OPTIMIRANJE POSLOVNOG PROCESA U PEKARSKOJ PROIZVODNJI

Omrčen, Stipe

SVEUČILIŠTE U SPLITU

EKONOMSKI FAKULTET SPLIT

DIPLOMSKI RAD

OPTIMIRANJE POSLOVNOG PROCESA U PEKARSKOJ PROIZVODNJI

Mentor: **Student:**

Prof. dr. sc. Zoran Babić **Stipe Omrčen**

Split, rujan, 2017.

SADRŽAJ:

1. UVOD 2
   1.1. Problem istraživanja. 2
   1.2. Svrha i ciljevi istraživanja 4
   1.3.Doprinos istraživanja 5
2. OSNOVE LINEARNOG PROGRAMIRANJA 6
   2.1.Standardni problem 7
   2.2. Kanonski problem 10
   2.3. Opći problem linearnog programiranja 11
3. DE NOVO PROGRAMIRANJE 13
   3.1. Formulacija problema u DeNovo programiranju 15
   3.2. Efekti višestrukih cijena 18
      3.2.1. Rastući troškovi sirovina 19
      3.2.2. Količinski popusti 21
4. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA NA PRIMJERU PROIZVODNJE PEKARSKIH PROIZVODA 23
   4.1.Pekarnica „Kambo“ 23
   4.2. Definiranje i formuliranje modela na primjeru pekarske proizvodnje 24
   4.3. Definiranje i formuliranje modela pomoću De Novo programiranja na primjeru pekarske proizvodnje 37
   4.4. Definiranje i formuliranje modela pomoću De Novo programiranja s rastućim troškovima i količinskim popustima na primjeru pekarske proizvodnje 44
5. ZAKLJUČAK 51
   SAŽETAK 53
   SUMMARY 54
   LITERATURA 55
   POPIS TABLICA 56
   POPIS SLIKA 56

1. UVOD

1.1 Problem istraživanja

U proizvodnim organizacijama proizvodnja je osnovna, najvažnija i najsloženija faza procesa reprodukcije. Značenje proizvodnje je od presudne važnosti u ovakvim organizacijama i poduzećima jer, kao rezultat proizvodnje dobivamo materijalna dobra bez kojih ne može opstati niti jedno poduzeće i društvo, zatim jer se u fazi proizvodnje stvara upotrebna vrijednost, vrijednost i novo ostvarena vrijednost, te jer je u samom procesu proizvodnje angažiran veliki dio sredstava i raspoložive radne snage poduzeća.[1]

Procesi proizvodnje su jasno definirani, te detaljno isplanirani, dizajnirani i optimizirani, dok se u ostalim procesima poslovanja, procesi izgrađuju kroz godine iskustva i prakse. Jedan od velikih problema brojnih tvrtki je to što ne shvaćaju da se njihovi poslovni sustavi sastoje od brojnih procesa koji mogu biti pojednostavljeni, poboljšani i optimizirani.

Za pripremu i sam proces proizvodnje vezani su određeni problemi, među kojima se ističu: [2]

- Određivanje optimalnog proizvodnog programa,
- Odabir optimalnih tehnoloških varijanti,
- Određivanje najpovoljnije smjese sirovina,
- Optimalno krojenje materijala
- Određivanje liste ukupno potrebnih količina pojedinih proizvodnih čimbenika za slučaj poznate strukture i kvantitativnih pokazatelja proizvodnog programa
- Najpovoljnije opterećenje strojeva
- Određivanje optimalnog unutarnjeg transporta
- Najpovoljniji raspored radnika na radnim zadacima i sl.

Rješavanje ovih navedenih problema s kojima se poduzeća susreću u proizvodnji kontinuirani je proces, te zahtjeva primjenu suvremenih matematičkih modela i metoda.

[1] Babić, Z., T. Perić, Ž. Mandić (2017): Optimization of Production Plan in the Metal Industry by the Use of De Novo Programming, Proceedings of the 9th International Working Conference - Total Quality Management – Advanced And Intelligent Approaches, Belgrade, Serbia, p. 127-129.
[2] http://web.efzg.hr/dok/MAT/tperic//2_OI_2015_1.pdf

Pod pojmom optimizacije proizvodnje podrazumijeva se proces organizacije upravljanja različitim procesima u cilju dostizanja najboljeg mogućeg ekonomskog stanja ili maksimalno moguće približavanje tom stanju.

Svako poduzeće koje se bavi proizvodnjom i konkurira sa svojim proizvodima na tržištu susreće se s temeljnim pitanjem i problemom svakog poslovanja, a to je kako poslovati na što efikasniji način, odnosno kako minimizirati vlastite troškove i maksimizirati profit. Postoje brojne metode i modeli optimizacije koje omogućuju nalaženje najboljih rješenja različitih problema, i vrlo su korisne za rješavanje problema u poslovnoj ekonomiji. Tipični problemi vezani su za korištenje ograničenih resursa (ljudi, oprema, materijali, financiranje i sl.) kojima se nastoji postići najveća moguća dobit, osigurati najveća moguća kvaliteta usluge s postojećim poslovnim resursima i slično.[3]

U poslovnoj ekonomiji u današnje vrijeme najčešće se koriste metode linearne optimizacije koje omogućavaju pronalaženje najboljih optimalnih rješenja problema u kojima su i funkcija cilja (npr. dobit) i utrošci resursa (npr. materijala, vremena, rada) linearno proporcionalni vrijednostima nezavisnih varijabli (npr. broju proizvedenih proizvoda).[4] Primjenom metode linearnog programiranja poduzeće može mnogo bolje utvrditi svoj položaj na tržištu, te svoj položaj u odnosu na konkurenciju na način da će se utrošak rada, različitih resursa i proizvodnih kapaciteta efikasnije iskoristiti.[5]

Linearno programiranje je matematički postupak razvijen ponajprije za potrebe analitičke podrške u procesima odlučivanja, odnosno možemo reći da je linearno programiranje grana matematike koja se bavi problemom optimizacije sustava uz zadana ograničenja. U tom je obliku, linearno programiranje postalo jedno od najšire korištenih i najbolje poznatih alata na području menadžmenta.[6]

U povijesti, linearno programiranje javlja se tijekom drugog svjetskog rata u planiranju troškova za opremanje vojne sile. Ruski matematičar Leonid Kantorovich prvi put je 1939. godine uveo pojam linearnog programiranja u rješavanju problema optimalne potrošnje resursa, odnosno koristi ga kao metodu za rješavanje problema proizvodnje.[7] U razvoju

[3] Čerić V., Varga M. (2004.); Informacijska tehnologija u poslovanju, Elemental, Zagreb, str. 86.
[4] Čerić V., Varga M. (2004.); Informacijska tehnologija u poslovanju, Elemental, Zagreb, str. 87.
[5] Babić, Z. (2005); Production Planning via De Novo Programming, Global Business & Economics Anthology, (Selected papers from B&ESI Conference, Flagstaaf, Arizona, USA), Worcester, USA, p. 476
[6] Barnett, R.A., Ziegler, M.R., Byleen, K.E.; 2006, Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti, Zagreb, Mate, str. 280-287.
[7] http://www.learn-math.info/croatian/historyDetail.htm?id=Kantorovich

linearnog programiranja kao metode za optimizaciju proizvodnje značajan doprinos je dao i nizozemski ekonomist Tjalling Koopmans, koji je zajedno s Kantorovichem 1975. godine dobio Nobelovu nagradu iz ekonomije i to za njihov pionirski rad u linearnom programiranju.

U ovom radu bit će pobliže objašnjena teorija linearnog i DeNovo programiranja, te primjena linearnog programiranja na primjeru pekarske proizvodnje. DeNovo programiranje predstavlja poseban pristup optimizaciji. Umjesto „optimizacije danog sistema" ono sugerira način „oblikovanja optimalnog sistema", te ovakav pristup programiranja ne ograničava resurse budući da se većina potrebnih količina može nabaviti uz odgovarajuću cijenu. Resursi su limitirani jer je njihova maksimalna količina određena budžetom koji je vrlo bitan element DeNovo programiranja.[8]

Također, u radu će se koristiti i program WinQSB (kvantitativni sustav za poslovanje), gdje će se preko njega i stvarnih podataka dobivenih iz pekarske proizvodnje dobiti određeni rezultati koji bi u konačnici predstavljali optimalni proizvodni sustav koji maksimizira profit.

1.2. Svrha i ciljevi istraživanja

Svrha i ciljevi istraživanja proizlaze iz problema i predmeta istraživanja, a to je optimizacija, odnosno maksimiziranje korisnosti ili minimiziranje troškova uz zadane uvjete što se rješava linearnim programiranjem. Također, svrha i ciljevi ovoga rada su teorijski i empirijski analizirati proces proizvodnje u pekari „Kambo", te pokazati jednostavnost primjene računalnog programa WinQSB u rješavanju različitih problema linearnog programiranja vezanih uz procese proizvodnje. Kao funkcija cilja javlja se maksimizacija profita ili ukupnog prihoda, odnosno minimizacija ukupnih troškova poslovanja.[9]

[8] Babić, Z. (2011): Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Sveučilište u Splitu, Split, str.218.
[9] Babić, Z. (2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Sveučilište u Splitu, Split, str.203.

1.3. Doprinos istraživanja

Ovim radom, odnosno istraživanjem nastoji se, osim teorijskog pregleda literature o procesima proizvodnje i njihovoj ulozi u poslovanju, formulirati model na temelju primjera proizvodnje pekarskih proizvoda u pekari „Kambo“, te uz primjenu linearnog programiranja, DeNovo programiranja i računalnog programa WinQSB dobiti optimalni model proizvodnje u kojem se ostvaruje maksimalna dobit. Također, doprinos ovog istraživanja je dokazati kako svako poduzeće uz minimalne napore može uz pomoć linearnog programiranja ostvariti efikasniju organizaciju proizvodnje koja daje maksimalnu dobit.

2. OSNOVE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Linearno programiranje je grana matematike koja se bavi problemom optimizacije sustava unutar zadanih ograničenja. Linearno programiranje promatra probleme u kojima se linearna funkcija cilja mora optimizirati (maksimizirati ili minimizirati) uz određene uvjete ili ograničenja dana u obliku jednadžbi ili/i nejednadžbi i uz nenegativne varijable odlučivanja. To je formalni postupak optimizacije sustava kod kojih se funkcija cilja i ograničenja mogu izraziti linearnim kombinacijama promjenjivih veličina. [10]

Dakle, ono predstavlja matematičku metodu određivanja optimalnog rješenja problema odlučivanja kod kojih su relacije između varijabli u funkciji cilja i skupu ograničenja linearne. Optimalno rješenje je „najbolje“ rješenje iz skupa dopustivih rješenja u skladu sa usvojenim kriterijem za koje funkcija cilja doseže ekstremnu vrijednost – maksimum ili minimum.[11]

Prvi ju je uveo i počeo koristiti Leonid Kantorovič kasnih 1930-ih godina i to kao metodu za rješavanje problema u planiranju proizvodnje. U SAD-u se linearno programiranje za vrijeme Drugog svjetskog rata koristilo uglavnom za rješavanje problema u vojnoj logistiki, kao što je optimiziranje prijevoza vojske i opreme konvojima. Također, kada pričamo o linearnom programiranju moramo spomenuti i ekonomista Tjallinga Koopmansa koji je ima velike zasluge za razvoj ove matematičke grane. On i Kantorovič su 1975. godine dobili Nobelovu nagradu za ekonomiju za njihov pionirski rad u linearnom programiranju. Vrlo bitno je napomenuti da se problem linearnog programiranja rješava simpleks metodom, a problem cjelobrojnog programiranja rješava program WinQSB metodom grananja i ograđivanja (Branch and Bound).[12]

Da bi se postavio problem matematičkog programiranja mora se:

1. Definirati funkciju cilja
2. Formirati skup ograničenja
3. Odabrati jedno ili više optimalnih rješenja[13]

---

[10] http://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Daniela%20Petkovicek%20%20Linearno%20programiranje.pdf
[11] http://web.efzg.hr/dok/MAT/tperic//2_OI_2015_1.pdf
[12] Babić, Z., I. Pavić (1996): Multicriterial Production Programming by De Novo Programming Approach, International Journal of Production Economics, Vol. 43, No.1, p. 60.
[13] Petković, M.D., (2006) Modifikacije metoda matematičkog programiranja i primjene (http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/dexter/theses/Diplfinalpng.pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

Ekonomski problem koji ima ove sve tri komponente može se definirati kao problem matematičkog programiranja, a kriterij problema linearnog programiranja može se izraziti u naturalnim, novčanim ili nekim drugim pokazateljima, ovisno prirodi promatranog problema.[14]

Matematički gledano, problem linearnog programiranja sastoji se od traženja optimuma (maksimuma ili minimuma) linearne funkcije s n varijabli x_j $(j=1,2,...n)$ povezanih linearnim odnosima (jednadžbama ili nejednadžbama) tj. ograničenjima.

Na osnovi oblika matematičkih izraza za ograničenja, postoje tri vrste problema linearnog programiranja:[15]

- Standardni problem
- Kanonski problem
- Opći problem

2.1. Standardni problem

Standardni problem u linearnom programiranju može biti problem maksimuma ili minimuma. Standardni problem maksimuma ima oblik od n varijabli i m ograničenja, koja su sva tipa „≤“ osim uvjeta nenegativnosti. U općenitom slučaju, on je oblika:[16]

maksimizirati:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \,, \; i = 1, 2, \dots, m \qquad (2)$$

i uvjet nenegativnosti:

[14] Radić, J.; (2012) Linearno programiranje i višekriterijalno odlučivanje u proizvodnji – tvornica stočne hrane (http://e-lib.efst.hr/2012/2092638.pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)
[15] http://web.efzg.hr/dok/MAT/tperic//2_OI_2015_1.pdf
[16] Babić, Z.(2011); Linearno programiranje, Split, str.71

$$x_j \geq 0, \ j = 1,2, \dots, n \qquad (3)$$

Standardni problem za maksimum (1) -(3) može se jednostavnije prikazati u matričnom obliku:

$$Max\ C^T X \qquad (1')$$

$$AX \leq B \qquad (2')$$

$$X \geq 0 \qquad (3')$$

gdje je

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Prema tome, vektor *X* je tipa (*n*, 1), a *C* i *B* vektori tipa (*n*, 1) i (*m*, 1). C^T je transponat matrice *C*, dakle matrica reda (1, *m*). *A* je matrica sustava ograničenja reda (*m*, *n*).

