

Ovladanost osnovnim aritmetičkim operacijama kod djece od trećeg do osmog razreda osnovne škole

Sladović, Iva

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Education and Rehabilitation Sciences / Sveučilište u Zagrebu, Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:158:671652>

Rights / Prava: [In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-20**



Repository / Repozitorij:

[Faculty of Education and Rehabilitation Sciences - Digital Repository](#)



Sveučilište u Zagrebu
Edukacijsko - rehabilitacijski fakultet

Diplomski rad

**Ovladanost osnovnim aritmetičkim operacijama kod djece od
trećeg do osmog razreda osnovne škole**

Iva Sladović

Zagreb, rujan 2016.

Sveučilište u Zagrebu
Edukacijsko - rehabilitacijski fakultet

Diplomski rad

**Ovladanost osnovnim aritmetičkim operacijama kod djece od
trećeg do osmog razreda osnovne škole**

Iva Sladović

Mentor: prof. dr. sc. Mirjana Lenček

Zagreb, rujan 2016.

Sažetak

Ovim istraživanjem ispitano je 164 djece od 3. do 8. razreda, polaznika dviju redovnih Osnovnih škola u Zagrebu: Osnovne škole Jelkovec i Osnovne škole Sesvetska Sopnica. Učenici su podijeljeni na grupe prema razredu koji pohađaju i s obzirom na oblik školovanja u nastavi matematike: redovni (N=145) ili individualizirani/prilagođeni (N=19). Ispitano je njihovo poznavanje osnovnih aritmetičkih operacija na 12 skupina zadataka oblikovanih s obzirom na Plan i program nastave matematike iz 2013. godine. Rezultati su pokazali da većina učenika urednih matematičkih vještina ovladava osnovnim aritmetičkim operacijama nakon trećeg razreda osnovne škole. Zadaci koji su diskriminativni za prepoznavanje učenika s teškoćama u matematici u 3. razredu su zadaci pisanog dijeljenja i zadaci koji ispituju poznavanje osnovne tablice množenja. Nakon trećeg razreda, statistički značajne razlike između učenika s teškoćama u matematici i učenika urednih matematičkih vještina pronađene su na zadacima zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva, zadacima koji ispituju poznavanje osnovne tablice množenja, zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja, te pisanog množenja i dijeljenja. Također, kvalitativnom analizom izdvojene su i opisane karakteristične vrste grešaka koje učenici s teškoćama u matematici čine prilikom rješavanja jednostavnih aritmetičkih zadataka. Ovi podaci mogu pružiti smjernice za oblikovanje aritmetičkih zadataka temeljem kojih je moguće oblikovati materijal za odjeljivanje djece s teškoćama u matematici i diskalkulijom od populacije bez teškoća u matematici u osnovnoj školi.

Ključne riječi: aritmetika, teškoće u matematici, zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, osnovna škola,

Summary

In the current research 164 children through grades 3 to 8 were administered experimental tasks, developed by the author for the purpose of the current study, that examined their knowledge of basic arithmetics (addition, subtraction, multiplication and division). The sample consisted of 145 children educated in regular school programme and 19 children that have an individualised/adjusted programme in mathematics. The testing material consisted of 12 groups of tasks based on the Plan and programme for math education from 2013. The results showed that most of the students after grade 3 acquire skills needed for solving basic arithmetic tasks. Written division and multiplication fact retrieval tasks proved to be effective in abstracting students with math difficulty in grade 3. As for children through grades 4 to 8, tasks that proved effective in differentiating students with math difficulties are mental addition and subtraction, multiplication facts retrieval and written addition, subtraction, multiplication and division tasks. Furthermore, some characteristical mistakes that children with math difficulty make in solving arithmetic tasks are described. The given data could prove useful in giving guidelines for developing arithmetic tasks material based on which would be possible to differentiate children with difficulties in math from children with regular math abilities development in primary school.

Key words: arithmetics, math difficulties, addition, subtraction, multiplication, division, primary school

SADRŽAJ

1. UVOD	5
1.1. Zašto je važna matematika?	5
1.2. Kratki pregled razvoja matematičkih vještina i koncepata kod djece	6
1.3. Aritmetika	10
1.4. Dostupni testovi i zadaci	16
1.5. Matematika – što je sve teško i kojoj djeci?	19
2. CILJ I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA.....	24
3. METODE ISTRAŽIVANJA	25
3.1. Uzorak	25
3.2. Opis ispitnog materijala- zadataka za ispitivanje matematičkih znanja	26
3.3. Način provođenja istraživanja	29
3.4. Varijable istraživanja.....	29
3.5. Metode obrade podataka	30
4. REZULTATI I RASPRAVA.....	32
4.1. Rezultati kvantitativne analize – usporedba učenika urednih matematičkih vještina s obzirom na razred	32
4.2. Rezultati kvantitativne analize – usporedba učenika urednih matematičkih vještina i učenika s teškoćama u matematici.....	41
4.3. Rezultati kvalitativne analize – opis pogrešaka	49
4.4. Odgovori na hipoteze	54
5. ZAKLJUČAK.....	56
6. LITERATURA	58

1. UVOD

1.1. Zašto je važna matematika?

Pojmom „matematika“ obuhvaćena je matematika kao znanost i predmet izučavanja u školi, ali i primijenjena matematika, s kojom se susrećemo u svakodnevnom životu. Definicija matematike kao znanosti navodi kako se ona bavi apstraktnim i kvantitativnim odnosima među čistim veličinama (brojevima) i prostornim (geometrijskim) oblicima te pojmovnim tvorevinama i njihovim simbolima. Čine je aritmetika (bavi se brojevima i računanjem), algebra (bavi se računanjem nepoznatim veličinama) i geometrija (bavi se prostornim oblicima) (Lenček i sur., 2010). Ona obuhvaća i sebi svojstveni set simbola, te je određujemo kao egzaktnu znanost, koja postoji uvijek kada se predmetu koji izučava može pripisati precizno značenje (Khait, 2005).

Matematika je prisutna posvuda oko nas. Svakodnevno se susrećemo s problemima za čije rješavanje nam je potrebno matematičko mišljenje i rezoniranje. Neke od tih matematičkih „aktivnosti“ uključuju procjenu troška prilikom kupovine, baratanje novcem (Lave, 1988), upotrebu kalkulatora, čitanje grafova, računanje pomoću prstiju i mnoge druge. Kao i jezik, matematika je dio našeg života od najranije dobi, te uvodi dijete u percipiranje i shvaćanje odnosa u neposrednom okruženju (Rudić i Cindrić, 2012).

Iako se s matematikom kao predmetom susrećemo tek početkom školovanja, ona obuhvaća niz vještina i znanja koja usvajamo tijekom predškolske dobi. Prema Boaler (2008) ona je ljudska aktivnost, socijalni fenomen i skup metoda kojima se pokušava objasniti način na koji svijet oko nas funkcionira, te je dio naše kulture. Učenjem matematike, učenici razvijaju samostalnost, sposobnost logičke analize i sinteze te rasuđivanja (Kadum i sur., 2007)

Unatoč njenoj sveprisutnosti i praktičnoj primjeni, matematika je predmet s kojim će se mnogi učenici teže nositi. U prilog tome govori i prevalencija teškoća u matematici od 9,35% unutar školske populacije, od čega 3,4% čine djeca s diskalkulijom (Reigosa-Crespo i sur., 2011). Razlozi teškoćama u matematici su raznovrsni, a teškoće se mogu javiti u svakoj od navedenih sastavnica matematike.

1.2. Kratki pregled razvoja matematičkih vještina i koncepata kod djece

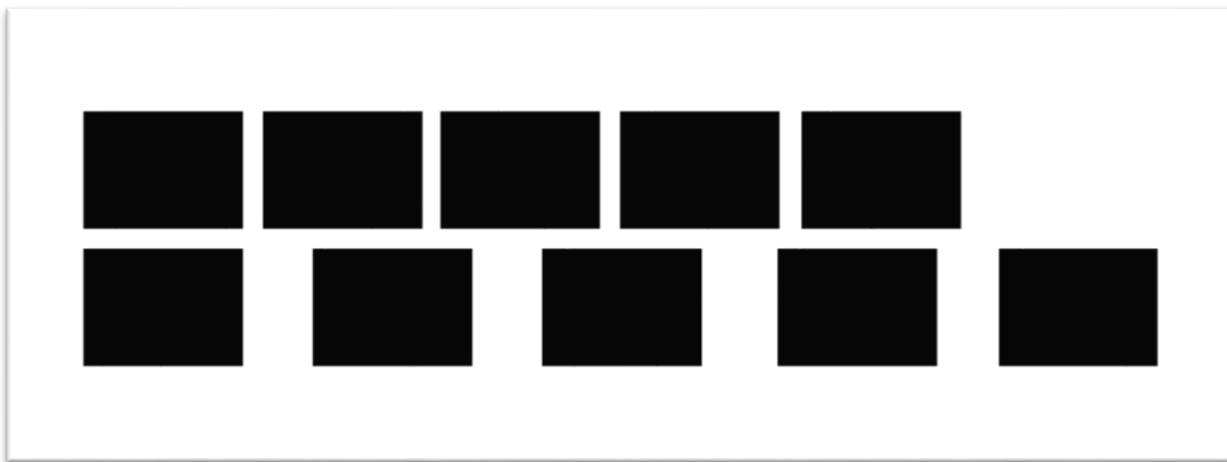
Matematika je po svojoj prirodi kumulativna, te razvoj matematičkih vještina ovisi o nizu preduvjeta: stupnju kognitivnog razvoja, (Fuchs i sur., 2013; Sharma, 2001), fonološkoj obradi i radnom pamćenju (Simmons i sur., 2008; Noël i sur., 2004; Espy i sur., 2004; Rasmussen i Bissanz, 2005), iskustvu (Prather i Alibali, 2011), matematičkoj osobnosti učenika i stilu podučavanja učitelja (Sharma 2001). Kognicija i usvajanje koncepata važnih za kasnije razumijevanje matematičkih postupaka igraju važnu ulogu u procesu razvoja matematičkih vještina. Do uspješnog razvoja u aritmetici dolazi ako je dijete usvojilo relevantne matematičke koncepte.

Razvoj matematičkih predvještina, počinje u ranoj dobi, od prvih mjeseci kada dijete razvija svijest o konstantnosti objekata (svjesnost da objekti postoje i kada ih ne vidi što je važno za zamjenu konkretnih objekata brojevima na početku školovanja) (Adler, 2001; Wynn, 1992). Istraživanja ukazuju da je svijest o brojnosti urođena, budući da je već novorođenčad sposobna razlikovati vizualne podražaje na temelju promjene u broju prezentiranih objekata (Butterworth, 2005; Adler, 2001).

Između prve i druge godine, dijete shvaća da su objekti konstantni. Pojam konstantnosti objekata odnosi se na shvaćanje da objekti postoje čak i kada ih ne vidimo. Razvoj ovog koncepta omogućava zamjenu konkretnih objekata brojevima, odnosno sposobnost predočavanja stvarnog svijeta simbolima. Do druge godine razvija se i kategorizacija objekata, što omogućava razlikovanje i razvrstavanje objekata prema samo njima svojstvenim obilježjima i smještanje objekata u određene kategorije. Dijete razumijeva svijet na temelju kategorija i prototipova. U trećoj godini dijete razumijeva suprotnosti veliko-malo, a između treće i četvrte godine počinje brojati (Adler, 2001). Brojanje je osnova kasnijem razvoju aritmetičkih vještina (zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja) jer je rezultat zbrajanja jednak zajedničkom prebrojavanju dva odvojena seta određene brojnosti (Butterworth, 2005). Shvaćanje broja i brojnosti temelji se na razumijevanju koncepta „jedan na jedan“, odnosno principa kardinalnosti. Pojam „kardinalnost“ u matematici se odnosi na ukupan broj elemenata u setu. U početku, djeca se oslanjaju na dužinu skupova (Bryant, 1995). Da bi dva seta imala istu brojnost, nužno je da se svaki objekt iz jednoga može spojiti s objektom iz drugoga seta na način da na kraju svaki ima svoj „par“, odnosno, da niti u jednom setu ne ostane višak. Na početku, djeca su uspješna u procjeni jednakosti setova samo u slučaju kada su objekti raspoređeni na prostorno jednak način. Ukoliko se objekti u jednome setu rašire, te

prostorno zauzimaju više mjesta, djeca će pogrešno misliti kako to znači i da je njihova brojnost veća (slika 1).

Slika 1. Prikaz problema konzervacije



Ovo se naziva problemom konzervacije (Kilpatrick i sur., 2001). Razumijevanje koncepta konzervacije odnosi se na sposobnost određivanja da količina nečega ostaje jednaka bez obzira na promjene u veličini, obliku ili rasporedu objekata.

Brojanje u početku ne slijedi pravilan redoslijed, pa tako dijete može brojati „jedan, dva, pet, osam...“. Uskoro uči ispravne sekvence, a nakon toga počinje povezivati broj s količinom. Između treće i četvrte godine, dijete može percipirati brojnost seta do 4 predmeta, te shvaća da je brojanje način određivanja brojnosti.

U dobi od pet godina, dijete stvara vizualne slike za količine, pa može odrediti primjerice koliko je prstiju na ruci bez da ih prebrojava. Prije polaska u školu, dijete usvaja pojmove suprotnosti dugo-kratko i visoko-nisko, ali nije rijetko da djeca ne razumiju da su tri mrava više nego jedan slon, jer je slon veći. Ovo ukazuje na to da se dijete u toj dobi pogrešno usmjerava na perceptivna obilježja objekata prilikom procjene količine, pri čemu zanemaruje brojnost.

Prije polaska u školu, dijete usvaja predvještine potrebne za uspješno savladavanje školskog gradiva iz matematike. Sharma (2001) navodi nekoliko predvještina važnih za kasnije usvajanje gradiva matematike u školi: razvrstavanje podataka i predmeta, uspoređivanje i ujednačavanje predmeta i skupova, nizanje predmeta i održavanje zadanog redoslijeda, slijeđenje niza uputa od više koraka, orijentiranje i organiziranje u prostoru, vizualizacija,

vizualno grupiranje predmeta, prepoznavanje obrazaca, procjenjivanje, te induktivno i deduktivno mišljenje. Ove vještine nisu dio matematike kao predmeta, ali su nužne za usvajanje matematičkih koncepata.

S formalnim učenjem matematike dijete počinje u dobi od sedam godina, kada su razvijeni preduvjeti potrebni za uspješno usvajanje školskog gradiva matematike. Dakle, do polaska u školu, dijete je kognitivno sposobno razvrstavati i kategorizirati objekte u svojem okruženju, uspoređivati ih na temelju njihovih perceptivnih obilježja, vizualno odrediti brojnost seta bez brojanja (ukoliko je njihov broj manji ili jednak 4), brojati predmete koristeći ispravnu brojevnju sekvencu, a istraživanja pokazuju da mogu vršiti i jednostavne aritmetičke operacije zbrajanja i oduzimanja, koristeći se mentalnim strategijama brojanja (Carpenter i Moser, 1984; Themes, 2000). Međutim, određene vještine tek se pojavljuju. Primjerice, nakon sedme godine, razvija se svijest da je svaki broj udaljen od susjednog broja za jedan. Shvaćanje načela konzervacije počinje se razvijati početkom školovanja (Adler, 2001), a tijekom prvih nekoliko godina, razvija se i vizualizacija problema i rješavanje problemskih zadataka (Themes, 2000).

Nakon desete godine, dijete se sve češće susreće s „višom“ matematikom, odnosno iščitavanjem podataka iz tablica ili dijagrama i rješavanjem problemskih zadataka, zbog čega se gubi primarno usmjeravanje na operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, te one postaju samo sredstvo rješavanja zadataka (Adler, 2001). Iz tog je razloga bitno da dijete njima ovlada na odgovarajućoj razini. Nadalje, oko dvanaeste godine razvija se shvaćanje da se određeni broj može sastojati ne samo od vrijednosti jedan, već i od skupina vrijednosti (primjerice, broj 24 se sastoji od 24 dijelova vrijednosti 1, ali i od 4 puta vrijednosti 6). Ovaj koncept omogućava djetetu bolji uvid u i dublje razumijevanje u operacije množenja i dijeljenja (Adler, 2001).

Dakle, razvoj matematičkih vještina slijedi određeni redoslijed, vještine se nadovezuju jedna na drugu, a sam razvoj matematike uvjetovan je i djetetovim kognitivnim sazrijevanjem.

Nastavno vrijeme posvećeno matematici ističe njenu važnost, naročito u početnom obrazovanju, u usporedbi s ostalim predmetima unutar kurikulumu (Ergović, 2014). Prema Nastavnom planu i programu za Osnovnu školu iz 2013. godine, a koji je na snazi i danas, propisuje se 4 sata matematike tjedno od prvog do osmog razreda, što iznosi oko 140 sati godišnje i čini Matematiku najzastupljenijim predmetom u osnovnoškolskom obrazovanju u Hrvatskoj. S obzirom na nužnost poznavanja matematike za uspješno funkcioniranje u

današnjem društvu, te širok spektar područja koja matematika zahvaća, ne čudi količina sati posvećena njenom poučavanju. Od tri navedene grane (aritmetika, algebra i geometrija), aritmetika čini temelj učenja svih kasnijih nastavnih sadržaja u sklopu matematike. Stoga je nastava matematike tokom prva četiri razreda osnovne škole usmjerena upravo usvajanju temeljnih aritmetičkih vještina i koncepata.

1.3. Aritmetika

Nunes i sur. (2012) navode razliku između dvije matematičke vještine nužne za točno rješavanje matematičkih problema: matematičko mišljenje i aritmetičke vještine. Pri tome se matematičko mišljenje odnosi na razumijevanje kvantitativnih relacija uključenih u problem, kako bi postavili brojeve u ispravne odnose, a aritmetičke vještine na samu izvedbu računa. Istraživači nadalje navode kako je moguće da obje vještine imaju svoju specifičnu i odvojenu ulogu u procesu učenja matematike.

Mnoga istraživanja koja se bave teškoćama u matematici u dijelu procjene matematičkih sposobnosti uključuju procjenu aritmetike (Shalev i sur., 2005; Carpenter i Moser, 1984; Geary, 2004), te većina uzima loš rezultat u aritmetičkim zadacima kao diskriminativni faktor za definiranje teškoća u matematici.

Osnovne aritmetičke operacije su zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. One se mogu definirati kao operacije na setovima (predmeta, auditivnih i taktilnih količina ili apstraktnih pojmova) i njihovoj „brojnosti“. Drugim riječima, manipulacija setovima ili dijelovima seta utječe na njihovu brojnost (Butterworth, 2005). Aritmetika uključuje sljedeće sposobnosti: percepciju količine koja ne uključuje brojanje, percepciju jednostavnih aritmetičkih odnosa, sposobnost približne procjene brojnosti, sposobnost računanja, i sposobnost upamćivanja osnovne tablice množenja (Lakoff i Nunez, 2000). Adler (2001) ističe kako je za uspješnost u aritmetici važno da dijete prije polaska u školu automatizira sve predmatematičke vještine, kako bi se mogao posvetiti dubljem izučavanju matematike kao takve. Cowan (2002) opisuje dva pogleda na aritmetičke vještine: jedan ističe razvoj kompetencije računanja, a drugi razvoj matematičkog razumijevanja i mišljenja. Prvo se odnosi na zastarjeli pristup poučavanja aritmetike, gdje se vrlo rano započinje s formalnim poučavanjem aritmetičkih operacija bez mnogo iskustvenog poučavanja putem primjera. Ovaj je pristup isticao učenje brojevnik činjenica napamet, s malim naglaskom na razumijevanje logike izvođenja osnovnih aritmetičkih operacija. Drugi se pristup pojavio oko 1950.-te godine, a ističe razumijevanje matematičkih problema. Ovaj način poučavanja olakšava djeci da otkriju različite logičke osobine brojeva kao što su svojstvo komutativnosti, asocijativnosti i povratne veze zbrajanja i oduzimanja. Usvajanje znanja putem smislenog i iskustvenog učenja pokazalo se uspješnijim u prenošenju usvojenog na nove situacije (Resnick i Ford, 1981). Kako bi dijete bilo uspješno u aritmetici, potrebno mu je iskustvo. Kako bi u potpunosti shvatilo neki matematički koncept, potrebno je da njime ovlada na svim razinama i na svim stupnjevima složenosti.

Sharma (2001) navodi šest stupnjeva ovladanosti matematičkim vještinama i konceptima. Započinje s intuitivnim razumijevanjem, a završava s razinom na kojoj dijete može do pojedinosti objasniti kako je došlo do određenog rezultata. Aritmetičke vještine pri tome igraju važnu ulogu kao sredstvo rješavanja problemskih zadataka.

Većina istraživanja aritmetičkih vještina bave se razvojem strategija koje djeca koriste prilikom rješavanja aritmetičkih zadataka (Carpenter i Moser, 1984; Geary i sur., 1999). Uspješno su izdvojene faze razvoja u napredovanju od jednostavnih strategija koje koriste djeca predškolci i djeca prvog razreda osnovne škole (direktno modeliranje – pridruživanje veličine „jedan“ fizičkim objektima ili prstima te njihovo prebrojavanje), preko korištenja brojevnih sekvenci krajem prvog razreda (brojanje na prste i dalje može biti uključeno ali se sada koristi brojanje od određene veličine prema sumi, umjesto prebrojavanja svakog pojedinog objekta), da bi na kraju koristili najučinkovitiju strategiju prisjećanja brojevnih činjenica (Carpenter i Moser, 1984). Kako bi došli do posljednje faze, faze prizivanja aritmetičkih činjenica, djeca prolaze kroz strategije brojanja, počevši od brojanja prema redoslijedu pribrojnika koji su zadani (primjerice u zadatku $3 + 5$ dijete će brojati svaki skup posebno, a potom sve zajedno, dok u kasnijoj fazi broji od 3 pa nadalje 4, 5, 6, 7, 8 kako bi došlo do rješenja), pa do brojanja od većeg pribrojnika (sada će u zadatku $3 + 5$ zanemariti redoslijed pribrojnika i brojati 5 pa nadalje 6, 7, 8). Kako bi dijete postalo kompetentno u rješavanju aritmetičkih zadataka, nužan je skok s prebrojavanja na prizivanje aritmetičkih činjenica iz dugoročnog pamćenja (Temple i Sherwood, 2002), što se prvi puta javlja kod djece u dobi od otprilike sedam godina (Butterworth, 2005). Butterworth i sur. (2001) pronašli su kako odrasle osobe prizivaju aritmetičke činjenice iz dugoročnog pamćenja brže kada je zadatak prezentiran na način da manji pribrojnik slijedi veći, nego u suprotnom slučaju, što može značiti da se pohrana aritmetičkih činjenica počinje odvijati u fazi zbrajanja prebrojavanjem od većeg pribrojnika (Butterworth, 2005).

Jednostavna aritmetika koja uključuje zbrajanje i oduzimanje jednoznačenkastih brojeva uči se tijekom prvog razreda osnovne škole, i ne zahtijeva dublje razumijevanje matematičkih koncepata. Razumijevanje matematičkih koncepata uključuje razumijevanje principa kao što su komutativnost (zamjena mjesta članova ne mijenja rezultat), inverzija (veza zbrajanja i oduzimanja, odnosno ako je $a + b = c$ onda je $c - b = a$), asocijativnost (rezultat množenja i/ili zbrajanja isti je bez obzira na način združivanja članova) i slično. Složeniji aritmetički zadaci odražavaju djetetovo shvaćanje matematike i što brojevi zaista jesu, te na temelju kojih se pravila nadovezuju jedan na drugoga (Adler, 2001).

Postoje dokazi da djeca razumiju principe jednostavnih operacija zbrajanja i oduzimanja i prije polaska u školu, kada su zadaci prezentirani neverbalno, te kada uključuju manipulaciju konkretnim materijalima (Bryant, 1995; Wynn, 1992).

S početkom formalnog obrazovanja, djeca počinju učiti osnovne aritmetičke operacije u školi, čime matematika dobiva apstraktnu razinu. Učenje aritmetike započinje jednostavnim zadacima zbrajanja i oduzimanja, a množenje i dijeljenje uče se kasnije. Prema Nastavnom planu i programu matematike za Osnovnu školu iz 2013.godine, u prvom razredu osnovne škole djeca se upoznaju sa zbrajanjem i oduzimanjem brojeva do 20, vezama među navedenim operacijama te različitim funkcijama brojeva (pribrojnik, zbroj, umanjitelj, umanjenik, razlika...). Otprilike u istoj dobi, djeca uče pravilo komutativnosti u zbrajanju (zamjena mjesta pribrojnika bez utjecaja na krajnji rezultat), te počinju koristiti strategiju zbrajanja brojanjem od većeg pribrojnika (Butterworth, 2005; prema Carpenter i Moser, 1984). Množenje i dijeljenje brojeva uvodi se sredinom drugog razreda osnovne škole, nakon što su djeca ovladala zbrajanjem i oduzimanjem dvoznamenkastih brojeva do 100. Kao obrazovno postignuće navodi se „...razumjeti množenje kao zbrajanje jednakih pribrojnika...“. Drugim riječima, operacija množenja objašnjava se u terminima zbrajanja, zbog čega je usvojenost i razumijevanje jednostavnijih aritmetičkih postupaka od iznimne važnosti za daljnje usvajanje matematike (iako operacije množenja i dijeljenja uključuju i razumijevanje omjera, odnosno, nisu samo zbroj ili podjela setova, već i odnos između dva seta koji je uvijek isti) (Butterworth, 2005).

Većina se istraživanja bavi razvojem aritmetike do 3.razreda osnovne škole, dok o kasnijoj uspješnosti djece na tim zadacima nema mnogo podataka. Međunarodno istraživanje uspješnosti u rješavanju matematičkih zadataka IEA-TIMSS (International Association for the Evaluation of Educational Achievement-Third International Mathematics and Science Study; Mullis i sur., 1997), u kojem je sudjelovalo 45 zemalja i preko pola milijuna učenika od 3. do 8. razreda (Hrvatska nije obuhvaćena) uključuje procjenu zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja u sklopu ispitivanja usvojenosti znanja i operacija s cijelim brojevima u osnovnoj školi. Za provjeru su korišteni zadaci kao što je usporedba brojeva po veličini, pretvorba zbrajanja u množenje („napiši sljedeći postupak u obliku množenja: $5+5+5+5=20$), oduzimanje četveroznamenkastih brojeva, upisivanje brojeva koji nedostaju kako bi rezultat bio točan ($2000 + ? + 30 + 9 = 2739$), te određivanje razlike između dva umnoška. Zadaci su konstruirani za provjeru znanja učenika iz zemalja različitog obrazovnog sistema, o čemu se vodi računa prilikom tumačenja rezultata. Prilikom usporedbe dva broja, internacionalni

prosjeck točnosti rješavanja zadatka iznosio je 76,5% za treći razred, a 86,5% za četvrti razred (s povećanjem točnosti rješavanja za 10%). Na zadatku pretvorbe zbrajanja u množenje isti postotak iznosi 63,5% za treći razred, te 77,4% za četvrti razred (s povećanjem točnosti 14%). U zadacima oduzimanja četveroznamenkastih brojeva učenici trećeg razreda prosječno su bili uspješni u 50,6% slučajeva, a taj se postotak u četvrtom razredu povećao na 71,5% (povećanje uspješnosti od 21%). Ova je čestica testirana i na učenicima sedmog i osmog razreda, a postotak uspješnosti iznosi 86,5% za oba razreda (povećanje od 15% u odnosu na 4. razred). Vidljive su značajne razlike između učenika trećeg i četvrtog razreda. Nadalje, na zadatku upisivanja broja koji nedostaje, prosječna uspješnost rješavanja za treći razred iznosi 44,5%, a za četvrti 66,4% (povećanje uspješnosti od 22%), a na zadatku određivanja razlike između dva umnoška (pri čemu je potrebno poznavanje množenja i oduzimanja dvoznamenkastih i troznamenkastih brojeva) 30,5% za treći razred i 45,6% za četvrti razred (povećanje uspješnosti za 15%).

Tablica 1. Dio rezultata međunarodnog istraživanja uspješnosti rješavanja matematičkih zadataka IEA-TIMS iz 1995.godine (podaci preuzeti iz Mullis i sur., 1997)

Internacionalni prosjeck točnosti rješavanja za:	SKUPINE ZADATAKA				
	Usporedba brojeva po veličini	Pretvorba zbrajanja u množenje	Oduzimanje četveroznamenkastih brojeva	Upisivanje broja koji nedostaje	Određivanje razlika između dva umnoška
3.	76,5%	63,5%	50,6%	44,5%	30,5%
4.	86,5%	77,4%	71,5%	66,4%	45,6%
7.	/	/	86,5%	/	/
8.	/	/	86,5%	/	/

Razlike među razredima prema prosjeku točnosti rješavanja pojedinih zadataka nisu iste za sve zemlje, ali su ipak prisutne kod svih zemalja obuhvaćenih istraživanjem. Razlike u uspješnosti rješavanja zadataka između trećeg i četvrtog razreda dvostruko su veće nego one pronađene između sedmog i osmog razreda. Povećanje uspješnosti između trećeg i četvrtog razreda značajno je veće i usporedimo li je s razlikama između četvrtog i osmog razreda na zadacima koji ispituju osnovne aritmetičke operacije (oduzimanje četveroznamenkastih brojeva). Na uspješnost rješavanja svih zadataka značajno je utjecala količina dotadašnjeg

formalnog obrazovanja (početak školovanja nije isti za djecu u različitim zemljama), pri čemu su uspješnija bila djeca koja su s formalnim obrazovanjem u matematici krenula ranije.

Unutar formalnog podučavanja matematike moguće je stavljati naglasak na iskustveno učenje na početku školovanja, te ovaj podatak ne govori o razlikama između Cowanovih koncepata razvoja kompetencije računanja (učenje brojevni činjenica napamet/iskustveno učenje), već o tome da s ranijim početkom kontinuirane i sistematične poduke u matematici djeca postižu bolje rezultate.

Potrebno je naglasiti zaključak autora ovog opsežnog istraživanja kojim se ističe važnost svake godine formalnog učenja matematike za djecu u osnovnoj školi i njihovu ovladanost matematičkim vještinama. Značajnost je još veća za djecu s teškoćama u matematici. Time se ističe nužnost prepoznavanja odstupanja u matematici i pravovremenog djelovanja, usmjerenog specifičnim područjima u kojima se teškoće javljaju.

Neki podaci o uspješnosti u matematici dostupni su i za Hrvatsku. U istraživanju PISA-e (Program for International Student Assessment), najvećeg međunarodnog obrazovnog istraživanja koje ispituje znanja i kompetencije učenika u dobi od 15 godina u tri područja (matematika, prirodoslovno područje i čitalačka pismenost), iz 2012. godine (<https://www.oecd.org/> OECD, 2014; posjećeno 8.8.2016.). Republika Hrvatska na području matematičke pismenosti postigla je rezultat od 471 bod te se nalazi na 40. mjestu od ukupno 65 zemalja sudionica (najbolji rezultat postigla je Kina). Tim rezultatom, Hrvatska pripada skupini zemalja čiji je rezultat statistički značajno ispod prosjeka OECD-a.

Cilj PISA-e nije ispitati koliko dobro učenici mogu reproducirati naučena znanja, već koliko dobro mogu primjenjivati usvojena znanja i vještine u novim situacijama. OECD (<https://www.oecd.org/> OECD, 2014; posjećeno 8.8.1016.) navodi sljedeće matematičke vještine ispitane PISA projektom: komunikacija (interpretacija i razumijevanje problema i obrazlaganje odgovora), „matematiziranje“ (pretvaranje konkretnog problema u matematički zadatak), reprezentacija, rasuđivanje i argumentiranje, konstruiranje strategija rješavanja problema, upotreba simboličkog, formalnog i tehničkog jezika i operacija te upotreba matematičkih alata.

Navedene vještine ispituju se kao što je to primjerice u sljedećem zadatku iz PISA istraživanja 2009. godine:

Zadatak 11.

Mei-Ling iz Singapura priprema se na putovanje u Južnu Ameriku, gdje će ostati tri mjeseca kao student na razmjeni. Mora razmijeniti Singapurske dolare (SGD) u Južno Američki rand (ZAR).

Tijekom navedena tri mjeseca, tečaj se promijenio s 4.2 na 4.0 ZAR po SGD. Je li promjena tečaja s 4.2 na 4.0 ZAR po SGD bila u korist Mei-Lin kada je pri povratku u Singapur mijenjala svoje Južno Američke rande u Singapurske dolare? Obrazloži svoj odgovor.

U ovome zadatku očekuje se primjena proceduralnog matematičkog znanja koje uključuje poznavanje osnovnih aritmetičkih operacija (množenja i dijeljenja), te primjenu logičnog mišljenja i refleksije. Od učenika se očekuje prepoznavanje situacije i smještanje u odgovarajući matematički kontekst, što čini zadatak teškim unatoč poznatosti svih relevantnih informacija (<https://www.oecd.org/> OECD, 2010; posjećeno 8.8.1016.).

Učenici su prema uspješnosti rješavanja zadataka, koja je određena brojem postignutih bodova, podijeljeni prema 6 stupnjeva uspješnosti (pri čemu je 1 najmanja uspješnost, a 6 najveća). Prema rezultatima PISA-e iz 2012.godine, u Hrvatskoj najveći postotak učenika (oko 23%) rješava zadatke na 3.razini uspješnosti (<https://www.oecd.org/> OECD, 2014; posjećeno 8.8.1016.)

Dakle, testovni materijal izrađen je na način da provjerava uporabu svih matematičkih znanja i koncepata na nekoliko razina, a za točnost rješavanja potrebno je poznavanje osnovnih aritmetičkih operacija, ali prvenstveno matematičko i logičko rezoniranje i mišljenje.

Navedeni podaci korisni su za objektivnu usporedbu učenika prema različitim kriterijima (nacionalnost, spol, socijalni i demografski činitelji) te za praćenje uspješnosti učenika u rješavanju konkretnih matematičkih problema na kraju osnovnoškolskog obrazovanja tijekom vremena. Osim ovih oblika provjere, potrebni su i testovi koji će služiti učiteljima, nastavnicima, roditeljima i stručnim suradnicima za dobivanje podataka o matematičkim znanjima i vještinama djece. Stoga će sada kratko biti prikazani dostupni testovi i zadaci na temelju kojih spomenute osobe mogu dobivati potrebne informacije.

1.4. Dostupni testovi i zadaci

Testovi kojima se ispituju matematička znanja najčešće se nalaze u sklopu baterije testova za ispitivanje inteligencije, kao jedna od čestica testa.

Najpoznatiji je WISC-test (Wechslerov test Inteligencije za djecu-IV izdanje). Namijenjen je djeci od 6 godina i 0 mjeseci do 16 godina i 11 mjeseci. Sadrži 10 temeljnih i 5 dopunskih subtestova, od koji se aritmetika ispituje na dodatnom subtestu pod nazivom „Računanje“. Subtest sadrži 34 usmeno prezentirana aritmetička zadatka, te se u obzir uzima broj riješenih zadataka (bodova). Na ovome testu dobiva se prosječni kvocijent inteligencije, kao i četiri različita indeksa (indeks verbalnog rasuđivanja, radnog pamćenja, brzine obrade informacija i indeks perceptivnog rasuđivanja), a moguće je dobiti i veliki broj dodatnih informacija o djetetovom kognitivnom funkcioniranju, a zahvaljujući subtestu računanja, i njegovim aritmetičkim vještinama. WISC-IV je standardiziran i normiran za upotrebu u Hrvatskoj.

Nadalje, u svijetu se koristi i Woodcock Johnson Test kognitivnih sposobnosti – baterija testova koji ispituju inteligenciju. Razvijena prvi puta 1977 (autori su Richard Woodcock i Mary E. Bonner Johnson), a najnovija verzija revidirana je 2014 godine. Ispituju matematičke sposobnosti na dvije čestice testa koje ispituju kvantitativno mišljenje, a to su numeričko rezoniranje (određivanje brojevnih sekvenci) i brojeva serija (upisivanje ispravnog broja u seriji brojeva prema nekom ključu).

U svijetu su dostupni i neki testovi razvijeni specifično za dijagnosticiranje teškoća u matematici, pa se tako za dijagnozu diskalkulije u Americi često koristi Dyscalculia Screener (Butterworth, 2008) za djecu od 6 do 14 godina, a uključuje procjenu vremena reakcije na tri zadatka. Na prva dva ispituje se „kapacitet za učenje matematike“ (procjena količine i usporedba dva broja), a na trećemu postignuće na matematičkim zadacima (zbrajanje jednoznamenkastih brojeva za mlađu djecu, i množenje jednoznamenkastih brojeva za stariju djecu). Autor smatra kako je moguće podijeliti djecu u dvije skupine na temelju rezultata na navedenim testovima: ukoliko imaju loš rezultat na obje skupine zadataka, pripadaju skupini s diskalkulijom. Ukoliko je rezultat ispodprosječan samo na testu postignuća, dijete nema diskalkuliju, već je razlog njegovom lošem postignuću u aritmetici potrebno potražiti negdje drugdje.

U Hrvatskoj se u svrhu procjene matematičkog znanja u školama često koriste „zadaci objektivnog tipa“, koji ispituju poznavanje činjenica, lako se i brzo primjenjuju, te je njima moguće ispitati veliki broj učenika u kratkom vremenu. Prema Grgin (2001) oni se mogu podijeliti u nekoliko skupina:

1. Zadaci dosjećanja

Podskupine ovih zadataka čine zadaci dosjećanja i zadaci nadopunjavanja. Kod ovakvih zadataka traži se kratak odgovor na postavljeno pitanje, koje se može sastojati od nekoliko riječi do kratke rečenice. Kao primjer zadataka matematike ovoga tipa navodi se: navedi poučak o sukladnosti trokuta, zapiši sljedeće podatke matematičkim simbolima, kako glasi definicija pojma „komutativnost“ i slično. Kod zadataka nadopunjavanja, od učenika se traži da dopiše podatke koji nedostaju (može se raditi o riječima ili brojevima). Primjerice, može biti zadana tablica u kojoj se traži da učenik dopiše rezultate zbrajanja, oduzimanja, množenja ili dijeljenja, ili neke druge podatke koji nedostaju (pribrojnik, umanjitelj, umanjenik, dijelitelj...)

2. Zadaci prepoznavanja

Podskupine ovih zadataka čine zadaci s alternativnim tvrdnjama (učenik mora prepoznati koja je od navedenih tvrdnji točna), zadaci ispravljanja (od učenika se traži da uoči pogrešku ukoliko postoji, te napiše točan podatak), zadaci sređivanja (učenici moraju prepoznati načelo te prema njemu rasporediti dobivene podatke), zadaci s dva kriterija izbora (zadatak sadrži niz podataka, a od učenika se traži da ih razvrsta prema dvama kriterijima izbora), zadaci povezivanja (pojmovi složeni u dva niza trebaju se međusobno točno povezati) i zadaci višestrukog izbora (od učenika se traži prepoznavanje točnog odgovora između nekoliko ponuđenih).

Neki od primjera zadataka su sljedeći:

1. Primjer zadatka s dva kriterija izbora

Zaokruži sve parne, a podcrtaj sve neparne brojeve: 2, 5, 6, 8, 1, 9

2. Primjer zadatka sređivanja

Sljedeće brojeve smjesti u odgovarajući skup: 4, 15, 20, 10, 62, 9

a) <10:

b) >10 :

c) $=10$:

Navedeni zadaci vrijedan su izvor informacija za sve one koji sudjeluju u odgoju i obrazovanju i koji shvaćaju vrijednost matematike. Ona ne leži samo u školskom znanju i boljim ocjenama iz matematike, već i u njenoj uporabi u svakodnevnom životu. Kako bi izdvojili one zadatke koji će najbolje razlikovati djecu s teškoćama u matematici od one koja uredno usvajaju matematiku (zadatke koji će ispitivati ciljane, specifične razlike u aritmetičkim vještinama), potrebno je osvrnuti se na dosadašnja saznanja o zadacima koje djeca najteže svladavaju, te kakve oni greške čine prilikom njihova rješavanja.

1.5. Matematika – što je sve teško i kojoj djeci?

Aritmetički zadaci variraju u svojoj složenosti i težini, a matematička se znanja nadovezuju jedna na druga, iz čega i proizlazi redosljed usvajanja gradiva matematike. Pojedini se zadaci pokazuju teškima za svu djecu, naročito u počecima usvajanja.

Hanich i sur. (2011) su usporedili djecu drugog razreda osnovne škole s teškoćama u matematici i teškoćama čitanja, te djecu s teškoćama u matematici i djecu urednih matematičkih vještina na zadacima jednostavnog računanja (jednostavni aritmetički zadaci zbrajanja i oduzimanja), problemskim zadacima, približnoj aritmetici (približnoj procjeni rezultata), zadacima razumijevanja mjesne vrijednosti, razumijevanja osnovnih principa zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, brzom prizivanju aritmetičkih činjenica i pisanom računanju.

Svi su zadaci prezentirani istovremeno i vizualno i auditivno, a svako je dijete ispitano individualno. Rezultati su pokazali da se grupa djece s teškoćama u matematici značajno razlikuje od grupe bez teškoća u matematici na svim zadacima. Nadalje, djeca s teškoćama u matematici bolja su u zadacima jednostavnog računanja i problemskim zadacima od grupe s djece s teškoćama čitanja i teškoćama u matematici, koji su imali značajno lošije rezultate na ove dvije grupe zadataka. Nedostaci u brzom prizivanju aritmetičkih činjenica prisutni su i kod djece s teškoćama čitanja i teškoćama u matematici, ali i kod djece sa specifičnim teškoćama u matematici. Rezultati su pokazali i kako djeca s teškoćama u matematici (obje grupe) imaju slabije razumijevanje osnovnih principa zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, pri čemu su bili uspješniji u zadacima primjene principa komutativnosti, a sve su grupe imale najviše teškoća sa zadacima inverzije (razumijevanja veze zbrajanja i oduzimanja, primjerice: ako je $24 + 53 = 77$ koliko je $77 - 24$?) što autori objašnjavaju nedostatnim objašnjavanjem navedenog principa u nastavi, odnosno, nedovoljnom posvećivanju vremena poduci veze zbrajanja i oduzimanja. Također, sve su grupe pokazale teškoće s rješavanjem zadataka koji zahtijevaju razumijevanje mjesne vrijednosti, iako su grupe djece s teškoćama imale više grešaka od grupe djece urednih matematičkih vještina. Na zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja, grupe djece s teškoćama u matematici bile su značajno lošije od grupe bez teškoća na zadacima koji nisu uključivali regrupiranje (drugi naziv za prenošenje i posuđivanje, odnosno pamćenje „ostatka“ kao što je to primjerice u

zadatku $32 + 45$), dok su sve grupe pokazale teškoće s rješavanjem zadataka koji uključuju regrupiranje (kao što je to primjerice u zadatku $68 + 94$).

Osim točnosti rješavanja, autori su uzeli u obzir i vrijeme potrebno za rješavanje zadataka, pa se tako pokazalo da su obje grupe djece s teškoćama rješavale zadatke značajno sporije od grupe djece urednih matematičkih vještina.

Slabije rezultate djece s teškoćama u matematici na zadacima prisjećanja aritmetičkih činjenica, problemskim zadacima, zadacima koji zahtijevaju razumijevanje mjesne vrijednosti i pisanom računanju, te o teškoćama u ovladavanju matematičkim činjenicama i fluentnošću računanja izvještavaju i drugi autori (Jordan i Montani, 1997; Jordan i Hanich, 2000; Jordan i sur., 2003). Također, potrebno je uzeti u obzir i težinu prezentiranog zadatka. Općenito se smatra kako su zadaci zbrajanja i oduzimanja jednostavniji od zadataka množenja i dijeljenja, iz kojeg se razloga potonje dvije operacije i usvajaju kasnije. Djeca često pogrešno koriste zbrajanje u problemskim zadacima gdje se očekuje množenje, a do ovladavanja množenjem često dolaze na način da se usvaja kao sukcesivno zbrajanje istih pribrojnika. Jedan od razloga težeg usvajanja množenja, u odnosu na zbrajanje, jest u tome što rezultat množenja ne ovisi samo o veličini množitelja već i množenika (u zbrajanju će rezultat $2 + 6$ i $2 + 4$ biti uvećan za 2 u oba slučaja, dok će u slučaju množenja istih brojeva rezultat biti značajno različit). Operacije množenja i dijeljenja konceptualno se razlikuju od operacija zbrajanja i oduzimanja, jer je za njihovo shvaćanje nužno razumijevanje omjera – relativna veličina dva ili više predmeta, i proporcija – komparativnih odnosa između stvari i veličina. Operacije množenja i dijeljenja kognitivno su zahtjevnije od operacija zbrajanja i oduzimanja, naročito kada su prezentirane u obliku problemskih zadataka (Bryant, 1995).

Neka istraživanja (Robinson i sur., 2002; Simmons i sur., 2008) pretpostavljaju da su razlozi neuspjeha kod djece s teškoćama u matematici slabe kognitivne reprezentacije koje dovode do sporijeg prizivanja informacija iz dugoročnog pamćenja. Smatraju kako lošije vještine fonološke obrade dovode do neuspjeha kod djece s teškoćama u matematici i teškoćama čitanja, dok su deficiti u razvijenosti „smisla za broj“ zajednički uzročni faktor djeci sa specifičnim teškoćama u matematici i prethodno spomenutoj skupini.

Teškoće u aritmetici zajedničke su nizu poremećaja, iako razlozi neuspjeha nisu isti za svu djecu. Moguće je razlikovati neke greške karakteristične za pojedine poremećaje. Zbog različitosti kognitivnih sposobnosti i vještina uključenih u učenje matematike, teškoće se mogu javiti u različitim domenama matematike i matematičkih zadataka. Primjerice, djeca s

intelektualnim teškoćama imaju problema sa shvaćanjem matematičkih koncepata, poopćavanjem usvojenih pravila, matematičkim i logičkim mišljenjem. Često će biti uspješna u osnovnim numeričkim kalkulacijama, ali su teškoće prisutne u prenošenju znanja na nove situacije (Sharma, 2001), te općenito sprorije usvajaju novo gradivo. S druge strane, djeca s ADHD-om često zbog hiperaktivnost i nepažnje čine nesistematične (pogađanje, pretjerano brzi odgovori, nemogućnost upotrebe prethodno demonstrirane vještine) ili sistematične greške u računanju (proceduralne aritmetičke pogreške koje su rezultat deficita radnog pamćenja) (Benedetto-Nasho i Tannock, 1999; Mattison i Dickerson Mayes, 2010), a uključuju brkanje redoslijeda izvođenja postupaka prilikom rješavanja zadataka, pogrešno prenošenje jedinica i pogrešno poravnanje) (Marshall, 2008). Teškoće fonološkog procesiranja kod djece s disleksijom uzrokuju slabije vještine u pojedinim domenama matematike, naročito one koje se oslanjaju na manipulaciju verbalnim kodovima (brzina brojanja, prizivanje brojevnih činjenica) (Simmons i Singleton, 2007). Teškoće u aritmetici kod djece s disleksijom očitovati će se u teškoćama učenja, pamćenja i reproduciranja aritmetičkih tablica (primjerice tablice množenja), postupaka u algoritmima (zbog čega se često javljaju proceduralne greške u jednostavnim aritmetičkim operacijama), te teškoćama u usvajanju mnogih aritmetičkih koncepata i radnji koje se temelje na razumijevanju i poznavanju vremenskih i prostornih odnosa (redoslijed obavljanja računskih radnji i smjer računanja, upotreba znakova „<“ i „>“, mjerenje vremena i računanje s jedinicama za vrijeme) (Sharma, 2001).

Poremećaj matematičkih sposobnosti također sa sobom nosi niz specifičnih grešaka u aritmetici. Sharma (2001) navodi neke od njih:

1. Parafazične supstitucije

- dijete zamjenjuje jedan broj nekim drugim, a te zamjene nemaju nikakve veze s teškoćama u razumijevanju pojma broja (npr. dijete jednom čita brojku 3 kao „šest“ a drugi je puta koristi kao da je to broj 5)

2. Perserveracije

- ove pogreške naziva i „pismenim mucanjem“. Dijete se zadržava na istom broju ili radnji i nije u stanju prijeći na sljedeći korak. Primjerice, ako je prvi zadatak bio zadatak zbrajanja označen simbolom „+“ dijete nastavlja zbrajati i u idućim zadacima iako se znak promijenio.

Također se događa da, kada nauči novu računsku radnju ili postupak, dijete ga počinje primjenjivati i tamo gdje nije potrebno (npr. „posuđuje“ i u zadacima gdje nema oduzimanja)

3. Zrcalne greške

-dijete zrcalno okreće znamenke, narušava ili zrcalno okreće redoslijed znamenaka u višeznamenkastim brojevima. Ovo je prisutno prilikom čitanja i pisanja brojeva.

4. Usporenost

-točno rješava zadatak ali mu je potrebno znatno više vremena nego što je uobičajeno za dob.

5. Stavljanje brojeva u uzajamno neprikladan prostorni položaj

-prilikom pismenog računanja dijete pogrešno smješta brojeve u prostor i zbog toga dolazi do krivog rezultata (problem potpisivanja brojeva)

6. Vizualne greške

-dijete pogrešno prepoznaje računske simbole, pa sukladno tome koristi i pogrešnu aritmetičku operaciju (primjerice zbraja u zadacima oduzimanja)

7. Proceduralne greške

-dijete izostavlja ili „preskače“ jedan od obaveznih koraka u rješavanju zadataka (primjerice, zanemaruje pamćenje ostatka kod pisanog množenja)

Naravno, svi matematički zadaci ne predstavljaju jednak izazov za djecu s teškoćama u matematici. Budući da različiti aspekti matematike uključuju različite kognitivne vještine, raspodjela teškoća u matematici može biti nejednaka kroz različite domene matematike.

Djeca s teškoćama u matematici teže ovladavaju već i jednostavnim aritmetičkim zadacima, a pokazuju teškoće i u rješavanju problemskih zadataka, približnoj procjeni rezultata (što Hanich i sur. (2011) smatraju temeljnim deficitom kod djece s teškoćama u matematici, budući da ne uključuje jezičnu obradu), razumijevanju mjesne vrijednosti, brzom prizivanju aritmetičkih činjenica, pisanom računanju, ovladavanju matematičkim činjenicama i fluentnošću rješavanja računskih zadataka.

S druge strane, primjena principa inverzije te zadaci pisanog zbrajanja i oduzimanja s regrupiranjem pokazuju se teškim svoj djeci. Množenje i dijeljenje smatraju se težim operacijama od zbrajanja i oduzimanja, pa predstavljaju veći izazov svim učenicima.

U Hrvatskoj ne postoje podaci sustavnih istraživanja, posebno kod djece koja pokazuju teškoće u matematici o uspjehu na različitim matematičkim zadacima, te se ne može sa sigurnošću utvrditi, prema planu i programu nastave matematike, koji zadaci su oni koje sva djeca teže svladavaju, a koja se matematička znanja pokazuju težima za usvajanje samo za djecu s teškoćama u matematici. Različiti razlozi neuspjeha u matematici dovode i do različitog očitovanja teškoća u matematici, što je vidljivo iz analize pogrešaka koje čine djeca s teškoćama u matematici. Stoga je ovaj rad usmjeren dobivanju uvida u uspješnost rješavanja matematičkih zadataka kod školske populacije, posebno kod djece s teškoćama.

2. CILJ I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA

Cilj rada je uvid u razinu uspješnosti rješavanja aritmetičkih zadataka učenika od 3. do 8. razreda osnovne škole – zadataka zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, te poznavanja pravila izvođenja računskih radnji.

Posebno će biti opisani i kvalitativno analizirani rezultati djece koja su dijagnosticirana kao ona koja imaju teškoće u matematici, odnosno diskalkuliju kako bi se dobio uvid u moguće karakteristične greške koje čine djeca s teškoćama u matematici u odnosu na djecu bez teškoća.

Usporedit će se uspješnost na svim korištenim zadacima oblikovanim za potrebe istraživanja kao i pojedinim česticama – zadacima, i to između učenika s teškoćama u matematici i djece bez teškoća u matematici.

Svrha ovog istraživanja je dati smjernice za oblikovanje aritmetičkih zadataka, kao dijela procjene matematičkih znanja, temeljem kojih je moguće oblikovati materijal za odjeljivanje djece s teškoćama u matematici i diskalkulijom od populacije bez teškoća u matematici.

U skladu s postavljenim ciljem, oblikovane su hipoteze:

H1: Postojat će statistički značajne razlike u ukupnom broju bodova na ispitnim zadacima iz matematike kod učenika bez teškoća u matematici u korist učenika starijih razreda (učenika četvrtih u odnosu na treće razrede, petih u odnosu na četvrte razrede, šestih u odnosu na pete razrede, sedmih u odnosu na šeste, osmih u odnosu na sedme).

H2: Razlika u ukupnom broju bodova na ispitnim zadacima iz matematike bit će najveća između ispitanih učenika bez teškoća u matematici polaznika trećih razreda i učenika četvrtih razreda.

H3: Djeca s teškoćama u matematici postići će manji ukupan broj bodova na ispitnim zadacima iz matematike od učenika bez teškoća u matematici.

H4: Djeca s teškoćama u matematici činit će veći broj grešaka od djece bez teškoća u matematici na ispitnim zadacima koji ispituju poznavanje slijeda izvođenja računskih radnji, prizivanja rezultata osnovne tablice množenja, te zadacima koji uključuju regrupiranje.

3. METODE ISTRAŽIVANJA

3.1. Uzorak

Uzorak ispitanika je prigodni i sastojao se od 164 učenika od 3. do 8. razreda, polaznika dviju redovnih Osnovnih škola u Zagrebu: Osnovne škole Jelkovec i Osnovne škole Sesvetska Sopnica. Ispitanici su podijeljeni prema dva kriterija: prema kriteriju razreda koji pohađaju podijeljeni su u šest skupina – polaznici trećih, četvrtih, petih, šestih, sedmih i osmih razreda te prema drugom kriteriju: prisutnosti teškoća u matematici. Prema drugom kriteriju podijeljeni su u dvije skupine: učenici koji nemaju teškoće u matematici, odnosno uredno usvajaju matematiku i učenici koji imaju teškoća u matematici (tablica 2 i 3). Skupina učenika s teškoćama u matematici su oni učenici koji se školuju prema individualiziranom i/ili prilagođenom programu iz matematike.

Tablica 2. Uzorak učenika koji nemaju teškoće u matematici (N = 145) prema razredu i školi koju pohađaju

RAZRED	3.	4.	5.	6	7	8
ŠKOLA						
OŠ JELKOVEC	15	19	13	17	25	0
OŠ SESVETSKA SOPNICA	7	10	2	9	19	9

Tablica 3. Uzorak učenika koji imaju teškoće u matematici (N = 19) prema razredu i školi koju pohađaju

RAZRED	3.	4.	5.	6	7	8
ŠKOLA						
OŠ JELKOVEC	0	2	1	7	2	0
OŠ SESVETSKA SOPNICA	2	0	0	4	0	1

3.2. Opis ispitnog materijala- zadataka za ispitivanje matematičkih znanja

Ispitni materijal oblikovan je na temelju zadataka iz udžbenika za nastavu matematike osnovne škole, a zadaci prate Nastavni plan i program matematike za Osnovnu školu iz 2013.godine. Prikaz zadataka dan je u tablici (tablica 4).

Tablica 4. Prikaz zadataka korištenih u istraživanju prema skupinama i njihovo bodovanje

NAZIV SKUPINE ZADATAKA	ZADACI I RIJEŠENJA	BROJ BODOVA ZA SKUPINU
1. zbrajanje i oduzimanje jednoznamenkastih brojeva do deset	a) $3 + 1 = 4$ b) $5 - 3 = 2$ c) $0 + 2 = 2$ d) $4 - 0 = 4$	4
2. zbrajanje i oduzimanje brojeva do dvadeset	a) $12 + 4 = 16$ b) $15 - 2 = 13$ c) $7 + 8 = 15$ d) $5 + 9 = 14$ e) $17 - 10 = 7$ f) $13 - 8 = 5$	6
3. računanje s deseticama	a) $10 + 30 = 40$ b) $50 + 40 = 90$	2
4. zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja	a) $45 + 7 = 52$ b) $79 + 4 = 83$ c) $51 - 6 = 45$	3
5. zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastih brojeva	a) $17 + 45 = 62$ b) $54 + 36 = 90$ c) $33 - 19 = 14$	3
6. množenje brojevima do deset	a) $2 \cdot 4 = 8$ b) $5 \cdot 7 = 35$ c) $9 \cdot 2 = 18$ d) $2 \cdot 8 = 16$	4
7. množenje i dijeljenje s nulom	a) $3 \cdot 0 = 0$ b) $3 : 0 = 0$	2

Tablica 4. Prikaz zadataka korištenih u istraživanju prema skupinama i njihovo bodovanje (nastavak)

NAZIV SKUPINE ZADATAKA	ZADACI I RIJEŠENJA	BROJ BODOVA ZA SKUPINU
8. tablica množenja	a) $10 : 2 = 5$ b) $55 : 5 = 11$ c) $8 : 4 = 2$ d) $32 : 4 = 8$ e) $4 \cdot 6 = 24$ f) $7 \cdot 8 = 56$	6
9. pisano zbrajanje i oduzimanje	a) $\begin{array}{r} 158 \\ + 499 \\ \hline 657 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 812 \\ + 111 \\ \hline 923 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 152 \\ - 125 \\ \hline 27 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 821 \\ - 374 \\ \hline 447 \end{array}$	4
10. pisano množenje	a) $100 \cdot 7 = 700$ b) $37 \cdot 6 = 222$ c) $78 \cdot 3 = 234$	3
11. pisano dijeljenje	a) $52 : 4 = 13$ b) $645 : 5 = 129$ c) $47 : 3 = 15 \text{ (ost.2)}$ d) $68 : 7 = 9 \text{ (ost.5)}$ e) $650 : 9 = 72 \text{ (ost.2)}$	5
12. poznavanje pravila redoslijeda izvođenja računskih operacija	a) $45 + (32 - 15) = 45 + 17 = 62$ b) $5 \cdot 2 + 2 : 1 = 10 + 2 = 12$ c) $3 \cdot (9 - 6) : 3 = 3 \cdot 3 : 3 = 3$ d) $33 + 72 : 8 - 3 \cdot 6 = 33 + 9 - 18 = 42 - 18 = 24$	4
UKUPAN BROJ BODOVA		46

Materijal se sastojao od 46 zadataka poredanih tako da težine zadataka rastu s poretком zadataka. Zadaci su ispitivali usvojenost osnovnih aritmetičkih vještina (zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja). Zadaci zbrajanja (13 zadataka) uključivali su zbrajanje jednoznamenkastih brojeva do 10, zbrajanje s nulom, zbrajanje brojeva do 20 (sa i bez prijelaza preko desetice), zbrajanje desetica, zbrajanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja, zbrajanje dvoznamenkastih brojeva do 100, zbrajanje dvoznamenkastih brojeva, pisano zbrajanje i zbrajanje troznamenkastih brojeva. Zadaci oduzimanja (9 zadataka) uključivali su oduzimanje brojeva do 10, oduzimanje s nulom, oduzimanje brojeva do 20 (sa i bez prijelaza preko desetice), oduzimanje desetica, oduzimanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja, oduzimanje dvoznamenkastih brojeva do 100, pisano oduzimanje i oduzimanje troznamenkastih brojeva. Zadaci množenja (10 zadataka) uključivali su množenje brojeva do 10 (poznavanje tablice množenja), množenje s 0 i 1, te pisano množenje dvoznamenkastog s jednoznamenkastim brojem. Zadaci dijeljenja (10 zadataka) uključivali su dijeljenje dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim bez ostatka (poznavanje tablice množenja), pisano dijeljenje dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim s ostatkom, dijeljenje s brojevima 0 i 1, te pisano dijeljenje troznamenkastog broja jednoznamenkastim sa i bez ostatka. Posljednja 4 zadatka su zadaci s više računskih radnji i zagradama, te ispituju poznavanje slijeda izvođenja računskih radnji i poznavanje funkcije zagrada.

Svaki pojedinačni točno riješeni zadatak nosi 1 bod, te se broj bodova zbraja za svaku skupinu posebno. Ukupan broj bodova je zbroj broja bodova svih skupina.

Zadaci riječima nisu uključeni, te je umanjena jezična komponenta upotrebom univerzalne riječi „Izračunaj“ umjesto „zbroji“, „oduzmi“, „pomnoži“ ili „podijeli“. Razlog tome je i potencijalno pojavljivanje grešaka tipa perseveracija (grešaka zaglavljivanja na istoj operaciji ne obazirući se na promjenu simbola računske operacije).

3.3. Način provođenja istraživanja

Zadaci su primjenjivani grupno, pismenim putem, tijekom redovne nastave u prostoru škola koje su sudjelovale u istraživanju, posebno za pojedini razred. Za rješavanje zadataka određeno je maksimalno vrijeme trajanja od jednog školskog sata. Ispitni materijal riješavan je individualno. Upute su uključivale odobrenje za početak rješavanja, i uvid u tip zadataka koji će se pojaviti (matematički zadaci). Nisu dane nikakve dodatne upute. Za vrijeme rješavanja zadataka nije bilo dopušteno koristiti kalkulator. Učenici su donosili materijale po završetku rješavanja.

3.4. Varijable istraživanja

Učenici su podijeljeni prema dva kriterija: razredu koji pohađaju, te prisutnosti teškoća u matematici. Prikaz varijabli i njihov opis dan je u tablici (tablica 5).

Tablica 5. Opis varijabli

KRATICA VARIJABLE	OPIS VARIJABLE	VRSTA (ZAVISNA/NEZAVISNA)
RAZ	razred koji učenik pohađa: (3., 4., 5., 6., 7., 8.)	nezavisna
TUM	prisutnost teškoća u matematici: (učenici koji imaju teškoće u matematici, učenici koji nemaju teškoće u matematici)	nezavisna
UBB	ukupan broj bodova na testu aritmetike	zavisna
ZU	ukupan broj bodova na zadacima zbrajanja	zavisna
OU	ukupan broj bodova na zadacima oduzimanja	zavisna
MU	ukupan broj bodova na zadacima množenja	zavisna
DU	ukupan broj bodova na zadacima dijeljenja	zavisna
SRR	ukupan broj bodova na zadacima poznavanja pravila redoslijeda izvođenja računskih operacija	zavisna
ZOJDES	zbrajanje i oduzimanje jednoznamenkastih brojeva do deset	zavisna
ZODVAD	zbrajanje i oduzimanje brojeva do 20	zavisna

Tablica 5. Opis varijabli (nastavak)

KRATICA VARIJABLE	OPIS VARIJABLE	VRSTA (ZAVISNA/NEZAVISNA)
RD	računanje s deseticama	zavisna
ZODJB	zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja	zavisna
ZODB	zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastih brojeva	zavisna
MBDES	množenje brojevima do deset	zavisna
MDN	množenje i dijeljenje s nulom	zavisna
OTB	osnovna tablica množenja	zavisna
PZO	pisano zbrajanje i oduzimanje	zavisna
PM	pisano množenje	zavisna
PD	pisano dijeljenje	zavisna

3.5. Metode obrade podataka

Izračunati su osnovni statistički parametri koji uključuju aritmetičke sredine, standardne devijacije te najveći i najmanji postignuti rezultat za pojedine skupine (posebno za svaku skupinu ispitanika prema oba kriterija podjele - razred i pripadnost skupini urednih matematičkih vještina ili skupini s teškoćama u matematici). Za svaku vrstu zadataka utvrđen je postotak točnih odgovora kako bi se utvrdila težina zadataka za skupinu djece koja imaju teškoće u matematici i skupine djece koja nemaju teškoće u matematici.

Testirana je normalnost distribucije Shapiro Wilk testom za svaku od navedenih skupina prema oba kriterija podjele.

Utvrđene su razlike između grupa ispitanika prema razredu, posebno za svaki razred – razlike između 3. i 4., 4. i 5., 5. i 6., 6. i 7., 7. i 8., neparametrijskom zamjenom za t-test, Mann Whitney U testom za testiranje značajnosti razlika između dva nezavisna uzorka.

Razlike između skupine djece s teškoćama u matematici i djece urednih matematičkih vještina testirane su Mann Whitney U testom za testiranje značajnosti razlika između dva nezavisna uzorka.

Kvalitativnom analizom podataka dobivenih na skupini djece s teškoćama u matematici izdvojene su i opisane karakteristične vrste grešaka za tu skupinu.

4. REZULTATI I RASPRAVA

4.1. Rezultati kvantitativne analize – usporedba učenika urednih matematičkih vještina s obzirom na razred

Izračunati su osnovni statistički parametri (aritmetička sredina, standardna devijacija, najveći i najmanji broj bodova) za sve razrede (tablica 6) na varijabli ukupan broj bodova (UBB) za učenike koji nemaju teškoće u matematici, kako bi se dobili opisni podaci o njihovoj uspješnosti na testu aritmetike.

Tablica 6. Osnovni statistički parametri na varijabli UBB (ukupan broj bodova) za učenike
UR

razred	N	MIN	MAX	X	SD	TR
3	22	25	44	37.05	4.845	0 – 46
4	29	36	46	42.34	2.319	0 – 46
5	15	38	46	43.40	2.165	0 – 46
6	26	35	46	42.04	3.423	0 – 46
7	44	35	46	42.23	2.778	0 – 46
8	9	35	46	43.00	4.330	0 – 46

Iz podataka je vidljivo da učenici četvrtog razreda postižu prosječno više bodova od učenika trećeg razreda, ali je prisutno i veće raspršenje rezultata kod učenika trećeg razreda. Vidljiv je i veći raspon rezultata, te ova dva podatka ukazuju na to da rezultati učenika trećeg razreda variraju više od rezultata učenika četvrtog razreda, odnosno, postoje veće varijacije u ovladanosti aritmetičkim operacijama kod učenika trećeg razreda u odnosu na učenike četvrtog razreda. Razlika u aritmetičkim sredinama govori i o tome da su učenici trećeg razreda prosječno manje uspješni u rješavanju aritmetičkih zadataka od učenika četvrtog razreda. Između učenika četvrtog, petog, šestog, sedmog i osmog razreda nema većih razlika u prosječnom broju bodova na testu aritmetike.

S porastom dobi i obrazovne razine očekuje se i porast uspješnosti na zadacima koji ispituju usvojenost aritmetičkih operacija. Iz tog razloga i u skladu s postavljenom hipotezom o postojanju razlika na ukupnom postignuću u korist viših razreda., razredi su dalje uspoređeni prema sljedećem principu: 3. i 4., 4. i 5., 5. i 6., 6. i 7., 7. i 8.

Prije daljnje analize, testirana je normalnost distribucije Shapiro Wilk testom za svaki razred i posebno za skupinu djece s teškoćama u matematici i skupinu djece urednih matematičkih vještina, te je utvrđeno da distribucija rezultata ne odgovara normalnoj distribuciji. S obzirom na to, korišteni su neparametrijski testovi za testiranje značajnosti razlika između skupina.

Razredi su uspoređeni na varijabli korištenjem Mann Whitney U testa za testiranje razlika između dva nezavisna uzorka (tablica 7), te su pronađene statistički značajne razlike između 3. i 4. razreda ($p = 0,000$). Ostali razredi se statistički značajno ne razlikuju na varijabli ukupan broj bodova (UBB).

Tablica 7. Razlike između učenika 3. i 4., 4. i 5., 5. i 6., 6. i 7., 7. i 8. razreda testirane Mann Whitney U testom na varijabli UBB

USPOREĐENI RAZREDI	3. / 4.		4. / 5.		5. / 6.		6. / 7.		7. / 8.	
	MWU	p	MWU	p	MWU	p	MWU	p	MWU	p
UBB	98,000	0,000*	155,500	0,121	155,500	0,274	560,500	0,888	137,500	0,149

**statistički značajne razlike*

Dobiveni rezultati na Mann Whitney U testu za testiranje razlika između dva nezavisna uzorka, te deskriptivni podaci o postignuću učenika 3., 4., 5., 6., 7. i 8. razreda na varijabli ukupan broj bodova (UBB), ukazuju na postojanje statistički značajnih razlika između 3. i 4. razreda, što je u skladu s očekivanjem. Navedeni rezultati upućuju na to da su vještine potrebne za rješavanje jednostavnih aritmetičkih zadataka uglavnom automatizirane nakon 3. razreda osnovne škole, te da djeca nakon trećeg razreda postižu istu razinu uspješnosti u ispitanim zadacima. Učenici od 4. do 8. razreda ne razlikuju se u točnosti rješavanja zadataka bez obzira na dug period obrazovanja do 8. razreda tijekom kojeg imaju mnogo prilika za vježbu rješavanja aritmetičkih operacija.

Međutim, kako bi se dobio bolji uvid u to koje su skupine zadataka odgovorne za postojanje odnosno nepostojanje razlika, te kako bi se stekao uvid u opću uspješnost u rješavanju pojedinih aritmetičkih operacija s obzirom na razred izračunati su osnovni statistički parametri na varijablama zbrajanje ukupno (ZU), oduzimanje ukupno (OU), množenje ukupno (MU), dijeljenje ukupno (DU) i slijed računskih radnji (SRR) (tablica 8).

Tablica 8. Osnovni statistički parametri na varijablama ZU, OU, MU, DU i SRR za učenike od 3. do 8. razreda UR-a

razred		N	MIN	MAX	X	SD	TR
3	ZU	22	5	13	12.27	1.723	0 – 13
	OU	22	5	9	7.18	1.368	0 – 9
	MU	22	5	10	8.05	1.133	0 – 10
	DU	22	4	10	7.55	2.041	0 – 10
	SRR	22	0	4	1.95	1.290	0 – 4
4	ZU	29	10	13	12.45	.686	0 – 13
	OU	29	6	9	8.34	.936	0 – 9
	MU	29	7	10	9.41	.780	0 – 10
	DU	29	7	10	9.14	1.093	0 – 10
	SRR	29	0	4	2.97	.981	0 – 4
5	ZU	15	11	13	12.60	.632	0 – 13
	OU	15	8	9	8.93	.258	0 – 9
	MU	15	8	10	9.73	.594	0 – 10
	DU	15	7	10	9.00	1.000	0 – 10
	SRR	15	2	4	3.13	.834	0 – 4
6	ZU	26	11	13	12.77	.514	0 – 13
	OU	26	6	9	8.46	.948	0 – 9
	MU	26	8	10	9.27	.827	0 – 10
	DU	26	4	10	8.23	1.818	0 – 10
	SRR	26	1	4	3.27	.874	0 – 4
7	ZU	44	11	13	12.57	.625	0 – 13
	OU	44	6	9	8.43	.900	0 – 9
	MU	44	8	10	9.57	.587	0 – 10
	DU	44	5	10	8.32	1.491	0 – 10
	SRR	44	0	4	3.36	.942	0 – 4
8	ZU	9	11	13	12.78	.667	0 – 13
	OU	9	8	9	8.89	.333	0 – 9
	MU	9	7	10	9.11	1.054	0 – 10
	DU	9	5	10	9.11	1.833	0 – 10
	SRR	9	0	4	3.11	1.269	0 – 4

Iz podataka deskriptivne statistike vidljivo je kako je prosječan broj bodova na varijabli ZU (zbrajanje ukupno) relativno ujednačen prema razredima, dok se prema prosječnom broju bodova na varijablama zbrajanje ukupno (ZU), oduzimanje ukupno (OU), množenje ukupno (MU), dijeljenje ukupno (DU) i slijed računskih radnji (SRR) čini kako postoje razlike među razredima u korist viših razreda. Slično kao i na varijabli ukupan broj bodova (UBB), standardne devijacije i rasponi između najmanjeg i najvećeg rezultata na ovim su varijablama najveći kod trećeg razreda. To je ujedno i jedini razred kod kojeg postoje veća raspršenja rezultata od aritmetičke sredine na zadacima zbrajanja, dok su kod ostalih razreda rezultati na tim zadacima relativno ujednačeni. Veće varijacije kod 4., 5., 6., 7. i 8. razreda prisutne su na zadacima dijeljenja, što može značiti da učenici nakon 3. razreda ovom operacijom ovladavaju s najvećim individualnim razlikama.

Rezultati učenika prema razredima uspoređeni su Mann Whitney U testom za testiranje razlika između dva nezavisna uzorka na varijablama zbrajanje ukupno (ZU), oduzimanje ukupno (OU), množenje ukupno (MU), dijeljenje ukupno (DU) i slijed računskih radnji (SRR) (tablica 9).

Tablica 9. Razlike između učenika 3. i 4., 4. i 5., 5. i 6., 6. i 7., 7. i 8. razreda testirane Mann Whitney U testom na varijablama ZU, OU, MU, DU i SRR

USPOREĐENI RAZREDI	3. / 4.		4. / 5.		5. / 6.		6. / 7.		7. / 8.	
	MWU	p	MWU	p	MWU	p	MWU	p	MWU	
ZU	291,000	0,543	189,000	0,418	167,500	0,320	474,500	0,139	154,500	0,209
OU	166,500	0,002*	146,000	0,024*	152,500	0,096	546,000	0,700	148,500	0,147
MU	105,000	0,000*	165,000	0,126	134,000	0,058	469,000	0,157	151,500	0,207
DU	170,000	0,003*	195,000	0,550	153,500	0,245	570,000	0,980	127,000	0,080
SRR	174,000	0,004*	202,500	0,693	174,000	0,540	521,500	0,492	174,500	0,530

**statistički značajne razlike*

Rezultatima testa utvrđeno je da postoje statističke značajne razlike između učenika 3. i 4. razreda na skupnim rezultatima na zadacima oduzimanja, množenja, dijeljenja i zadacima koji ispituju poznavanje pravila redoslijeda izvođenja računskih operacija. Nisu pronađene statistički značajne razlike na zadacima oduzimanja. Statistički značajne razlike između 4. i 5. razreda pronađene su samo na zadacima oduzimanja. Nisu pronađene statistički značajne razlike između 5. i 6., 6 i 7., te 7. i 8. razreda niti na jednim od navedenih skupina zadataka.

Iz ovih rezultata vidljivo je da je zbrajanje aritmetička operacija koja se prva i najlakše usvaja, odnosno operacija kojom učenici najlakše ovladavaju. Istraživanje Brush (1987) govori u prilog podjednakoj uspješnosti na jednostavnim zadacima zbrajanja i oduzimanja kod djece predškolske dobi, no kada se vrši usporedba između složenijih zadataka zbrajanja, i složenijih zadataka oduzimanja, istraživači pronalaze statistički značajne razlike u uspješnosti rješavanja navedenih zadataka koji ukazuju na to da učenici imaju više problema s oduzimanjem kako raste složenost zadataka. Vilette (2002) također nalazi razlike u uspješnosti rješavanja zadataka zbrajanja u odnosu na zadatke oduzimanja, pri čemu su se zadaci oduzimanja pokazali težima za rješavanje. Brush (1987) predlaže da razlog nejednakoj ovladanosti zbrajanjem i oduzimanjem leži u dječjem iskustvu – imaju više iskustva s brojanjem prema „više“ nego brojanjem prema „manje“. Međutim, isto se ne može primijeniti na djecu školske dobi, s obzirom da tijekom školovanja dobivaju podjednako iskustva u objema operacijama. Razlog se može nalaziti u zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja (obje vrste zadataka nalaze se u sklopu varijabli ZU – zbrajanje ukupno i OU – oduzimanje ukupno). U pisanom zbrajanju, moguće je zamijeniti mjesta pribrojnicima a da rezultat ostane isti – svojstvo koje se naziva komutativnost. Međutim, kod pisanog oduzimanja, smjer rješavanja odozgo prema dolje igra važnu ulogu u dobivanju točnog rezultata, te zamjena brojki prilikom računanja (na način da donja brojka postaje umanjenik, a gornja umanjitelj u slučaju kada je gornja brojka manja od donje) rezultira pogrešnim rezultatom. Van Lehn (1982) naziva ovu vrstu grešaka proceduralne greške, a Fuson i Kwom (1992) ističu kako su one česte kod djece koja tek počinju ovladavati pisanim zbrajanjem i oduzimanjem, kao što je to kod djece 3. razreda osnovne škole u Hrvatskoj. Van Lehn (1982) razlikuje proceduralne pogreške koje su konzistentne, odnosno javljaju se često prilikom rješavanja zadataka pisanog zbrajanja i oduzimanja, proceduralne greške koje se javljaju povremeno, i koje mogu odražavati nedostatnu integraciju procedura uključenih u rješavanje zadatka, te pogreške koje se odnose na pisanje netočnih aritmetičkih činjenica, za što većina istraživača smatra odgovornim pogrešno prizivanje aritmetičkih činjenica iz dugoročnog pamćenja.

S obzirom na dosadašnja saznanja o pogreškama koje djeca čine prilikom pisanog oduzimanja i zbrajanja, te u svrhu detaljnijeg uvida u razloge statistički značajnih razlika između 3. i 4. razreda, učinjena je dodatna analiza pogrešaka učenika urednih matematičkih vještina 3. i 4. razreda. Izračunati su postotci učenika u 3. razredu i učenika u 4. razredu koji griješe na zadacima pisanog oduzimanja, kako bi se stekao uvid u to smanjuje li se, povećava ili ostaje isti broj učenika koji griješe na tom zadatku u 4. razredu (tablica 10).

Tablica 10. Usporedba učenika 3. i 4. razreda koji griješe na zadacima pisanog oduzimanja

RAZRED	N	%POG9
3	22	72,72 %
4	32	12,50 %

%POG9 – postotak učenika koji griješe na zadacima pisanog oduzimanja

Većina učenika 3. razreda griješi na zadacima pisanog oduzimanja (PZO) (72,72%), za razliku od učenika 4. razreda kod kojih je taj postotak znatno manji (12,50%). Geary (2004) predlaže model prema kojemu svaka matematička domena, u ovome slučaju sustav desetica u aritmetici, ima svoje podržavajuće kompetencije: konceptualne (u ovome slučaju, razumijevanje sustava desetica) i proceduralne (u ovome slučaju, prenošenje). Fuson i Kwom (1992) nadalje ističu kako je moguće da proceduralne pogreške odražavaju manjak konceptualnog znanja o sustavu desetica na kojima se temelji regrupiranje, te je moguće da su kompetencije potrebne za rješavanje zadataka pisanog oduzimanja još u razvoju kod učenika 3. razreda.

Ista je analiza učinjena i na ostalim zadacima: zbrajanje i oduzimanje jednoznamenkastih brojeva do deset (ZOJDES), zbrajanje i oduzimanje brojeva do 20 (ZODVAD), računanje s deseticama (RD), zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja (ZODJB), zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastih brojeva (ZODB), množenje brojevima do deset (MBDES), množenje i dijeljenje s nulom (MDN), osnovna tablica množenja (OTB), pisano zbrajanje i oduzimanje (PZO), pisano množenje (PM), i pisano dijeljenje (PD) kako bi se stekao uvid u to smanjuje li se postotak učenika koji griješe u 4. razredu s obzirom na 3. razred i na ostalim skupinama zadataka (tablica 11).

Iz podataka je vidljivo da se postotak učenika koji griješe na pojedinim skupinama zadataka smanjuje na gotovo svim skupinama zadataka osim zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva i skupine zadataka koji ispituju osnovnu tablicu množenja, gdje postotak učenika koji griješe ostaje relativno jednak.

Učenici su nadalje uspoređeni Mann Whitney U testom na istim skupinama zadataka kako bi se utvrdilo jesu li pronađene razlike između razreda kada se promatra postotak učenika koji griješe na pojedinim skupinama zadataka statistički značajne (tablica 12).

Tablica 11. Usporedba učenika 3. i 4. razreda koji griješe na skupinama zadataka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 i 12

R	N	%POG 1	%POG 2	%POG 3	%POG 4	%POG 5	%POG 6	%POG 7	%POG 8	%POG 10	%POG 11	%POG 12
3	22	18,18%	13,63%	4,54%	9,09%	36,36%	13,63%	36,36%	22,72%	81,81%	77,27%	86,36%
4	32	9,37%	1,25%	9,37%	6,25%	37,5%	6,25%	25%	28,12%	28,12%	21,87%	62,5%

- *%POG – postotak učenika koji griješi na zadacima:*
- *1 – zbrajanja i oduzimanja jednoznamenkastih brojeva do deset*
- *2 - zbrajanja i oduzimanja brojeva do dvadeset*
- *3 - računanja s deseticama*
- *4 - zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja*
- *5 - zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva*
- *6 - množenja brojevima do deset*
- *7 - množenja i dijeljenja s nulom*
- *8 - tablice množenja*
- *10 - pisanog množenja*
- *11 - pisanog dijeljenja*
- *12 - poznavanja pravila redoslijeda izvođenja računskih operacija*

Tablica 12. Razlike između učenika 3. i 4., 4. i 5., 5. i 6., 6. i 7., 7. i 8. razreda testirane Mann Whitney U testom na varijablama ZOJDES, ZODVAD, RD, ZODJB, ZODB, MBDES, MDN, OTB, PZO, PM, i PD

USPOREĐENI RAZREDI	3. / 4.		4. / 5.		5. / 6.		6. / 7.		7. / 8.	
VARIJABLE	MWU	p	MWU	p	MWU	p	MWU	p	MWU	p
ZOJDES	308,500	0,721	195,000	0,202	195,00	1,000	546,000	0,273	189,000	0,843
ZODVAD	303,000	0,630	187,500	0,136	187,500	0,841	516,000	0,190	171,000	0,536
RD	302,000	0,488	209,500	0,691	182,000	0,738	559,000	0,442	193,500	0,917
ZODJB	312,000	0,775	217,000	0,977	189,500	0,883	555,000	0,607	184,500	0,753
ZODB	311,000	0,859	197,500	0,560	162,500	0,383	485,000	0,163	157,000	0,343
MBDES	297,500	0,427	202,500	0,303	187,500	0,841	563,000	0,705	180,500	0,683
MDN	291,000	0,511	165,500	0,125	158,500	0,327	452,000	0,040*	181,000	0,701
OTB	278,500	0,311	163,500	0,067	163,000	0,398	553,000	0,740	146,500	0,227
PZO	161,000	0,001*	172,500	0,062	135,000	0,108	520,500	0,414	177,000	0,633
PM	80,000	0,000*	196,500	0,503	162,500	0,383	507,000	0,329	171,500	0,536
PD	126,500	0,000*	207,500	0,752	127,000	0,067	545,500	0,738	110,500	0,037*

**statistički značajne razlike*

Statistički značajne razlike pronađene su između učenika trećeg i četvrtog razreda na zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja, pisanog množenja i pisanog dijeljenja. One ukazuju na to da učenici četvrtog razreda rješavaju zadatke pisanog zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja statistički značajno bolje od učenika trećeg razreda. Razlike pronađene na zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja potvrđuju prethodno navedene spoznaje o uspješnosti učenika 3. odnosno 4. razreda na zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja.

Zadaci pisanog množenja i dijeljenja prema osnovnim statisticima pokazali su se težima za učenike 3. razreda u odnosu na učenike 4. razreda, a što je potvrđeno utvrđivanjem statistički značajnih razlika između postignuća ovih učenika. To može upućivati na to da ove operacije još nisu automatizirane kod učenika 3. razreda. Budući da se učenici 3. razreda prvi puta susreću s pisanim množenje i dijeljenjem krajem 3. razreda, ne čudi slabija uspješnost učenika na tim zadacima u odnosu na učenike 4. razreda. Statistički značajne razlike pronađene su i između učenika šestog i sedmog razreda na varijabli množenje i dijeljenje s nulom (MDN) ($p = 0,040$), te između učenika sedmog i osmog razreda na varijabli pisano dijeljenje (PD) ($p = 0,029$). Nekonzistentni rezultati na pojedinim varijablama između učenika od 4. do 8. razreda mogu se objasniti premalim brojem zadataka koji ispituju određene skupine zadataka, ali i premalim brojem ispitanika.

4.2. Rezultati kvantitativne analize – usporedba učenika urednih matematičkih vještina i učenika s teškoćama u matematici

S obzirom na mali uzorak ispitanika, te iz razloga što ne postoje statistički značajne razlike na pojedinim zadacima kod učenika od 4. do 8. razreda (što upućuje na to da učenici urednog razvoja nakon trećeg razreda ovladavaju svim ispitanim zadacima na podjednako razini, te čine homogenu skupinu s obzirom na kriterij ovladanosti ispitanim aritmetičkih zadacima), za daljnu usporedbu učenika s teškoćama u matematici i učenika urednih matematičkih vještina, učenici su grupirani na dvije grupe: učenike od 4. do 8. razreda s teškoćama u matematici, i one urednih matematičkih vještina.

Izračunati su osnovni statistički parametri (aritmetička sredina, standardna devijacija, najveći i najmanji broj bodova) na varijablama ukupan broj bodova (UBB), zbrajanje ukupno (ZU), oduzimanje ukupno (OU), množenje ukupno (MU), dijeljenje ukupno (DU) i slijed računskih radnji (SRR) za učenike s teškoćama u matematici i učenike urednih matematičkih vještina od 4. do 8. razreda (tablica 13).

Tablica 13. Osnovni statistički parametri na varijablama UBB, ZU, OU, MU, DU i SRR za učenike koji nemaju teškoće u matematici i učenike s teškoćama u matematici od 4. do 8. razreda

Teškoće u matematici		N	MIN	MAX	X	SD	TR
NEMA	UBB	123	35	46	42.41	2.883	0 – 46
	ZU	123	10	13	12.60	.624	0 – 13
	OU	123	6	9	8.51	.853	0 – 9
	MU	123	7	10	9.46	.738	0 – 10
	DU	123	4	10	8.63	1.495	0 – 10
	SRR	123	0	4	3.20	.949	0 – 4
IMA	UBB	17	11	44	34.24	8.273	0 – 46
	ZU	17	9	13	12.29	1.105	0 – 13
	OU	17	0	9	6.76	2.223	0 – 9
	MU	17	1	10	7.82	2.378	0 – 10
	DU	17	0	9	5.76	2.635	0 – 10
	SRR	17	0	3	1.59	1.228	0 – 4

Iz rezultata deskriptivne statistike vidljive su razlike između ove dvije grupe u prosječnom broju bodova u sveukupnom rezultatu, te na zadacima oduzimanja, množenja, dijeljenja i zadacima poznavanja pravila redoslijeda izvođenja računskih operacija. Također, s obzirom na veće standardne devijacije i raspon rezultata u skupini učenika s teškoćama u matematici, može se govoriti o većim individualnim razlikama u rješavanju aritmetičkih zadataka. Mogući razlog tome je i heterogenost skupine učenika s teškoćama u matematici s obzirom na uzroke njihovih teškoća.

Nadalje, dvije navedene grupe učenika su uspoređene Mann Whitney U testom na varijablama zbrajanje ukupno (ZU), oduzimanje ukupno (OU), množenje ukupno (MU), dijeljenje ukupno (DU) i slijed računskih radnji (SRR) (tablica 14).

Tablica 14. Razlike između učenika od 4. do 8. razreda s teškoćama u matematici i učenika koji nemaju teškoće u matematici dobivene Mann Whitney U testom na varijablama UBB, ZU, OU, MU, DU i SRR

NAZIV VARIJABLE	MWU	p
UBB	260,000	0,000*
ZU	924,000	0,353
OU	442,000	0,000*
MU	558,500	0,001*
DU	332,000	0,000*
SRR	318,000	0,000*

**statistički značajne razlike*

Rezultati pokazuju da se učenici s teškoćama u matematici značajno razlikuju od skupine učenika bez teškoća u matematici u ukupnom broju bodova na testu aritmetike. Također, statistički značajne razlike pronađene su i na skupinama zadataka oduzimanja, množenja, dijeljenja i poznavanja pravila redoslijeda izvođenja računskih radnji. Ponovno, razlike nisu pronađene samo na zadacima zbrajanja, što govori u prilog zbrajanju kao operaciji koja se prva i najlakše usvaja, čak i kod djece s teškoćama u matematici.

Iste grupe učenika uspoređene su na varijablama zbrajanje i oduzimanje jednoznamenkastih brojeva do deset (ZOJDES), zbrajanje i oduzimanje brojeva do 20 (ZODVAD), računanje s

deseticama (RD), zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja (ZODJB), zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastih brojeva (ZODB), množenje brojevima do deset (MBDES), množenje i dijeljenje s nulom (MDN), osnovna tablica množenja (OTB), pisano zbrajanje i oduzimanje (PZO), pisano množenje (PM), i pisano dijeljenje (PD) (tablica 15), kako bi se odvojile skupine zadataka koje najbolje razlikuju ove dvije grupe ispitanika.

Tablica 15. Razlike između učenika od 4. do 8. razreda koji imaju teškoće u matematici i učenika istih razreda koji nemaju teškoće u matematici dobivene Mann Whitney U testom na varijablama ZOJDES, ZODVAD, RD, ZODJB, ZODB, MBDES, MDN, OTB, PZO, PM, i PD

NAZIV VARIJABLE	MWU	<i>p</i>
ZOJDES	1024,000	0,696
ZODVAD	887,500	0,060
RD	1026,500	0,730
ZODJB	982,000	0,340
ZODB	650,000	0,002*
MBDES	1024,000	0,696
MDN	833,000	0,085
OTB	677,500	0,002*
PZO	478,000	0,000*
PM	584,000	0,000*
PD	354,000	0,000*

**statistički značajne razlike*

Na temelju pronađenih statističkih razlika između učenika koji imaju teškoće u matematici i učenika koji ih nemaju izdvajaju se sljedeće skupine zadataka: zadaci zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva, zadaci koji ispituju poznavanje osnovne tablice množenja, zadaci pisanog zbrajanja i oduzimanja, zadaci pisanog množenja i zadaci pisanog dijeljenja.

Analizom zadataka zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva kod učenika s teškoćama u matematici, utvrđeno je da većina učenika (11 od 19 ispitanih) griješi na zadatku „33 – 19 = ?“. Jedan od mogućih razloga je što ovaj zadatak oduzimanja, ukoliko se rješava pisanim putem, zahtjeva dobru ovladanost sustavom desetica zbog prenošenja. Također, zadatak nije

zadan u formi pisanog oduzimanja, a djeca s teškoćama u matematici možda ne razvijaju strategije mentalnog računanja jednako kao djeca bez teškoća u matematici. Beishuzen (1993) izdvaja dvije vrste mentalnih strategija koje djeca urednog razvoja koriste kod mentalnog računanja s dvoznamenkastim brojevima: dekompozicija, ili razdvajanje desetica i jedinica u oba broja (primjerice $45 + 36$ biti će izračunato na način da se prvo zbrajaju desetice $40 + 30 = 70$, potom jedinice $5 + 6 = 11$ i potom rezultati $70 + 11 = 81$) i brojanje s deseticama prema dolje ili gore od prvog nepodijeljenog broja (prvo će računati $45 + 30 = 75$, a potom $75 + 6 = 81$). Ove strategije dio su informalnih strategija koje djeca koriste prilikom rješavanja zadataka zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva, i koje su neovisne o formalnim strategijama (vertikalno zbrajanje i oduzimanje koje se temelji na mjesnoj vrijednosti, odnosno, pisano zbrajanje i oduzimanje). Istraživanja pokazuju da djeca urednog razvoja koriste ove strategije prije formalnog podučavanja pisanom zbrajanju i oduzimanju (Beishuzen i sur., 1997).

Međutim, nema mnogo podataka o upotrebi ovih strategija kod djece s teškoćama u matematici. Rezultati na zadacima računanja s dvoznamenkastim brojevima do 100, koji nisu dani u formi pisanog zbrajanja ili oduzimanja, uz upotrebu intervjua zbog uvida u mentalne strategije koje djeca s teškoćama u matematici koriste prilikom rješavanja, mogli bi dati više informacija o razlozima neuspjeha djece s teškoćama u matematici na navedenim zadacima. Rezultati bi se trebali objasniti u kontekstu osnovnih kognitivnih procesa odgovornih za matematičke vještine (kao što su radno pamćenje, fonološka obrada, vizuospacijalni sustav) (Geary, 2004; Simmons i Singleton, 2007).

Zadaci koji ispituju poznavanje osnovne tablice množenja pokazali su se diskriminativnim za učenike s teškoćama u matematici. Ovi rezultati govore u prilog prethodnim istraživanjima (Jordan i sur, 2003; De Smedt i Boets, 2010) Russel i Ginsburg (1987) i Shalev (2001) ističu kako je upravo prizivanje aritmetičkih činjenica iz dugoročnog pamćenja glavna značajka starijih učenika s teškoćama u matematici, koji su do tada ovladali vještinama kao što su brojanje, određivanje većeg ili manjeg broja i razumijevanje pojma jednakosti, pisanje brojeva prema diktatu i slične vještine koje djeca urednog razvoja razvijaju prije polaska u školu. Riješenja zadataka kao što su $17 - 8$ ili 5×9 nisu im dostupna brzo i lako kao ostaloj djeci njihove dobi (Shalev, 2001).

Prizivanje aritmetičkih činjenica smatra se pokazateljem sposobnosti i brzine prizivanja rezultata iz dugoročnog pamćenja, budući da za rješavanje takvih problema nisu potrebni

dodatni računski procesi. Istraživanja na pacijentima s afazijom pokazuju da se ova vještina nalazi u posebnoj domeni mozga, budući da može doći do specifičnih oštećenja u vještini prizivanja aritmetičkih činjenica, dok druge matematičke sposobnosti ostaju sačuvane (Domahs i Delazer, 2005). Istraživanje Grabner i sur. (2009) pokazalo je veću aktivaciju lijevog angularnog girusa prilikom zadatka prisjećanja aritmetičkih činjenica, dok je frontoparijetalni režanj bio aktivniji kod zadataka koji su zahtijevali proceduralno znanje.

Prvi skok s računanja dodavanjem na prizivanje aritmetičkih činjenica iz dugoročno pamćenja događa se kod djece sa otprilike sedam godina. Jedno od mogućih objašnjenja za probleme koje djeca s teškoćama u matematici imaju prilikom prizivanja aritmetičkih činjenica je da se te činjenice zapravo nikada nisu „ukorijenile“ u njihovom pamćenju. Kroz period računanja prebrojavanjem, djeca stvaraju reprezentacije rezultata, a oni koji su najčešći stvaraju najčvršće veze, te nakon nekog vremena djeca prestaju koristiti manje učinkovite strategije računanja i oslanjaju se na dozivanje informacije iz dugoročnog pamćenja. Ukoliko često dolaze do različitih rezultata zbog pogrešaka u prebrojavanju, kao što je to kod djece s teškoćama u matematici, nisu sigurni koji je od rezultata ispravan, odnosno, ne uspostavlja se čvrsta veza između zadatka i ispravnog rezultata (Butterworth, 2005; Siegler i Schrager, 1984 prema Butterworth, 2005). Nadalje, ako znamo da se množenje često objašnjava i usvaja kao operacija sukcesivnog zbrajanja (Bryant, 1995), a djeca s teškoćama u matematici u ranoj dobi imaju teškoća i s jednostavnim zbrajanjem koristeći strategije brojanja na prste (Geary, 1990; Gersten i sur., 2005) ne čudi da teškoće javljaju kod prizivanja rezultata osnovne tablice množenja.

Neka druga istraživanja, kao što je primjerice istraživanje prizivanja aritmetičkih činjenica kod odraslih osoba s disleksijom De Smedt i Boets (2010), povezuju fonološko procesiranje i prizivanje aritmetičkih činjenica, što bi mogao biti jedan od razloga zbog kojih osobe s disleksijom imaju teškoća u rješavanju matematičkih zadataka.

Međutim, bez obzira na razloge činjenica je da djeca s teškoćama u matematici pokazuju slabije vještine prizivanja rezultata osnovne tablice množenja od djece bez teškoća u matematici, te se navedeni zadaci mogu koristiti u izdvajanju djece starije školske dobi s teškoćama u matematici od njihovih vršnjaka koji nemaju teškoće u matematici.

Razlozi teškoća na zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja već su raspravljani u prethodnom tekstu. Potrebno je napomenuti da se kvalitativnom analizom uočava vrlo mali

broj grešaka na zadacima pisanog zbrajanja, te su zadaci „odgovorni“ za izdvajanje ove kategorije zapravo zadaci pisanog oduzimanja, na kojima griješi 11 od 19 ispitanih učenika.

Sljedeće skupine zadataka koje se prema rezultatima ovog istraživanja pokazuju diskriminativnim za razlikovanje učenika s teškoćama u matematici od učenika urednih matematičkih vještina su pisano množenje i dijeljenje. Pisano množenje i dijeljenje u sebi uključuju nekoliko komponenti. Potrebno je da učenici ovladaju osnovnom tablicom množenja kako bi mogli točno i brzo prizivati rezultate prilikom računanja. Nadalje, i ovi zadaci zahtijevaju razumijevanje mjesne vrijednosti i regrupiranje. Također, važno je i upamtiti ispravan slijed postupaka za izvođenje operacija pisanog množenja i dijeljenja, te smještanje brojeva u ispravan prostorni odnos (potpisivanje – što postaje još važnije kod pisanog množenja dvoznamenkastim brojevima, gdje je potrebno učiniti pomak od jedne decimale u desnu stranu). Kao što je već spomenuto, učenici s teškoćama u matematici teže ovladavaju svim navedenim vještinama. Iz tih razloga, ne čude pogreške koje čine prilikom rješavanja navedenih zadataka.

Neka istraživanja (Russel i Ginsburg, 1984) navode kako su učenici s teškoćama u matematici, prema broju i vrsti grešaka, slični mlađim učenicima bez teškoća u matematici. Kako bi se utvrdilo je li razlog njihovih teškoća u pojedinim domenama matematike razvojno zaostajanje, učenici s koji imaju teškoće u matematici od 4. do 8. razreda uspoređeni su s učenicima 3. razreda koji nemaju teškoće u matematici na varijablama ukupan broj bodova (UBB), zbrajanje ukupno (ZU), oduzimanje ukupno (OU), množenje ukupno (MU), dijeljenje ukupno (DU), te na varijablama zbrajanje i oduzimanje jednoznamenkastih brojeva do deset (ZOJDES), zbrajanje i oduzimanje brojeva do 20 (ZODVAD), računanje s deseticama (RD), zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastog i jednoznamenkastog broja (ZODJB), zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastih brojeva (ZODB), množenje brojevima do deset (MBDES), množenje i dijeljenje s nulom (MDN), osnovna tablica množenja (OTB), pisano zbrajanje i oduzimanje (PZO), pisano množenje (PM), i pisano dijeljenje (PD) korištenjem Mann Whitney U testa (tablica 16).

Nisu pronađene statistički značajne razlike niti na jednoj grupnoj varijabli osim varijable dijeljenje ukupno (DU). Statistički značajne razlike pronađene su na skupinama zadataka koji ispituju poznavanje pravila redoslijeda izvođenja računskih radnji (SRR), te na zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja (PZO), što može značiti da su učenici s teškoćama u matematici slični mlađoj djeci bez teškoća koji tek počinju ovladavati navedenim vještinama.

Međutim, razlike su pronađene na zadacima pisanog dijeljenja (PD) i zadacima koji ispituju poznavanje osnovne tablice množenja (OTB), što ukazuje na to da u ovome slučaju učenici s teškoćama u matematici nisu slični mlađim učenicima prema broju grešaka koje čine, te je

Tablica 16. Razlike između učenika koji imaju teškoće u matematici od 4. do 8. razreda i učenika 3. razreda koji nemaju teškoće u matematici dobivene Mann Whitney U testom na varijablama UBB, ZU, OU, MU, DU, ZOJDES, ZODVAD, RD, ZODJB, ZODB, MBDES, MDN, OTB, PZO, PM, i PD

NAZIV VARIJABLE	MWU	p
UBB	156,500	0,386
ZU	174,000	0,671
OU	171,000	0,642
MU	176,000	0,747
DU	113,500	0,036*
ZOJDES	174,000	0,484
ZODVAD	177,500	0,702
RD	185,000	0,882
ZODJB	182,000	0,788
ZODB	137,000	0,115
MBDES	174,000	0,484
MDN	165,500	0,482
OTB	114,500	0,014*
PZO	180,000	0,832
PM	131,500	0,087
PD	118,500	0,048*
SRR	159,500	0,424

**statistički značajne razlike*

ove skupine zadataka moguće izdvojiti kao diskriminativne za izdvajanje učenika s teškoćama u matematici. Ti zadaci mogu se koristiti za razlikovanje učenika s teškoćama u matematici od učenika koji nemaju teškoće u matematici i u nižim razredima.

Uvidom u pogreške na testu aritmetike kod učenika s teškoćama u matematici pronađene su pogreške iste vrste kao kod učenika 3. razreda – proceduralne pogreške na zadacima pisanog oduzimanja, kod učenika 3. razreda s teškoćama u matematici, ali i učenika viših razreda s

teškoćama u matematici. Učenici viših razreda s teškoćama u matematici čine slične pogreške koje učenici bez teškoća u matematici u 3. razredu čine na početku ovladavanja pisanim oduzimanjem. Isto je potvrđeno i Mann Whitney U testom usporedbom učenika koji imaju teškoće u matematici od 3. do 8. razreda i učenika koji nemaju teškoće u matematici 3. razreda, pri čemu nisu pronađene statistički značajne razlike na zadacima pisanog zbrajanja i oduzimanja.

Russel i Ginsburg (1984) smatraju kako pogreške u pisanom oduzimanju mogu ukazivati na razvojno zaostajanje učenika s teškoćama u matematici u rješavanju navedenih zadataka, ali nije njihova karakteristična značajka. S druge strane, greške prizivanja aritmetičkih činjenica iz dugoročnog pamćenja smatraju karakterističnim greškama učenika s teškoćama u matematici i boljim pokazateljem teškoća. Međutim, kako bi se ove pretpostavke mogle sa sigurnošću utvrditi, potrebno je provesti istraživanja na većem uzorku, s većim brojem zadataka.

4.3. Rezultati kvalitativne analize – opis pogrešaka

Testovni materijali učenika s teškoćama u matematici posebno su izdvojeni i kvalitativno analizirani kako bi se izdvojile i opisale pogreške koje učenici s teškoćama u matematici čine prilikom rješavanja aritmetičkih zadataka. Uočeno je nekoliko karakterističnih pogrešaka koje se pojavljuju u većini riješenih materijala kod učenika s teškoćama u matematici, te su pogreške podijeljene na sljedeći način:

1. Pogreške koje se odnose na zamjenu simbola računskih operacija

Ove pogreške uključuju uporabu pogrešne aritmetičke operacije, kao što je to u sljedećem primjeru zadatka učenika 3.razreda s teškoćama u matematici:

$$45 + 7 = 38$$

Iz navedenog primjera vidljivo je da učenik umjesto operacije zbrajanja, definirane znakom „+“ primjenjuje neprimjerenu operaciju, odnosno oduzimanje.

2. Pogreške u regrupiranju

Ove pogreške odnose se na pogreške u prenošenju ostatka ili posuđivanju, kao što je to primjerice u sljedećem zadatku učenika 6.razreda s teškoćama u matematici:

$$\begin{array}{r} 158 \\ + 499 \\ \hline 557 \end{array}$$

Iz navedenog primjera uočava se da učenik zaboravlja prenijeti jednu stoticu, te umjesto točnog rezultata „657“, dobiva „557“.

3. Pogreške u prizivanju aritmetičkih činjenica

Ova se kategorija pogrešaka odnosi na pogrešno prizivanje osnovnih aritmetičkih činjenica kao što je prizivanje rezultata osnovne tablice množenja (što uključuje i množenje i dijeljenje s nulom), te rezultata zbrajanja i oduzimanja jednoznamenkastih brojeva.

Primjer navedene vrste pogreške kod učenika 6.razreda s teškoćama u matematici:

$$7 \cdot 8 = 47$$

4. Pogrešan redoslijed izvođenja računskih radnji i nepoznavanje funkcije zagrada

Pod ovu kategoriju uvrštene su pogreške koje učenici čine prilikom rješavanja zadataka s više aritmetičkih operacija, sa zagradama ili bez njih, pri čemu ne poštuju redoslijed izvođenja operacija. Primjer navedene pogreške kod učenika 3.razreda s teškoćama u matematici je sljedeći:

$$3 \cdot (9 - 6) : 3 = 3 \cdot 9 - 6 : 3 = 3 - 2 = 1$$

Iz navedenog primjera uočava se da učenik ne poštuje pravilo prednosti računanja brojeva u zagradi, već zanemaruje istu. Međutim, primjenju pravilo prednosti množenja i dijeljenja u zadacima s više računskih radnji.

5. Pogreške u primjeni pravila izvođenja računskih operacija

Ove pogreške odnose se na nepoštivanje pravila prema kojima se izvode složenije operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja (operacije s dvoznamenkastim, troznamenkastim i višeznamenkastim brojevima koje se izvode prema određenim pravilima), a uključuju greške kao što su nepoštivanje prostornog odnosa kod pisanog zbrajanja i oduzimanja ili preskakanje nekog od obaveznih koraka kod množenja i dijeljenja. Primjer ove vrste pogrešaka kod učenika 6. razreda je sljedeći:

$$\begin{array}{r} 821 \\ - \quad 374 \\ \hline 553 \end{array}$$

U navedenom primjeru, učenik ne poštuje prostorni odnos brojeva kod pisanog oduzimanja, te računa prema principu da se manji broj oduzima od većeg broja ($4 - 1 = 3$, $7 - 2 = 5$, $8 - 3 = 5$)

6. Vizualne pogreške

Kategorija vizualnih pogrešaka uključuje vizualne zamjene brojeva (primjerice 8 se zamjenjuje s 3 te se računa kao da se radi o broju 3), te dodavanja ili ispuštanja znamenki i brojeva. Primjer pogreške kod učenika 4.razreda s teškoćama u matematici:

$$17 - 10 = 16$$

U navedenom primjeru, učenik je prilikom računanja „ispustio“ znamenku „0“, pa je broj „10“ zamijenio brojem „1“.

Broj pogrešaka razlikuje se od ukupnog broja pogrešaka na testu aritmetike s obzirom na bodove dodijeljene za uspješno rješavanje zadataka, budući da je moguće da učenici na pojedinom zadatku učine više različitih vrsti grešaka (primjerice, u zadatku $10 + 30$ moguće je da zamijene simbol „+“ simbolom „-“, a uz to zamijene i mjesta brojevima u zadatku, pa će zadatak riješiti kao $30 - 10$, kao što je to učinio učenik 3. razreda s teškoćama u matematici).

Ukupan broj pogrešaka na svim testovima učenika s teškoćama u matematici je zbrojen, te je izračunata učestalost pojavljivanja izdvojenih vrsta pogrešaka s obzirom na ukupan broj grešaka, izražena u postocima (tablica 17).

Tablica 17. Učestalost pojavljivanja pojedinih vrsta grešaka s obzirom na ukupan broj grešaka kod učenika koji imaju teškoće u matematici

VRSTA GREŠAKA	BG	%
1	46	19,74%
3	41	17,59%
5	19	8,15%
4	17	7,29%
2	16	6,86%
6	7	3,00%

- BG-broj grešaka

- % - navedene vrste grešaka u odnosu na ukupan broj grešaka kod svih učenika

Navedene vrste pogrešaka čine više od pola (62,63%) svih pronađenih grešaka. Ostale pogreške (37,37%) odnose se na zadatke koje su učenici ostavili prazne ili pogreške koje su rezultat nagađanja (što je vidljivo iz nemogućnosti izdvajanja bilo kakve logične veze između postavljenog zadatka i dobivenog rezultata). Zbog načina provođenja istraživanja, odnosno, grupne primjene materijala za ispitivanje, rezultati kvalitativne analize daju veliki broj „nesvrstanih“ grešaka, odnosno, grešaka koje se odnose na manjak pokušaja rješavanja zadataka ili su rezultat nagađanja. Individualnom primjenom, poticanjem učenika na rješavanje svih zadataka i ispitivanjem većeg broja učenika s teškoćama u matematici, bilo bi moguće dobiti iscrpnije podatke o tipu grešaka i učestalosti njihova pojavljivanja. Međutim, čak i nasumične greške pogađanja daju korisnu povratnu informaciju jer govore o tome da učenici s teškoćama u matematici nisu ovladali navedenim zadacima – bez obzira na razlog.

Greške su opisane i s obzirom na to pojavljuju li se kod pojedinog učenika s teškoćama u matematici ili ne, te je izračunata njihova učestalost pojavljivanja kod ispitanih učenika s teškoćama u matematici (tablica 18).

Tablica 18. Učestalost pojavljivanja pojedinih vrsta grešaka kod ispitanih učenika koji imaju teškoće u matematici

VRSTA GREŠAKA	BU	%
3	14	73,68%
2	12	63,15%
4	12	63,15%
1	8	47,36%
5	8	47,36%
6	6	31,57%

- BU - broj učenika (kod kojih se pojavljuje navedeni tip pogrešaka)
- % - učenika kod kojih je pronađena navedena vrsta grešaka

Redom prema učestalosti pojavljivanja u ovom istraživanju izdvajaju se: pogreške u prizivanju aritmetičkih činjenica, pogreške u regrupiranju, pogrešan redoslijed izvođenja računskih radnji i nepoznavanje funkcije zagrada, pogreške u vidu zamjena simbola aritmetičkih operacija, pogreške u primjeni pravila izvođenja aritmetičkih operacija i vizualne pogreške. Pogreške u vidu zamjene aritmetičke operacije množenja operacijom zbrajanja, koje Bryant (1995) navodi kao česte, pronađene su samo kod jednog učenika 6. razreda s teškoćama u matematici. Međutim, čini se kako je isti sve operacije zadane u testu aritmetike zamijenio operacijom zbrajanja, te nije moguće zaključivati o postojanju ove specifične pogreške (moguće je više objašnjenja).

Hanich i sur. (2011) navode da su teškoće u približnoj procjeni rezultata temeljni deficit kod djece s teškoćama u matematici jer ne uključuju jezičnu obradu. Detaljnijom analizom podataka dobivenih na djeci s teškoćama u matematici na zadacima pisanog množenja, primijećeno je da djeca prilikom nagađanja (ukoliko ne računaju pismenim putem) često pišu brojeve koji niti približno ne mogu odgovarati rezultatu. Ovo može biti rezultat nasumičnog pisanja brojeva, ali može ukazivati i na probleme koje grupa učenika s teškoćama u matematici ima u približnoj procjeni rezultata. Za potvrdu jedne ili druge teorije, bilo bi potrebno ispitati učenike individualno, gdje bi motivacija učenika za točno rješavanje zadataka bila veća, te kako bi se smanjila vjerojatnost pojavljivanja nasumičnih odgovora.

Što se tiče pronađenih razlika na zadacima koji ispituju prizivanje rezultata osnovne tablice množenja, podaci istraživanja govore samo o točnosti prizivanja. Neka druga istraživanja pokazuju da su učenici s teškoćama u matematici, a bez teškoća čitanja, lošiji od učenika bez teškoća u matematici na zadacima prizivanja osnovnih aritmetičkih činjenica samo kada je zadano vremensko ograničenje, dok učenici s teškoćama čitanja i teškoćama u matematici postižu lošije rezultate u oba slučaja (sa i bez vremenskog ograničenja) (Jordan i Montani, 1997). Autori smatraju da to može ukazivati na razlike u osnovnim nedostacima odgovornima za teškoće u prizivanju aritmetičkih činjenica: djeca sa specifičnim teškoćama u matematici imaju specifične deficite u prizivanju informacija, zbog čega su sporiji od djece urednog razvoja, dok djeca s teškoćama u matematici i pridruženim teškoćama čitanja razvojno zaostaju za djecom urednog razvoja u vještini konceptualizacije problema i izvršavanju računskih operacija. Raghubar i sur. (2009) pronašli su veći broj vizualnih pogrešaka u rješavanju aritmetičkih zadataka kod djece s teškoćama čitanja nego kod vršnjaka sa specifičnim teškoćama u matematici. Također, pronalaze i korelacije teškoća s pažnjom i

točnosti rješavanja aritmetičkih zadataka, prizivanja aritmetičkih činjenica i proceduralnih grešaka.

4.4. Odgovori na hipoteze

H1: Postojat će statistički značajne razlike u ukupnom broju bodova na ispitnim zadacima iz matematike kod učenika bez teškoća u matematici u korist učenika starijih razreda (učenika četvrtih u odnosu na treće razrede, petih u odnosu na četvrte razrede, šestih u odnosu na pete razrede, sedmih u odnosu na šeste, osmih u odnosu na sedme).

Testiranjem razlika između 4. i 5., 5. i 6., 6. i 7. i 7. i 8. razreda nisu pronađene statistički značajne razlike na varijabli ukupan broj bodova (UBB). Međutim, na temelju pronađenih razlika između 3. i 4. razreda moguće je djelomično prihvatiti H1 hipotezu, pri čemu se statistički značajne razlike u ukupnom broju bodova na ispitnim zadacima iz matematike kod učenika bez teškoća u matematici odnose na razlike između učenika 3. i učenika 4., 5., 6., 7. i 8. razreda.

H2: Razlika u ukupnom broju bodova na ispitnim zadacima iz matematike bit će najveća između ispitanih učenika bez teškoća u matematici polaznika trećih razreda i učenika četvrtih razreda.

Dobiveni rezultati na Mann Whitney U testu za testiranje razlika između dva nezavisna uzorka, te deskriptivni podaci o postignuću učenika 3., 4., 5., 6., 7. i 8. razreda na varijabli ukupan broj bodova (UBB) potvrđuju H2 hipotezu o postojanju najvećih razlika između 3. i 4. razreda u sveukupnom rezultatu na testu aritmetike, te su se one pokazale statistički značajne.

H3: Djeca s teškoćama u matematici postići će manji ukupan broj bodova na ispitnim zadacima iz matematike od učenika bez teškoća u matematici.

Pronađene su statistički značajne razlike u ukupnom broju bodova (UBB) na testu aritmetike, a uvidom u rezultate vidljivo je da se može potvrditi H3 hipoteza koja kaže da će se učenici s teškoćama u matematici značajno razlikovati od skupine učenika bez teškoća u matematici.

H4: Djeca s teškoćama u matematici činit će veći broj grešaka od djece bez teškoća u matematici na ispitnim zadacima koji ispituju poznavanje slijeda izvođenja računskih radnji, prizivanja rezultata osnovne tablice množenja, te zadacima koji uključuju regrupiranje.

Usporedbom učenika koji nemaju teškoće u matematici i učenika s teškoćama u matematici od 4. do 8. razreda, pronađene su razlike u ovladanosti slijedom izvođenja računskih radnji i razumijevanja funkcije zagrada, prizivanju rezultata osnovne tablice množenja, te na zadacima koji uključuju regrupiranje (zadaci pisanog zbrajanja i oduzimanja) čime je potvrđena H4 hipoteza o postojanju većeg broja grešaka kod učenika s teškoćama u matematici na navedenim zadacima.

5. ZAKLJUČAK

Matematika je dio našeg života od najranije dobi. Kako bi uspješno savladavali matematiku tijekom školovanja, vrlo je važno da se kod djece razvijaju potrebne predvještine jer je ovladanost njima prediktivna za usvajanje školskog gradiva. Kada dijete krene u školu, susreće se s formalnim učenjem aritmetike, odnosno aritmetičkih operacija, počevši od zbrajanja i oduzimanja, a kasnije i množenja i dijeljenja. Mnoga djeca pokazuju teškoće s usvajanjem gradiva matematike, a zbog relativno visoke učestalosti teškoća u matematici i posljedica koje one imaju na obrazovanje i svakodnevne vještine, važno je izraditi materijale za ispitivanje matematičkih znanja. Ovi materijali trebaju osigurati mogućnosti odvajanja djece koja uredno usvajaju matematiku i one djece koja imaju teškoće ili djece s diskalkulijom.

Rezultati ovog istraživanja ukazuju na to da učenici urednih matematičkih vještina trećeg razreda još ne ovladavaju svim aritmetičkim vještinama kao stariji učenici, a čini se da nakon trećeg razreda dolazi do automatizacije vještina potrebnih za rješavanje jednostavnih aritmetičkih zadataka. Iz tog razloga pojedini zadaci, koji se u grupi starijih učenika s teškoćama u matematici pokazuju diskriminativnima kada se uspješnost na tim zadacima uspoređuje s uspješnošću koju postižu njihovi vršnjaci urednih matematičkih vještina, ne mogu dobro odijeliti učenike s teškoćama od učenika urednih matematičkih vještina u 3. razredu.

Zadaci koji prema rezultatima ovog istraživanja dobro odjeljuju učenike s teškoćama u matematici od učenika urednih matematičkih vještina 3. razreda su zadaci pisanog dijeljenja i zadaci koji ispituju poznavanje osnovne tablice množenja. Nakon trećeg razreda dolazi do automatizacije uključenih matematičkih vještina, pa se učenici s teškoćama u matematici mogu odijeliti od učenika urednih matematičkih vještina primjenom zadataka zbrajanja i oduzimanja dvoznamenkastih brojeva, zadataka koji ispituju poznavanje osnovne tablice množenja, zadataka pisanog zbrajanja i oduzimanja, te zadacima pisanog množenja i dijeljenja.

Osim razlika u sveukupnom rezultatu na navedenim zadacima, važno je obratiti pažnju na vrste grešaka koje učenici čine prilikom njihova rješavanja. I ovim su istraživanjem potvrđena prethodna saznanja o većoj učestalosti grešaka u prizivanju aritmetičkih činjenica, regrupiranju, grešaka u redoslijedu izvođenja računskih radnji i nepoznavanju funkcije

zagrada, grešaka u vidu zamjena simbola aritmetičkih operacija, primjeni pravila izvođenja aritmetičkih operacija i vizualnih pogrešaka. Iako ovim istraživanjem nisu obuhvaćeni razlozi teškoća u matematici, saznanja iz prethodnih istraživanja ukazuju na to da bi analizom vrsti pogrešaka bilo moguće izdvojiti učenike s teškoćama u matematici različite etiologije.

Procjena aritmetike nikako ne bi trebala biti jedini dio testa za procjenu teškoća u matematici, ali je važno uključiti je u dijagnostički postupak, odnosno postupak procjene. Uspješnost u rješavanju aritmetičkih zadataka može nam dati uvid u postojanje teškoća u matematici, ali bez detaljnije analize pogrešaka nije moguće ustvrditi o kojoj se vrsti teškoće radi.

Dobiveni podaci mogu pomoći pri izradi materijala kojim će se moći odijeliti učenici kojima je potrebna podrška u učenju matematike od učenika koji ne pokazuju teškoće u usvajanju matematike.

6. LITERATURA

1. Adler, B. (2001): What is dyscalculia? Posjećeno 4.9.2016. na mrežnoj stranici Kognitivnog centra u Švedskoj: <http://www.dyscalculiainfo.org/>
2. Ackerman, T. P., Anhalt, M.J., Dykman, A. R. (2015): Arithmetic automatization failure in children with attention and reading disorders: associations and sequela. *Journal of Learning Disabilities*, 19, 4, 222-232.
3. Bačić, Lj., Đuračković, V. (2013): Pravilo trojno. *Poučak* 55, 14, 64-70.
4. Beishuizen, M. (1993): Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research and Mathematics Education*, 24, 4, 294-323.
5. Beishuizen, M., van Puten, C. M., van Mulchen, F. (1997): Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and instruction*, 7, 1, 87-106.
6. Benedetto-Nasho, E., Tannock, R. (1999): Math computation, error patterns and stimulant effects in children with attention deficit hiperactivity disorder. *Journal of attention disorders*, 3, 3, 121-134.
7. Boaler, J. (2009): *The elephant in the classroom: helping children learn & love maths*. London, UK: Souvenir Press.
8. Brush, L. R. (1978): Preeschool children's knowledge of addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 1, 44-54.
9. Bryant, P. (1995): Children and arithmetic. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 36, 1, 3-32.
10. Butterworth, B., Zorzi, M., Girelli, L., Jonckheere, A. R. (2001): Storage and retrieval of addition facts: the role of number comparison. *The quarterly journal of experimental psychology*, 54A, 4, 1005-1029.
11. Butterworth, B. (2008): *Developmental Dyscalculia*. U: Reed, J., Warner-Rogers, J. (ur.): *Child neuropsychology: concepts, theory and practice* (str.337-357). West Sussex: Wiley-Blackwell.
12. Butterworth, B. (2005): The development of arithmetical abilities. *Journal of child psychology and psychiatry*, 46, 1, 3-18.
13. Carraher, D. W., Schliemann, A. D. (2002): Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? *Journal for research in mathematics education*, 11, 131-153.

14. Carpenter, T. P., Moser, J. M. (1984): The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 3, 179-202.
15. Cowan, R. (2002): Does it all add up? Changes in children's knowledge of addition combinations, strategies and principles. U: Baroody, A. J., Dowker, A. (ur.): *The development of arithmetic concepts and skills*. (str.35-75). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
16. De Smedt, B., Boets, B. (2010): Phonological processing and arithmetic fact retrieval: evidence from developmental dyslexia. *Neuropsychologia*, 48, 3973-3981.
17. Domahs, F., Delazer, M. (2005): Some assumptions and facts about arithmetic facts. *Psychology Science*, 47, 1, 96-111.
18. Ergović, A. (2014): *Matematičko obrazovanje u Europi*. Diplomski rad. Sveučilište J.J. Strossmayer, Odjel za matematiku.
19. Espy, A. K., McDiarmid, M. M., Cwik, M. F., Stalets, M. M., Hamby, A., Senn, T. A. (2004): The contribution of executive functions to emergent mathematic skills in preschool children. *Developmental Neuropsychology*, 26, 1, 465-486.
20. Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D., Hamlett, C. L. (2005): The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology*, 97, 3, 493-519.
21. Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Powell, S R., Schumacher, R. F., Hamlett, C. L., Vernier, E., Namkung, J. M., Rose K., Vukovic, R. K. (2012): Contributions of domain-general cognitive resources and different forms of arithmetic development to pre-algebraic knowledge. *Dev Psychol*, 48, 5, 1315-1326.
22. Fuson, K. C., Kwom, Y. (1992): Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. *Child Development*, 63, 2, 491-506.
23. Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., Fennema, E. (1997): Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 2, 130-162.
24. Geary, D. C. (1990): A componential analysis of an early learning deficit in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology*, 49, 363-383.
25. Geary, D. C., Hoard, M. K., Hamson, C. O. (1999): Numerical and arithmetical cognition: patterns of functions and deficits in children at risk for a mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 213-239.

26. Geary, D. C. (2004): Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37, 1, 4-15.
27. Gersten, R., Jordan, N. C., Flojo, J. R. (2005): Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38, 4, 293-304.
28. Grabner, R. H., Ansari, D., Koschutnig, K., Reishofer, G., Ebner, F., Neuper, C. (2009): To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts during problem solving. *Neuropsychologia*, 47, 604-608.
29. Grgin, T. (2001): Školsko ocjenjivanje znanja. Zagreb: Naklada Slap.
30. Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., Dick, J. (2001): Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology*, 93, 3, 615-626.
31. Jordan, N. C., Hanich, L. B., Kaplan, D. (2003): A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74, 3, 834-850.
32. Jordan, N. C., Hanich, L. B. (2000): Mathematical thinking in second-grade children with different forms of LD. *Journal of Learning Disabilities*, 33, 6, 567-578.
33. Jordan, N. C., Montani, T. O. (1997): Cognitive arithmetic and problem solving: a comparison of children with specific and general mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 6, 624-634.
34. Kadum, V., Vranković, K., Vidović, S. (2007): Nastavni sadržaji, jezik i vještine, te kognitivni razvoj učenika kao činitelji matematičkog odgajanja i obrazovanja. *Metodički obzori*, 2, 25-41.
35. Khait, A. (2005): The definition of mathematics: philosophical and pedagogical aspects. *Science & Education*, 14, 137-159.
36. Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (2001): Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.
37. Lakoff, G., Nunez, R. E. (2000): Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.
38. Lave, J. (1988): Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life. New York: Cambridge University Press.
39. Lenček, M., Peretić, M., Arapović, D. (2010): Od "matematika mi ne ide" do diskalkulije. Zbornik radova s međunarodnog znanstveno-stručnog skupa Perspektive cjeloživotnog obrazovanja učitelja i odgojitelja. Sveučilište u Zadru. Zadar.

40. Marshall, S. J. (2008): Predicting children's arithmetic error patterns with measures of executive function and teacher's rating of ADHD. Doktorska dizertacija, Arizona State University.
41. Mattison, R. E., Dickerson Mayes, S. (2010): Relationships between learning disability, executive function, and psychopathology in children with ADHD. *Journal of attention disorders*, 20, 10, 1-9.
42. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske (2013): Nastavni plan i program za osnovnu školu. Zagreb: Vlada RH, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.
43. Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Arora, A. (2012): TIMSS 2011 International results in mathematics. Boston: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
44. Noël, M. P., Seron, X., Trovarelli, F. (2004): Working memory as a predictor of addition skills and addition strategies in children. *Current Psychology of Cognition*, 22, 1, 3-25.
45. Nunes, T., Bryant, P., Barros, R., Sylva, K. (2011): The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology*, 82, 136-156.
46. PISA 2009 Results: Executive Summary. Posjećeno 8.8.2016. na mrežnoj stranici OECD: <https://www.oecd.org/>
47. PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I). Posjećeno 8.8.2016. na mrežnoj stranici OECD iLibrary: <http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en>
48. PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume 1, Revised edition, February 2014). Posjećeno 8.8.2016. na mrežnoj stranici OECD iLibrary: <http://dx.doi.org/10.1787/9789264208780>
49. Prather, R., Alibali, M. W. (2011): Children's acquisition of arithmetic principles: the role of experience. *Journal of Cognition and Development*, 12, 3, 332-354.
50. Raghubar, K., Cirino, P., Barnes, M., Ewing-Cobbs, L., Fletcher, J., Fuchs, L. (2009): Errors in multi-digit arithmetic and behavioral inattention in children with math difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 42, 4, 356-371.

51. Räsänen, P., Ahonen, T. (1995): Arithmetic disabilities with and without reading difficulties: A comparison of arithmetic errors. *Developmental Neuropsychology*, 11, 3, 275-295.
52. Rasmussen, C., Bisanz, J. (2005): Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology*, 91, 137-157.
53. Reigosa-Crespo, V., Valde´s-Sosa, M., Butterworth, B., Este´vez, N., Rodrı´guez, M., Santos, E., Torres, P., Sua´rez, R., Lage, A. (2011): Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: the Havana Survey. *Developmental Psychology*, 48, 1, 1-13.
54. Resnick, L. B., Ford, W. W. (1981): *The psychology of mathematics for instruction*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
55. Robinson, C. S., Menchetti, B. M., Torgesen, J. K. (2002): Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 17, 2, 81-89.
56. Rudić, J., Cindrić, M. (2012): Oblici tekstualiziranih zadataka množenja i dijeljenja i dječje strategije rješavanja. *Magistra Iadertina*, 7, 7, 133-142.
57. Russel, L. R., Ginsburg, H. P. (1984): Cognitive analysis of children's mathematics difficulties. *Cognition and Instruction*, 1, 2, 217-244.
58. Sharma, M. C. (2001). *Matematika bez suza (kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike)*, Lekernik: Ostvarenje d.o.o.
59. Simmons, F., Singleton, C. (2007): Do weak phonological representations impact on arithmetic development? A review of research into arithmetic and dyslexia. *Dyslexia*, 14, 77-94.
60. Simmons, F., Singleton, C., Hoarne, J. (2008): Brief report: phonological awareness and visual-spatial sketchpad functioning predict early arithmetic attainment: Evidence from a longitudinal study. *European Journal of Cognitive Psychology*, 20, 4, 711-722.
61. Temple, C. M., Sherwood, S. (2002): Representation and retrieval of arithmetical facts: developmental difficulties. *The quarterly journal of experimental psychology*, 55A, 3, 733-752.
62. Villete, B. (2002): Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, 17, 1365-1383.
63. Wynn, K. (1992): Addition and subtraction by human infants. *Nature Publishing Group*, 358, 749-750.