi}$$

$$z = x - y = Ae^{-i\varphi}$$

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = A^2$$

te je:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left[\frac{F_0(k - m\Omega^2)}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}\right]^2 + \left[\frac{F_0 c\Omega}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}\right]^2}$$

$$A = F_0\sqrt{\frac{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}{[(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2]}} = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{(k - m\Omega^2)^2}{m^2} + \frac{(c\Omega)^2}{m^2}}}$$

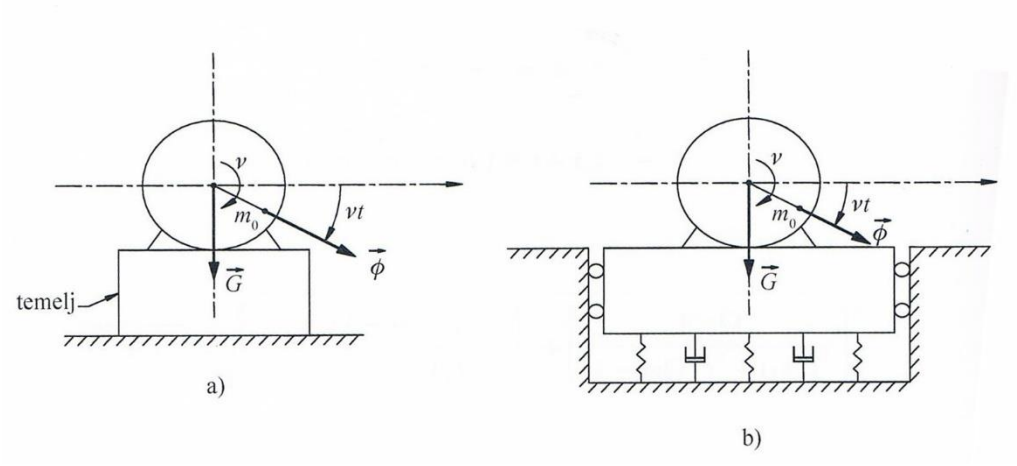
$$\frac{F_0}{m} = h;\ \frac{c}{m} = 2\delta$$

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \tag{4-95}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} = \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{4-96}$$

Rješenja za amplitudu prisilnih oscilacija (4-95) i kut fazne razlike (4-96) identična su rješenjima (4-65) i (4-66) iz prošlog poglavlja.

4.6. Periodična poremećajna sila u slučaju rotora s ekscentričnom masom



Slika 4-17 Rotor s ekscentričnom masom (Čaušević, 2010.)

U praksi se često javlja slučaj poremećajne sile harmonijskog karaktera, kada se sila mijenja prema funkciji sinusa ili kosinusa. Rotor na slici 4-17 (a), koji ima ekscentričnu rotirajuću masu m_0, prenosi na svoj temelj poremećajnu silu, što može izazvati nepovoljne oscilacije temelja i buku (Čaušević, 2010.).

Uobičajeno je da se samo efekti pobude harmonijskog karaktera nazivaju oscilacije, a efekti pobude koja nije harmonijskog karaktera nazivaju se vibracijama. Budući da je u ovom slučaju rotora s ekscentričnom masom poremećajna sila harmonijska, zadržan je termin oscilacije.

Da bi se smanjile navedene pojave, primjenjuje se model elastičnih opruga, slika 4-17 (b), prinuđen da se giba samo vertikalno, a oslonjen preko temelja na opruge koje predstavljaju karakteristike medija na kojem se temelj nalazi. Kada bi rotor bio savršeno uravnotežen, tada bi na temelj djelovala samo težina rotora $\vec{G}$. Pretpostavlja se da se na rotoru nalazi ekscentrična masa m_0. Takva ekscentrična rotirajuća masa proizvest će centrifugalnu silu $\vec{\Phi}$ kada rotor rotira jednoliko, kutnom brzinom $v=konst.$

U kinematici su definirane dvije komponente ubrzanja pri rotaciji točke oko nepomične osi: tangencijalno i normalno:

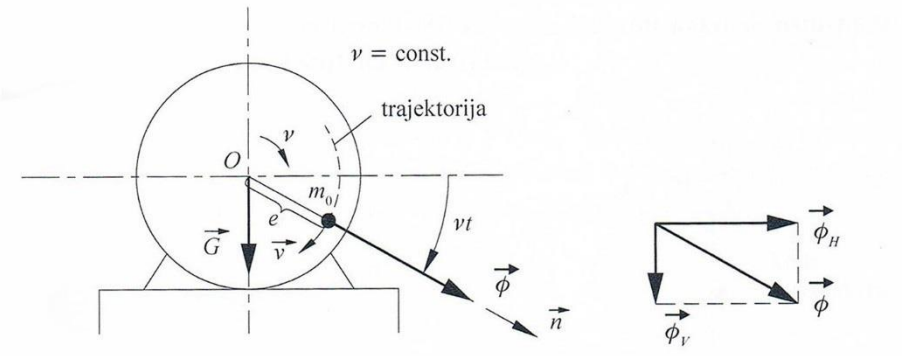
$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(ev) = e\frac{dv}{dt} = 0, (v = const.) \tag{4-97}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R_k} = \frac{e^2 \cdot v^2}{e} = ev^2 \tag{4-98}$$

Sada se može iz dinamike definirati sljedeća vrijednost inteziteta centrifugalne sile $\vec{\Phi}$, slika 4-18.

$$\Phi = m_0 e v^2 \tag{4-99}$$

(Usmjerenjem sile $\vec{\Phi}$ kao na slici 4-18 uzet je u obzir predznak minus)



Slika 4-18 Centrifugalna sila $\vec{\Phi}$ (Čaušević, 2010.)