Standardni problem minimuma je problem linearnog programiranja koji ima oblik:

minimizirati:

$$Min\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (4)$$

uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i\ , \ i = 1, 2, \dots, m \qquad (5)$$

i uvjet:

$$x_j \geq 0, \ j = 1,2, \dots, n \qquad (6)$$

Standardni problem za minimum (4)-(6) u matričnom obliku glasi:

$$Min\ C^T X \qquad (4')$$

$$AX \geq B \tag{5'}$$

$$X \geq 0 \tag{6'}$$

Glavna karakteristika kod standardnog problema je da su sva ograničenja izražena nejednažbama. Kako bi problem linearnog programiranja bio moguć, mora postojati barem jedan vektor X koji zadovoljava uvjete (2) i (3) odnosno (5) i (6). Takav vektor zove se mogući vektor ili moguće rješenje danog problema linearnog programiranja. Neki je mogući vektor optimalan ako maksimizira linearnu funkciju (1) odnosno minimizira linearnu funkciju (4).

Kod linearnog programiranja vrijedi pravilo da svakom problemu maksimuma korespondira određeni problem minimuma koji se zove dual originalnog problema. Tako npr. za standardnom problemu maksimuma (1)-(3) odgovara dual u sljedećem obliku:

minimizirati:[17]

$$Min\ \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \tag{7}$$

uz ograničenja:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j\ ,\ j = 1,2, \dots, n \tag{8}$$

i:

$$y_i \geq 0\ , i = 1,2, \dots, m \tag{9}$$

Ili u matričnoj formi:

$$Min\ Y^T B \tag{7'}$$

$$Y^T A \geq C^T \tag{8'}$$

$$Y \geq 0 \tag{9'}$$

Očigledno je da problemu maksimuma odgovara problem minimuma, gdje se u dualu javlja novi vektor Y, tipa (m, 1). Može se zaključiti da original ima m ograničenja i n varijabli, dok dual ima n ograničenja i m varijabli. Evidentno je također da je dual od dualnog problema opet originalni problem, pa je svejedno koji će se od ta dva problema zvati originalnim problemom.[18]

[17] Babić, Z.(2011); Linearno programiranje, Split, str.72
[18] Babić, Z.(2011); Linearno programiranje, Split, str.73

2.2. Kanonski problem

Kanonski problem linearnog programiranja razlikuje se od standardnog problema po tome što su sva ograničenja (osim uvjeta negativnosti) u obliku jednadžbi. Pogodan je za primjenu različitih metoda rješavanja problema linearnog programiranja.[19]

Kanonski problem linearnog programiranja za maksimum glasi:

maksimizirati:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (10)$$

uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ ,\ i = 1,2,\ldots,m \qquad (11)$$

i uvjet:

$$x_j \geq 0\ , j = 1,2,\ldots,n \qquad (12)$$

U matričnom obliku ovaj problem izgleda ovako:

$$C^T X \qquad (10')$$

$$AX = B \qquad (11')$$

$$X \geq 0 \qquad (12')$$

Kanonski oblik linearnog modela za minimum identičan je kanonskom obliku linearnog modela za maksimum, samo što se u funkciji cilja riječ za maksimiziranje „Max“ zamjenjuje s riječju za minimiziranje „Min“.

Standardni i kanonski problem ekvivalentni su, što znači da se jedan može transformirati u drugi, što znači da se rješavanjem jednog od tih problema može dobiti i rješenje drugog problema. Da bi se standardni problem (1)-(3) mogao transformirati u kanonski potrebno je nejednadžbu:[20]

$$AX \leq B$$

pretvoriti u jednadžbu i to nadodavanjem dodatne varijable na lijevu stranu jednadžbe:

$$AX + U = B \qquad (13)$$

i daljnjim uvjetom:

$$U \geq 0 \qquad (14)$$

[19] Babić, Z.(2011); Linearno programiranje, Split, str.88
[20] Babić, Z.(2011); Linearno programiranje, Split, str.89

Pri tome je vektor U vektor dodatnih ili oslabljenih varijabli, za razliku od komponenata vektora X koje se još nazivaju i strukturnim varijablama. Vektor U ima u modelu linearnog problema nenegativnu vrijednost ,te kao vektor ima oblik (m, 1). Koeficijenti dopunskih varijabli u funkciji cilja jednaki su nuli, što znači da nemaju nikakvog utjecaja na određivanje optimalnog rješenja, pa se oni obično izostave u funkciji cilja.[21]

2.3. Opći problem linearnog programiranja

U općem problemu linearnog programiranja koji može biti problem maksimuma ili problem minimuma, ograničenja mogu biti bilo kojeg tipa. Za razliku od standardnog problema, ovdje se u istom problemu mogu javiti ograničenja tipa „≤“, „≥“, ali i jednadžbe. U postavljanju problema, neke varijable mogu, ali neke i ne moraju imati ograničenja nenegativnosti.[22] Kako bi se opći problem što lakše mogao objasniti, treba prvo definirati neke simbole.
Matrice A,B i C imaju isto značenje kao i kod standardnog odnosno kanonskog problema. S A_i označen je i-ti redak odnosno redni vektor matrice A. Dalje, neka su M i N skupovi indeksa od 1 do m za ograničenja i od 1 do n za skup indeksa svih nepoznanica:

$$M = \{1,2,\dots,m\} \qquad N = \{1,2,\dots,n\}$$

Neka je S podskup skupa M, u kojem se nalaze indeksi svih ograničenja tipa „≤“, dok su u komplementu tog skupa indeksi onih ograničenja koja su jednadžbe, tj.:

$$^{C}S = M \backslash S$$

Dalje, neka je T podskup skupa N u kojem se nalaze indeksi varijabli koje imaju ograničenje nenegativnosti. U njegovom komplementu ^{c}T su indeksi onih varijabli koje nemaju uvjet nenegativnosti, tj. vrijedi:

$$^{C}T = N \backslash T$$

Nakon definiranja navedenih simbola, opći problem može se napisati u matričnom obliku na sljedeći način:
maksimizirati:

$$C^T X \qquad (15)$$

uz ograničenja:

$$A^i X \le b_i\,, \quad i \in S \qquad (16)$$

$$A^i X = b_i\,, \quad i \in {}^{C}S \qquad (17)$$

[21] Babić, Z.(2011); Linearno programiranje, Split, str.89
[22] Babić, Z.(2010); Linearno programiranje, Split, str.107

$$x_j \geq 0\,, \quad j \in T \tag{18}$$

Kod postavljanja općeg problema linearnog programiranja, neka su ograničenja tipa nejednadžbi (16) a ostali su u obliku jednadžbi (17). Iz uvjeta (18) se vidi da ne moraju sve varijable imati uvjet nenegativnosti, dovoljno je da barem jedna varijabla ima taj uvjet.
Opći problem (15) - (18) može se transformirati u standardni u slučaju kada je S=M i T=N, tako da su njihovi komplementi ${}^{C}S$ i ${}^{C}T$ prazni skupovi, tj.${}^{C}S$=0 i ${}^{C}T$=0.
U slučaju da vrijedi S=0, tada opći problem postaje kanonski, jer su sva ograničenja oblikovana kao jednadžbe, tj. nema nejednadžbi.

Dual općeg problema ima sljedeći oblik:
minimizirati:

$$Min\ Y^T B \tag{19}$$

uz ograničenja:

$$Y^T A_j \geq c_j\,,\ j \in T \tag{20}$$

$$Y^T A_j = c_j\,,\ j \in {}^{C}T \tag{21}$$

i uvjet:

$$y_i \geq 0\,,\ i \in S \tag{22}$$

gdje je oznaka za j-ti stupac - vektor matrice A.

Može se zaključiti da svakoj varijabli originalnog problema odgovara jedno ograničenje dualnog problema. U slučaju da varijabla x_j u originalu ima ograničenje nenegativnosti, tada će j-to ograničenje u dualu biti oblika „≤“. Ako varijabla x_j u originalu nema ograničenje nenegativnosti, tada je ograničenje u dualu u obliku jednadžbe. Isto vrijedi i u obrnutom slučaju, tj. ako je ograničenje u originalu tipa „≤“, tada varijabla u dualu ima oblik nenegativnosti. Također, ako ograničenje iz originalnog problema ima oblik jednadžbe, tada odgovarajuća varijabla u dualu nema uvjet nenegativnosti.[23]

[23] Babić, Z.(2010); Linearno programiranje, Split, str. 110.

3. DE NOVO PROGRAMIRANJE

Koncept dizajniranja organizacije poduzeća, ili kako ga neki zovu ″projektiranje″organizacije“, nastao je iz samog shvaćanja fenomena organizacije, pa odatle proizlaze i različite definicije dizajniranja kao procesa organizacijske izgradnje.[24]

Jedan od tih načina ″dizajniranja″ organizacije je De Novo koncept optimizacije kojeg je pred više od 30 godina uveo Milan Zeleny, koji je bio jedan od utemeljitelja višekriterijalnog odlučivanja.[25] De Novo programiranje predstavlja poseban pristup optimizaciji gdje ovakav način programiranja umjesto ″optimizacije danog sistema″ sugerira način ″oblikovanja optimalnog sistema″. Osnova matematičkog, a posebno linearnog načina programiranja je proizvodni model u kojem su resursi i njihove količine ili kapacitete unaprijedi definirani, što znači da su ograničenja i skup mogućih rješenja fiksni i zadani.[26]

De Novo pristup ne ograničava resurse jer se većina potrebnih količina može nabaviti uz ogovarajuću cijenu. Vrlo važan element De Novo pristupa je budžet, jer su resursi ipak limitirani odnosno njihova količina je određena upravo raspoloživom količinom novca. Osim ograničenja budžeta, u model se još mogu uključiti i ograničenja ponude, potražnje ili kapaciteta strojeva.[27]

Upotrebom ovakvog pristupa odnosnog ovog tipa programiranja mogu se brojni slučajevi razmatrati na mnogo prihvatljiviji način nego sa standardnim modelima programiranja. Različite proizvodne situacije kao što su promjene cijena, rastući troškovi, količinski popusti i slično mogu se lako uključiti u model i dati odlične rezultate. Također, ako postoji mogućnost za nabaviti više novaca za budžet, upotrebom De Novo programiranja može se odrediti način kako optimalno oblikovati naš sistem za upravo toliku količinu novca.[28]

[24] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.218
[25] Zeleny, M (1986): Optimal System Design with Multiple Criteria: De Novo Programming Approach, Engineering Costs and Production Economics, No. 10, p. 91.
[26] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.218
[27] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.218
[28] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.218

De Novo formulacija problema se razlikuje od tradicionalnog pristupa modelu proizvodnje u nekoliko aspekata:

1. Model proizvodnje pretpostavlja da su resursi ograničeni na unaprijed određenu količinu, a pretpostavka ″neograničenosti″ resursa u De Novo pristupu ne znači da se može nabaviti bilo koja količina resursa, nego da su maksimalne količine resursa određene budžetom.[29]
2. De Novo pretpostavlja da je analiza napravljena prije nabavke resursa, dok nemamo fiksirane količine resursa i još je moguće upravljati nabavom. Dakle, nabava resursa se može kontrolirati, što znači da se resursi mogu nabaviti u bilo kojoj količini bez obzira koliko ona malena bila, te se mogu nabaviti u bilo kojoj kombinaciji. Prema tradicionalnom modelu potrebni resursi se mogu nabaviti u minimalnoj količini u odnosu na kapacitete postrojenja i strojeva. Međutim, oba model imaju pretpostavku da je upotreba tih resursa aditivna i proporcionalna.[30]
3. Model proizvodnje nije osjetljiv na faktor cijena resursa, dok je u De Novo modelu obratna situacija. Resursi imaju odgovarajuće cijene koje se temelje na stvarnim nabavnim troškovima, cijene su input a ne output, što znači da je ovakav model osjetljiv na faktor cijena. Resursi se nabavljaju u točno određenim količinama te nema nikakvih viškova ni ostataka resursa, a sve ″cijene u sjeni″ su pozitivne i nema ″slobodnih roba″.[31]
4. Za razliku od tradicionalnog pristupa, važno svojstvo De Nova je ograničenje budžeta. To je jedini zajednički iskaz kombinacije među resursima, te on služi kao zajednički nazivnik svih traženih resursa.[32]
5. Rezultata De Nova podrazumijeva potpunu iskorištenost resursa, gdje nema gubitaka ili neiskorištenih resursa. Dio resursa možete biti raspoloživ u dodatnim količinama, gdje se taj aspekt rješava određenim sigurnosnim postotkom resursa, te oni obično ne predstavljaju rezultat modela. Kada se definira optimalan dizajn, te potrebna količina resursa, tada se određuju prave vrijednosti kapaciteta strojeva, potrebne količine zaliha, novca itd.[33]

[29] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.221
[30] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.222
[31] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.222
[32] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.222
[33] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.222

Na temelju ovih razlika između tradicionalnog pristupa modelu proizvodnje i De Novo pristupa, može se zaključiti da De Novo pristup ima sljedeće karakteristike:[34]

1. U slučaju neograničene potražnje za finalnim proizvodima s konstantnim cijenama, De Novo formulira sistem tako da se proizvodi samo najprofitabilniji proizvod.
2. Promjena budžeta nema utjecaja na izbor proizvoda, mijenja se samo količina, ako nema ograničenja potražnje. Promjena odnosno povećanje budžeta jednostavno povećava količinu najprofitabilnijeg proizvoda.
3. Ako se dogodi situacija ograničene potražnje za finalnim proizvodima varijacije nastaju u skladu s De Novo preporukom, a to je startati s najprofitabilnijim proizvodom, maksimalno ga proizvesti, zatim krenuti na sljedeći proizvodi po profitabilnosti te ponavljati postupak dok se ne iscrpi cijeli budžet.

