Estimacija parametara nelinearne zavojnice primjenom najmanjih kvadrata

Grbavac, Karlo

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:200:191886

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek

zir.nsk.hr

Image not found or type unknown

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA

Sveučilišni studij

Estimacija parametara nelinearne zavojnice primjenom najmanjih kvadrata

Diplomski rad

Karlo Grbavac

Osijek, 2017.

FERIT
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA **OSIJEK**

Obrazac D1: Obrazac za imenovanje Povjerenstva za obranu diplomskog rada

Osijek, 21.09.2017.

Odboru za završne i diplomske ispite

Imenovanje Povjerenstva za obranu diplomskog rada

Ime i prezime studenta:	Karlo Grbavac
Studij, smjer:	Diplomski sveučilišni studij Elektrotehnika, smjer Elektroenergetika
Mat. br. studenta, godina upisa:	D-826, 07.10.2014.
OIB studenta:	57359633152
Mentor:	Izv.prof.dr.sc. Kruno Miličević
Sumentor:	Ivan Biondić
Sumentor iz tvrtke:	
Predsjednik Povjerenstva:	Izv.prof.dr.sc. Denis Pelin
Član Povjerenstva:	Ivan Biondić
Naslov diplomskog rada:	Estimacija parametara nelinearne zavojnice primjenom najmanjih kvadrata
Znanstvena grana rada:	**Elektrostrojarstvo (zn. polje elektrotehnika)**
Zadatak diplomskog rada:	Za detalje pitati sumentora na adresi ibiondic@etfos.hr (I. Biondić).
Prijedlog ocjene pismenog dijela ispita (diplomskog rada):	Izvrstan (5)
Kratko obrazloženje ocjene prema Kriterijima za ocjenjivanje završnih i diplomskih radova:	Primjena znanja stečenih na fakultetu: 2 bod/boda Postignuti rezultati u odnosu na složenost zadatka: 2 bod/boda Jasnoća pismenog izražavanja: 2 bod/boda Razina samostalnosti: 3 razina
Datum prijedloga ocjene mentora:	21.09.2017.

Potpis mentora za predaju konačne verzije rada u Studentsku službu pri završetku studija:	Potpis:
	Datum:

FERIT
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA **OSIJEK**

IZJAVA O ORIGINALNOSTI RADA

Osijek, 26.09.2017.

Ime i prezime studenta:	Karlo Grbavac
Studij:	Diplomski sveučilišni studij Elektrotehnika, smjer Elektroenergetika
Mat. br. studenta, godina upisa:	D-826, 07.10.2014.
Ephorus podudaranje [%]:	2

Ovom izjavom izjavljujem da je rad pod nazivom**: Estimacija parametara nelinearne zavojnice primjenom najmanjih kvadrata**

izrađen pod vodstvom mentora Izv.prof.dr.sc. Kruno Miličević

i sumentora Ivan Biondić

moj vlastiti rad i prema mom najboljem znanju ne sadrži prethodno objavljene ili neobjavljene pisane materijale drugih osoba, osim onih koji su izričito priznati navođenjem literature i drugih izvora informacija.
Izjavljujem da je intelektualni sadržaj navedenog rada proizvod mog vlastitog rada, osim u onom dijelu za koji mi je bila potrebna pomoć mentora, sumentora i drugih osoba, a što je izričito navedeno u radu.

Potpis studenta:

SADRŽAJ

1. UVOD 1
1.1 TEORIJSKI UVOD U METODU NAJMANJIH KVADRATA 1
1.1.1 Linearni problemi najmanjih kvadrata (LPNK) 4
1.1.1.1 Rješavanje LPNK preko sustava normalnih jednadžbi 5
1.1.1.2 Rješavanje LPNK s pomoću QR-dekompozicije 6
1.1.1.3 Rješavanje LPNK s pomoću dekompozicija na singularne vrijednosti 7
2. TEORIJSKI UVOD U ESTIMACIJU PARAMETARA NELINEARNE ZAVOJNICE 10
3. OPIS MJERENJA 14
4. OBRADA REZULTATA 16
4.1. USPOREDBA REZULTATA 23
5. ZAKLJUČAK 26
LITERATURA 27
SAŽETAK 28
ŽIVOTOPIS 29

1. UVOD

Kod transformatora u praznom hodu i modeliranja zavojnica s feromagnetskom jezgrom pojavljuje se krivulja magnetiziranja. Problemi koji se javljaju pri modeliranju nelinearnih zavojnica su utjecaji petlje histereze, vrtložnih struja i utjecaji zasićenja. Razmatrat će se mjerenja transformatora u praznom hodu. Nelinearna zavojnica realizirana je kao namot transformatora sa željeznom jezgrom.

Nakon izvršenih mjerenja, podatke smo procesirali s pomoću programskog paketa MATLAB. Koristili smo metodu najmanjih kvadrata, koja je jedna od najvažnijih i najčešće korištenih metoda za obradu eksperimentalnih podataka. Cilj rada je estimacija parametara.

1.1 TEORIJSKI UVOD U METODU NAJMANJIH KVADRATA

Metoda najmanjih kvadrata jedna je od najvažnijih i najčešće korištenih metoda za obradu eksperimentalno dobivenih podataka. Poznati njemački matematičar Carl Friedrich Gauss 1795.godine dao je osnove metode najmanjih kvadrata, ali ona nije objavljena sve do 1809.godine. Metodu je objavio u jednom od svojih radova o nebeskoj mehanici, *Teoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium.* Prvi koji je objavio algebarsku proceduru metode najmanjih kvadrata 1805.godine bio je francuski matematičar Adrien – Marie Legendre. [1]

Ako pretpostavimo da su $y_1, y_2, ..., y_m$ rezultati mjerenja neke veličine A tada treba odrediti aproksimaciju α^* veličine A na način da eksperimentalno izmjerene vrijednosti $y_1, y_2, ..., y_m$, budu što bliže aproksimaciji α^* radi veće točnosti. To znači da suma kvadrata odstupanja svih mjerenja od aproksimacije α bude minimalna, odnosno da vrijedi

$$F_2(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha - y_i)^2 \to \min. \qquad (1.1)$$

Izraz (1.1) naziva se metoda najmanjih kvadrata, a problem određivanja aproksimacije α^* takve da vrijedi

$$\alpha^* \in \arg\min_{\alpha \in \Re} F_2(\alpha)$$

nazivamo problemom najmanjih kvadrata. Problem najmanjih kvadrata je specijalni problem određivanja ekstrema bez ograničenja. Odredimo stoga rješenje problema (1.1) :

$$F_2(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha - y_i)^2$$

$$F_2\,'(\alpha) = 2\sum_{i=1}^{m} (\alpha - y_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha = \sum_{i=1}^{m} y_i \qquad .$$

$$m\alpha = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\alpha^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i.$$

Dolazimo do zaključka da je aritmetička sredina mjerenja $y_1, y_2, ..., y_m$ veličina koja ima svojstvo da je suma kvadrata odstupanja te veličine od mjerenja $y_1, y_2, ..., y_m$ najmanja.

Pretpostavimo sada općeniti slučaj. Neka je y zavisna varijabla koja ovisi o nezavisnoj varijabli x tako da vrijedi

$$y = f(x; \mathrm{a}), \qquad \mathrm{a} \in \Re^n \tag{1.2}$$

pri čemu je $\mathrm{a} = (a_1, ..., a_n)^T$ vektor parametar i neka je zadano m podataka

$$(x_i, y_i), \quad i = 1, ..., m, \quad m \geq n.$$

U nastavku ćemo vektor reziduala (odstupanja) označavati s r te neka su njegove komponente dane s

$$r_i(\mathrm{a}) = f(x_i; \mathrm{a}) - y_i. \tag{1.3}$$

S ciljem minimiziranja funkcije $F : \Re^n \to \Re$ koja je definirana s

$$F(a) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} r_i^2(a) = \frac{1}{2} \| r \|_2^2, \quad \mathrm{a} \in \Re^n, \tag{1.4}$$

potrebno je pronaći optimalnu točku $\mathrm{a}^* = (a_1^*, ..., a_n^*) \in \Re^n$, u kojoj funkcija F postiže globalni minimum. Brojeve $a_1^*, ..., a_n^*$ nazivamo optimalnim parametrima dok funkcija f nazivamo funkcija-model. Problem najmanjih kvadrata (1.3) ekvivalentan je problemu određivanja optimalnih parametara $a_1^*, ..., a_n^*$ za koje vrijedi

$$a^* \in \arg\min_{a \in \Re} F_2(a).$$

Kako bi odredili ekstreme funkcije F najprije odredimo njezin gradijent u proizvoljnoj točki $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = r_1 \frac{\partial r_1}{\partial a_1} + r_2 \frac{\partial r_2}{\partial a_1} + \ldots + r_m \frac{\partial r_m}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{m} r_i(a) \frac{\partial r_i}{\partial a_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = r_1 \frac{\partial r_1}{\partial a_n} + r_2 \frac{\partial r_2}{\partial a_n} + \ldots + r_m \frac{\partial r_m}{\partial a_n} = \sum_{i=1}^{m} r_i(a) \frac{\partial r_i}{\partial a_n}$$

što je ekvivalentno matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial a_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_1}{\partial a_n} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial a_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1(a) \\ \vdots \\ r_m(a) \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\mathrm{grad}F = \mathrm{J}^T \mathrm{r} \tag{1.5}$$

pri čemu je

$$\mathrm{grad}F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_n} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial a_n} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}.$$

Matrica J iz prethodnog izraza naziva se *Jacobijan* funkcije F ili Jacobijeva matrica.

Na sličan se način može prikazati matrica drugih derivacija (Hessijan) funkcije F

$$\mathrm{H}_k = \mathrm{J}^T \mathrm{J} + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{r}_k \mathrm{H}_k \, n \tag{1.6}$$

pri čemu je H_k matrica dimenzije n s elementima

$$(\mathrm{H}_k)_{ij} = \frac{\partial^2 \mathrm{r}_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}. \tag{1.7}$$

S ciljem pronalaska stacionarne točke minimizirajuće funkcije iz (1.3) potrebno je gradijent funkcije F izjednačiti sa nulom:

$$\mathrm{J}^T \mathrm{r} = 0 \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{\partial r_i}{\partial a_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{\partial r_i}{\partial a_n} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Iz (1.8) vidimo kako dobivamo sustav od n jednadžbi sa n nepoznanica $a_1,...,a_n$. Za sustav (1.8) kažemo da je linearan ako su sve komponente vektora reziduala $r_i = r_i(a_1,...,a_n)$ linearne u svakom od argumenata $a_1,...,a_n$, odnosno ako je funkcija-model f linearna u svim parametrima $a_1,...,a_n$. I u tom slučaju govorimo o linearnom problemu najmanjih kvadrata. Ukoliko funkcija-model f nije linearna u barem jednom od parametara $a_1,...,a_n$, tada govorimo o nelinearnom problemu najmanjih kvadrata, te je tada (1.8) sustav nelinearnih jednadžbi. [2]

1.1.1 Linearni problemi najmanjih kvadrata (LPNK)

U ovom dijelu promatrat ćemo linearni problem najmanjih kvadrata.

Stoga neka je funkcija-model f linearna u svim parametrima $a_1,...,a_n$, odnosno neka je oblika

$$f(x;a_1,...,a_n) = a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \qquad x \in \Re \tag{1.9}$$

pri čemu su φ_i neprekidne funkcije.

Ukoliko (1.9) uvrstimo u (1.3) komponente vektora reziduala su oblika

$$r_i(a) = a_1\varphi_1(x_i) + \cdots + a_n\varphi_n(x_i) - y_i, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{1.10}$$

dok je Jacobijeva matrica

$$\mathrm{J}_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial a_j} = \varphi_j(x_i), \qquad i = 1,\ldots,m, \qquad j = 1,\ldots,n \tag{1.11}$$

Iz prethodnog izraza vidimo kako Jacobijeva matrica ne ovisi o parametru a kao ni Hessijan funkcije f koji je u linearnom problemu najmanjih kvadrata jednostavnijeg oblika

$$\mathrm{H}_F = \mathrm{J}^T\mathrm{J}\ . \tag{1.12}$$

Uvrštavajući (1.11) u (1.10) vidimo kako vektor reziduala možemo zapisati u matričnom obliku

$$\mathrm{r}(a) = \mathrm{Ja} - \mathrm{y} \tag{1.13}$$

pri čemu je $\mathrm{y} = (y_1,\ldots,y_m)^T$. Kako bi riješili dani problem traži se optimalni parametar $\mathrm{a}^* \in \Re^n$ za koji vrijedi [2]

$$F(\mathrm{a}^*) = \min_{\mathrm{a}\in\Re^n} F(\mathrm{a}),$$

pri čemu je

$$F(\mathrm{a}) = \frac{1}{2}\,\|\,\mathrm{r(a)}\,\|_2^2 = \frac{1}{2}\,\|\,\mathrm{Ja} - \mathrm{y}\,\|_2^2\ . \tag{1.14}$$

1.1.1.1 Rješavanje LPNK preko sustava normalnih jednadžbi

U nastavku ćemo prikazati par metoda rješavanja linearnog problema najmanjih kvadrata (LPNK). Prva među njima će biti metoda rješavanja LPNK preko sustava normalnih jednadžbi.

Kako bi odredili stacionarnu točku funkcije F potrebno je gradijent funkcije izjednačiti s nulom, odnosno iz (1.5) dobivamo

$$\mathrm{grad}F = \mathrm{J}^T\mathrm{r} = 0. \tag{1.15}$$

Sljedeća lema dat će karakterizaciju kada je Hessijan funkcije F (1.12) pozitivno definitan što je od velike važnosti pri dokazivanju činjenice da je dobivena stacionarna točka ujedno i minimum.

Lema 1.1. Neka je $J \in \Re^{m\times n}$, $m > n$. Matrica J^TJ je pozitivno definitna onda i samo onda ako je J punog ranga po stupcima ($\mathrm{rang}\mathrm{J} = n$).

Dokaz ove leme može se pronaći u knjizi [2].

Iz prethodne leme vidimo da je LPNK rješiv i postoji jedinstveno rješenje ukoliko je Jacobijeva matrica punog ranga po stupcima. U tom slučaju jedinstveno rješenje dobivamo pronalaskom stacionarnih točaka funkcije F .

Ukoliko za vektor reziduala u (1.15) uvrstimo (1.13) dobivamo

$$\mathrm{J}^T\mathrm{J}\mathrm{a}-\mathrm{J}^T\mathrm{y}=0. \tag{1.16}$$

Množenjem prethodnog izraza s $\left(\mathrm{J}^{\mathrm{T}}\mathrm{J}\right)^{-1}$ s lijeve strane dobivamo optimalno rješenje

$$\mathrm{a}^{*}=\mathrm{J}^{+}\mathrm{y}\ ,$$

pri čemu je $\mathrm{J}^{+}=\left(\mathrm{J}^T\mathrm{J}\right)^{-1}\mathrm{J}^T$ pseudoinverzna matrica. Sustavom normalnih jednadžbi nazivamo jednadžbu oblika (1.16). [2]

1.1.1.2 Rješavanje LPNK s pomoću QR-dekompozicije

Kao i u prethodnoj metodi, neka je matrica $J\in\Re^{m\times n}$, $m>n$. QR-dekompozicija matrice J je oblika

$$\mathrm{J}=QR\ ,$$

pri čemu je $Q\in\Re^{m\times m}$ ortogonalna matrica za koju vrijedi

$$Q^TQ=QQ^T=I\ ,$$

dok je $R\in\Re^{n\times n}$ gornje trokutasta matrica. Na primjer, ukoliko je matrica J dimenzije 5×4 tada možemo prikazati rastav matrice J na sljedeći način

$$\begin{bmatrix}\times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\times&\times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ \times&\times&\times&\times&\times\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\times&\times&\times&\times\\ 0&\times&\times&\times\\ 0&0&\times&\times\\ 0&0&0&\times\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Općenito, iz zapisa (1.17) vidimo kako gornje trokutasta matrica R u donjem dijelu ima nul-matricu dimenzije $\left(m-n\right)\times n$. QR-dekompoziciju matrice J može se dobiti na više načina, a među njima su Householderovom transformacijom i Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije.

Detaljnije o određivanju QR-dekompozicije s pomoću Householderovih transformacija može se pronaći u [2].

Nakon QR-dekompozicije matrice J vektor odstupanja (reziduala) poprima oblik

$$r(a) = QRa - y\,.$$

Korištenje QR-dekompozicije za rješavanje linearnog problema najmanjih kvadrata temelji se na činjenici da ortogonalne matrice čuvaju udaljenost, odnosno da vrijedi $\|x\| = \|Qx\|$, za svaki $x \in \Re^{m\times 1}$.

Naime za normu vektora odstupanja vrijedi

$$\|r(a)\| = \|QRa - y\| = \|Q(Ra - Q^T y)\| = \|Ra - Q^T y\|$$

stoga je minimizirajuća funkcija F oblika

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{1}{2}\|r(a)\|^2 = \frac{1}{2}\|Ra - Q^T y\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|R_n a - (Q^T y)_n\|_n^2 + \frac{1}{2}\|(Q^T y)_{m-n}\|_{m-n}^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|(Q^T y)_{m-n}\|_{m-n}^2 \end{aligned} \qquad (1.18)$$

pri čemu je R_n matrica koja se sastoji od prvih n redaka početne ortogonalne matrice R, dok su $(Q^T y)_{m-n}$ i $(Q^T y)_n$ vektori koji su sastavljeni od posljednjih $m-n$, odnosno prvih n komponenti početnih vektora. [3]

Iz (1.18) vidimo kako se minimum funkcije postiže za vektor $a^* \in \Re^n$ koji zadovoljava jednadžbu $R_n a^* - (Q^T y)_n = 0$, odnosno $R_n a^* = (Q^T y)_n$. U tom slučaju minimizirajuća funkcija je oblika

$$F(a) = \frac{1}{2}\|(Q^T y)_{m-n}\|_{m-n}^2 .$$

1.1.1.3 Rješavanje LPNK s pomoću dekompozicija na singularne vrijednosti

Promotrimo slučaj kada Jacobijan J nije punog ranga te vrijedi da je $\text{rang}(\text{J}) = k \leq n < m$. Tada prema Lemi 1.1. matrica $J^T J$ nije pozitivno definitna što povlači činjenicu da linearni problem najmanjih kvadrata ima beskonačno mnogo rješenja. Tada se rješavanje danog problema (1.14) svodi na dekompoziciju matrice J na singularne vrijednosti.

Ukoliko zapišemo Jacobijan J s pomoću dekompozicije na singularne vrijednosti tada ona poprima oblik

$$J = USV^T, \tag{1.19}$$

pri čemu su $U \in \Re^{m\times m}$ i $V \in \Re^{n\times n}$ ortogonalne matrice, a matrica $S \in \Re^{m\times n}$ je dijagonalna matrica $S = \text{diag}\left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}\right)$, takva da vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq, \ldots, \geq \sigma_{\min(\text{m,n})} \geq 0.$ Brojeve $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}$ nazivamo singularne vrijednosti matrice J, a stupce matrice U i V lijevim, odnosno desnim singularnim vektorima matrice J.

Minimizirajući problem (1.14) sada poprima oblik

$$\begin{aligned} F(\text{a}) &= \frac{1}{2} \| \text{r(a)} \|_2^2 = \frac{1}{2} \| \text{USV}^T\text{a} - \text{y} \|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \| \text{U}\left(\text{SV}^T\text{a} - \text{U}^T\text{y}\right) \|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \| \text{SV}^T\text{a} - \text{U}^T\text{y} \|_2^2 . \end{aligned} \tag{1.20}$$

Ukoliko uvedemo oznaku $z = V^T a$, tada analognim postupkom kao i kod QR-dekompozicije izraz (1.20) možemo pisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} F(\text{a}) &= \frac{1}{2} \| \text{Sz} - \text{U}^T\text{y} \|^2 \\ &= \frac{1}{2} \| \text{S}_k z - \left(\text{U}^T\text{y}\right)_k \|_{(k)}^2 + \frac{1}{2} \| \left(\text{U}^T\text{y}\right)_{m-k} \|_{(\text{m}-k)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \| \left(\text{U}^T\text{y}\right)_{m-k} \|_{(\text{m}-k)}^2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

pri čemu je S_k matrica koja se sastoji od prvih k redaka početne dijagonalne matrice S, dok su $\left(U^T y\right)_{m-k}$ i $\left(U^T y\right)_k$ vektori koji su sastavljeni od posljednjih $m-k$, odnosno prvih k komponenti početnih vektora. [2]

Iz (1.21) vidimo kako se minimum funkcije postiže za vektor $z^* \in \Re^n$ koji zadovoljava jednadžbu $\text{S}_k z^* - \left(\text{U}^T\text{y}\right)_k = 0$, odnosno $\text{S}_k z^* = \left(\text{U}^T\text{y}\right)_k$. U tom slučaju minimizirajuća funkcija je oblika

$$F(a) = \frac{1}{2} \left\| \left(\text{U}^T\text{y}\right)_{m-k} \right\|_{m-k}^2 = \sum_{i=k+1}^{m} \left(\text{u}_\text{i}{}^T\text{y}\right)^2 .$$

Primjetimo kako smo ovim postupkom dobili prvih k komponenti vektora z^*. Naime, prvih k komponenti su oblika

$$z_i^* = \frac{\mathrm{u_i^T y}}{\sigma_i}\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Preostale komponente vektora z^* dobivamo na način da optimalno rješenje a^* ima najbolju L_2 (euklidsku) normu. Stoga, treba vrijediti

$$a^* = \mathrm{V}z^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^T y}{\sigma_i} v_{i,}$$

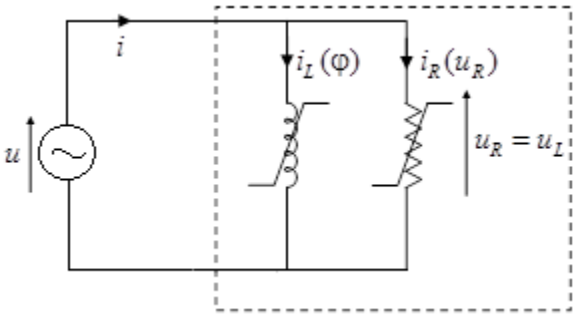
pri čemu je

$$\left\| a^* \right\| = \min_{Ja - y = r} \|a\|.$$

Postoje metode za rješavanje nelinearnih najmanjih kvadrata. To su Gauss-Newtonova metoda i Marquardtova metoda.

2. TEORIJSKI UVOD U ESTIMACIJU PARAMETARA NELINEARNE ZAVOJNICE

Modeliranje nelinearne zavojnice vršiti će se na temelju jednadžbi (2.1) - (2.5), odnosno modela (slika 2.1.). Model se sastoji od paralelnog spoja nelinearnog induktiviteta (linearnog po odsječcima) i nelinearnog otpora (linearnog po odsječcima).



Slika 2.1. Model nelinearne zavojnice [4]

Prema Kirchoffovom zakonu za struje dobivamo jednadžbu (2.1).

$$i = i_R + i_L \tag{2.1}$$

$$u = u_R = u_L \tag{2.2}$$

$$i_L = f_L(\varphi) \tag{2.3}$$

$$i_R = f_R(u_R) \tag{2.4}$$

$$\varphi = \int u dt \tag{2.5}$$

Funkcije $f_L(\varphi)$ i $f_R(u_R)$ predstavljaju karakteristike induktiviteta i otpora. Ovdje se radi o centralno simetričnim funkcijama s obzirom na ishodište pripadnog sustava (neparne funkcije), zbog čega je dovoljno odrediti karakteristiku samo u jednom kvadrantu. [4]

Pošto su funkcije neparne za parametre i_R i i_L dobivamo slijedeće izraze:

$$i_R = f_R(u) = a_1 u + a_3 u^3 + ... + a_n u^n \tag{2.6}$$

$$i_L = f_L(\varphi) = b_1\varphi + b_3\varphi^3 + ... + b_n\varphi^n \tag{2.7}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (2.3) i (2.4) dobivamo slijedeći

$$\Delta i = f_R(u) + f_L(\varphi) - i \tag{2.8}$$

izraz u kojemu Δi predstavlja pogrešku (odstupanje). Zbog estimacije struja i_R i i_L računamo s pomoću polinoma konačnog stupnja.

Potrebno je izvršiti minimizaciju pogreške Δi, odnosno potrebno je formirati funkciju cilja F . Dobivamo slijedeći izraz

$$F = \int_0^T \Delta i^2 dt, \quad F(a_1, a_3, ..., a_n, b_1, b_3, ..., b_n) \tag{2.9}$$

koji je potrebno minimizirati.

Kako bi minimizirali funkciju cilja F moramo odrediti $a_k - ove$ i $b_k - ove$ što se svodi na problem najmanjih kvadrata. Zbog toga ćemo parcijalno derivirati svaku varijablu.

Uvjeti za parcijalno deriviranje po prvoj varijabli su:

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0, \qquad j = 1, 3, ..., n$$

to je sustav od $\frac{n+1}{2}$ linearnih jednadžbi i $\frac{n+1}{2}$ nepoznanica. Parcijalna derivacija se izvodi na slijedeći način

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\int_0^T \Delta i^2 dt = \int_0^T \frac{\partial \Delta i^2}{\partial a_j} dt = \int_0^T 2\Delta i \frac{\partial \Delta i}{\partial a_j} dt \tag{2.10}$$

Pošto je Δi^2 složena funkcija nju je potrebno zasebno derivirati na slijedeći način:

$$\frac{\partial \Delta i}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\left[f_R(u) + f_L(\varphi) - i \right] = \frac{\partial}{\partial a_j} f_R(u).$$

Daljnjim rješavanjem dolazimo do izraza:

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 2\int_0^T \Delta i \frac{\partial f_R(u)}{\partial a_j} dt$$

Vrši se integracija po trapeznom pravilu, ulazni podaci su diskretni.

$$\int_0^T \Delta i \frac{\partial f_R(u)}{\partial a_j} dt = 0 \qquad j = 1, 3, ..., n$$

$$\frac{\partial f_R(u)}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\left[a_1 u + a_3 u^3 + \ldots + a_n u^n\right] = u^j$$

$$\int_0^T \Delta i \cdot u^j dt = 0 \quad \forall \; j = 1,3,5,\ldots,n$$

$$\int_0^T \left[f_R(u) + f_L(\varphi) - i \right] \cdot u^j dt = 0$$

$$\int_0^T f_R(u) \cdot u^j dt + \int_0^T f_L(\varphi) \cdot u^j dt - \int_0^T i \cdot u^j dt = 0$$

$$\int_0^T f_R(u) \cdot u^j dt + \int_0^T f_L(\varphi) \cdot u^j dt = \int_0^T i \cdot u^j dt \qquad (2.11)$$

Iz izraza (2.11) vidimo da imamo neparan ($n+1$) broj nepoznanica.

Uvjeti za parcijalno deriviranje po drugoj varijabli:

$$\frac{\partial F}{\partial b_j} = 0, \; j = 1,3,\ldots,n$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_j} = 2\int_0^T \Delta i \frac{\partial \Delta i}{\partial b_j} dt = 2\int_0^T \Delta i \cdot \varphi^j dt$$

$$\frac{\partial \Delta i}{\partial b_j} = \frac{\partial}{\partial b_j}\left[f_R(u) + f_L(\varphi) - i \right] = \frac{\partial}{\partial b_j} f_L(u) = \varphi^j$$

$$\int_0^T \Delta i \cdot \varphi^j dt = \int_0^T \left[f_R(u) + f_L(\varphi) - i \right] \cdot \varphi^j dt = \int_0^T f_R(u) \cdot \varphi^j dt + \int_0^T f_L(\varphi) \cdot \varphi^j dt - \int_0^T i \cdot \varphi^j dt$$

$$\int_0^T f_R(u) \cdot \varphi^j dt + \int_0^T f_L(\varphi) \cdot \varphi^j dt = \int_0^T i \cdot \varphi^j dt \qquad (2.12)$$

Sustavi (2.11) i (2.12) čine $n+1$ linearnih jednadžbi s $n+1$ nepoznanica.

Sustav (2.11) je:

$$\int_0^T f_R(u) \cdot u^j dt + \int_0^T f_L(\varphi) \cdot u^j dt = \int_0^T i \cdot u^j dt$$

$$I_1 = \int_0^T f_R(u) \cdot u^j dt = \int_0^T u^j \cdot \left[a_1 u + a_3 u^3 + \ldots + a_n u^n \right] dt$$

$$I_1 = a_1 \int_0^T u^{j+1} dt + a_3 \int_0^T u^{j+3} dt + \ldots + a_n \int_0^T u^{j+n} dt$$

$$I_2 = \int_0^T f_L(\varphi) \cdot u^j dt = \int_0^T u^j \cdot \left[b_1\varphi + b_3\varphi^3 + ... + b_n\varphi^n \right] dt$$

$$I_2 = b_1 \int_0^T u^j \varphi dt + b_3 \int_0^T u^{j+3}\varphi^3 dt + ... + b_n \int_0^T u^j \varphi^n dt$$

Sustav (2.12) je:

$$\int_0^T f_R(u) \cdot \varphi^j dt + \int_0^T f_L(\varphi) \cdot \varphi^j dt = \int_0^T i \cdot \varphi^j dt$$

$$I_3 = \int_0^T f_R(u) \cdot \varphi^j dt = \int_0^T \varphi^j \cdot \left[a_1 u + a_3 u^3 + ... + a_n u^n \right] dt$$

$$I_3 = a_1 \int_0^T \varphi^j \cdot u dt + a_3 \int_0^T \varphi^j \cdot u^3 dt + ... + a_n \int_0^T \varphi^j \cdot u^n dt$$

$$I_4 = \int_0^T f_L(\varphi) \cdot \varphi^j dt = \int_0^T \varphi^j \cdot \left[b_1\varphi + b_3\varphi^3 + ... + b_n\varphi^n \right] dt$$

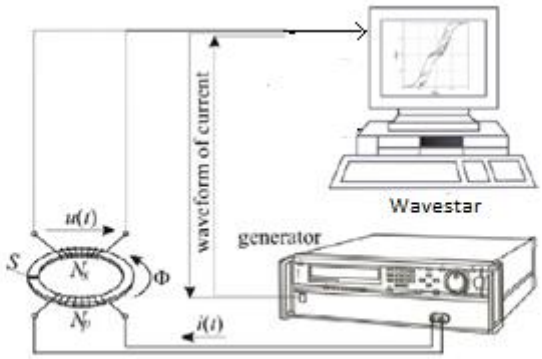
$$I_4 = b_1 \int_0^T \varphi^{j+1} dt + b_3 \int_0^T \varphi^{j+3} dt + ... + b_n \int_0^T \varphi^{j+n} dt$$

Zapis u matričnom obliku:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
u^{1+1} & u^{1+3} & \cdots & u^{1+n} & u\varphi & u\varphi^3 & \cdots & u\varphi^n \\
u^{3+1} & u^{3+3} & \cdots & u^{3+n} & u^3\varphi & u^3\varphi^3 & \cdots & u^3\varphi^n \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
u^{j+1} & u^{j+3} & \cdots & u^{j+n} & u^j\varphi & u^j\varphi^3 & \cdots & u^j\varphi^n \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
u^{n+1} & u^{n+3} & \cdots & u^{n+n} & u^n\varphi & u^n\varphi^3 & \cdots & u^n\varphi^n \\
\hline
\varphi^n & \varphi u^3 & \cdots & \varphi u^n & \varphi^{1+1} & \varphi^{3+1} & \cdots & \varphi^{n+1} \\
\varphi^3 u & \varphi^3 u^3 & \cdots & \varphi^3 u^n & \varphi^{3+1} & \varphi^{3+3} & \cdots & \varphi^{n+3} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\varphi^j u & \varphi^j u^3 & \cdots & \varphi^j u^n & \varphi^{j+1} & \varphi^{j+3} & \cdots & \varphi^{j+n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\varphi^n u & \varphi^n u^3 & \cdots & \varphi^n u^n & \varphi^{n+1} & \varphi^{n+3} & \cdots & \varphi^{n+n}
\end{array}\right]$$

3. OPIS MJERENJA

Mjerni postav kojim su vršena mjerenja (slika 3.1) sastojao se od zavojnice sa torusnom jezgrom (nelinearna zavojnica), osciloskopa, računala, ampermetra, strujnih kliješta i funkcijskog generatora EAC-S 2000 (slika 3.2.).[5]



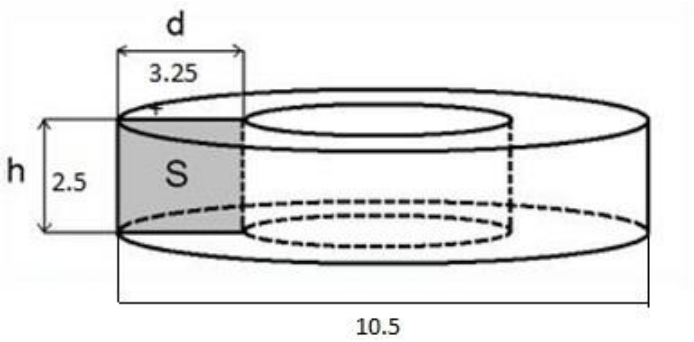
Slika 3.1. Mjerni postav [6]

Frekvencija je bila podešena na vrijednost od 50Hz. S pomoću funkcijskog generatora podešavan je izlazni napon od 0V do maksimalnog raspona izlaznog napona. Vrijednost izlazne struje koja je podešena bila je na iznos od 1,25A. Osciloskop je korišten za prikaz valnih oblika struje i napona. Struja u vodiču mjerena je s pomoću strujnih kliješta i ampermetra.



Slika 3.2. Funkcijski generator EAC-S 2000 [7]

Dimenzije nelinearne zavojnice (zavojnice sa torusnom željeznom jezgrom) koja je korištena u mjerenjima prikazane su na slici 3.3. i dimenzije su prikazane u centimetrima. Površina presjeka torusne jezgre iznosi S=8,125cm^2.

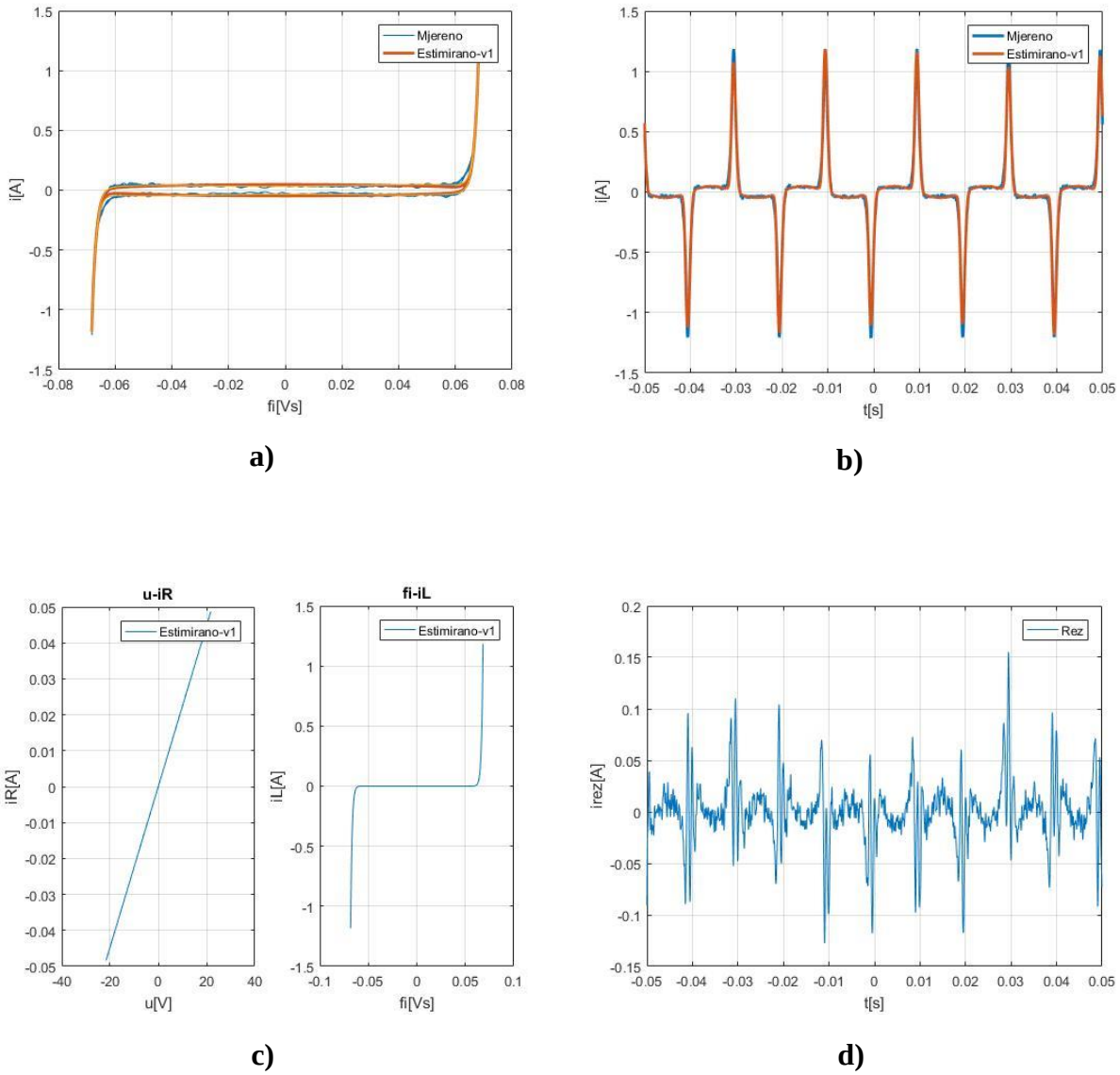


Slika 3.3. Dimenzije zavojnice sa torusnom jezgrom [5]

Korak povećavanja napona s pomoću funkcijskog generatora nije bio stalan. Od vrijednosti 0V do napona iznosa 275V korak je iznosio 5V, od 275V do 285V bio je 1V, a od 285V do krajnje granice povećavali smo za 0.2V.

4. OBRADA REZULTATA

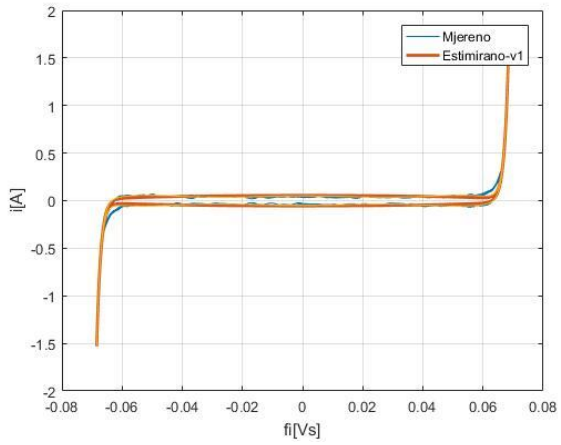
Nakon izvršenih mjerenja, izmjereni su signali putem osciloskopa i računala procesirani, te koristeći se matematičkim programom Matlab izrađen je kod, s pomoću kojeg su dobivene slijedeće slike (slike od 4.1. – 4.6.). U ovim slikama korišten je vršni napon od 290V i povećavan je za 0.2V, za svako slijedeće mjerenje. Frekvencija je bila stalna i iznosila je 50Hz.



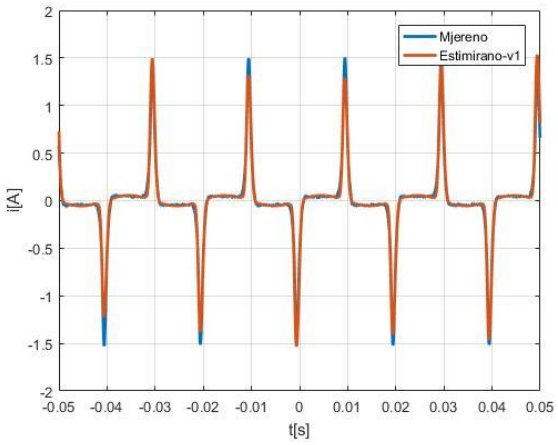
a) **b)**

c) **d)**

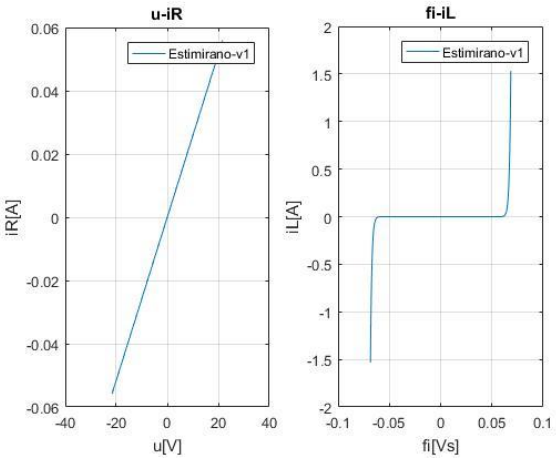
Slika 4.1. Prikaz mjerenja pri vršnoj vrijednosti napona 290V i frekvencije 50Hz a) Prikaz histereze pri 50Hz b) Valni oblik struje zavojnice c) Karakteristika estimiranog otpora i induktiviteta d) Pogreške (rezidue)



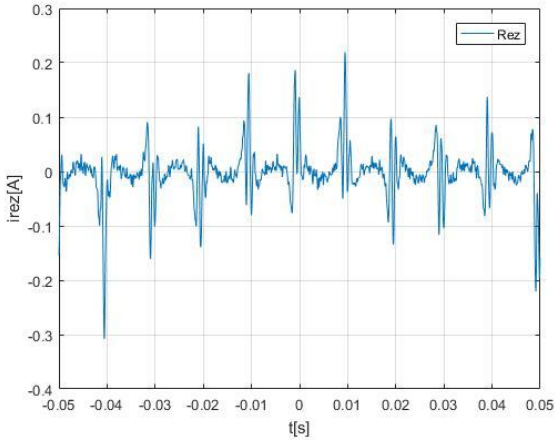
a)



b)

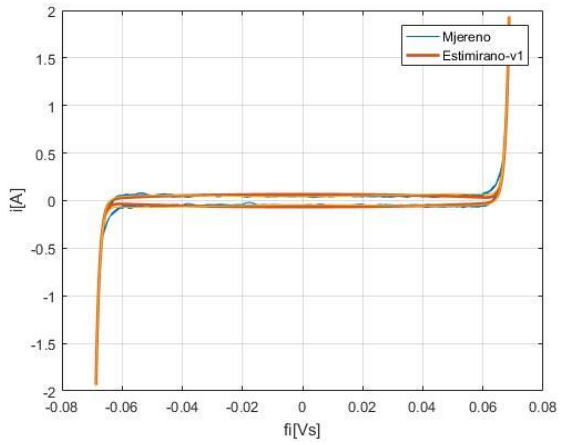


c)

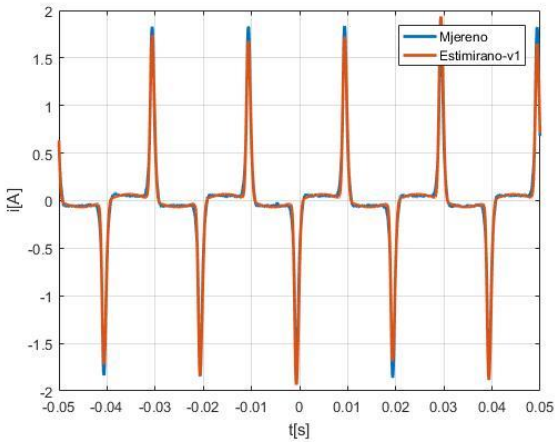


d)

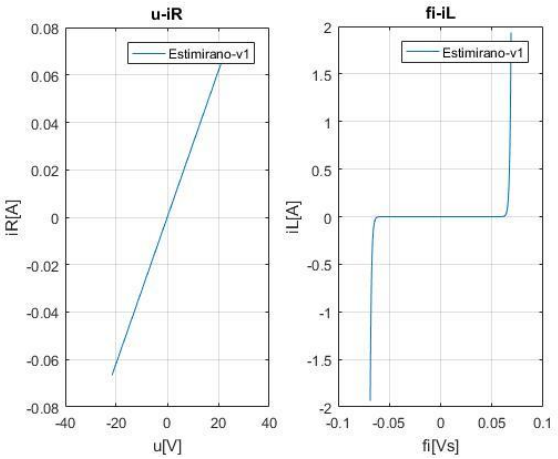
Slika 4.2. Prikaz mjerenja pri vršnoj vrijednosti napona 290.2V i frekvencije 50Hz a) Prikaz histereze pri 50Hz b) Valni oblik struje zavojnice c) Karakteristika estimiranog otpora i induktiviteta d) Pogreške (rezidue)



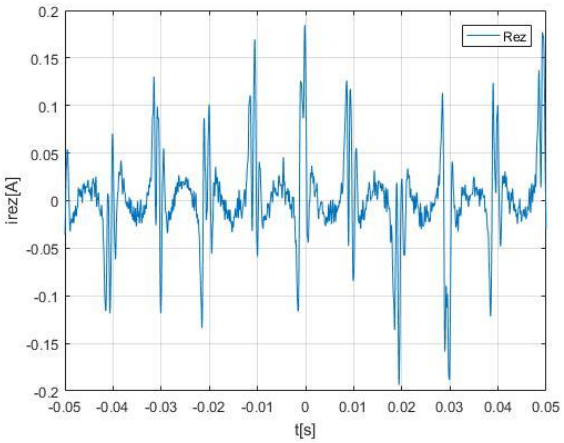
a)



b)

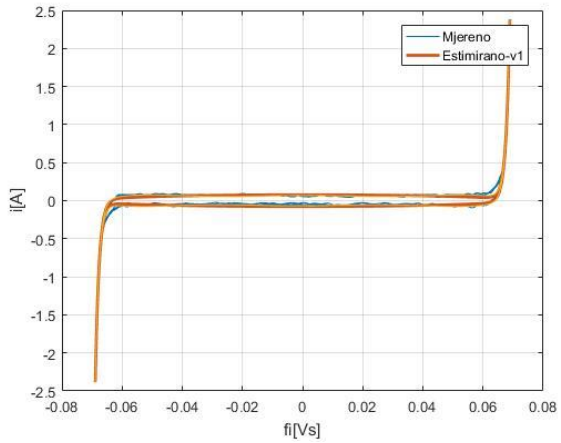


c)

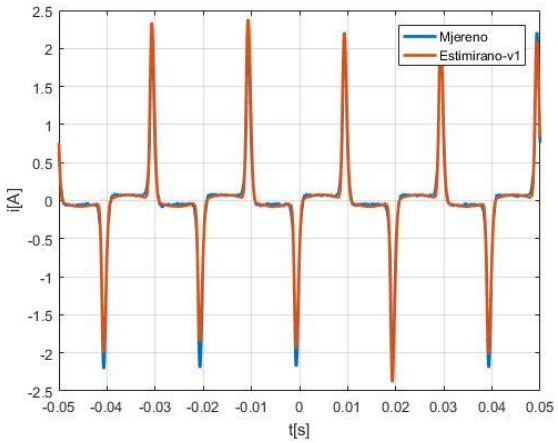


d)

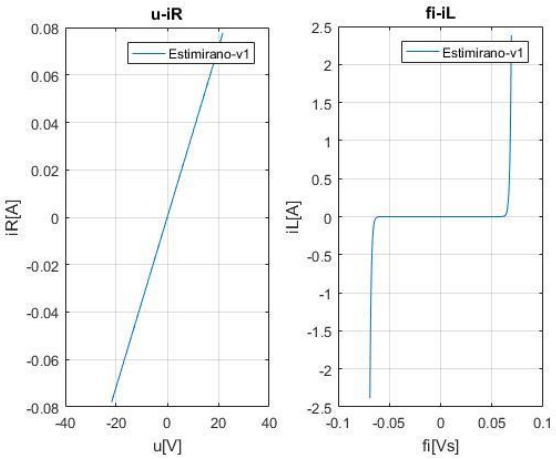
Slika 4.3. Prikaz mjerenja pri vršnoj vrijednosti napona 290.4V i frekvencije 50Hz a) Prikaz histereze pri 50Hz b) Valni oblik struje zavojnice c) Karakteristika estimiranog otpora i induktiviteta d) Pogreške (rezidue)



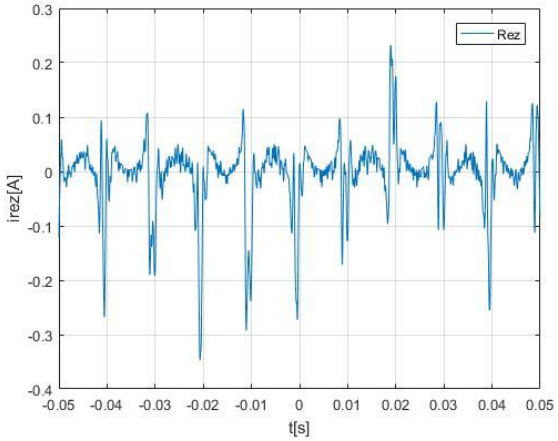
a)



b)

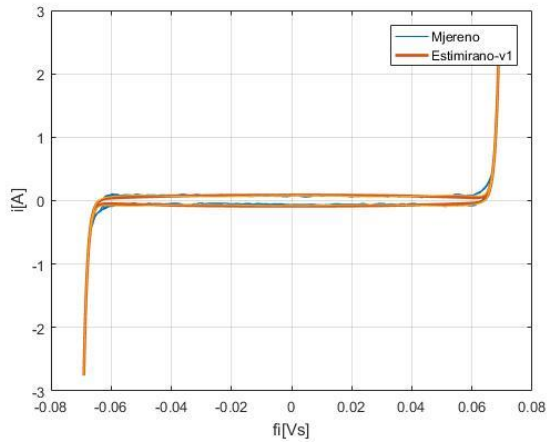


c)

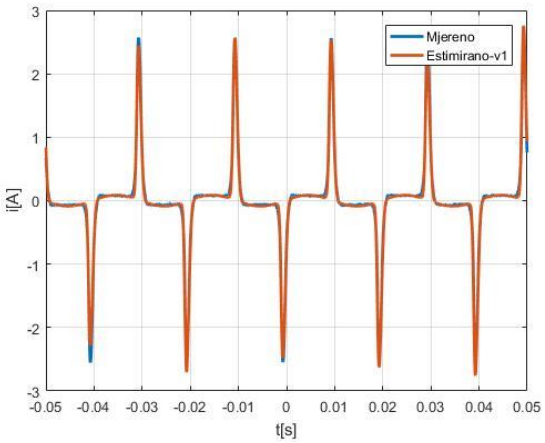


d)

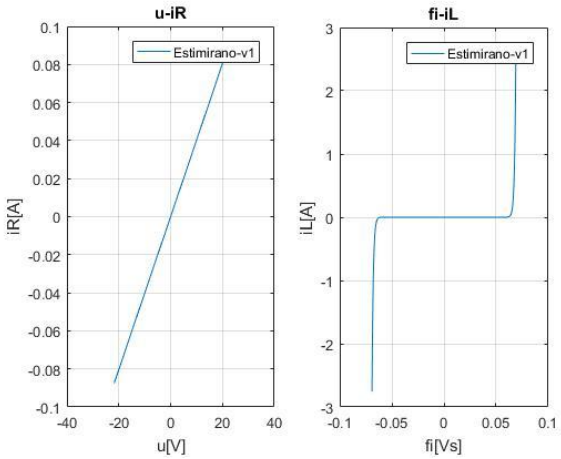
Slika 4.4. Prikaz mjerenja pri vršnoj vrijednosti napona 290.6V i frekvencije 50Hz a) Prikaz histereze pri 50Hz b) Valni oblik struje zavojnice c) Karakteristika estimiranog otpora i induktiviteta d) Pogreške (rezidue)



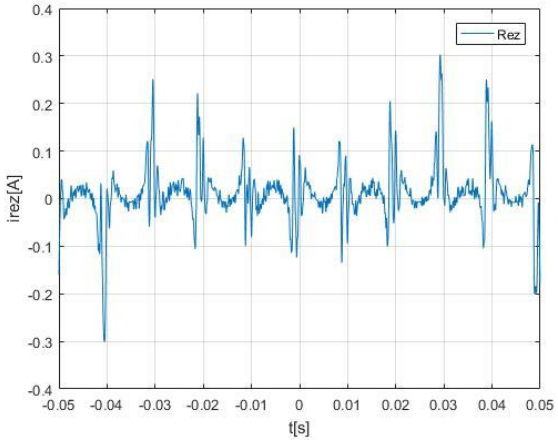
a)



b)

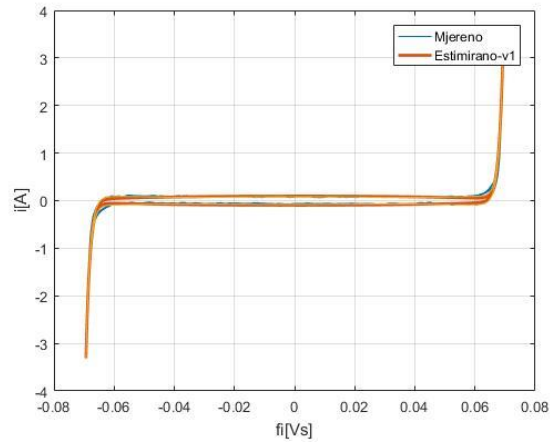


c)

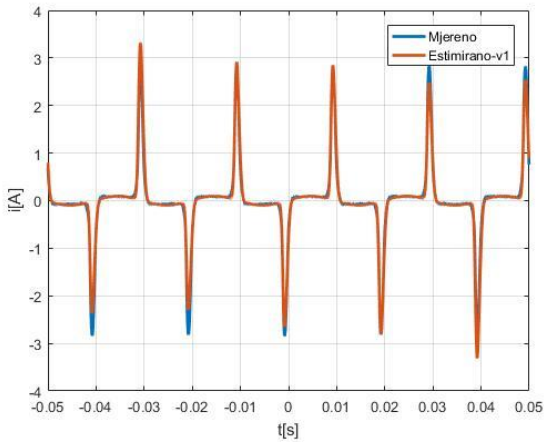


d)

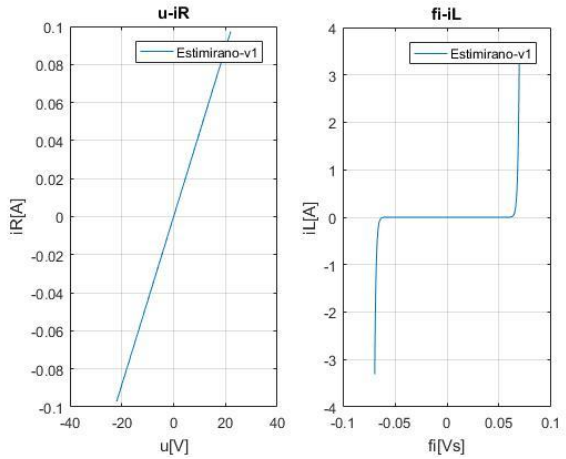
Slika 4.5. Prikaz mjerenja pri vršnoj vrijednosti napona 290.8V i frekvencije 50Hz a) Prikaz histereze pri 50Hz b) Valni oblik struje zavojnice c) Karakteristika estimiranog otpora i induktiviteta d) Pogreške (rezidue)



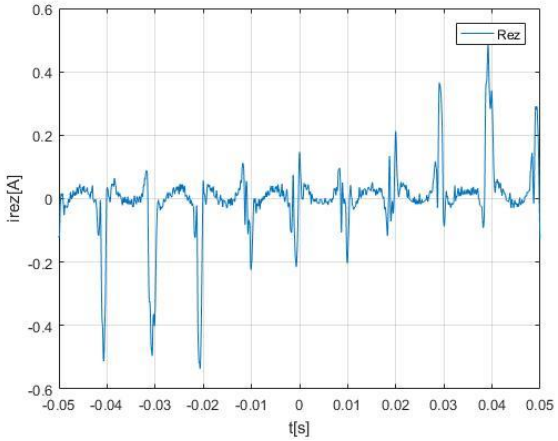
a)



b)



c)



d)

Slika 4.6. Prikaz mjerenja pri vršnoj vrijednosti napona 291V i frekvencije 50Hz a) Prikaz histereze pri 50Hz b) Valni oblik struje zavojnice c) Karakteristika estimiranog otpora i induktiviteta d) Pogreške (rezidue)

Na slikama (4.1.-4.6.) prikazane su karakteristične veličine zavojnice za vršni napon od 290V-291V i 50Hz.

Na slikama (4.1-4.6.) a) prikazane su mjerene (plava) i estimirane (crvena) histereze u $\Phi - i$ ravnini. Iz slike je vidljivo dobro podudaranje mjerene i estimirane histereze.

Na slikama (4.1-4.6.) b) je mjereni i estimirani valni oblik struje zavojnice. Uočava se karakterističan valni oblik struje magnetiziranja.

Na slikama (4.1-4.6.) c) prikazane su estimirane karakteristike otpora i induktiviteta u $u - i_R$ i $\Phi - i_L$ ravnini. Karakteristika induktiviteta predstavlja krivulju prvog magnetiziranja, dok karakteristika otpora opisuje gubitke u zavojnici.

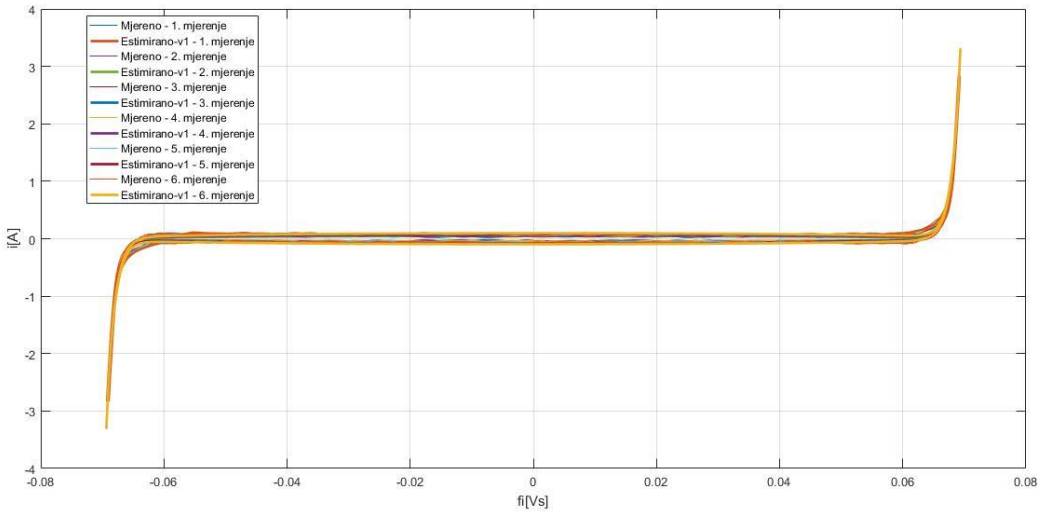
Na slikama (4.1-4.6.) d) su navedene rezidue, tj. razlika između mjerene i estimirane struje zavojnice.

Usporedbom b) i d) na slici 4.1. može se vidjeti da su vršne vrijednosti rezidua (pogrešaka) znatno manje (0.15A) od vršnih vrijednosti mjerene struje zavojnice (1.25A) što upućuje da su estimirani parametri karakteristika dobro određeni.

Dok usporedbom b) i d) na slici 4.6. može se vidjeti da se pri povećanju vršnog napona od 1V, u odnosu na sliku 4.1., vršna vrijednost rezidua (pogrešaka) povećala na (0.5A), a vršna vrijednost mjerene struje zavojnice na (3.25A).

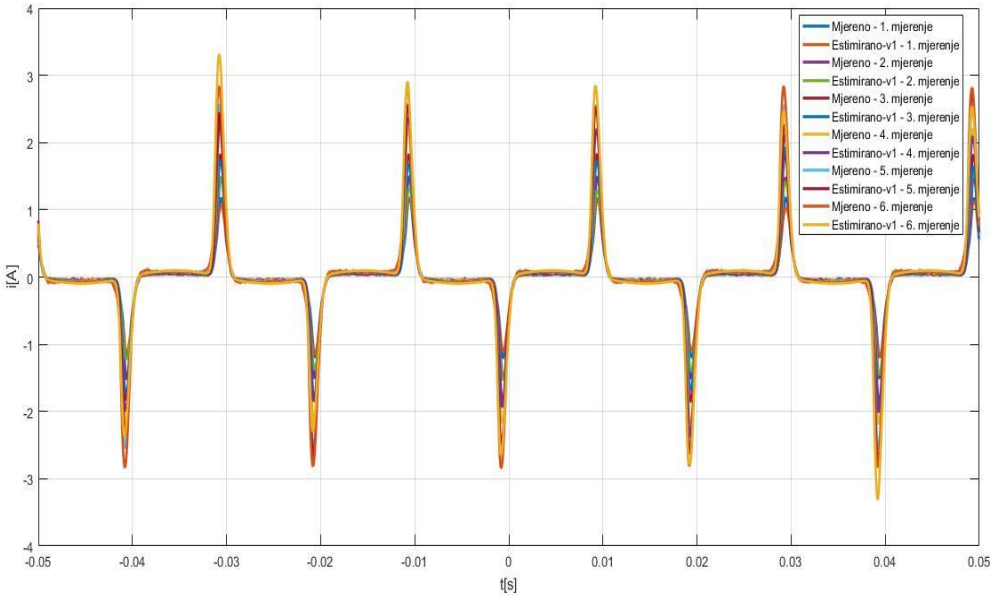
4.1. USPOREDBA REZULTATA

U ovom poglavlju napravljen je presjek karakteristika po slikama (4.7.-4.10.). Na svakoj su slici implementirane karakteristike iz svih šest mjerenja obuhvaćenih u poglavlju 4. To je napravljeno radi usporedbe i promatranja ponašanja karakteristika pri povećanju napona.



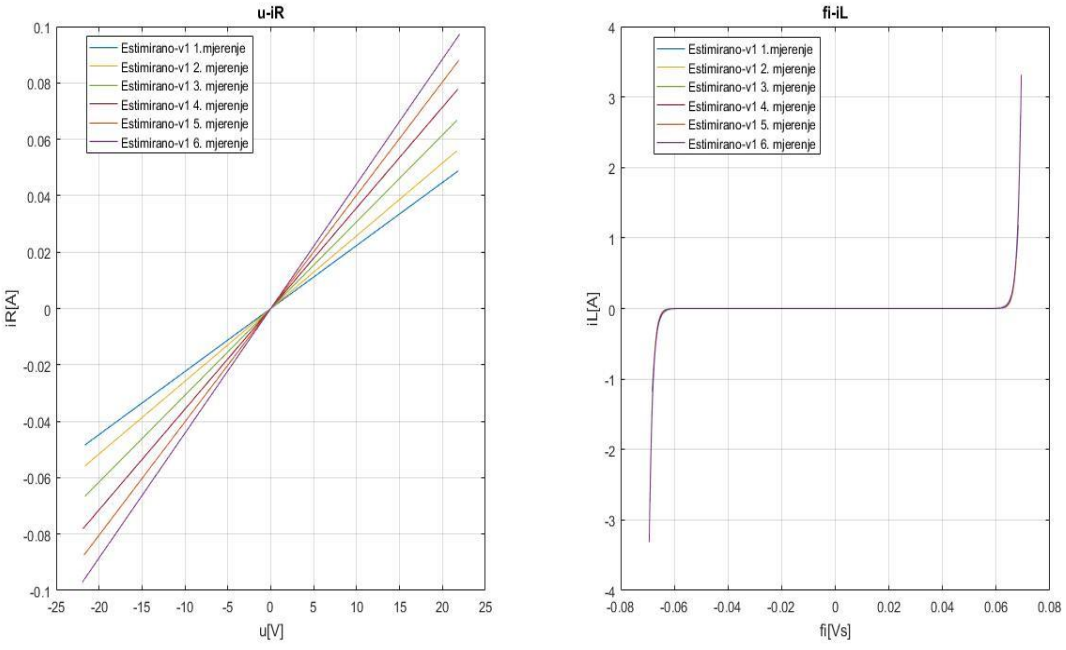
Slika 4.7. Prikaz petlja histereza za svih šest mjerenja pri frekvenciji 50Hz

Podudaranje svih histereza jako je dobro, što je vidljivo iz slike 4.7. Također dolazi do promjene toka, ali je to skoro neprimjetljivo. Kako se napon povećava za 0.2V, tako se magnetski tok povećava za 0.2V/ω, pri čemu je ω = 314[s^{-1}]. Stoga je povećanje toka 6,37*10^{-4}[Vs], a to je na slici nezamjetno.



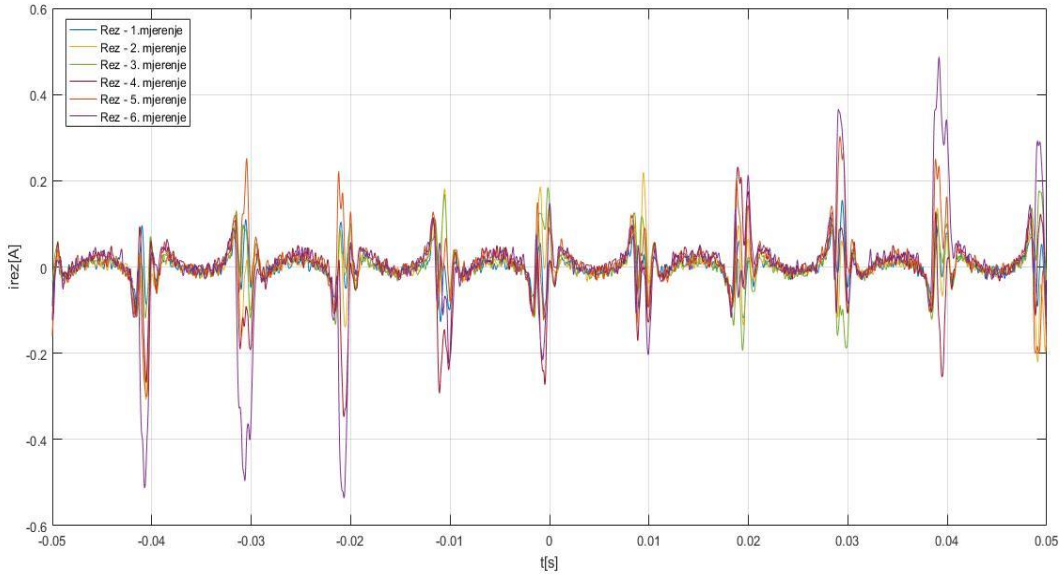
Slika 4.8. Valni oblik struja zavojnice za svih šest mjerenja pri frekvenciji od 50Hz

Na slici 4.8. uočljivo je da povećanjem vršne vrijednosti napona povećava se vršna vrijednost struje. Pri vršnoj vrijednosti napona od 290V, vršna vrijednost struje je 1.25A. Dok je pri vršnoj vrijednosti napona iz zadnjeg mjerenja od 291V, vršna vrijednost struje 3.25A.



Slika 4.9. Prikaz karakteristika estimiranog otpora i induktiviteta za svih šest mjerenja pri frekvenciji od 50Hz

Iz slike 4.9. vidljivo je da se $\Phi - i_L$ karakteristike jako dobro podudaraju, dok kod $u - i_R$ ima više rasipanja. Odstupanja su vrlo mala, posebice kod $\Phi - i_L$ karakteristike. Doprinos u ukupnoj struji zavojnice većinom ima struja induktiviteta (3.25A), što se jasno na slici vidi. Dok na kvalitetu modela ne utječe značajno karakteristika otpora, iako je rasipanje vidljivo, jer nema velik utjecaj na struju. Dok karakteristika induktiviteta ima velik utjecaj, a rasipanje između njih je vrlo malo.



Slika 4.10. Prikaz rezidua (pogrešaka) za svih šest mjerenja pri frekvenciji od 50Hz

Na slici 4.10. prikazane su vršne vrijednosti rezidua (pogrešaka). Raspon vršnih vrijednosti rezidua kreće se od 0.15A do 0.5A.

Pri naponu od 290V vršna vrijednost rezidua je 0.15A, a vršna vrijednost struje zavojnice iznosi 1.25A. Stoga vršna vrijednost struje rezidue iznosi 12% ukupne vršne vrijednosti struje zavojnice.

Dok je pri naponu od 291V, vršna vrijednost rezidua iznosi 0.5A, a vršna vrijednost struje zavojnice 3.25A. U ovom slučaju vršna vrijednost struje rezidua iznosi 15.4% vršne vrijednosti struje zavojnice. Stoga dolazimo do zaključka kako povećanjem napona, povećava se struje, a ekvivalentno povećanjem struje povećava se pogreška.

5. ZAKLJUČAK

U uvodnom poglavlju opisan je teorijski uvod u metodu najmanjih kvadrata. Također su detaljno opisane metode za rješavanje linearnih problema najmanjih kvadrata. Bitno je naglasiti da je metoda najmanjih kvadrata jedna od najčešće korištenih metoda za obradu eksperimentalno dobivenih podataka.

U drugom poglavlju detaljno je opisan matematički model nelinearne zavojnice, koji je modeliran s pomoću polinoma (estimacija parametara). Svrha estimacije je određivanje parametara matematičkog modela radi predviđanja stanja stvarnog sustava. Prednost modeliranja na ovakav način su jednostavna mjerenja.

U trećem poglavlju prikazan je mjerni postupak kojim smo došli do mjernih rezultata.

U četvrtom poglavlju su na temelju estimacije parametara, s pomoću metode najmanjih kvadrata dobivene karakteristike izvedene u drugom poglavlju. Na kraju poglavlja napravljena je usporedba karakteristika. Iz rezultata je jasno vidljivo da struja induktiviteta ima najveći doprinos u struji zavojnice.

LITERATURA

[1] I. Jerković: *Metoda najmanjih kvadrata i njezina primjena u fizici*, Diplomski rad 2016, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za fiziku, 20.5.2017. https://repozitorij.fizika.unios.hr/islandora/object/fizos%3A19/datastream/PDF/view

[2] Dr.sc. Rudolf Scitovski, *Numerička matematika*, Osijek 2004.

[3] Bilješke s predavanja I. Slapničar, Matematika 2, *„Metoda najmanjih kvadrata i QR rastav“*, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 20.5.2017. http://lavica.fesb.unist.hr/mat2/ls/ls.pdf

[4] I. Biondić, Mjerna nesigurnost karakteristike nelinearne zavojnice, Diplomski rad 2014., Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija, Osijek, 27.3.2017. https://repozitorij.etfos.hr/islandora/object/etfos%3A1/datastream/PDF/view

[5] R. Topalović, Utjecaj frekvencije i broja zavoja na karakteristike nelinearne zavojnice dobivene Preisachovom metodom, Završni rad 2015., Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija, Osijek, 15.4.2017. https://repozitorij.etfos.hr/islandora/object/etfos%3A771/datastream/PDF/view

[6] M. Kuczmann, „*Dynamic Preisach hysteresis model“,* Journal of Advanced Research in Physics VOL 1(1), NO. 011003 (2010).

[7] Datasheet EAC, 20.9.2017. http://www.schulz-electronic.de

[8] Bilješke s predavanja N. Perić, I. Petrović, M. Vašak, Teorija estimacije *„Poglavlje 1 - Uvod“*, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 20.5.2017. https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/TE_Poglavlje_01_PREZENTACIJA_2014.pdf

SAŽETAK

U radu je izvršena estimacija parametara nelinearne zavojnice s pomoću metode najmanjih kvadrata. Nelinearna zavojnica modelira se s pomoću nelinearnog induktiviteta i nelinearnog otpora (linearni po odsječcima). Prikazane su karakteristike dobivene estimacijom pri stalnoj frekvenciji i povećanju napona. Na temelju prikazanih karakteristika dolazi se do zaključka, da je podudaranje histereza jako dobro. Povećanjem napona dolazi do povećanja struje, a time se povećavaju rezidue. Najveći utjecaj u doprinosu struje zavojnice ima struja induktiviteta.

Ključne riječi: metoda najmanjih kvadrata, nelinearna zavojnica, estimacija parametara

ABSTRACT

In this paper, an estimation of nonlinear coil parameters was performed by using the least squares method. The nonlinear coil is modeled by nonlinear inductance and nonlinear resistance (piece-wise-linear characteristics). Characteristics obtained by estimation at constant frequency and voltage increase are shown. The conclusion is, based on the displayed characteristics, that hysteresis matching is quite good. By increasing the voltage, the current increases as well as the residuals. The greatest influence on the coil current contribution has the inductance current.

Keywords: least squares method, nonlinear coil, parameter estimation

ŽIVOTOPIS

Karlo Grbavac rođen je 07.12.1991. godine u Ludwigsburgu, u Saveznoj Republici Njemačkoj. Završio Osnovnu školu „Vladimira Becića“ u Osijeku. Zatim je upisao srednju Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Osijeku 2006. godine. Nakon završene srednje škole upisuje preddiplomski studij na Elektrotehničkom fakultetu u Osijeku. Na drugoj godini preddiplomskog studija odabire smjer elektroenergetika. Godine 2014. Završava preddiplomski studij i iste godine upisuje diplomski studij smjera elektroenergetika na Elektrotehničkom fakultetu u Osijeku.

_____

(POTPIS)