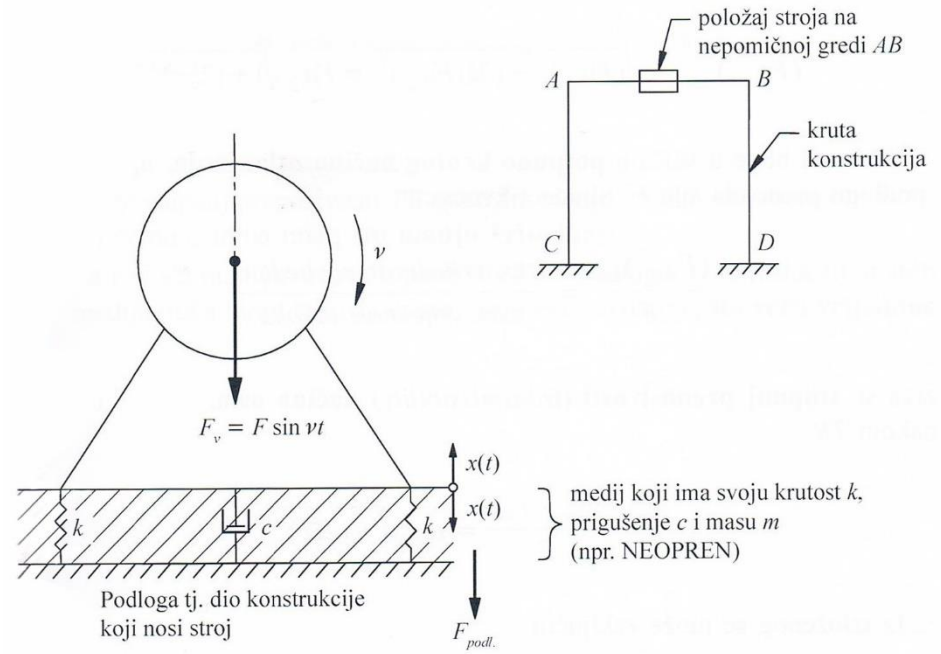
(Za frekvenciju poremećajne sile uzeta je oznaka ν).

Centrifugalna sila $\vec{\Phi}$ rastavlja se na vertikalnu $\vec{\Phi}_V$ i horizontalnu komponentu $\vec{\Phi}_H$. Vertikalna komponenta djeluje u smjeru mogućeg pomaka temelja i u ovom slučaju predstavlja poremećajnu silu temelja rotora. Za razliku od vertikalne, horizontalnu komponentu primaju pomični oslonci (slika 4-17 (b)) te uslijed spriječenog pomaka nema horizontalnih osciliranja.

$$\vec{\Phi}_V = \Phi sinvt = m_0 e v^2 \sin vt \tag{4-100}$$

4.7. Izoliranje oscilacija

Za rotirajući stroj zadanih karakteristika valja odrediti kako se najuspješnije može spriječiti prijenos oscilacija na konstrukciju.



Slika 4-19 Rotirajući stroj na elastičnoj podlozi (Čaušević,2010.)

Treba odrediti vrijednost sile koja se prenosi na podlogu $F_{podl.}$, slika 4-19. Budući da pomak kasni u odnosu na poremećajnu silu,

$$x(t) = Asin(vt - \gamma) = \frac{F}{k}\mu_d \sin(vt - \gamma) = A_{st}\mu_d \sin(vt - \gamma)$$

te da nema inercijskih sila podloga ($F_{in}=0$), sila koja se prenosi na podlogu ima sljedeću vrijednost:

$$F_{podl} = F_k + F_c = kx + c\dot{x} = F\mu_d \sin(vt - \gamma) + c\frac{F}{k}\mu_d v cos(vt - \gamma)$$

$$c\frac{F}{k}\mu_d v = \frac{\xi c_{kr} F}{k}\mu_d v = \frac{\xi(2m\omega)F}{m\omega^2}\mu_d v = 2\xi\frac{v}{\omega}F\mu_d = 2\xi r F\mu_d$$

$$F_{podl.}(t) = F\mu_d \sin(vt - \gamma) + 2\xi r F\mu_d \cos(vt - \gamma) \qquad (4\text{-}101)$$

$$\left(F_{podl.}\right)_{max} = \sqrt{(F\mu_d)^2 + (2\xi r F\mu_d)^2} = F\mu_d\sqrt{1 + (2\xi r)^2} \qquad (4\text{-}102)$$