3.1.Formulacija problema u De Novo programiranju

Tradicionalni jednokriterijalni model linearnog programiranja koji se koristi za problem proizvodnje sastoji se od funkcije cilja i ograničenja resursa, tj. vrijedi:

$$Max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + _{\dots} + c_nx_n \qquad (23)$$

pri ograničenjima:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + _{\dots} + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + _{\dots} + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + _{\dots} + a_{mn}x_n \leq b_m \qquad (24)$$

$$x_j \geq 0\,, \quad j = 1, 2, \dots, n \qquad (25)$$

gdje je:

x_j, (j = 1, 2, ..., n) - skup varijabli odluke gdje se podrazumijeva da svaki x_j predstavlja nivo aktivnosti j-tog proizvoda;

z - mjera koristi ili dostizanja cilja;

c_j - koeficijenti doprinosa danom cilju po jedinici j - te aktivnosti;

[34] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.223

a_{ij} - količina (normativ) resursa i upotrjebljena za jednu jedinicu j-te aktivnosti;

b_i - dana raspoloživost i - tog resursa ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Takav tip formulacije problema sadrži odluku o nivou zadanih aktivnosti (količini proizvoda), ili u kontekstu formulacije ovog teksta, programu proizvodnje. Kroz dani skup ograničenja pretpostavlja se naravno i raspoloživost određene količine resursa b_i.

De Novo formulacija problema razmatra problem optimizacije u potpuno sistemskom obliku. Model se javlja u sljedećem obliku:

$$Max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 +_{\ldots} + c_nx_n \qquad (26)$$

pri ograničenjima:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +_{\ldots} + a_{1n}x_n = x_{n+1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +_{\ldots} + a_{2n}x_n = x_{n+2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +_{\ldots} + a_{mn}x_n = x_{n+m} \qquad (27)$$

$$p_1x_{n+1} + p_2x_{n+2} +_{\ldots} + p_mx_{n+m} \leq B \qquad (28)$$

$$x_{j\,,}\ x_{n+1} \geq 0\,,\ j = 1, 2, \ldots, n\,,\ i = 1, 2, \ldots, m \qquad (29)$$

Pri čemu su:

x_{n+i} - skup varijabli odluke koje predstavljaju nivo i-tog resursa koji treba nabaviti;

p_i - cijena jedinice i-tog resursa;

B - ukupno raspoloživi budžet za dani sistem.

Osnovna razlika između ta dva modela leži u tretmanu resursa, koji postaju varijable odluke x_{n+i} u De Novo formulaciji problema.

Primjenom De Novo modela se određuje optimalni proizvodni program ne samo u smislu outputa, već također i u kombinaciji inputa (resursa) koji su potrebni za taj optimalni proizvodni program. Na taj način dolazi se do "dizajniranja optimalnog sistema" umjesto "optimizacije danog sistema". Štoviše, takav model daje integriranu i cjelovitu ideju o tome kako koristiti resurse kroz raspoloživu količinu materijalnih sredstava, odnosno kroz dani budžet.

Rješavanje De Novo modela može se pojednostavniti supstituiranjem jednadžbi za x_{n+i}, tj. jednadžbi (27) u jednadžbu budžeta (28). Pretpostavimo da su dane tržišne cijene p_i za i-ti resurs i označimo sa v_j jedinični varijabilni trošak proizvodnje j-tog proizvoda, tj. vrijedi:

$$p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + _{\dots} + p_m a_{mj} = v_j \,, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

Dakle, općenito vrijedi izraz:

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} p_i \, a_{ij} \,, \; j = 1,2, \dots, n \tag{30}$$

pri čemu je:

a_{ij} - količina resursa i korištena za proizvodnju jedinice j-tog proizvoda;

p_i - jedinična cijena i-tog resursa;

v_j - ukupni trošak svih resursa iskorištenih (potrebnih) za proizvodnju jedne jedinice j-tog proizvoda.

U De Novo modelu, relacija (30) može se preformulirati u jednostavniji oblik. Naime, uvrštavajući relacije (27) u relaciju (28) dobije se:

$$p_1(a_{11}x_1 + _{\dots} + a_{1n}x_n) + p_2(a_{21}x_1 + _{\dots} + a_{2n}x_n) + _{\dots.} + p_m(a_{m1}x_1 + _{\dots} + a_{mn}x_n) \le B \,,$$

tj.

$$(p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + _{\dots} + p_m a_{m1})x_1 + (p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + _{\dots} + p_m a_{m2})x_2 + _{\dots}$$
$$+ (p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + _{\dots} + p_m a_{mn})x_n \le B \,,$$

odnosno

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + _{\dots} + v_n x_n \le B$$

Na taj način model (26)-(29) može se prikazati u puno jednostavnijem obliku:

$$Max \; z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + _{\dots} + c_n x_n \tag{31}$$

pri ograničenjima:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + _{\dots} + v_n x_n \le B \tag{32}$$

$$x_j \ge 0 \,, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{33}$$

U slučaju da nema nikakvih drugih ograničenja rješavanje pojednostavljenog modela je dosta lako budući da ima jednu funkciju cilja i samo jedno ograničenje (uz ograničenja nenegativnosti).

Procedura rješavanja De Novo modela je sljedeća:

1. Odrediti $\underset{j}{Max} (c_j / v_j)$

Omjer (c_j / v_j) predstavlja profitabilnost *j*-tog proizvoda (ako je funkcija cilja maksimiziranje profita). Taj korak ustvari za optimalno rješenje "nudi" najprofitabilniji proizvod.

2. Za maksimalni (c_j / v_j), recimo (c_k / v_k) koji odgovara *k*-tom proizvodu, tj. varijabli x_k, količina *k*-tog proizvoda koju treba proizvesti je:

$$x_k{}^* = B / v_k \, .$$

To povlači za sobom da će se sav raspoloživi budžet potrošiti da bi se proizveo najprofitabilniji proizvod x_k, čija količina će, u odsutnosti drugih ograničenja, biti diktirana jedino budžetom.

Ako postoje ograničenja potražnje na svaki proizvod x_j, tada se De Novo model može riješiti na sljedeći način:

1. Odrediti $\underset{j}{Max}\,(c_j / v_j)$
2. Za maksimalni (c_j / v_j), recimo (c_k / v_k), odrediti x_k tako da ne premašuje ograničenje potražnje, ili maksimum dozvoljen budžetom.
3. Ako budžet nije potrošen proizvodnjom x_k, izabrati sljedeći proizvod po profitabilnosti, tj.

$$\underset{j}{Max}\,(c_j / v_j),\ gdje\ je\ j \neq k.$$

4. Vratiti se na 2. korak dok se ne iscrpi cijeli budžet.

Potrebne količine sirovina, x_{n+i}, za tu proizvodnju tada se lako određuju iz relacija (27).

3.2. Efekti višestrukih cijena

U stvarnom poslovanju, model linearnog programiranja teško se može uspješno primijeniti zbog svoje pretpostavke o proporcionalnosti. Vrlo čest slučaj u praksi su različite cijene istog resursa ili gotovog proizvoda, jer poduzeća mogu imati više od jednog dobavljača svojih sirovina i mogu ih nabavljati po različitim cijenama. Također, vrlo česta pojava je da se za veće narudžbe dobivaju količinski popusti ili da cijene robe padaju zbog velike količine robe u prodaji. Moguća je i situacija da se zbog širenja na nova tržišta ulaže više nova u promidžbu i marketing te se na taj način povećavaju troškovi poslovanja za neku dodatnu količinu robe.

Za razliku od tradicionalnog pristupa, sve ove različite proizvodne situacije mogu se jako lijepo prikazati pomoću De Novo formulacije problema.[35]

3.2.1. Rastući troškovi sirovina

U slučaju rastućih cijena sirovina, možemo uključiti De Novo programiranje koristeći jednostavan model oblika:

$$\text{Max}\, Z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{34}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{35}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{36}$$

$$p_1b_1 + p_2b_2 \leq B \tag{37}$$

$$x_j\,, b_i \geq 0 \tag{38}$$

Pretpostavljajući da cijena druge sirovine p_2 vrijedi samo za $b_2 \leq Q$, gdje je Q količina druge sirovine iznad koje cijena raste, tj. $p_3 > p_2$ je cijena koju treba platiti za dodatnu količinu druge sirovine ako se ona nabavlja u količini većoj od Q. Tada se novi model može formulirati tako da se uzme u obzir i taj rastući trošak, odnosno model će imati oblik:

$$Max\ Z\ = s_1x_1 + s_2x_2 - (p_1b_1 + p_2b_2 + p_3b_3) \tag{39}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{40}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 + b_3 \tag{41}$$

$$p_1b_1 + p_2b_2 + p_3b_3 \leq B \tag{42}$$

$$b_2 \leq Q \quad , \tag{43}$$

[35] Babić, Z., T. Hunjak (2006): *The Use of Multicriteria De Novo Programming in the Production Planning Problem*, Proceedings of the11th International Conference on Operational Research KOI 2006, Pula, Croatia

$$x_j\,, b_i \geq 0 \qquad (44)$$

gdje su:

b_3- količina druge sirovine koja se nabavlja iz skupljeg izvora,
p_3- cijena druge sirovine ako se ona nabavlja iz skupljeg izvora,
s_j- prodajna cijena j – tog proizvoda, a ostale varijable imaju isto značenje kao i prije.

Uspoređujući ova dva modela može se zaključiti:[36]

1) Novi model razdvaja upotrebu drugog tipa sirovine u dvije varijable, b_2 iz jeftinijeg i b_3 iz skupljeg izvora. Relacija (36) preformulirana je u (41) i odnosi se na različite izvore i troškove.
2) Budući da se ista sirovina javlja s različitim cijenama prihod po jedinici finalnih proizvoda nije više konstantan. Zbog toga maksimiziranje sume $c_j x_j$ nije više adekvatna mjera profita. Jednažba profita (34) mora se proračunati kao razlika između prihoda i ukupnih troškova za materijal (39).
3) Nema potrebe specificirati da b_2 treba prvo dostići maksimalnu vrijednost od Q prije nego se dozvoli da b_3 bude veći od nule. Naime optimizacijski model osigurava da b_2 dostigne prvo maksimalnu vrijednost (Q) zbog nižeg pondera, tj. niže cijene p_2.
4) U slučaju da je budžet iscrpljen, De Novo maksimizacija prihoda i profita su ekvivalentne. Objasnit ćemo ovu tvrdnju na primjeru funkcije cilja:

$$Max\ Z\ = s_1x_1 + s_2x_2 - (p_1b_1 + p_2b_2 + p_3b_3).$$

Ako je $(p_1b_1 + p_2b_2 + p_3b_3)$ konstantno, tada se funkcija cilja reducira na

$$Max\ Z\ = s_1x_1 + s_2x_2\ ,$$

tj. na maksimizaciju prihoda da će problem linearnog programiranja imati isto rješenje bez obzira na konstantu u funkciji cilja. Prema tome, ako se budžet koristi u potpunosti (pa je $p_1b_1 + p_2b_2 + p_3b_3 = B$) maksimizacija prihoda i profita su u De Novu komplementarne.

[36] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.239

3.2.2. Količinski popusti

De Novo programiranje s količinskim popustima koristi se u situacijama kada se nabavlja veća količina sirovina, te se na temelju toga dobiva popust na naručenu količinu. Jednostavni proizvodni model ima sljedeći oblik:

$$Max\ Z = s_1x_1 + s_2x_2$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$$p_1b_1 + p_2b_2 \leq B$$

$$x_j\ , b_i \geq 0$$

Kada pretpostavimo da za drugi resurs (b_2) vrijedi cijena p_2 za $b_2 \leq Q$,tada se cijena p_3 koja je niža, pojavljuje za cijelu količinu ako se taj resurs nabavlja u količini koja je veća od Q. Prema tome, vrijedi da je $p_3 < p_2$.

Neka je:

b_2- količina resursa tipa 2 ako se on nabavlja u manjoj količini nego što je ona za koju se dobiva popust,
b_3- količina resursa tipa 2 ako se on nabavlja uz količinski popust,
p_3- nova diskontna cijena za nabavku resursa tipa 2 ($p_3 < p_2$).
Potrebno je formulirati novi model, jer formulacija iz prethodnog odjeljka ovdje nije primjenjiva budući da bi optimizacijski model doveo do korištenja jeftinijeg materijala bez da se zadovolji tražena kvota (Q).
Novi model ima sljedeći oblik:

$$Max\ Z = s_1x_1 + s_2x_2 - p_1b_1 - p_2b_2 - p_3b_3 \qquad (45)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (46)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 + b_3 \qquad (47)$$

$$b_2 - Q^*y_1 \leq 0 \qquad (48)$$

$$b_3 - Qy_2 \geq 0 \qquad (49)$$

$b_3 - My_2 \leq 0$ (50)

$p_1b_1 + p_2b_2 + p_3b_3 \leq B$ (51)

$y_1 + y_2 = 1$ (52)

$x_j\ , b_i \geq 0$ (53)

$y_1, y_2 = 0\ ili\ 1$ (54)

gdje je:
M- jako veliki pozitivan broj ($M >> 0$) ili gornja granica za nabavku druge sirovine,
Q^*- broj koji je neznatno manji od Q.
y_1, y_2- varijable koje su 0-1 varijable.

Problem međusobne isključivosti varijabli b_2 i b_3 može se uvesti na sljedeći način:

Ako je b_3=0 (nema količinskog popusta) tada mora vrijediti relacije $b_2 < Q$ tj. potrebna količina sirovina je ispod one za koju se dobiva popust. Ako je $b_2 = 0$ tada vrijedi relacija $b_3 > Q$(došli smo do količine sirovina za koju se odobrava popust). Zbog toga, se uvode tri dodatna ograničenja (48),(49) i (50) i dvije binarne (0-1) varijable y_1i y_2.

Tada, ako je y_1=1 zbog relacije (52) slijedi y_2=0. Relacije (48), (49) i (50) poprimaju oblik:

$$b_2 \leq Q^*$$

$$b_3 \geq 0$$

$$b_3 \leq 0.$$

Posljednje dvije relacije osiguravaju da je b_3=0, a b_2 je strogo manji od granice Q, budući da je Q^*neznatno manji od veličine Q.

U slučaju da je y_2=1 zbog relacije (52) slijedi y_1=0. Tada relacije (48), (49) i (50) postaju:

$$b_2 \leq 0$$

$$b_3 \geq Q$$

$$b_3 \leq M$$

Uvjet $b_2 \leq 0$ i uvjet nenegativnosti na varijablu b_2 tada osiguravaju da bude b_2=0, a b_3 je veća (ili jednaka) od granice popusta i manja od velikog pozitivnog broja M (ili neke unaprijed zadane gornje granice).

Ovaj način uvođenja količinskih popusta je koristan pogotovo kada postoji više razreda po kojima dobavljač odobrava različite količinske popuste.

4. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA NA PRIMJERU PROIZVODNJE PEKARSKIH PROIZVODA

4.1. Pekarnica „Kambo“

Pekarnicu "Kambo" osnovao je Ante Kamber 1994. godine u Stobreču pokraj Splita.Velikim zalaganjem i kvalitetom proizvoda pekarnica "Kambo" je iz godine u godinu radila u pozitivnom pravcu koji joj je omogućio da bude među najboljim pekarama u Splitsko-dalmatinskoj županiji. Međutim danas su sjedište, proizvodni pogon, te skladište locirani su u industrijskoj zoni u Dugopolju gdje se odvija cijeli proizvodni proces, a zatim se gotovi proizvodi transportiraju u poslovnice.

Uvijek nešto novo, uvijek nešto bolje od prijašnjeg proizvoda i uvijek nešto još zdravije – moto je Ante Kambera, vlasnika Obrta za proizvodnju, trgovinu i ugostiteljstvo "Kambo", tvrtke koja se specijalizirala za pekarske proizvode i slastice.

"Kambo" već slavi i 13. rođendan, a prvi čovjek firme još uvijek, iz dana u dan, istražuje koji novi proizvod mogu "izbaciti" njegove pekare. Svaka dva mjeseca tržištu ponude novu slasticu ili pekarski proizvod, uvijek su u potrazi za novitadama, a posebnu pažnju posvećuju zdravoj prehrani jer ipak je kruh nezaobilazan na svakom stolu, serviran uz sva jela.

Prepoznatljivi su posebno po "šlapici" te sada nude bijelu, kukuruznu i raženu "šlapicu", a ponudili su i prvi kruh ispod peke, i to od više vrsta brašna.

Osim ovoga, na policama "Kamba" je i te kako mirisan i zdrav kruh od kukuruznog brašna. Često mušterije reagiraju kako je kukuruzni kruh zbijen, te sumnjaju u prave sastojke, pa mušterijama moraju objašnjavati da je tek zbijeni kruh, onaj koji nema rahlo, dignuto tijesto, od pravog kukuruznog brašna jer zbog termičke posebne obrade toplom vodom kukuruz ostaje težak i zbijen. Ista situacija je i s “bavarskim kruhom” od raži koji također ne može biti “uskisao” – pojasnili su nam tajne pekarskog zanata Kamber, još jednom naglašavajući kako njihovi djelatnici, njih 60, od čega je čak 40 žena, iznimno paze na kvalitetu i same sastojke proizvoda.

Poseban hit u pekari “Kambo” je i kruh “finac” od sedam vrsti sjemenki, koji je odličan za regulaciju probave, no slastice su opet prava opasnost za vitku liniju.

“Kambo” ima 30 vrsta suhih i 40 vrsta kremastih kolača, sve oblike torti, a u posljednje vrijeme za svadbe prave i bogati švedski stol od kolača.[37]

4.2. Definiranje i formuliranje modela na primjeru pekarske proizvodnje

Model linearnog programiranja u pekarskoj proizvodnji može se primijeniti na više problema, pa se tako naprimjer mogu minimizirati troškovi proizvodnje uzimajući u obzir troškove proizašle iz cijena sirovina, ili se može maksimizirati profit tvornice na temelju dobivene količine proizvoda i utrošenih sirovina. Također, može se odrediti i optimalan redoslijed proizvodnje pojedinih proizvoda s obzirom na njihovu potražnju.[38]

U ovom radu definirati ćemo model linearnog programiranja u pekarskoj proizvodnji i to na temelju stvarnih podataka dobivenih iz proizvodnog pogona pekare Kambo d.o.o., koji će pokušati maksimizirati profit prema utrošku sirovina u pojedinim proizvodima. Dakle, funkcija cilja će biti maksimizacija profita proizvodnog pogona.

U tablici 1. na sljedećoj stranici prikazano je 15 proizvoda odnosno artikala koji se svakodnevno proizvode u proizvodnom pogonu te plasiraju na tržište u prodaju. Također, u tablici su prikazani i podatci kao što je težina proizvoda u kilogramima, gornja i donja granica njihove tjedne proizvodnje, prodajne cijene proizvoda po komadu u koje je uključen i PDV, trošak sirovina po komadu proizvoda, te razlika između prodajne cijene proizvoda i troška sirovina odnosno prihod po komadu proizvoda.

---

[37] Pekarnica „Kambo“ - http://kambo.hr/o-nama/

[38] Babić, Z., T. Hunjak (2006): *The Use of Multicriteria De Novo Programming in the Production Planning Problem*, Proceedings of the11[th] International Conference on Operational Research KOI 2006, Pula, Croatia, str. 258.

Tablica 1. Popis artikala –proizvoda

Oznaka	Šifra artikla	Naziv artikla	Težina u kg	Tjedna količina proizvodnje gornja	donja	Prodajne cijene po komadu (sa porez)	Trošak sirov. po komadu	Prihod
A1	101	Raženi miješani bavarac	0,5	110	80	10,8	1,248	9,552
A2	102	Kukuruzni miješani	0,55	60	40	6,66	1,369	5,291
A3	103	Kruh sa sjemenkama suncokreta (bakin)	0,4	220	180	10,5	2,249	8,251
A4	104	Pšenični miješani polubijeli (zanat)	0,65	3000	2700	7,25	1,151	6,099
A5	105	Pšenični polubijeli kruh narodni	0,55	900	700	5,5	0,896	4,604
A6	106	Pšenični bijeli kruh	0,6	4000	3700	7,3	1,253	6,047
A7	107	Vrlička pogača	0,6	1600	1200	6	1,68	4,32
A8	108	Bijelo pecivo mini slanci	0,1	500	300	2,31	0,379	1,931
A9	109	Bijelo pecivo mliječna kifla	0,1	1200	800	2,22	0,456	1,764
A10	110	Nadjevno pecivo lisnati sir	0,12	1000	800	5,5	2,472	3,028
A11	111	Bijelo pecivo okrugla kajzerica	0,05	1500	1000	2,18	0,395	1,785
A12	112	Kroasan marmelada	0,1	900	700	4,1	2,112	1,988
A13	113	Krafna	0,06	3000	2500	2,36	1,05	1,31
A14	114	Bijelo pecivo štangica	0,05	600	400	2,14	0,693	1,447
A15	115	Lisnato višnja	0,12	650	350	4,8	2,556	2,244

Izvor: interni podatci pekarna Kambo d.o.o., izradio autor

U nastavku, tablica 2. prikazuje popis korištenih sirovina potrebnih za proizvodnju proizvoda navedenih u tablici 1., te njihove cijene po gramu i kilogramu.

Tablica 2. Popis korištenih sirovina

Oznaka	Šifra	Naziv sirovine	Cijene po 1 kg	Cijene po 1g
S1	301	Pšenično brašno T-850	1,9	0,0019
S2	302	Pšenično brašno T-550	2,05	0,00205
S3	303	Raženo brašno	3,75	0,00375
S4	304	Pšenično brašno T-110	2,15	0,00215
S5	305	Sol kuhinjska	1,46	0,00146
S6	306	Kvasac	6,8	0,0068
S7	307	Aditiv Jasko L	12,7	0,0127
S8	308	Koncentrat s kukuruz.	8,83	0,00883
S9	309	Aktiv Mix	17,05	0,01705
S10	310	Šećer	5,2	0,0052
S11	311	Čista kukurz. Krupica	8,39	0,00839
S12	312	Ulje jestivo	7,4	0,0074
S13	313	Margarin BV	8,3	0,0083
S14	314	Margarin Tropic	10,65	0,01065
S15	315	Jaja (komada)	0,9	0,0009
S16	316	Aroma vanilija	31	0,031
S17	317	Vanilijin šečer	11,45	0,01145
S18	318	Aroma Naranča	33,5	0,0335
S19	319	Raženo tekuće kiselo tijesto	46	0,046
S20	320	Sir za pekarstvo	13	0,013
S21	321	Poboljšivač Back Estrakt	18,86	0,01886
S22	322	Marmelada	8,15	0,00815

Izvor: interni podatci pekarna Kambo d.o.o., izradio autor

U tablici na slici 1. prikazane su količine sirovina u gramima utrošene po jedinici proizvoda, a tablica se sastoji od 15 artikala i 22 sirovine. Pa tako naprimjer za proizvodnju kukuruznog miješanog kruha (A2) potrebno je utrošiti 258,62 grama pšeničnog brašna T-550 (S2), 6,89 grama kuhinjske soli (S5), zatim 6,89 grama kvasca (S6), te 86,2 grama koncentrata s kukuruzom (S8).

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
S1	206,3			111,82	284,91										
S2	31,2	258,62	250	377,53	112	450	450	81	81	90	42	73,5	43,546	20	73,5
S3	137,5				12,37										
S4															
S5	7,6	6,89	4,35	10,74	8,2	9,8	8,9	1,24	1,5	1,48	0,8	0,7			0,89
S6	6,9	6,89	0,5	5,4	1,1	6,6	1,8	9	1		0,4	1,17	0,15	1,5	
S7	1			0,45		1,3	8,9	0,2	1	0,74	0,1				
S8		86,2	56,9							11,1					
S9			14,73							5					
S10					1,9	4,6	2	2,3	3,1		1,6	9,41	0,7		10
S11		1													
S12						9	6,324						2,555		5
S13			7,5				5,124		9	1,1	5,3	4,7		3,6	
S14				7,4			0,14			37			6,86		27,77
S15												22,8	4,43	2,5	
S16													0,175		
S17													0,085		
S18															0,2
S19													4,513		
S20										80					
S21														18,2	
S22												26	13,364		40,04

Slika 1. Količina sirovina (u gramima) po jedinici proizvoda

Izvor: interni podaci pekarna Kambo d.o.o., izradio autor

Nakon određivanja, odnosno definiranja svih potrebnih podataka potrebnih za rješavanje problema linearnog programiranja, možemo postaviti i model. Funkcija cilja u modelu koju je potrebno maksimizirati ima oblik:

$$\begin{aligned} Max\ Z = {} & 9.75773x_1 + 5.30338x_2 + 9.16193x_3 + 6.12668x_4 + 4.65335x_5 + 6.21128x_6 \\ & + 4.83802x_7 + 2.06644x_8 + 1.94144x_9 + 3.6775x_{10} + 2.03643x_{11} \\ & + 3.61999x_{12} + 1.8472x_{13} + 1.71342x_{14} + 3.93025x_{15} \end{aligned}$$

Količine sirovina koje će se koristiti u ovom modelu kao ograničenja, predstavljaju stvarne količine proizvodnje pekare „Kambo" u promatranom razdoblju od jednog tjedna.

Raspoloživa količina za pšenično brašno T-850 (S1) iznosi 600000g, pa je ograničenje:

$$\mathbf{S_1} \qquad 206.3\,x1 + 111.82\,x4 + 284.91\,x5 \leq 600\,000$$

Dakle, sustav ograničenja za sve ostale sirovine će imati sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \mathbf{S_2} \qquad & 31.2x1 + 258.62x2 + 250x3 + 377.53x4 + 112x5 + 450x6 + 450x7 + 81x8 \\ & + 81x9 + 90x10 + 42x11 + 73.5x12 + 43.546x13 + 20x14 + 73.5x15 \\ & \leq 4\,100\,000 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S_3} \qquad 137.5x1 + 12.37x5 \leq 24\,000$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S_4} \qquad & 7.6x1 + 6.89x2 + 4.35x3 + 10.74x4 + 8.2x5 + 9.8x6 + 8.9x7 + 1.24x8 \\ & + 1.5x9 + 1.48x10 + 0.8x11 + 0.7x12 + 0.89x15 \leq 98\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S_5} \qquad & 6.9x1 + 6.89x2 + 0.5x3 + 5.4x4 + 1.1x5 + 6.6x6 + 1.8x7 + 9x8 + 1x9 + 0.4x11 \\ & + 1.17x12 + 0.15\,x13 + 1.5\,x14 \leq 54\,000 \end{aligned}$$

$$\mathbf{S_6} \qquad 1x1 + 0.45x4 + 1.3x6 + 8.9x7 + 0.2x8 + 1x9 + 0.74x10 + 0.1x11 \leq 21\,000$$

$$\mathbf{S_7} \qquad 86.2x2 + 56.9x3 + 11.1x10 \leq 26\,000$$

$\mathbf{S_8}$ $14.73x3 + 5x10 \leq 8\,000$

$\mathbf{S_9}$ $1.9x5 + 4.6x6 + 2x7 + 2.3x8 + 3.1x9 + 1.6x11 + 9.41x12 + 0.7x13 + 10x15 \leq 45\,000$

$\mathbf{S_{10}}$ $x2 \leq 60$

$\mathbf{S_{11}}$ $9x6 + 6.324x7 + 2.555x13 + 5x15 \leq 54\,000$

$\mathbf{S_{12}}$ $7.5x3 + 5.124x7 + 9x9 + 1.1x10 + 5.3x11 + 4.7x12 + 3.6x14 \leq 32\,000$

$\mathbf{S_{13}}$ $7.4x4 + 0.14x7 + 37x9 + 6.86x13 + 27.77x15 \leq 88\,000$

$\mathbf{S_{14}}$ $22.8x12 + 4.43x13 + 2.5x14 \leq 33\,000$

$\mathbf{S_{15}}$ $0.175x13 \leq 500$

$\mathbf{S_{16}}$ $0.085x13 \leq 300$

$\mathbf{S_{17}}$ $0.2x15 \leq 120$

$\mathbf{S_{18}}$ $4.513\,x13 \leq 13\,000$

$\mathbf{S_{19}}$ $80x10 \leq 74\,000$

$\mathbf{S_{20}}$ $18.2x14 \leq 9\,200$

$\mathbf{S_{21}}$ $26x12 + 13.364x13 + 40.04x15 \leq 78\,000$

Nakon što smo uveli ograničenja količine sirovina, potrebno je uvesti i ograničenja minimalne i maksimalne količine proizvodnje. Određivanje granice minimalne količine proizvodnje određenog proizvoda je bitno kako ne bi došlo do isključenja proizvodnje onih proizvoda koji donose minimalnu dobit, tj. kako ne bi došlo do proizvodnje samo onih proizvoda koji donose maksimalnu dobit, već kako bi došlo do optimalne razine proizvodnje i iskorištenosti resursa.

U ovom radu koriste se stvarni podatci pekare „Kambo", a koristit će se donja i gornja razina tjedne proizvodnje koju možemo vidjeti u tablici 1., pa tako vrijedi:

Za proizvod x_1 odnosno kruh raženi miješani bavarac:

$$80 \leq x_1 \leq 110$$

gdje je minimalna tjedna proizvodnja 80 komada, a maksimalna tjedna proizvodnja 110 komada.

Ograničenja za minimalnu i maksimalnu proizvodnju ostalih proizvoda imaju sljedeći oblik:

$$40 \leq x_2 \leq 60$$

$$180 \leq x_3 \leq 220$$

$$2700 \leq x_4 \leq 3000$$

$$700 \leq x_5 \leq 900,$$

$$3700 \leq x_6 \leq 4000$$

$$1200 \leq x_7 \leq 1600$$

$$300 \leq x_8 \leq 500$$

$$800 \leq x_9 \leq 1200$$

$$800 \leq x_{10} \leq 1000$$

$$1000 \leq x_{11} \leq 1500$$

$$700 \leq x_{12} \leq 900$$

$$2500 \leq x_{13} \leq 3000$$

$$400 \leq x_{14} \leq 600$$

$$350 \leq x_{15} \leq 650$$

Uz navedena ograničenja vezana za količine sirovina i proizvodnju, također treba navesti i uvjete nenegativnosti:

$$x_j \geq 0\,, \qquad j = 1,2,\ldots,15$$

Kada smo postavili funkciju cilja, te naveli ograničenja vezana za količinu sirovina i njihovu proizvodnju, potrebno je sve te vrijednosti unijeti u program WinQSB (Quantitive Systems for Business). U ovom radu uzimamo da su sve vrijednosti varijabli cjelobrojne što možemo vidjeti u tablici ulaznih podataka. Uz pomoć računala i korištenjem WinQSB programa moguće je dobiti rješenje ovog linearnog problema ali samo korištenjem opcije INTEGER. Kada se sve vrijednosti i ograničenja unesu u program, dobije se tablica ulaznih podataka sa sljedeće stranice.

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	Direction	R. H. S.
Maximize	9.75773	5.30338	9.16193	6.12668	4.65335	6.21128	4.83802	2.06644	1.94144	3.6775	2.03643	3.61999	1.8472	1.71342	3.93025		
C1	206.3			111.82	284.91											<=	600000
C2	31.2	258.62	250	377.53	112	450	450	81	81	90	42	73.5	43.546	20	73.5	<=	4100000
C3	137.5				12.37											<=	24000
C5	7.6	6.89	4.35	10.74	8.2	9.8	8.9	1.24	1.5	1.48	0.8	0.7			0.89	<=	98000
C6	6.9	6.89	0.5	5.4	1.1	6.6	1.8	9	1		0.4	1.17	0.15	1.5		<=	54000
C7	1			0.45		1.3	8.9	0.2	1	0.74	0.1					<=	21000
C8		86.2	56.9							11.1						<=	26000
C9			14.73							5						<=	8000
C10					1.9	4.6	2	2.3	3.1		1.6	9.41	0.7		10	<=	45000
C11		1														<=	60
C12						9	6.324						2.555		5	<=	54000
C13			7.5				5.124		9	1.1	5.3	4.7		3.6		<=	32000
C14				7.4			0.14			37			6.86		27.77	<=	88000
C15												22.8	4.43	2.5		<=	33000
C16													0.175			<=	500
C17													0.085			<=	300
C18															0.2	<=	120
C19													4.513			<=	13000
C20										80						<=	74000
C21														18.2		<=	9200
C22												26	13.64		40.04	<=	78000
LowerBound	80	40	180	2700	700	3700	1200	300	800	800	1000	700	2500	400	350		
UpperBound	110	60	220	3000	900	4000	1600	500	1200	1000	1500	900	3000	600	650		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

Slika 2. Ulazni podaci u programu WinQSB

Izvor: računalni program WinQSB

Nakon što smo unijeli sve podatke, na sljedećoj tablici je prikazano optimalno rješenje.

	12:50:41		Thursday	May	25	2017
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	94,0000	9,7577	917,2266	9,7577	at bound
2	X2	40,0000	5,3034	212,1352	5,3034	at bound
3	X3	216,0000	9,1619	1.978,9770	9,1619	at bound
4	X4	2.911,0000	6,1267	17.834,7700	6,1267	at bound
5	X5	895,0000	4,6533	4.164,7480	4,6533	at bound
6	X6	3.997,0000	6,2113	24.826,4900	6,2113	at bound
7	X7	1.200,0000	4,8380	5.805,6240	4,8380	at bound
8	X8	434,0000	2,0664	896,8350	2,0664	at bound
9	X9	1.063,0000	1,9414	2.063,7510	1,9414	at bound
10	X10	924,0000	3,6775	3.398,0100	3,6775	at bound
11	X11	1.500,0000	2,0364	3.054,6450	2,0364	at bound
12	X12	825,0000	3,6200	2.986,4920	3,6200	at bound
13	X13	2.857,0000	1,8472	5.277,4510	1,8472	at bound
14	X14	505,0000	1,7134	865,2771	0	basic
15	X15	439,0000	3,9302	1.725,3800	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	76.007,8000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	599.894,7000	<=	600.000,0000	105,3436	0
2	C2	4.099.990,0000	<=	4.100.000,0000	10,8242	0
3	C3	23.996,1500	<=	24.000,0000	3,8501	0
4	C5	96.051,7300	<=	98.000,0000	1.948,2670	0
5	C6	53.996,6000	<=	54.000,0000	3,3992	0
6	C7	19.263,6100	<=	21.000,0000	1.736,3920	0
7	C8	25.994,8000	<=	26.000,0000	5,1993	0
8	C9	7.801,6800	<=	8.000,0000	198,3203	0
9	C10	43.333,3500	<=	45.000,0000	1.666,6510	0
10	C11	40,0000	<=	60,0000	20,0000	0
11	C12	53.056,4400	<=	54.000,0000	943,5649	0
12	C13	31.997,7000	<=	32.000,0000	2,2985	0
13	C14	87.687,4500	<=	88.000,0000	312,5508	0
14	C15	32.729,0100	<=	33.000,0000	270,9915	0
15	C16	499,9750	<=	500,0000	0,0250	0
16	C17	242,8450	<=	300,0000	57,1550	0
17	C18	87,8000	<=	120,0000	32,2000	0
18	C19	12.893,6400	<=	13.000,0000	106,3590	0
19	C20	73.920,0000	<=	74.000,0000	80,0000	0
20	C21	9.191,0000	<=	9.200,0000	8,9997	0
21	C22	77.997,0400	<=	78.000,0000	2,9592	0

Slika 3. Optimalno rješenje

Izvor: računalni program WinQSB

U tablici na slici 3. dobili smo optimalno rješenje, odnosno optimalne vrijednosti količine proizvodnje za svaki pojedini proizvod. Optimalna količina proizvodnje za svaku vrijednost proizvoda xj je sljedeća.

$$x_1 = 94{,}000 \qquad x_8 = 434{,}000$$

$$x_2 = 40{,}000 \qquad x_9 = 1.063{,}000$$

$$x_3 = 216{,}000 \qquad x_{10} = 924{,}000$$

$$x_4 = 2.911{,}000 \qquad x_{11} = 1.500{,}000$$

$$x_5 = 895{,}000 \qquad x_{12} = 825{,}000$$

$$x_6 = 3.997{,}000 \qquad x_{13} = 2.857{,}000$$

$$x_7 = 1.200{,}000 \qquad x_{14} = 505{,}000$$

$$x_{15} = 439{,}000$$

Funkcija cilja koja predstavlja ukupnu dobit pri proizvodnji optimalne količine proizvoda iznosi 76.007,800 kn.

Nakon što smo dobili optimalnu količinu proizvodnje, te na temelju postavljenih ograničenja proizvodnje možemo zaključiti da većina proizvoda ima otprilike srednju razinu proizvodnje na bazi jednog tjedna, dok samo nekoliko proizvoda odgovara minimalnoj ili maksimalnoj količini proizvodnje a to su: x_2, x_6, x_7, te x_{11}.

Vrijednost dopunskih varijabli pokazuje jesu li sirovine u potpunosti iskorištene, ili da li je ostalo viška odnosno manjka sirovina (Slack or Surplus). Ako su sirovine u potpunosti iskorištene tada je njihova vrijednost jednaka nuli, a ako je vrijednost varijable veća od nula tada imamo višak, a ako su manje od nula onda postoji manjak sirovina.

Vrijednosti dopunski varijabli su:

u_1 = 105.3436, znači da je potrebna količina pšeničnog brašna T-850 manja za 105.3436g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 105.3436g pšeničnog brašna T-850.

u_2 = 10.8242, znači da je potrebna količina pšeničnog brašna T-550 manja za 10.8242g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 10.8242g pšeničnog brašna T-550.

u_3 = 3.8501, znači da je potrebna količina raženog brašna manja za 3.8501g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 3.8501g raženog brašna.

u_4 = 1.948,2670, znači da je potrebna količina kuhinjske soli manja za 1.948,2670g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 1.948,2670g kuhinjske soli.

u_5 = 3.3992, znači da je potrebna količina kuhinjske kvasca za 3.3992g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 3.3992g kvasca.

u_6 = 1.736,3920, znači da je potrebna količina aditiva Jaskol manja za 1.736,3920g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 1.736,3920g aditiva Jaskol.

u_7 = 5.1993, znači da je potrebna količina koncentrata s kukuruzom manja za 5.1993g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 5.1993g koncentrata s kukuruzom.

u_8 = 198.3203, znači da je potrebna količina Akitv Mixa manja za 198.3203g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 193.3203g Aktiv Mixa..

u_9 = 1.666,6510, znači da je potrebna količina šećera manja za 1.666,6510g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 1.666.6510g šećera.

u_{10} = 20, znači da je potrebna količina čiste kukuruzne krupice manja za 20g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 20g čiste kukuruzne krupice.

u_{11} = 943.5649, znači da je potrebna količina jestivog ulja manja za 943.5649g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 943.5649g jestivog ulja.

u_{12} = 2.2985, znači da je potrebna količina margarina BV manja za 2.2985g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 2.2985g margarina BV.

u_{13} = 312.5508, znači da je potrebna količina margarina Tropic manja za 312.5508g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 312.5598g margarina Tropic.

u_{14} = 270.9915, znači da je potrebna količina jaja manja za 270.9915 kom od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 270.9915 kom jaja.

u_{15} = 0.0250, znači da je potrebna količina vanilija arome manja za 0.0250 od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 0.0250 vanilija arome.

u_{16} = 57.1550, znači da je potrebna količina vanilija šećer manja za 57.1550g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 57.1550g vanilija šećera.

u_{17} = 32.20, znači da je potrebna količina naranča arome manja za 32.20g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 32.20g aroma naranče.

u_{18} = 106.3590, znači da je potrebna količina raženo tekuće kiselog tijesta manja za 106.3590g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 106.3590g raženo tekuće kiselog tijesta.

u_{19} = 80, znači da je potrebna količina sira za pekarstvo manja za 80g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 80g sira za pekarstvo.

u_{20} = 8.9997, znači da je potrebna količina poboljšivača Back Estrakt manja za 8.9997g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 8.9997g poboljšivača Back Estrakt.

u_{21} = 2.9592, znači da je potrebna količina marmelade manja za 2.9592g od raspoložive količine, dakle možemo zaključiti da je ostalo neiskorišteno 2.9592g marmelade.

4.3. Definiranje i formuliranje modela pomoću De Novo programiranja na primjeru pekarske proizvodnje

U ovom dijelu rada prikazat će se jedan način „dizajniranja“ proizvodnje pomoću tzv. De Novo koncepta optimizacije kojeg je još prije više od dvadeset godina uveo jedan od utemeljitelja višekriterijalnog odlučivanja Milan Zeleny.[39]

Na temelju podataka iz prethodnog modela, te uvođenjem novog ograničenja „budžeta“ pokušat ćemo oblikovati optimalni sustav iskorištenosti sirovina i tako unaprijed odrediti koliko bi trebalo iskoristiti različitih sirovina da bi ostvarili maksimum funkcije cilja odnosno dobiti. U De Novo konceptu maksimum funkcije cilja odnosno ukupna dobit bi trebala biti veća od ostvarene dobiti u primjeru standardnog problema. Također, kao što smo već napomenuli, u De Novo pristupu uvodimo novo ograničenje a to je budžet. On nama predstavlja raspoloživa količine novca, a ima sljedeći oblik:

$$B = b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 + b_4p_4 + b_5p_5 + b_6p_6 + b_7p_7 + b_8p_8 + b_9p_9 + b_{10}p_{10} + b_{11}p_{11} + b_{12}p_{12} + b_{13}p_{13} + b_{14}p_{14} + b_{15}p_{15} + b_{16}p_{16} + b_{17}p_{17} + b_{18}p_{18} + b_{19}p_{19} + b_{20}p_{20}$$

$$\begin{aligned} B = {} & 600\,000 * 0{,}0019 + 4\,100\,000 * 0{,}00205 + 2\,400 * 0{,}00375 + 98\,000 * 0{,}00146 \\ & + 54\,000 * 0{,}0068 + 21\,000 * 0{,}0127 + 26\,000 * 0{,}00883 + 8\,000 \\ & * 0{,}01705 + 45\,000 * 0{,}0052 + 60 * 0{,}00839 + 54\,000 * 0{,}0074 + 32\,000 \\ & * 0{,}0083 + 88\,000 * 0{,}01065 + 33\,000 * 0{,}0009 + 500 * 0{,}031 + 300 \\ & * 0{,}01145 + 120 * 0{,}0335 + 13\,000 * 0.046 + 74\,000 * 0{,}013 + 9\,200 \\ & * 0{,}01886 + 78\,000 * 0{,}00815 = 15\,036{,}7304 \end{aligned}$$

Ograničenja sustava koja smo koristili u prethodnom primjeru koristiti ćemo i u ovom, ali će se ona supstituirati iz jednadžbe za $x_n + 1$ u jedinstvenu jednadžbu budžeta.

$v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n \le B$

[39] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.218

gdje je:

v_j – jedinični varijabilni trošak j-tog proizvoda, j = 1,…,15.

Varijabilne troškove proizvodnje j-tog proizvoda za i-ti resurs ćemo izračunati pomoću zadanih cijena sirovina iz tablice 2., pa tako vrijedi:

$p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \ldots + p_m a_{mj} = v_j$

Na temelju ove formule možemo izračunati varijabilne troškove za svih petnaest proizvoda pa ćemo dobiti:

Varijabilni trošak za proizvodnju raženog miješanog bavarca:
$V_1 = 1.04227$

Varijabilni trošak za proizvodnju kukuruznog miješanog kruha:
$V_2 = 1.35662$

Varijabilni trošak za proizvodnju kruha sa sjemenkama suncokreta:
$V_3 = 1.33807$

Varijabilni trošak za proizvodnju pšeničnog miješanog polubijelog kruha:
$V_4 = 1.12332$

Varijabilni trošak za proizvodnju pšeničnog polubijelog kruha:
$V_5 = 0.84665$

Varijabilni trošak za proizvodnju pšeničnog bijelog kruha:
$V_6 = 1.08872$

Varijabilni trošak za proizvodnju vrličke pogače:
$V_7 = 1.16198$

Varijabilni trošak za proizvodnju mini slanca:
$V_8 = 0.24356$

Varijabilni trošak za proizvodnju mliječne kifle:

$V_9 = 0.27856$

Varijabilni trošak za proizvodnju lisnatog peciva sa sirom:

$V_{10} = 1.8225$

Varijabilni trošak za proizvodnju okruglog peciva kajzerice:

$V_{11} = 0.14357$

Varijabilni trošak za proizvodnju kroasana od marmelade:

$V_{12} = 0.48002$

Varijabilni trošak za proizvodnju krafne:

$V_{13} = 0.5128$

Varijabilni trošak za proizvodnju bijelog peciva štangice:

$V_{14} = 0.42658$

Varijabilni trošak za proizvodnju lisnatog tijesta s okusom naranče:

$V_{15} = 0.86975$

Na temelju dobivenih rezultata odnosno sada kada smo izračunali varijabilni trošak za svaki pojedini proizvod, možemo formulirati i ograničenje budžeta:

$$\begin{aligned} 1.04227x_1 + 1.35662x_2 + 1.33807x_3 + 1.12332x_4 + 0.84665x_5 + 1.08872x_6 \\ + 1.16198x_7 + 0.24356x_8 + 0.27856x_9 + 1.8225x_{10} + 0.14357x_{11} \\ + 0.48002x_{12} + 0.5128x_{13} + 0.42658x_{14} + 0.86975x_{15} \leq B \end{aligned}$$

Funkcija cilja odnosno funkcija cilja koja maksimizira dobit ostaje ista kao i u prethodnom primjeru te ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} Max\ Z = \ 9.75773x_1 \ + \ 5.30338x_2 + 9.16193x_3 + 6.12668x_4 + 4.65335x_5 + 6.21128x_6 \\ + 4.83802x_7 + 2.06644x_8 + 1.94144x_9 + 3.6775x_{10} + 2.03643x_{11} \\ + \ 3.61999x_{12} + 1.8472x_{13} + 1.71342x_{14} + 3.93025x_{15} \end{aligned}$$

Također, ograničenja za minimalnu i maksimalnu proizvodnju ostaju ista kao i u prethodnom primjeru te imaju sljedeće vrijednosti:

$$80 \leq x_1 \leq 110$$

$$40 \leq x_2 \leq 60$$

$$180 \leq x_3 \leq 220$$

$$2700 \leq x_4 \leq 3000$$

$$700 \leq x_5 \leq 900,$$

$$3700 \leq x_6 \leq 4000$$

$$1200 \leq x_7 \leq 1600$$

$$300 \leq x_8 \leq 500$$

$$800 \leq x_9 \leq 1200$$

$$800 \leq x_{10} \leq 1000$$

$$1000 \leq x_{11} \leq 1500$$

$$700 \leq x_{12} \leq 900$$

$$2500 \leq x_{13} \leq 3000$$

$$400 \leq x_{14} \leq 600$$

$$350 \leq x_{15} \leq 650$$

Uz navedena ograničenja vezana proizvodnju, također treba navesti i uvjete nenegativnosti:

$$x_j \geq 0 \,, \qquad j = 1,2, \dots ,15$$

Kada smo postavili funkciju cilja, te naveli ograničenja potrebno je sve te vrijednosti ponovno unijeti u program WinQSB (Quantitive Systems for Business), gdje ćemo dobiti sljedeće rezultate:

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	Direction	R. H. S.
Maximize	9.75773	5.30338	9.16193	6.12668	4.65335	6.21128	4.83802	2.06644	1.94144	3.6775	2.03643	3.61999	1.8472	1.71342	3.93025		
C1	1.04227	1.35662	1.33807	1.12332	0.84665	1.08872	1.16198	0.24356	0.27856	1.8225	0.14357	0.48002	0.5128	0.42658	0.86975	<=	15036.73
LowerBound	80	40	180	2700	700	3700	1200	300	800	800	1000	700	2500	400	350		
UpperBound	110	60	220	3000	900	4000	1600	500	1200	1000	1500	900	3000	600	650		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

Slika 4. Ulazni podaci za De Novo model

Izvor: računalni program WinQSB

	13:14:31		Thursday	May	25	2017
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	110,0000	9,7577	1.073,3500	0	basic
2	X2	40,0000	5,3034	212,1352	5,3034	at bound
3	X3	220,0000	9,1619	2.015,6250	0	basic
4	X4	3.000,0000	6,1267	18.380,0400	0	basic
5	X5	900,0000	4,6533	4.188,0150	0	basic
6	X6	4.000,0000	6,2113	24.845,1200	0	basic
7	X7	1.296,0000	4,8380	6.270,0740	0	basic
8	X8	500,0000	2,0664	1.033,2200	0	basic
9	X9	1.200,0000	1,9414	2.329,7280	0	basic
10	X10	800,0085	3,6775	2.942,0310	0	basic
11	X11	1.500,0000	2,0364	3.054,6450	0	basic
12	X12	900,0000	3,6200	3.257,9910	0	basic
13	X13	2.500,0000	1,8472	4.618,0000	1,8472	at bound
14	X14	403,0000	1,7134	690,5083	0	basic
15	X15	650,0000	3,9302	2.554,6620	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	77.465,1500		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	15.036,7300	<=	15.036,7300	0	2,0178

Slika 5. Rješenje De Novo model

Izvor: računalni program WinQSB

Na slici 5. možemo vidjeti optimalno rješenje De Novo programiranja, odnosno optimalne vrijednosti količine proizvodnje za svaki pojedini proizvod. Optimalna količina proizvodnje za svaku vrijednost proizvoda xj je sljedeća.

$$x_1 = 110{,}000 \qquad x_8 = 500{,}000$$

$$x_2 = 40{,}000 \qquad x_9 = 1.200{,}000$$

$$x_3 = 220{,}000 \qquad x_{10} = 800{,}0085$$

$$x_4 = 3.000{,}000 \qquad x_{11} = 1.500{,}000$$

$$x_5 = 900{,}000 \qquad x_{12} = 900{,}000$$

$$x_6 = 4.000{,}000 \qquad x_{13} = 2.500{,}000$$

$$x_7 = 1.296{,}000 \qquad x_{14} = 403{,}000$$

$$x_{15} = 650{,}000$$

Funkcija cilja koja predstavlja ukupnu dobit pri proizvodnji optimalne količine proizvoda veća je nego u prethodnom primjeru te ona iznosi 77.465,1500 kn, što je više za 1.457,36 kn..

Na temelju dobivenih podataka možemo vidjeti da većina proizvoda koji se proizvode odgovara maksimalnom ograničenju proizvodnje. To su varijable x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}, te x_{15}, pa možemo zaključiti da se ovi rezultati dosta razlikuju od prethodnog primjera gdje je većina proizvoda imala neku srednju razinu proizvodnje. Samo dva proizvoda imaju jednaku razinu proizvodnje kao u prošlom primjeru, a to je varijabla x_2 koja odgovara minimalnom ograničenju proizvodnje te varijabla x_{11} koja odgovara maksimalnom ograničenju proizvodnje. Međutim, nekoliko varijabli ima jako malu razliku u odnosnu na prethodni primjer pa tako npr. varijabla x_{11} u De Novo pristupu ima vrijednost 4.000.000 u odnosnu na 3.997,00 iz prethodnog primjera što je samo za 3,00 više. Također, bitno je za napomenuti da je budžet u potpunosti iskorišten.

Jedna od bitnih pretpostavki De novo pristupa je proizvodnja bez zaliha, stoga ćemo izračunati količinu sirovina koju je potrebno naručiti kako bi se dobio proizvodni program iz slike 5., a to ćemo napraviti pomoću sljedeće formule:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +_{\dots} + a_{mn}x_n = b_m$$

pa tako vrijedi:

b1 $206.3 * 110 + 111.82 * 3000 + 284.91 * 900 = 614\,572$

b2 $31.2 * 110 + 258.62 * 40 + 250 * 220 + 377.53 * 3000 + 112 * 900 + 450 * 4000 + 450 * 1296 + 81 * 500 + 81 * 1200 + 90 * 800{,}0085 + 42 * 1500 + 73.5 * 900 + 43.546 * 2500 + 20 * 403 + 73.5 * 650 = 4\,188\,917.565$

b3 $137.5 * 110 + 12.37 * 900 = 26\,258$

b5 $7.6 * 110 + 6.89 * 40 + 4.35 * 220 + 10.74 * 3000 + 8.2 * 900 + 9.8 * 4000 + 8.9 * 1296 + 1.24 * 500 + 1.5 * 1200 + 1.48 * 800 + 0.8 * 1500 + 0.7 * 900 + 0.89 * 650 = 98\,416.3$

b6 $6.9 * 110 + 6.89 * 40 + 0.5 * 220 + 5.4 * 3000 + 1.1 * 900 + 6.6 * 4000 + 1.8 * 1296 + 9 * 500 + 1 * 1200 + 0.4 * 1500 + 1.17 * 900 + 0.15 * 2500 + 1.5 * 403 = 55\,399.9$

b7 $1 * 110 + 0.45 * 3000 + 1.3 * 4000 + 8.9 * 1296 + 0.2 * 500 + 1 * 1200 + 0.74 * 800{,}0085 + 0.1 * 1500 = 20\,236.406$

b8 $86.2 * 40 + 56.9 * 220 + 11.1 * 800.0085 = 24\,846.094$

b9 $14.73 * 220 + 5 * 800.0085 = 7240.643$

b10 $1.9 * 900 + 4.6 * 4000 + 2 * 1296 + 2.3 * 500 + 3.1 * 1200 + 1.6 * 1500 + 9.41 * 900 + 0.7 * 2500 + 10 * 650 = 39\,068.9$

b11 $1 * 40 = 40$

b12 $9 * 4000 + 6.324 * 1296 + 2.555 * 2500 + 5 * 650 = 53\,833.404$

b13 $7.5 * 220 + 5.124 * 1296 + 9 * 1200 + 1.1 * 800.0085 + 5.3 * 1500 + 4.7 * 900 + 3.6 * 403 = 33\,601.513$

b14 $7.4 * 3000 + 0.141296 + 37 * 800.0085 + 6.86 * 2500 + 27.77 * 650 = 86\,9555.456$

b15 $22.8 * 900 + 4.43 * 2500 + 2.5 * 403 = 32\,602.5$

b16 $0.175 * 2500 = 437.5$

b17 $0.085 * 2500 = 212.5$

b18 $0.2 * 650 = 130$

b19 $4.513 * 2500 = 11\,282.5$

$\mathbf{b_{20}}$ $80 * 800.0085 = 64\,000.68$

$\mathbf{b_{21}}$ $18.2 * 403 = 7334.6$

$\mathbf{b_{22}}$ $126 * 900 + 13.64 * 2500 + 40.04 * 650 = 83\,526$

4.4. Definiranje i formuliranje modela pomoću De Novo programiranja s rastućim troškovima i količinskim popustima na primjeru pekarske proizvodnje

Model linearnog programiranja može se ponekad jako teško primijeniti u stvarnom poslovanju i to zbog svoje pretpostavke o proporcionalnosti. Vrlo čest slučaj koji se pojavljuje u stvarnosti su različite cijene iste sirovine ili gotovog proizvoda jer poduzeća mogu imati više različitih dobavljača po različitim cijenama za iste resurse. Također, vrlo česta situacija je i da se na veću naručena količinu sirovina dobije količinski popust ili da cijene robe padaju zbog prevelike količine robe plasirane u prodajni kanal. Jedna od situacija zbog koje dolazi do promjene cijena odnosno povećanja troškova je i osvajanje novih tržišta jer se tada ulaže puno više novaca u promidžbu itd.[40]

U sljedećem primjeru imati ćemo simulaciju problema sa rastućim troškovima i količinskim popustima, i to na način da ćemo imati određenu količinu sirovina po jednoj cijeni te veću količinu po većoj cijeni što predstavlja rastuće troškove, ali i situaciju gdje ćemo imati određenu cijenu sirovina po jednoj cijeni i veću količinu po manjoj cijeni što predstavlja količinski popust.

U sljedećoj tablici su prikazane promjene cijena po određenim količinama, pšenično brašno T-550 i kuhinjska sol spadaju u kategoriju rastućih troškova, a kvasac i šećer u kategoriju količinskog popusta što možemo zaključiti i po promjenama u cijenama sirovina.

[40] Babić, Z.(2011); Modeli i metode poslovnog odlučivanja, Ekonomski fakultet Split, Split, str.238

Tablica 3. Popis sirovina s rastućim troškovima i njihov jedinični trošak (brašno i sol), te popis sirovina s količinskim popustom i njihova jedinična cijena (kvasac i šećer)

Naziv sirovine	***Ograničenja***	***Jedinična cijena (g)***
Pšenično brašno T-550	≤ 3 800 000	0,00205
Pšenično brašno T-550	> 3 800 000	**0,0028**
Sol kuhinjska	≤ 90 000	0,00146
Sol kuhinjska	> 90 000	**0,0019**
Kvasac	≤ 49 990	0,0068
Kvasac	> 50 000	**0,006**
Šećer	≤ 39 990	0,0052
Šećer	> 40 000	**0,0048**

Izvor: izradio autor

U dosadašnjim primjerima funkciju cilja smo definirali kao maksimizaciju dobiti, međutim u ovom primjeru u funkciju cilja potrebno je dodati promjene cijena promatranih sirovina. Stoga se sada funkcija cilja definira kao maksimalna razlika prihoda i prodajne cijene, te će imati sljedeći oblik:

$$Max\ Z = s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 + s_5x_5 + s_6x_6 + s_7x_7 + s_8x_8 + s_9x_9 + s_{10}x_{10} + s_{11}x_{11} + s_{12}x_{12} + s_{13}x_{13} + s_{14}x_{14} + s_{15}x_{15} - (p_1b_1 + p_2b_2 + p_2'd_2 + p_3b_3 + p_4b_4 + p_4'd_4 + \ p_5b_5 + p_5'd_5 + p_6b_6 + p_7b_7 + p_8b_8 + p_9b_9 + p_9'd_9 + p_{10}b_{10} + p_{11}b_{11} + p_{12}b_{12} + p_{13}b_{13} + p_{14}b_{14} + p_{15}b_{15} + p_{16}b_{16} + p_{17}b_{17} + p_{18}b_{18} + p_{19}b_{19} + p_{20}b_{20} + +p_{21}b_{21}\ )$$

gdje je:

$p_2{}'$- oznaka za drugu cijenu za pšenično brašno T-550 u slučaju da se naruči količina veća od 3 800 000 g iste sirovine,

d_2- oznaka za količinu veću od 3 800 000 g pšeničnog brašna T-550

p_4'- oznaka za drugu cijenu za kuhinjsku sol u slučaju da se naruči količina veća od 90 000 g iste sirovine,

d_4- oznaka za količinu veću od 90 000 g kuhinjske soli,

p_5' - količina sirovine kvasac koja se nabavlja uz količinski popust,

d_5 – cijena sirovine kvasac koja se nabavlja uz količinski popust,

p_9' - količina sirovine šećer koja se nabavlja uz količinski popust,

d_9 – cijena sirovine šećer koja se nabavlja uz količnski popust.

Max Z = $10.8x_1 + 6.66x_2 + 10.5x_3 + 7.25x_4 + 5.5x_5 + 7.3x_6 + 6x_7 + 2.31x_8 + 2.22x_9 + 5.5x_{10} + 2.18x_{11} + 4.1x_{12} + 2.36x_{13} + 2.14x_{14} + 4.8x_{15} – (0.0019b_1 + 0.00205b_2 + 0.0028d_2 + 0.00375b_3 + 0.00146b_4 + 0.0019d_4 + 0.0068b_5 + 0.0060d_5 + 0.0127b_6 + 0.00883b_7 + 0.01705b_8 + 0.0052b_9 + 0.0048d_9 + 0.00839b_{10} + 0.0074b_{11} + 0.0083b_{12} + 0.01065b_{13} + 0.0009b_{14} + 0.031b_{15} + 0.01145b_{16} + 0.0335b_{17} + 0.046b_{18} + 0.013b_{19} + 0.01886b_{20} + 0.00815b_{21})$

Nakon što smo definirali funkciju cilja, potrebno je sada definirati i ograničenja za sirovine, s tim da moramo uzeti u obzir sirovine b_2 i b_4 gdje ima rastuće troškove, odnosno sirovine b_5 i b_9 gdje imamo količinske popuste. Model ograničenja ima sljedeći oblik:

(1) $206.3\,x_1 + 111.82\,x_4 + 284.91\,x_5 - b_1 = 0$

(2) $31.2\,x_1 + 258.62\,x_2 + 250\,x_3 + 377.53\,x_4 + 112\,x_5 + 450\,x_6 + 450\,x_7 + 81\,x_8 + 81\,x_9 + 90\,x_{10} + 42\,x_{11} + 73.5\,x_{12} + 43.546\,x_{13} + 20\,x_{14} + 73.5\,x_{15}$ **$- b_2 - d_2$** $= 0$

(3) $137.5\,x_1 + 12.37\,x_5 - b_3 = 0$

(4) $7.6\,x_1 + 6.89\,x_2 + 4.35\,x_3 + 10.74\,x_4 + 8.2\,x_5 + 9.8\,x_6 + 8.9\,x_7 + 1.24\,x_8 + 1.5\,x_9 + 1.48\,x_{10} + 0.8\,x_{11} + 0.7\,x_{12} + 0.89\,x_{15}$ **$- b_4 - d_4$** $= 0$

(5) $6.9\,x_1 + 6.89\,x_2 + 0.5\,x_3 + 5.4\,x_4 + 1.1\,x_5 + 6.6\,x_6 + 1.8\,x_7 + 9\,x_8 + 1\,x_9 + 0.4\,x_{11} + 1.17\,x_{12} +$
$+ 0.15\,x_{13} + 1.5\,x_{14}$ **$- b_5 - d_5$** $= 0$

(6) $1\,x_1 + 0.45\,x_4 + 1.3\,x_6 + 8.9\,x_7 + 0.2\,x_8 + 1\,x_9 + 0.74\,x_{10} + 0.1\,x_{11} - b_6 = 0$

(7) $86.2\,x_2 + 56.9\,x_3 + 11.1\,x_{10} - b_7 = 0$

(8) $14.73\,x_3 + 5\,x_{10} - b_8 = 0$

(9) $1.9\, x_5 + 4.6\, x_6 + 2\, x_7 + 2.3\, x_8 + 3.1\, x_9 + 1.6\, x_{11} + 9.41\, x_{12} + 0.7\, x_{13} + 10\, x_{15}$ - $\boldsymbol{b_9 - d_9} = 0$

(10) $x_2 - b_{10} = 0$

(11) $9\, x_6 + 6.324\, x_7 + 2.555\, x_{13} + 5\, x_{15} - b_{11} = 0$

(12) $7.5\, x_3 + 5.124\, x_7 + 9\, x_9 + 1.1\, x_{10} + 5.3\, x_{11} + 4.7\, x_{12} + 3.6\, x_{14} - b_{12} = 0$

(13) $7.4\, x_4 + 0.14\, x_7 + 37\, x_9 + 6.86\, x_{13} + 27.77\, x_{15} - b_{13} = 0$

(14) $22.8\, x_{12} + 4.43\, x_{13} + 2.5\, x_{14} - b_{14} = 0$

(15) $0.175\, x_{13} - b_{15} = 0$

(16) $0.085\, x_{13} - b_{16} = 0$

(17) $0.2\, x_{15} - b_{17} = 0$

(18) $4.513\, x_{13} - b_{18} = 0$

(19) $80\, x_{10} - b_{19} = 0$

(20) $18.2\, x_{14} - b_{20} = 0$

(21) $26\, x_{12} + 13.364\, x_{13} + 40.04\, x_{15} - b_{21} = 0$

(22) $b_2 \leq 3900000$

(23) $b_4 \leq 90000$

(24) $b_5 - 49990\, y_1 \leq 0$

(25) $d_5 - 50000\, y_2 \geq 0$

(26) $y_1 + y_2 = 1$

(28) $b_9 - 39990\, y_3 \leq 0$

(29) $d_9 - 40000\, y_4 \geq 0$

(30) $y_3 + y_4 = 1$

(31) $0.0019\, b_1 + 0.00205\, b_2 + 0.0028\, d_2 + 0.00375\, b_3 + 0.00146\, b_4 + 0.0019\, d_4 + 0.0068\, b_5 + 0.0060\, d_5 + 0.0127\, b_6 + 0.00883\, b_7 + 0.01705\, b_8 + 0.0052\, b_9 + 0.0048\, d_9 + 0.00839\, b_{10} + 0.0074\, b_{11} + 0.0083\, b_{12} + 0.01065\, b_{13} + 0.0009\, b_{14} + 0.031\, b_{15} + 0.01145\, b_{16} + 0.0335\, b_{17} + 0.046\, b_{18} + 0.013\, b_{19} + 0.01886\, b_{20} + 0.00815\, b_{21} \leq$ **15036,7304**

$80 \leq x_1 \leq 110$, $40 \leq x_2 \leq 60$, $180 \leq x_3 \leq 220$, $2700 \leq x_4 \leq 3000$, $700 \leq x_5 \leq 900$,
$3700 \leq x_6 \leq 4000$, $1200 \leq x_7 \leq 1600$, $300 \leq x_8 \leq 500$, $800 \leq x_9 \leq 1200$, $800 \leq x_{10} \leq 1000$,
$1000 \leq x_{11} \leq 1500$, $700 \leq x_{12} \leq 900$, $2500 \leq x_{13} \leq 3000$, $400 \leq x_{14} \leq 600$, $350 \leq x_{15} \leq 650$,

Uz sva ograničenja treba navesti i uvjete nenegativnosti:

$$x_j \geq 0\,, \quad j = 1,2,\ldots,15$$

Nakon što smo definirali sva ograničenja u računalnom programu WinQSB, na sljedećoj stranici možemo vidjeti prikaz optimalnog rješenja.

09-22-2017 11:16:45	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit C(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	110,0000	9,7577	1.073,3500	0	basic
2	X2	40,0000	5,3034	212,1352	5,3034	at bound
3	X3	220,0000	9,1619	2.015,6250	0	basic
4	X4	2.999,0000	6,1267	18.373,9100	0	basic
5	X5	900,0000	4,6533	4.188,0150	0	basic
6	X6	4.000,0000	6,2113	24.845,1200	0	basic
7	X7	1.200,0000	4,8380	5.805,6240	4,8380	at bound
8	X8	500,0000	2,0664	1.033,2200	0	basic
9	X9	1.200,0000	1,9414	2.329,7280	0	basic
10	X10	800,0000	3,6775	2.942,0000	3,6775	at bound
11	X11	1.500,0000	2,0364	3.054,6450	0	basic
12	X12	900,0000	3,6200	3.257,9910	0	basic
13	X13	2.500,0000	1,8472	4.618,0000	1,8472	at bound
14	X14	400,0000	1,7134	685,3680	1,7134	at bound
15	X15	551,0000	3,9302	2.165,5680	0	basic
16	b1	614.460,2000	-0,0019	-1.167,4740	0	basic
17	b2	3.800.000,0000	-0,0021	-7.790,0000	0	basic
18	d2	338.002,7000	-0,0028	-946,4076	0	basic
19	b3	26.258,0000	-0,0037	-98,4675	0	basic
20	b4	90.000,0000	-0,0015	-131,4000	0	basic
21	d4	7.462,2520	-0,0019	-14,1783	0	basic
22	b5	0	-0,0068	0	0	basic
23	d5	55.217,2000	-0,0060	-331,3032	0	basic
24	b6	19.381,5500	-0,0127	-246,1457	0	basic
25	b7	24.846,0000	-0,0088	-219,3902	0	basic
26	b8	7.240,6000	-0,0170	-123,4522	0	basic
27	b9	0	-0,0052	0	0	basic
28	d9	45.509,0000	-0,0048	-218,4432	0	basic
29	b10	40,0000	-0,0084	-0,3356	0	basic
30	b11	52.731,3000	-0,0074	-390,2116	0	basic
31	b12	33.098,8000	-0,0083	-274,7200	0	basic
32	b13	84.411,8700	-0,0106	-898,9863	0	basic
33	b14	32.595,0000	-0,0009	-29,3355	0	basic
34	b15	437,5000	-0,0310	-13,5625	0	basic
35	b16	212,5000	-0,0115	-2,4331	0	basic
36	b17	110,2000	-0,0335	-3,6917	0	basic
37	b18	11.282,5000	-0,0460	-518,9950	0	basic
38	b19	64.000,0000	-0,0130	-832,0000	0	basic
39	b20	7.280,0010	-0,0189	-137,3008	0	basic
40	b21	79.562,0400	-0,0082	-648,4306	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	61.563,6300		

Slika 6. Rješenje s rastućim troškovima za d_2 i d_4, te količinskim popustom za d_5 i d_9

Izvor: računalni program WinQSB

Dobivena optimalna rješenja x_j su redom:

$$x_1 = 110{,}000 \qquad x_8 = 500{,}000$$
$$x_2 = 40{,}000 \qquad x_9 = 1.200{,}000$$
$$x_3 = 220{,}000 \qquad x_{10} = 800{,}000$$
$$x_4 = 2.999{,}000 \qquad x_{11} = 1.500{,}000$$
$$x_5 = 900{,}000 \qquad x_{12} = 900{,}000$$
$$x_6 = 4.000{,}000 \qquad x_{13} = 2.500{,}000$$
$$x_7 = 1.200{,}000 \qquad x_{14} = 400{,}000$$
$$x_{15} = 551{,}000$$

Dobivena rješenja su jako slična rješenjima iz De Novo modela bez rastućih troškova i količinskih popusta, pa tako varijable x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} i x_{13} imaju iste vrijednosti kao i u prethodnom model. Također, na temelju dobivenih podataka možemo vidjeti da većina proizvoda koji se proizvode odgovara maksimalnom ograničenju proizvodnje baš kao i u prethodnom primjeru, dok varijable x_2, x_7, x_{10}, x_{13}, te x_{14} odgovaraju minimalnom ograničenju proizvodnje.

Potrebna količina sirovina koja je potrebna da bi se proizvela gore navedena količina proizvoda je:

$$b_1 = 614.460{,}200 \qquad b_{10} = 40{,}000$$
$$b_2 = 3.800{,}000 \qquad b_{11} = 52.731{,}000$$
$$d_2 = 338.002{,}700 \qquad b_{12} = 33.098{,}800$$
$$b_3 = 26.258{,}000 \qquad b_{13} = 84.411{,}870$$
$$b_4 = 90.000{,}000 \qquad b_{14} = 32.595{,}000$$
$$d_4 = 7.462{,}252 \qquad b_{15} = 437{,}500$$

$b_5 = 0$ $\quad$ $b_{16} = 212{,}500$

$d_5 = 55.217{,}200$ $\quad$ $b_{17} = 110{,}200$

$b_6 = 19.381{,}550$ $\quad$ $b_{18} = 11.282{,}500$

$b_7 = 24.846{,}000$ $\quad$ $b_{19} = 64.000{,}000$

$b_8 = 7.240{,}6000$ $\quad$ $b_{20} = 7.280{,}001$

$b_9 = 0$ $\quad$ $b_{21} = 79{,}562{,}040$

$d_9 = 45.509{,}000$

Optimalna količina utroška pšeničnog brašna T-550 iznosi 4.138,003 grama od čega se 3.800,000 grama nabavlja po manjoj cijeni 0,00205 po gramu te 338.00,700 grama po većoj cijeni od 0,0028 kn po gramu. To vrijedi i za utrošak kuhinjske soli čija optimalna količina iznosi 97.462,252 grama, a od toga se 90.000,000 grama nabavlja po jeftinijoj cijeni od 0,00146, dok se 7.462,252 grama nabavlja po skupljoj cijeni 0,0019 kn po gramu.

Što se tiče količinskih popusta ako je naručena količina manja ili jednaka danom ograničenju sirovina se nabavlja bez popusta. Iz ovog rješenja možemo vidjeti da se obje promatrane sirovine nabavljaju po diskontnoj cijeni odnosno uz količinski popust. Za kvasac vrijedi da ako naručena količina bude veća od 49.990,00 grama može se nabaviti po sniženoj cijeni od 0,060 kn po gramu, što je i postignuto jer je utrošeno 55.217,200 grama ove sirovine. Tako vrijedi i za šećer, ako naručena količina bude veća od 39.990,000 grama može se nabaviti po jeftinijoj cijeni od 0,0048 kn po gramu. Količinski popust je postignut i ovdje jer je utrošeno 45.509,000 grama šećera.

Funkcija cilja odnosno maksimalna dobit u ovom primjeru iznosi 61.563,630, dok je budžet iskorišten u potpunosti.

5. ZAKLJUČAK

Svako poduzeće koje se bavi proizvodnjom i konkurira sa svojim proizvodima na tržištu susreće se s temeljnim pitanjem i problemom svakog poslovanja, a to je kako poslovati na što efikasniji način, odnosno kako minimizirati vlastite troškove i maksimizirati profit. Postoje brojne metode i modeli optimizacije koje omogućuju nalaženje najboljih rješenja različitih problema, i vrlo su korisne za rješavanje problema u poslovnoj ekonomiji. U ovom radu smo pokazali kako se primjenom linearnog programiranja i De Novo programiranja može postići optimizacija poslovnog procesa u pekarskoj proizvodnji gdje su se koristili stvarni podaci iz pekarnice „Kambo“ d.o.o.
U prvom primjeru kod primjene linearnog programiranja uspjeli smo postaviti proizvodni model koji daje optimalne količine proizvoda za taj slučaj. Na temelju dobivenih rezultata možemo zaključiti da ovom modelu većina proizvoda ima neku srednju razinu proizvodnje u odnosnu na dana ograničenja tjedne razine proizvodnje za svaki proizvod. Također veliki broj sirovina nije iskorišten u potpunosti. Funkcija cilja koja predstavlja ukupno dobit u ovom primjer iznosi 76.007,800 kn.

U drugom primjeru prikazan je način „dizajniranja“ proizvodnje pomoću De Novo koncepta optimizacije gdje su se koristili isti podaci ako i u prvom primjeru uz uvođenje novog ograničenja „budžeta“ koji je vrlo važno svojstvo ovog koncepta. Na temelju dobivenih rezultata vidimo da u ovom primjeru većina proizvoda koji se proizvode odgovaraju maksimalnom ograničenju proizvodnje, pa možemo zaključiti kako se ovaj model dosta razlikuje od prethodnog. Funkcija cilja je veća nego u prethodnom primjeru te ona iznosi 77.465,1500 kn, što je više za 1.457,36 kn. Također, vrlo bitno je spomenuti da je budžet iskorišten u potpunosti, a postignuta je i potpuna iskorištenost resursa što je i jedna od pretpostavi De Novo programiranja

U posljednjem primjeru koristili smo De Novo programiranje s rastućim troškovima i količinskim popustima i to na način da imamo određenu količinu sirovina po jednoj cijeni te veću količinu po većoj cijeni što predstavlja rastuće troškove, ali i situaciju gdje imamo određenu cijenu sirovina po jednoj cijeni i veću količinu po manjoj cijeni što predstavlja količinski popust. Funkcija cilja odnosno maksimalna dobit u ovom primjeru iznosi 61.563,630, dok je budžet iskorišten u potpunosti.

Iz svega gore navedenog da se zaključiti da je kod primjene običnog De Novo pristupa profit najveći, te količina proizvoda, iskorištenost proizvodnih linija, te količina resursa u tom modelu predstavlja optimalni proizvodni sustav koji maksimizira profit. De Novo pristup unaprijed oblikuje proizvodni sustav na načina da proizvodi program bez zaliha, a znamo da zalihe povlače za sobom i dodatne troškove poput troškova skladištenja, stoga kod De Nova imamo i dodatne uštede na troškovima skladištenja.

U radu smo primijenili linearno programiranje na primjeru pekarske proizvodnje i time pokazali da se primjenom linearnog programiranja može ostvariti efikasnija proizvodnja, a time i ostvariti veći profit. Stoga, tvrtke bez obzira na djelatnost, bi trebale početi primjenjivati metode linearnog programiranja ne samo u proizvodnji, nego i u cjelokupnoj organizaciji poduzeća. Korištenjem ovih metoda tvrtke bi ostvarile bolje rezultate i tako „učvrstili“ svoj položaj na tržištu, a pri tome bi uvođenje i korištenje ovih metoda zahtijevalo minimalne troškove.

6. SAŽETAK

U uvodnom dijelu rada postavljeni su problem i predmet istraživanja, definirani se ciljevi istraživanja, te doprinos koji će ovaj rad imati.

U drugom poglavlju opisana je ukratko povijest linearnog programiranja, te je definiran i objašnjen pojam linearnog programiranja. Također, objašnjene su i osnovne postavke matematičkog modeliranja problema, te standardni, kanonski i opći problem linearnog programiranja.

U trećem dijelu rada objašnjeno je De Novo programiranje, njegova povijest, te karaktersitike u kojem se uz standardne probleme programiranja uvodi niz novih ideja, kao što su nabavke resursa i raspolaganje novčanim sredstvima, odnosno budžetom. Također, objašnjeni su i efekti višestrukih cijena odnosno primjeri rastućih troškova i količinskih popusta.

U četvrtom poglavlju, odnosno praktičnom dijelu rada na primjeru proizvodnje pekarskih proizvoda formuliran je model, te su se uz primjenu linearnog programiranja i De Novo programiranja (običnog ali i s rastućim troškovima i količinskim popustima) dobili optimalni modeli proizvodnje u kojima se ostvaruje maksimalna dobit.

Za sam kraj rada, peto poglavlje odnosi se na zaključak u kojem je dat osvrt i pregled cjelokupnog rada i dobivenih rezultata.

KLJUČNE RIJEČI:

1. LINEARNO PROGRAMIRANJE
2. PEKARSKA PROIZVODNJA
3. DE NOVO PROGRAMIRANJE

SUMMARY

The introduction contains the problem and the subject of the research, the targets of the research are defined as also the contribution that this work will have.

The second chapter is brief history of linear programming and linear programming is also defined and explained. Also, basic mathematical problem modeling and standard, canonical and general problem of linear programming have been explained.

In the third part, De Novo programming, its history and characterization are explained, along with standard programming problems, introducing a number of new ideas, such as resource acquisition and availability of funds, or budget. Also, the effects of multiple prices, examples of increasing costs and quantity discounts, have been explained.

In the fourth chapter, the practical part of the work on the example of bakery products, a model was formulated, with the application of linear programming and De Novo programming (ordinary but also with increasing costs and quantity discounts) were obtained optimum production models in which maximum profit was achieved.

For the very end, the fifth chapter refers to the conclusion that gives a review and an overview of the overall work and the results obtained.

KEYWORDS:

1. LINEAR PROGRAMMING
2. BAKERY PRODUCTION
3. DE NOVO PROGRAMMING

LITERATURA:

KNJIGE:

1. Babić, Z.(2011); *Linearno programiranje*, Split.
2. Babić, Z. (2011): *Modeli i metode poslovnog odlučivanja*, Sveučilište u Splitu, Split.
3. Barnett, R.A., Ziegler, M.R., Byleen, K.E.; (2006), *Primijenjena matematika za poslovanje*, *ekonomiju*, *znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti*, Mate, Zagreb.
4. Čerić V., Varga M. (2004.); *Informacijska tehnologija u poslovanju*, Elemental, Zagreb.
5. M.T. Tabucanon (1988): *Multiple Criteria Decision Making in Industry*, Elsevier, Amsterdam

ČASOPISI:

1. Babić, Z. (2005); *Production Planning via De Novo Programming*, Global Business & Economics Anthology, (Selected papers from B&ESI Conference, Flagstaaf, Arizona, USA), Worcester, USA.
2. Babić, Z., I. Pavić (1996): *Multicriterial Production Programming by De Novo Programming Approach*, International Journal of Production Economics, Vol. 43, No.1.
3. Babić, Z., T. Hunjak (2006): *The Use of Multicriteria De Novo Programming in the Production Planning Problem*, Proceedings of the11th International Conference on Operational Research KOI 2006, Pula, Croatia.
4. Babić, Z., T. Perić, Ž. Mandić (2017*): Optimization of Production Plan in the Metal Industry by the Use of De Novo Programming*, Proceedings of the 9th International Working Conference - Total Quality Management – Advanced And Intelligent Approaches, Belgrade, Serbia.
5. Zeleny, M (1986*): Optimal System Design with Multiple Criteria: De Novo Programming Approach*, Engineering Costs and Production Economics, No. 10.

INTERNET IZVORI:

1. www.learn-math.info - http://www.learn-math.info/croatian/historyDetail.htm?id=Kantorovich
2. www.matematika,fkit.hr - http://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Daniela%20Petkovicek%20%20Linearno%20programiranje.pdf
3. Pekarnica „Kambo“ - http://kambo.hr
4. Perić, T., (2015); Linearni model proizvodnje, raspoloživo na: http://web.efzg.hr/dok/MAT/tperic//2_OI_2015_1.pdf (javno dostupno 04.03.2015.)
5. Petković, M.D., (2006); Modifikacije metoda matematičkog programiranja i primjene, raspoloživo na: (http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/dexter/theses/Diplfinalpng.pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)
6. Radić, J.; (2012); Linearno programiranje i višekriterijalno odlučivanje u proizvodnji – tvornica stočne hrane, raspoloživo na: (http://e-lib.efst.hr/2012/2092638.pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

POPIS TABLICA:

1. Popis artikala – proizvoda
2. Popis korištenih sirovina i njihove cijene
3. Popis sirovina s rastućim troškovima i količinskim popustima

POPIS SLIKA:

1. Količina sirovina po jedinici proizvoda
2. Ulazni podaci u programu WinQSB
3. Optimalno rješenje standardnog modela
4. Ulazni podaci za De Novo model
5. Rješenje De Novo model
6. Rješenje s rastućim troškovima i količinskim popustima