Očito da bi se u slučaju potpuno krutog načina oslanjanja, npr. na stijeni, na podlogu prenosila sila F. Sljedeći kvocijent:

$$\frac{(F_{podl.})_{max}}{F} = \frac{max.vrijednost\ posljedice}{max.vrijednost\ uzroka}$$

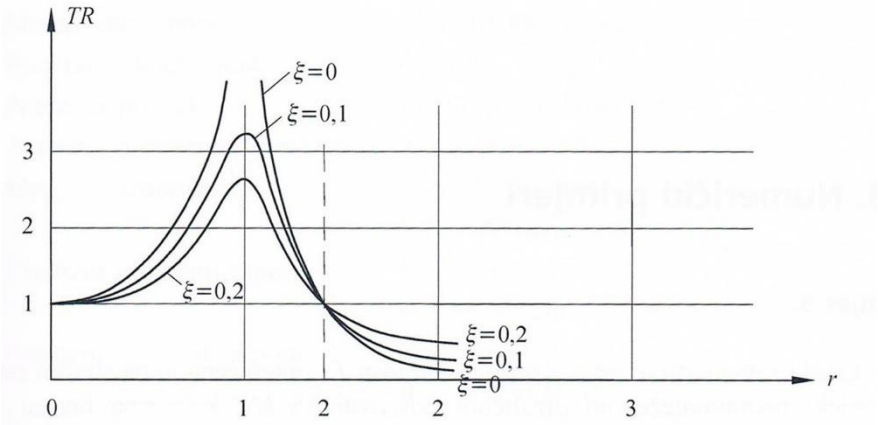
naziva se stupanj prenosivosti (*engl. transmissibility*) načina oslanjanja i obilježava oznakom TR.

$$TR = \frac{(F_{podl.})_{max}}{F} = \mu_d \sqrt{1 + (2\xi r)^2} \qquad (4\text{-}103)$$

Iz izloženog se zaključuje:

1. Da se za dane osobine medija koji prenosi sile na konstrukciju može izračunati $(F_{podl.})_{max}$,
2. Da se treba projektirati sustav oslanjanja ili prijenosa sila na konstrukciju tako da vrijednost *TR* bude što manja, a to je prema slici 4-19. ostvareno za vrijednost $r > \sqrt{2}$,kada je $TR<1$. (Čaušević, 2010.)

Na kraju se prema izrazu (4-103) mogu pokazati vrijednosti stupnja prenosivosti TR u zavisnosti od *r* i ξ, jer prema gradivu izloženom u poglavlju 4.4. i dinamički faktor μ_d ovisi o *r* i ξ, slika 4-20.



Slika 4-20 Vrijednost stupnja prenosivosti TR (Čaušević, 2010.)

Zaključak

Drugim je poglavljem obuhvaćena opća podjela vibracija te su objašnjeni jednostavni i diskretni sustavi. U trećem poglavlju je bio prikazan jedan jednostavan sustav sa tri stupnja slobode, koji rudari susreću u npr. podzemnim rudnicima, a koji se principom statičke kondenzacije svodi na sustav s jednim stupnjem slobode-horizontalnim pomakom. Ti izrazi su nam otprije poznati i jednostavni za shvatiti, budući da smo se pojmovima mase, krutosti, prigušenjem i jednadžbama gibanja već ranije susretali, a sada smo mogli vidjeti kako se taj pojednostavljeni sustav interpretira matematičkim modelom i oblikuje jednadžbama. Navedeni modeli su vrlo jednostavni jer se sastoje od jedne mase, jedne krutosti i jednog stupnja slobode. Osim što su prikazani temeljni principi dinamike, ti modeli nam služe i za proračun stvarnih sustava.

U četvrtom poglavlju sam se osvrnuo na svaku pojedinu vrstu oscilacija koje se uče u sklopu preddiplomskog sveučilišnog studija Rudarsko – geološko – naftnog fakulteta. U svrhu zornog uočavanja razlika između pojedinih oscilacija.

Zadaća dinamike konstrukcija je nalaženje odziva promatranog sustava na zadane pobude koje su funkcija vremena. Pod odzivom podrazumijevaju se veličine pomaka, brzine i ubrzanja svake relevantne točke konstrukcije, iz čega računamo deformacije, naprezanja i unutarnje sile na svakom zadanom mjestu i u svakom zahtijevanom trenutku.

Popis literature

CHOPRA, ANIL K., 2011. *Dynamics of Structures. Fourth Edition, URL:* https://www.academia.edu/ 35097809/Book_Chopra_Dynamics_Structures_4th (07.08.2019.)

ČAUŠEVIĆ, M., 2010. *Dinamika konstrukcija*. Zagreb: Tehnička knjiga

JECIĆ, S., 1989. *Mehanika II: Kinematika i dinamika.* Zagreb: Tehnička knjiga

MIHANOVIĆ, A., 1995. *Dinamika konstrukcija.* Split: Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu