Fourierova serija i primjena na periodičke signale

Dadić, Ružica

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:200:743295

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-28**

Repository / Repozitorij:

Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek

zir.nsk.hr

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA

Sveučilišni studij

FOURIEROVA SERIJA I PRIMJENA NA PERIODIČNE SIGNALE

Završni rad

Ružica Dadić

Osijek, 2020. godina

FERIT

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK

Obrazac Z1P - Obrazac za ocjenu završnog rada na preddiplomskom sveučilišnom studiju

Osijek, 26.09.2020.

Odboru za završne i diplomske ispite

Prijedlog ocjene završnog rada na preddiplomskom sveučilišnom studiju

Ime i prezime studenta:	Ružica Dadić
Studij, smjer:	Preddiplomski sveučilišni studij Računarstvo
Mat. br. studenta, godina upisa:	R 4048, 18.09.2019.
OIB studenta:	66194075417
Mentor:	Doc.dr.sc. Anita Katić
Sumentor:	Izv. prof. dr. sc. Vanja Mandrić-Radivojević
Sumentor iz tvrtke:	
Naslov završnog rada:	Fourierova serija i primjena na periodičke signale
Znanstvena grana rada:	**Telekomunikacije i informatika (zn. polje elektrotehnika)**
Predložena ocjena završnog rada:	Izvrstan (5)
Kratko obrazloženje ocjene prema Kriterijima za ocjenjivanje završnih i diplomskih radova:	Primjena znanja stečenih na fakultetu: 3 bod/boda Postignuti rezultati u odnosu na složenost zadatka: 3 bod/boda Jasnoća pismenog izražavanja: 3 bod/boda Razina samostalnosti: 3 razina
Datum prijedloga ocjene mentora:	26.09.2020.
Datum potvrde ocjene Odbora:	30.09.2020.

Potpis mentora za predaju konačne verzije rada u Studentsku službu pri završetku studija:	Potpis:	Akatić
	Datum:	30.9.2020.

FERIT
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK

IZJAVA O ORIGINALNOSTI RADA

Osijek, 30.09.2020.

Ime i prezime studenta:	Ružica Dadić
Studij:	Preddiplomski sveučilišni studij Računarstvo
Mat. br. studenta, godina upisa:	R 4048, 18.09.2019.
Turnitin podudaranje [%]:	19

Ovom izjavom izjavljujem da je rad pod nazivom: **Fourierova serija i primjena na periodičke signale**

izrađen pod vodstvom mentora Doc.dr.sc. Anita Katić

i sumentora Izv. prof. dr. sc. Vanja Mandrić-Radivojević

moj vlastiti rad i prema mom najboljem znanju ne sadrži prethodno objavljene ili neobjavljene pisane materijale drugih osoba, osim onih koji su izričito priznati navođenjem literature i drugih izvora informacija.
Izjavljujem da je intelektualni sadržaj navedenog rada proizvod mog vlastitog rada, osim u onom dijelu za koji mi je bila potrebna pomoć mentora, sumentora i drugih osoba, a što je izričito navedeno u radu.

Potpis studenta:

Ružica Dadić

SADRŽAJ

1. UVOD

Različita zanimanja iz znanstveno-tehnološkog područja podrazumijevaju svakodnevno susretanje sa signalima koji mogu biti digitalni ili analogni, mehanički, električni, kemijski ili elektromagnetski. Signale treba obraditi, a to je moguće pomoću različitih metoda i alata. Budući da su u inženjerstvu zanimljive pojave poput zvuka, svjetlosti i oscilacija koje imaju sinusni oblik, veliku ulogu ima Fourierov red.

Ovaj rad je podijeljen na 7 osnovnih poglavlja: uvod, doseg Fourierove analize i usporedba Taylorovog i Fourierovog reda, funkcije, redovi, Fourierovi redovi, aproksimacija signala Fourierovim redom i zaključak.

U trećem poglavlju će biti definiran pojam funkcije, bit će navedena i definirana svojstva funkcija te će posebno biti definirane trigonometrijske funkcije i njihova svojstva. U četvrtom poglavlju bit će definiran pojam matematičkog reda, bit će navedeni kriteriji ispitivanja konvergencije redova i njihova pravila. U petom poglavlju ukratko će se prikazati život J. B. Fouriera, bit će definiran trigonometrijski Fourierov red, navest će se postupak izvođenja formula za Fourierove koeficijente i Fourierov red. Navest će se područja primjene Fourierovog reda te će nekoliko funkcija biti raspisano u Fourierov red. Šesto poglavlje obuhvaća praktični dio rada u kojem će se pomoću MATLAB-a aproksimirati i prikazati periodični signali koji se često koriste u elektrotehnici.

1.1. Zadatak završnog rada

Zadatak rada je definirati Fourierov red i navesti njegovo područje primjene. Da bi se mogao definirati Fourierov red, potrebno je prije toga definirati funkcije, posebno trigonometrijske, i redove. Koristeći MATLAB primijeniti Fourierov red na često korištene periodične signale u elektrotehnici.

2. DOSEG FOURIEROVE ANALIZE I USPOREDBA TAYLOROVOG I FOURIEROVOG REDA

U ovome poglavlju navedena su tehnička i znanstvena dostignuća koja su nastala zahvaljujući Fourierovim metodama. Uspoređen je Taylorov red s Fourierovim te je objašnjeno zašto u nekim područjima primjene Fourierov red ima prednost. Navedeni su načini kako se praktični dio ovoga rada mogao obaviti koristeći Simulink ili laboratorijsku opremu. Signali mogu biti periodični ili neperiodični, kontinuirani ili diskretni. Odabir metode kojom će se aproksimirati i analizirati neki signal ovisi o svojstvima signala. Fourier je svojim radom zadužio znanost, a danas su njegove teorije dalje razvijene te utječu na napredak znanosti. Fourierov red i Fourierova transformacija jedan su od najčešće korištenih matematičkih alata, a zajednički se nazivaju Fourierovom analizom.

2.1. Doseg Fourierove analize

Fourierov red se koristi za aproksimaciju periodične i kontinuirane funkcije trigonometrijskim funkcijama, a detaljnija uporaba Fourierovog reda dana je kasnije u ovome radu, u poglavlju Fourierovi redovi. Fourierova transformacija primjenjuje se i na neperiodične funkcije, a to je matematička procedura koja transformira funkciju iz njene vremenske u frekvencijsku domenu. [1] Formule za računanje Fourierovih koeficijenata i Fourierovog reda su temelj za formule Fourierove transformacije i inverzne Fourierove transformacije. Diskretna Fourierova transformacija transformira konačan niz iz vremenske u frekvencijsku domenu. Brza Fourierova transformacija je efikasan algoritam za računanje Fourierove transformacije koji nema složenost $O(N^2)$, već složenost $O(\ N\ log_2 N)$, što znači da obavlja znatno manji broj množenja. [2] Brojna se tehnička i znanstvena dostignuća temelje na metodama Fourierove analize, a neka od njih su nuklearna magnetna rezonancija, infracrvena spektroskopija, masena spektrometrija, algoritmi za prepoznavanje lica i prepoznavanje pjesama. [1]

2.2. Usporedba Fourierovog i Taylorovog reda

Funkcija se može razviti i u neki drugi red, a najpoznatiji red s kojim su upoznati i studenti je Taylorov red i njegov posebni oblik – Maclaurinov red. Funkcija se Taylorovim redom razvija u beskonačan niz polinoma $(\Delta x)^n$, dok se Fourierovim redom razvija u beskonačan niz trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus koje su potrebne da bi se objasnile fizikalne pojave poput zvuka i svjetlosti te time Fourierov red ima prednost u nekim područjima. [3] Budući da će se u ovom radu aproksimirati često korišteni oblici signala u elektrotehnici, onda je prikladnije korištenje Fourierovog reda nego Taylorovog. Do n-tog člana Taylorovog reda se dolazi n-tom derivacijom u okruženju točke x_0, dok je za računanje Fourierovih koeficijenata potrebno integriranje. Da bi se funkcija razvila u Taylorov red, mora biti neprekidna, što nije slučaj s Fourierovim redom. Razvojem funkcije u Fourierov red čuva se periodičnost funkcije, dok $(\Delta x)^n$ članovi Taylorovog reda nisu periodični. [2]

2.3. Računalni programi i laboratrijska oprema za ostvarenje Fourierovog reda

Praktični dio ovoga rada, definiranje i aproksimacija signala, odrađen je pomoću MATLAB-a. Zadatak se može odraditi koristeći kombinaciju MATLAB-a i Simulink-a kako bi se signali generirali koristeći grafičke blok-elemente Simulink-a. MATLAB nije jedini programski jezik u kojem se može riješiti ovaj problem. Za rješavanje matematičkih problema često se koriste programski jezici poput Pythona i Haskella. Osim u programskim jezicima, praktični dio ovoga rada mogao se odraditi koristeći opremu koju posjeduju elektrotehnički i elektronički laboratoriji, a to su funkcijski generator signala i osciloskop. Važnost Fourierove analize se vidi i u laboratorijskoj opremi pa tako današnji osciloskopi imaju algoritme brze Fourierove transformacije, za što je prije trebao poseban uređaj zvan spektralni analizator. [2]

3. FUNKCIJE

Pojam funkcije je jedan od najvažnijih matematičkih pojmova, a prvi put ga upotrebljava Rene Descartes, francuski matematičar i filozof, 1637. godine, a njime je mislio na cjelobrojnu potenciju nezavisne varijable. Njemački matematičar G.W. Leibniz je funkciju povezivao s veličinom koja se odnosi na krivulju, a švicarski matematičar Euler je bilo koju formulu u kojoj se pojavljuju varijable i konstante zvao funkcijom. Današnji pojam funkcije, koji će biti definiran u ovome poglavlju, potječe iz 19. stoljeća od njemačkog matematičara Dirichleta. [4, str. 25]

3.1. Definicija funkcije

Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu skupa D pridružen jedan element skupa K, onda kažemo da je skup D preslikan u skup K, a sam taj postupak pridruživanja elemenata skupa D elementima skupa K nazivamo funkcijom ili preslikavanjem s D u K. Ako funkciju s D u K označimo simbolom f, onda pišemo izraz $f: D \rightarrow K$ i čitamo: f je funkcija s D u K. Skup D zovemo domenom ili područjem definicije, a skup K kodomenom ili područjem vrijednosti funkcije f. Jedinstveni element skupa K pridružen elementu $x \in D$ označavamo s $f(x)$ i zovemo slika elementa x u odnosu na funkciju f ili vrijednost funkcije f u točki x. Varijablu x koja označava proizvoljni element iz skupa D nazivamo nezavisnom varijablom, a $f(x)$, koji se često označava s y, nazivamo zavisnom varijablom. [4, str. 25]

Funkcija f je funkcija realne varijable ako joj je domena podskup skupa realnih brojeva ($D \subseteq \mathbb{R}$). Ako je kodomena funkcije f podskup skupa realnih brojeva ($K \subseteq \mathbb{R}$), onda kažemo da je f realna funkcija. [4, str. 27]

3.2. Svojstva funkcija

Funkcija se analizira tako da se ispituju njena svojstva. Svojstva koja se analiziraju su rast i pad, konveksnost i konkavnost, parnost i neparnost te periodičnost.

3.2.1. Jednakost funkcija

Prema [4, str. 28] dvije funkcije f i g su jednake $(f = g)$ onda i samo onda ako vrijedi da funkcije f i g imaju iste domene, iste kodomene i ako imaju isto pravilo pridruživanja, tj. ako vrijedi za svaki $x \in D,\ f(x) = g(x)$.

3.2.2. Rast i pad funkcija

Za funkciju $f: D \to K, D \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da monotono raste [monotono pada] na skupu D ako za sve $x_{1,} x_2 \in D$ vrijedi $(x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$. Ukoliko vrijede stroge nejednakosti, onda kažemo da funkcija f strogo raste [strogo pada] na skupu D.

Za funkciju $f: D \to K, D \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da u točki $x_0 \in D$ ima lokalni minimum [lokalni maksimum] ako postoji takva ε – okolina $<x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon>$ broja x_0 i da je $f(x) \leq f(x_0)$ $[f(x) \geq f(x_0)]$ za svaki $x \in <x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon>$. Lokalni minimum i lokalni maksimum zajedno se nazivaju lokalnim ekstremima. Vrijede li stroge nejednakosti, onda se zovu strogi lokalni minimum i strogi lokalni maksimum, odnosno strogi lokalni ekstremi. Za točku $x_0 \in D$ kažemo da je točka globalnog makismuma [minimuma] ako je $f(x_0) \geq f(x)$ $[f(x_0) \geq f(x)]$ za svaki $x \in D$. [4, str. 28]

3.2.3. Konveksnost i konkavnost funkcija

Učenici se s pojmovima konkavnosti i konveksnosti susreću još u osnovnoj školi učeći geometrijsku optiku, odnosno zrcala. Prema [5] konkavna i konveksna zrcala su sferna zrcala jer su im površine dio kugline sfere (zrcala su kalota kugle), a daju sliku iskrivljenih proporcija. Međutim, pojmovi konkavnosti i konveksnosti u fizici i matematici su suprotni. Konkavna zrcala, kakva su stomatološka ili kozmetička, su udubljena, dok je graf konkvne funkcije ispupčen. Konveksna zrcala, koja se koriste u nepreglednim zavojima u prometu i retrovizorima, su ispupčena, dok su grafovi konveksnih funkcija udubljeni. Ispupčenost i udubljenost grafa funkcije se promatra „odozgo“ u koordinatnom sustavu.

Funkcija $f: D \to K$ je konveksna [konkavna] na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svaki $x_{1,} x_2 \in I$ vrijedi $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ $\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]$. Ukoliko vrijede stroge nejednakosti za $x_1 \neq x_{2,}$ onda za funkciju f kažemo da je strogo konveksna, odnosno strogo konkavna na intervalu I. [4, str. 28 - 29] Ako se nacrta graf funkcije i tangenta na graf, graf će biti iznad tangente ako je funkcija konveksna te ispod tangente ako je funkcija konkavna.

3.2.4. Parnost i neparnost funkcija

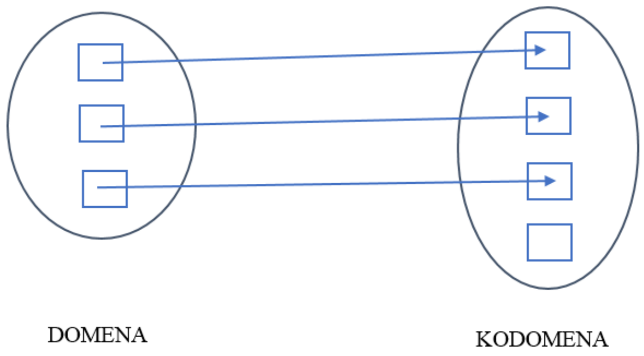
Parnost i neparnost funkcije su važna svojstva, a pogotovo u trigonometrijskim funkcijama koje će biti kasnije definirane i koje su baza ovoga rada. Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je parna [neparna] na skupu D ako je za svaki $x \in D$ vrijednost $f(x) = f(-x)$ $[(f(x) = -f(x)]$. [4, str. 29] Na temelju grafa funkcije može se prepoznati je li funkcija parna ili neparna. Parna funkcija ima graf koji je simetričan s obzirom na y-os, dok neparna funkcja ima graf koji je centralno simetričan s obzirom na ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava

3.2.5. Kompozicija funkcija

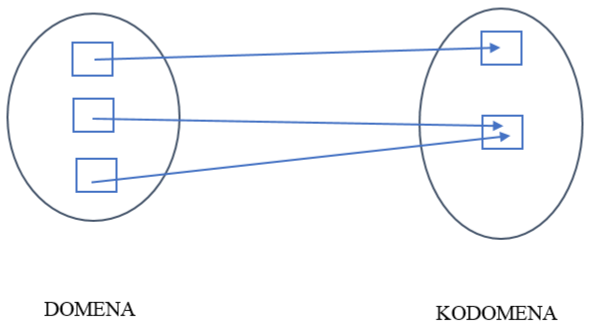
Neka su dane dvije funkcije, $f: A \to B$ i $g: C \to D$, i neka je $f(A) \subseteq C$. Za funkciju $g \circ f : A \to D$ definiranu sa $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, ∀ x ∈ A, kaže se da je kompozicija funkcija f i g. [4, str. 30]

3.2.6. Injekcija, surjekcija i bijekcija

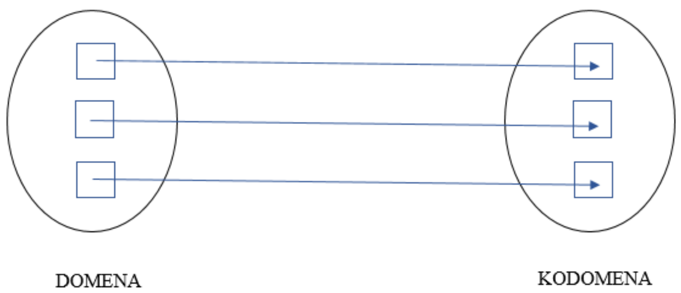
Je li funkcija injekcija, surjekcija ili bijekcija ovisi o njenom pravilu preslikavanja. Za fukciju $f: D \to K$ koja različite elemente domene D preslikava u različite elemente kodomene K kažemo da je injekcija skupa D u skup K. Funkcija je injekcija, slika 3.1., onda i samo onda ako je $(f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$. [1] Primjer funkcije koja nije injekcija je kvadratna funkcija $f(x) = x^2$. Ako je svaki element kodomene K slika barem jednog elementa iz domene D, tj. ako za svaki $y \in K$ postoji barem jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$, onda je funkcija surjekcija kao na slici 3.2. [4, str. 31 - 32] Funkcija je bijekcija, slika 3.3., ako je i injekcija i surjekcija, odnosno ako različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene i ako svaki element kodomene slika jednog elementa iz domene.



Slika 3.1. Injekcija



Slika 3.2. Surjekcija



Slika 3.3. Bijekcija

3.2.7. Inverz funkcije

Neka je $f\colon D \to K$ bijekcija. Tada postoji jedna i samo jedna bijekcja $g\colon K \to D$ takva da je $(f \circ g)(y) = y$ i $(g \circ f)(x) = x$ za svaki $y \in K$ i za svaki $x \in D$. Tu bijekciju označavamo s f^{-1} i nazivamo inverznom funkcijom od f ili inverzom od f. Ako funkcija f strogo raste na skupu D, onda i njena inverzna funkcija strogo raste na skupu K. Također, ako funkcija strogo pada na skupu D, onda njena inverzna funkcija strogo pada na skupu K. Graf funkcije i njene inverzne funkcije simetrični su s obzirom na pravac $y = x$, simetralu prvog i trećeg kvadranta. [4, str. 33 - 34]

3.3. Trigonometrijske funkcije

Osnovne elementarne funkcije su opća potencija, polinomi, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske i ciklometrijske funkcije. Prema [4, str. 34] elementarne funkcije su one funkcije koje se dobivaju iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija i konačnog broja kompozicija osnovnih elementarnih funkcija. Navedena i opisana svojstva funkcija objasnit će se na primjeru trigonometrijskih funkcija. Stari Egipćani, Babilonci, Indijci i Kinezi su bili vrlo vješti u praktičnoj geometriji te su koristili neke principe koji su bili začetak trigonometrije. Svoje znanje su koristili kako bi mjerili zemlju, udaljenost, promatrali nebo te gradili piramide. Babilonci su koristili seksagezimalni brojevni sustav, sustav s bazom 60, koji se i danas koristi za računanje mjera kutova, geografskih koordinata i vremena. Trigonometrijske funkcije su jako važne u primjenama matematike, posebno za opis sustava u kojima se pojavljuju oscilacije.

3.3.1. Definicija trigonometrijskih funkcija

Kako bi se definirale trigonometrijske funkcije, potrebno je početi od kružnice polumjera $r = 1$ sa središtem u ishodištu Kartezijevog koordinatnog sustava. Kružnica u točki (1,0) dodiruje brojevni pravac okomit na os apscisu. Brojevni pravac se namotaje na kružnicu tako da nuli odgovara točka (1,0). Realnom broju t odgovara točka $E(t)$ na toj kružnici. Za $t = 0$ vrijedi $E(0) = (1,0)$. Za $t = \pi$ vrijedi $E(\pi) = (-1,0)$. Ordinatu točke $E(t)$ označimo sa $sin(t)$, a apscisu sa $cos(t)$. Svakom realnom broju t pridružen je broj $sin(t)$, definirana je funkcija sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koju se zovesinus. Funkciju cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja realnom broju t pridružuje apscisu točke $E(t)$ naziva kosinus. Funkcije tangens i kotangens definirane su pomoću funkcija sinus i kosinus na sljedeći način: $tg\ t = sin(t)\ /\ cos(t)$, $ctg\ t = cos(t)/sin(t)$. Funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens su trigonometrijske funkcije. [6]

3.3.2. Domena i kodomena trigonometriskih funkcija

Budući da trigonometrijska kružnica ima polumjer $r = 1$, najmanja vrijednost i apscise i ordinate je -1, a najveća 1. Slika funkcija sinus i kosinus je segment [-1,1], odnosno funkcije sinus i kosinus preslikavaju skup realnih brojeva na segment [-1,1]. Budući da je tangens definiran pomoću funkcija sinus i kosinus, odnosno kao kvocijent sinusa i kosinusa, domena mu ovisi o kosinusu. Po definiciji racionalne funkcije vrijednost nazivnika mora biti različit od nule, stoga tangens nije definiran tamo gdje je kosinus kuta jednak nuli. Funkcija kosinus poprima vrijednost nula u točkama (0,1) i (0, -1), odnosno u vrijednostima kuta $(2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Za razliku od tangensa, kotangens je kvocijent kosinusa i sinusa te nije deifiniran za one kutove gdje je vrijednost sinusa jednaka nuli. Sinus je jednak nuli za mjeru kuta $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. U tablici 3.1. nalazi se pregled domena i kodomena trigonometrijskih funkcija.

Tablica 3.1. Domena i kodomena trigonometrijskih funkcija

Funkcija	Domena	Kodomena
Sinus	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
Kosinus	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
Tangens	$\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\frac{\pi}{2}:\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
Kotangens	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi:\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

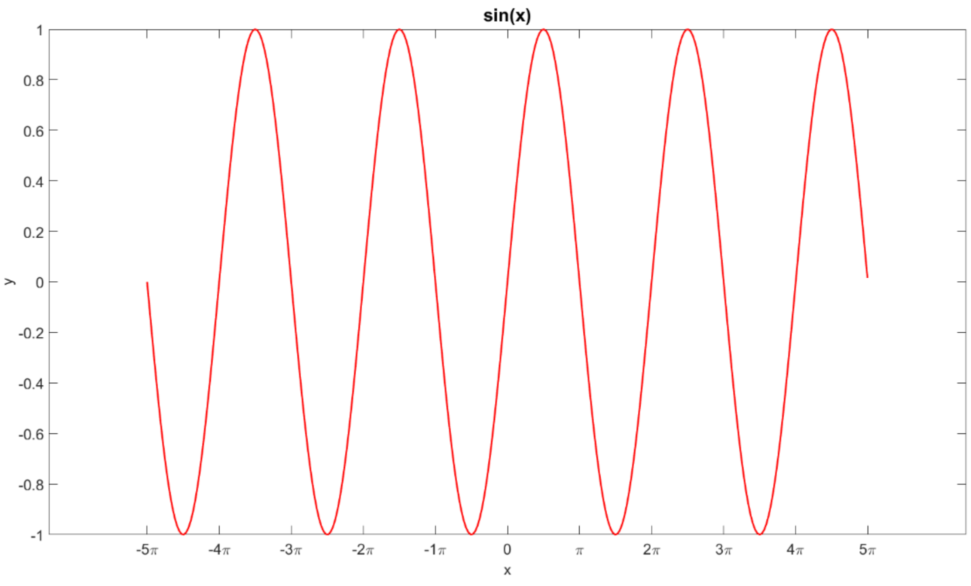
3.3.3. Periodičnost trigonometrijskih funkcija

Prema [4, str. 60] funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je periodična funkcija s periodom $\tau \neq 0$ ako vrijedi $(x \in D) \Rightarrow (x + \tau \in D)$ i $f(x+\tau) = f(x)$. Ako je T najmanji od svih takvih brojeva τ, onda je T osnovni period funkcije f.

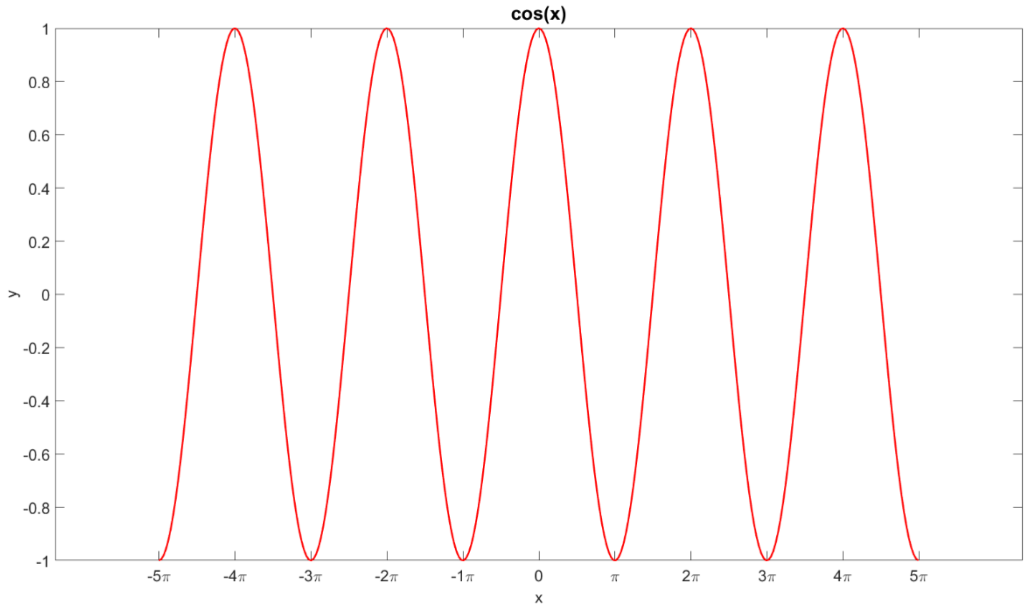
Svojstvo periodičnosti najčešće se i povezuje upravo s trigonometrisjkim funkcijama. Budući da je opseg jedinične kružnice pomoću koje su definirane trigonometrijske funkcije 2π, funkcije sinus i kosinus u $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, poprimaju istu vrijednost kao i u x, tj. vrijede jednakosti $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$ i $cos(x + 2k\pi) = cos(x)$. Kažemo da su sinus i kosinus periodične funkcije s temeljnim periodom $T = 2\pi$. Funkcije tangens i kotangens su periodične funkcije s temeljnim periodom $T = \pi$., dakle vrijede jednakosti $tg(x + k\pi) = tg(x)\ i\ ctg(x + k\pi) = ctg(x)$. [6]

3.3.4. Parnost trigonometrijskih funkcija

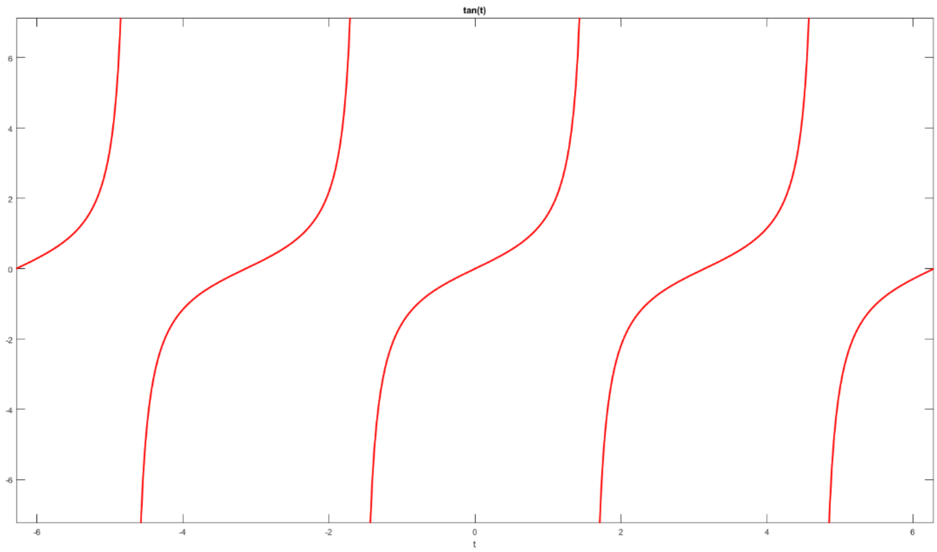
Kosinus je parna funkcija, a ostale trigonometrijske funkcije su neparne. Parnost kosinusa je vidljiva iz slike jedinične kružnice, pošto je kosinus apscisa točke E(t) te nije bitno je li točka x iz prvog ili $(-x)$ iz četvrtog kvadranta. Za kosinus vrijedi jednakost $cos(-x) = cos(x)$, dok za ostale trigonometrijske funkcje vrijedi $f(-x) = -f(x)$. Slike 3.4., 3.6. i 3.7. prikazuju grafove neparnih trigonometrijskih funkcija iz kojih je vidljivo da neparne funkcije imaju graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. Na slici 3.5. je graf funkcije kosinus koji je simetričan s obzirom na os ordinatu, a to je svojstvo grafova parnih funkcija.



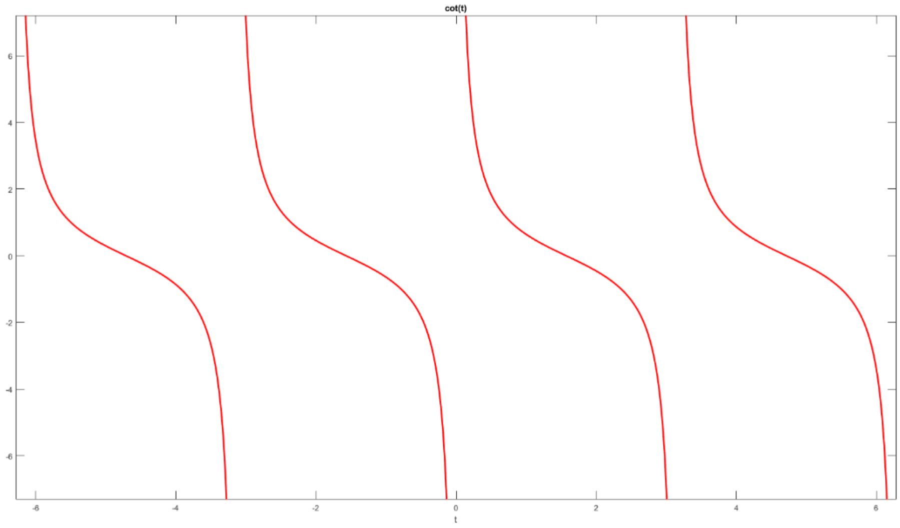
Slika 3.4. Graf funkcije $f(x) = sin\ x$



Slika 3.5. Graf funkcije $f(x) \; = \; cos\; x$



Slika 3.6. Graf funkcije $f(x) \; = \; tg\; x$



Slika 3.7. Graf funkcije $f(x) = \ ctg\ x$

3.3.5. Inverz trigonometrijskih funkcija

Pošto su trigonometrijske funkcije periodične, odnosno više elemenata iz skupa domene je preslikano u jedan element iz kodomene, onda nisu bijekcije. Budući da nisu bijekcije, ne mogu imati inverz. Ipak trigonometrijske funkcije imaju svoje inverzne funkcije koje se nazivaju ciklometrijske ili arkus funkcije. Kako bi se mogao definirati inverz funkcije koja nije bijekcija, potrebno je napraviti ograničenje, odnosno restrikciju. Funkciji $y\ =\ sin(x)$ možemo napraviti restrikciju domene tako da je promatramo samo na segmentu $[-\pi/2, \pi/2]$. Tako će funkcija $\sin^{-1} y$, koja se zove arkus sinus, za $y = -1$ poprimiti samo vrijednost $x = -\pi/2$, a za $y = 1$ samo vrijednost $x = \pi/2$. Restrikcija funkcije kosinus je interval $[0, \pi]$, što znači da će funkcija $\cos^{-1} y$, arkus kosinus, za $y = -1$ poprimiti samo vrijednost $x = \pi$, a za $y = 1$ samo vrijednost $x = 0$. Da bi se dobio inverz od funkcije tangens, arkus tangens, potrebno je napraviti restrikciju funkcije tangens na interval $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$. Restrikcija domene funkcije kotangens je interval $< 0, \pi >$, a inverzna funkcija se naziva arkus kotangens. [4, str. 66]

3.3.6. Specifičnost trigonometrijskih funkcija

Trigonometrijske funkcije su specifične po tome što se jedna može prikazati preko druge. Postoje brojni teoremi i formule koje to pokazuju. Adicijski teoremi raspisuju funkcije oblika $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $tg(a \pm b)$ i $ctg(a \pm b)$. Formule redukcije služe da bi se promijenio argument funkcije, odnosno da se dobije oblik bez konstante pa tako vrijedi npr.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$. Do formula redukcije se može doći promatrajući trigonometrijsku kružnicu. Formule dvostrukog $(2t)$ i polovičnog kuta $(t/2)$ omogućuju da se polovični i dvostruki kut zapištu pomoću kuta t. Pomoću univerzalne zamjene se svaka od trigonometrijskih funkcija može zapisati u obliku tangensa polovičnog kuta. Postoje još i formule transformacije umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj i zbroja u umnožak. Osnovni trigonometrijski identitet do kojeg se lako dolazi primjenom Pitagorinog poučka na trigonometrijsku kružnicu jest $sin^2 x + \ cos^2 x = 1$.

4. REDOVI

U ovome poglavlju definirat će se pojam reda i kriteriji ispitivanja konveregencije redova. Redovima se primjenjuju u različitim znanostima te se njima rješavaju različiti problemi, kao što su prikazivanje trenutne vrijednosti anuiteta, geometrija fraktala i periodična decimala.

4.1.Definicija reda

Da bi se definirao pojam reda, prvo je potrebno definirati pojam niza realnih brojeva. Niz je funkcija koja preslikava skup prirodnih brojeva ℕ u skup realnih brojeva ℝ. Niz se označava s (a_n) gdje a_n označava $n-ti$ ili opći član niza. [4, str. 76]

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Pomoću njegovih članova induktivno se definira niz parcijalnih suma (s_n):

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n$$

$s_n$predstavlja sumu prvih n članova niza (a_n). Redom realnih brojeva nazivamo uređeni par niza realnih brojeva $((a_n), (s_n))$ gdje je a_n opći član reda, a s_n njegova n-ta parcijalna suma. [4, str. 102] Ovisno o članovima, red može biti red brojeva, funkcija, matrica ili vektora.

Red može biti konvergentan ili divergentan. Red $((a_n), (s_n))$ je kovergentan ako je njegov niz parcijalnih suma (s_n) konvergentan. Vrijedi i obrnuto, odnosno red je divergentan ako je njegov niz parcijalnih suma (s_n) divergentan. [4, str. 102]

Ako postoji limes s = $\lim_{n\to\infty} s_n$ koji je ili konačan broj ili beskonačan, kaže se da je s suma ili zbroj reda i zapisuje se u obliku s = $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ista oznaka, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, upotrebljava se i za red, $((a_n), (s_n))$, i za sumu reda, s. [4, str. 102]

4.2. Kriteriji ispitivanja konvergencije redova

Konvergencija u matematici znači približavanje određenoj vrijednosti. Sumu reda u većini praktičnih slučajevima nije moguće odrediti, no ako se zna da je red konvergentan, u praksi se može koristiti i aproksimacija sume reda. [4, str. 105] Postoji nekoliko osnovnih kriterija za ispitivanje konvergencije redova.

4.2.1. Nužan uvjet konvergencije reda

Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ne možemo zaključiti da je red konvergentan. Nužan uvjet nije i dovoljan uvjet da bi red konvergirao, međutim ako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nije jednak nuli, onda je red divergentan. Primjer reda koji pokazuje da nužan uvjet konvergencije nije i dovoljan je harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ kojemu je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ali je red divergentan. [4, str. 105]

4.2.2. Poredbeni kriterij

Da bi se koristio poredbeni kriterij, red treba imati nenegativne članove. Za red $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaže se da je red s nenegativnim članovima ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Takvi redovi imaju svojstvo da im je odgovarajući niz parcijalnih suma monotono rastući. Red s nenegativnim članovima je konvergentan onda i samo onda ako je njegov niz parcijalnih suma ograničen odozgo. Ako je red konvergentan, onda je njegov niz parcijalnih suma konvergentan. Ako je niz parcijalnih suma omeđen, tada je zbog monotonosti i konvergentan. [4, str. 105]

Za primjenu poredbenog kriterija potrebno je promatrati dva reda, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bilo koja dva reda s nenegativnim članovima i neka postoji realan broj $c > 0$ i prirodan broj n_0 takvi da vrijedi $a_n \leq c * b_n$ gdje je $n \geq n_0$. Tada vrijedi:

a) Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan, onda je i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.
b) Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan, onda je i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentan. [4, str. 107]

Poredbeni kriterij u formi limesa glasi ovako:

Neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \geq 0$. Tada vrijedi sljedeće:

a) Za $c > 0$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda i samo onda ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.
b) Ako je $c = 0$ i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
c) Ako je $c = 0$ i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira. [4, str. 108]

4.2.3. D'Alembertov kriterij

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$red s pozitivnim članovima.

a) Ako postoje prirodan broj n_0i realan broj q > 1 takvi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \ (n > n_0)$ onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.
b) Ako postoji prirodan broj n_0 takav da je je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \ (n \geq n_0)$, onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan. [4, str. 109]

D' Alembertov kriterij u formi limesa glasi ovako:
Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitinim članovima. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan za $L < 1$ i divergentan za $L > 1$. Ako je $L = 1$, onda nema odluke te se treba primijeniti neki drugi kriterij. [4, str. 110]

D' Alembertov kriterij se koristi kada se u zapisu reda nalazi faktorijel te nekad kada se u zapisu nalazi polinom ili polinom i potencija. Primjeri takvih redova su: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.

4.2.4. Raabeov kriterij

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} (n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)) = L$, tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan za $L > 1$, divergentan za $L < 1$. Ako je $L = 1$, onda nema odluke te se treba primijeniti neki drugi kriterij. [7] Raabeov kriterij se često koristi kada nema odluke nakon korištenja D' Alembertovog kriterija. Raabev kriterij se koristi kada su u zapisu reda polinomi, a primjer takvog reda je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

4.2.5. Cauchyjev kriterij

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$red s nenegativnim članovima.

a) Ako postoje prirodan broj n_0 i realan broj q < 1 takav da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za svaki $n > n_0$, onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.

b) Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa n, onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan. [4, str. 111]

Cauchyjev kriterij u formi limesa:
Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima. Ako postoji $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$. Ako je $L = 1$, onda nema odluke. [4, str. 111]

Cauchyjev kriterij se koristi kada red ima oblik potencije, kao što su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{n+2}\right)^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$. Kada se odluka može donijeti pomoću graničnog d' Alambertovog kriterija, onda se takva odluka može donijeti i na temelju Cauchyjeva kriterija. Međutim, obrnuto ne vrijedi. U tom je smislu Cauchyjev kriterij „jači“ od d' Alembertovog, ali je nekad praktičnije koristiti d' Alembertov kriterij. [10, str. 80]

4.2.6. Leibnizov kriterij

Leibnizov kriterij za ispitivanje konvergencije koristi se kod alterniranih ili alternirajućih redova. Red red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest alternirajući red ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0, a_{2n} \leq 0$ ili $a_{2n-1} \leq 0,\ a_{2n} \geq 0$. [4, str. 113]

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirajući red. Ako niz realnih brojeva $(|a_n|)$ pada i konvergira nuli, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira nekom realnom broju a za koji vrijedi:

a) Ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0$ i $a_{2n} \leq 0$, onda je $a_2 \leq a \leq a_1$.

b) Ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \leq 0$ i $a_{2n} \geq 0$, onda je $a_1 \leq a \leq a_2$. [4, str. 113]

4.2.7. Apsolutno i uvjetno konvergentni redovi

Niz parcijalnih suma redova s nenegativnim članovima je rastući niz, stoga je za konvergenciju takvih redova dovoljno pokazati omeđenost niza. Ako se promatra red čiji svi članovi nisu pozitivni niti su svi članovi negativni, situacija se komplicira. Ako među članovima reda postoji samo konačno mnogo negativnih [pozitivnih] članova, takav red se može smatrati redom s pozitivnim [negativnim] članovima, jer su počevši od nekog svi njegovi članovi pozitivni [negativni]. Redovi s nenegativnim članovima mogu poslužiti za ispitivanje konvergencije redova s članovima bilo kakvog predznaka. Neka je zadan red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ koji ima beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo negativnih članova. Uz svaki takav red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ povezuje se red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ čiji su svi članovi jednaki apsolutnim vrijednostima članova zadanog reda. [8, str. 82] Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je apsolutno konvergentan ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentan. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je uvjetno konvergentan ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergentan. [4, str. 115]

5. FOURIEROVI REDOVI

Fourierovi redovi su funkcijski redovi koji služe kao alat za proučavanje signala, titranja, rezonancije i različitih pojava iz područja fizike i primjenjene matematike. Fourierov red može imati trigonometrijski i kompleksni oblik. Također, postoji i Fourierov red funkcije dviju varijabli, Fourierov integral i Fourierova transformacija, no ovaj rad se bavi trigonometrijskim Fourierovim redom. Rješavajući probleme iz područja fizike, Fourier je doprinio i razvoju matematike.

5.1. J. B. Fourier

Jean Baptiste Fourier, francuski matematičar i fizičar, rođen je 1768. u Auxerreu i najpoznatiji je po razvoju Fourierovog reda koji se na kraju razvio u Fourierovu analizu i harmonijsku analizu te njihove primjene na probleme prijenosa topline i vibracija. Fourierov zakon prijenosa topline i Fourierova transformacija dobili su ime njemu u čast. Fourier je zaslužan i za otkriće efekta staklenika. Budući da je rano ostao bez roditelja, odrastao je u samostanu Sv. Marka u Auxerreu gdje je kasnije i studirao te radio kao učitelj matematike. Kasnije je pohađao školu za učitelje Ecole Polytechnique te je imao jako dobre odnose s Lagrangeom, Laplaceom i Mongeom s kojima je započeo daljnja matematička istraživanja. 1798. godine dospio je u Napoleonov znanstveni tim za egipatsku ekspediciju. Tijekom Fourierova boravka u Grenoblu, gdje je obavljao razne zadatke za Napoleona, nastala je njegova važna teorija o provođenju topline u krutim tijelima, koja obuhvaća raspodjelu temperature u sinusoidnim komponentama. Teorija je izašla u 1807., a među znanstvenicima je izazvala snažnu polemiku. Na egipatskoj ekspediciji bio je i britanski optičar Thomas Young koji je kasnije koristio Fourierovu analizu u optičke svrhe. Fourier je optičke probleme povezao s problemom protoka topline u krutim tijelima te je tvrdio da se parne funkcije mogu predstaviti pomoću jednostavnog analitičkog izraza, a kasnije je dokazano da je to bila važna ideja za mnoga daljnja otkrića u matematici i inženjerstvu. Fourier 1817. postaje član Akademije znanosti, a kasnije i ministar Akademije. 1822. Akademija objavljuje Fourierovo djelo *Analitička teorija topline* u kojem je razvio teoriju provođenja topline i tako pridonio razvoju parnih motora, formulirao je osnovni zakon provođenja topline te je postavio osnovu Fourierove metode za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Za neperiodične funkcije koje se mogu integrirati uveo je Fourierov integral koji ima sličan zadatak kao Fourierov red za periodične funkcije. Teoriju funkcija obogatio je Fourierovom transformacijom. Umro je 1830. godine u Parizu. [9]

5.2. Trigonometrijski Fourierov red

Za nastanak i razvoj Fourierovog reda najvažnije svojstvo trigonometrijskih funkcija bila je periodičnost. Za periodične funkcije vrijedi izraz (5-1).

Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična funkcija s periodom T i integrabilna na segmentu $[0, T]$, onda vrijedi

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\, dx = \int_{0}^{T} f(x)\, dx \qquad (5-1)$$

za svaki $a \in \mathbb{R}$. [10, str. 2]

Izraz (5 – 1) dokazan je izrazom (5-2). [10, str. 2]

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\, dx = \int_{a}^{T} f(x)\, dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\, dx = \int_{a}^{T} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x+T)\, dx$$

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\, dx = \int_{0}^{T} f(x)\, dx \qquad (5-2)$$

5.2.1. Definicija trigonometrijskog reda

Osnovni oblik sinusne funkcije glasi

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) \qquad (5-3)$$

gdje je:

- A - amplituda
- ω – kružna frekvencija ili kutna brzina za koju vrijedi jednakost $\omega = \frac{2\pi}{T}$, gdje je T period funkcije za koji vrijedi jednakost $f = \frac{1}{T}$
- φ - fazni kut ili fazni pomak, a pomak je kvocijent faznog pomaka i kutne brzine $\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)$. [10, str. 2]

Prema [10, str. 2] funkcija (5 - 4)

$$y_k = A_k \sin(k\omega x + \varphi_k) \qquad (5-4)$$

zove se k-ti harmonik od funkcije (5 - 3) i vrijedi $T = kT_k$. T je period svakog harmonika, tako da je suma (5 - 5)

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right) \qquad (5-5)$$

periodička funkcija s periodom T koja se zove trigonometrijski polinom gdje je A_0 realna konstanta, odnosno u elektrotehnici istosmjerna komponenta, dobivena kada je $k = 0$.
Suma reda izgleda slično i glasi ovako

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right) \qquad (5-6)$$

Prema [10, str. 2 – 3] ako se na k-ti harmonik (5 - 4) primjeni adicijska formula za sinus dobije se sljedeći izraz

$$A_k \sin(\frac{2k\pi}{T} x + \varphi_k) = A_k \, sin \, \varphi_k \cos\frac{2k\pi}{T} x + A_k \cos \varphi_k \, \sin\frac{2k\pi}{T} x \qquad (5-7)$$

kojemu se uvede supstitucija $a_k = A_k \, sin \, \varphi_k \; i \; b_k = A_k \cos \varphi_k$ te onda izraz (5 – 7) glasi ovako

$$A_k \sin(\frac{2k\pi}{T} x + \varphi_k) = a_k \cos\frac{2k\pi}{T} x + b_k \sin\frac{2k\pi}{T} x \qquad (5-8)$$

Uvede se oznaka $a_0 = 2A_0$ te se odabere period $T = 2\pi$ i dobiju se najjednostavniji oblici trigonometrijskog polinoma (5 -5) i sume reda (5 -6) koji sada glase ovako

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (5-9)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (5-10)$$

Izrazi (5-6), odnosno (5 - 10), zove se trigonometrisjki red, a izraz (5 -5), odnosno izraz (5 -9), njegova (N+1) - ta parcijalna suma. Ako neku funkciju možemo prikazati u obliku takvoga reda, onda se kaže da je funkcija razvijena u trigonometrijski red. [10, str. 3] U nastavku rada izvest će se formule za računanje članova a_0, a_k i b_k koji se nazivaju Fourierovim koeficijentima.

5.2.2. Osnovni trigonometrijski sustav

Na izraz (5 - 10) može se gledati kao na razvoj funkcije f po funkcijama 1/2, cos x, sin x, cos 2x, sin 2x, ... Takav niz funkcija zove se osnovni trigonometrijski sustav. [10, str. 3]

Prema [10, str. 3] osnovni trigonometriski sustav je ortogonalan na segmentu $[-\pi, \pi]$, tj. integral produkta bilo kojih dviju različitih funkcija je nula, dok je integral kvadrata svake funkcije različit od nule te vrijede sljedeće jednakosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos kx \, dx = 0 \qquad (5-11)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin kx \, dx = 0 \qquad (5-12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \; dx = 0\,, k \neq n \qquad (5-13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \; dx = 0\,, k \neq n \qquad (5-14)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \; dx = 0, \; k \neq n \qquad (5-15)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx \, dx = \pi\,, k = n \qquad (5-16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin^2nx\,dx = \pi\,, k = n \qquad (5-17)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \qquad (5-18)$$

Jednakosti (5 – 11) – (5 – 18) lako se dokazuju. Pošto se k kreće od 1 do ∞, nije potrebno naglašavati da jednakosti vrijede ako je $k \neq 0$.

5.2.3. Fourierovi koeficijenti

Prema [10, str. 4] koeficijent a_0 dobije se integriranjem reda (5 - 10) „član po član" uz primjenu jednakosti (5 – 11) i (5 -12) te pravila za integriranja zbroja, konstante i sume, a postupak izgleda ovako

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_{k\sin kx})\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx\,\,dx + \,+ \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx\,\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\,(\pi + \pi)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi$$

Konačni izraz za koeficijent a_0 glasi:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (5-19)$$

Prema [10, str. 4] da bi se dobio koeficijent a_k, potrebno je pomnožiti izraz (5 -10) s $\cos nx$, a zatim integrirati „član po član" primjenjujući jednakosti (5- 11), (5 -13), (5 - 15) i (5 - 16). Postupak izgleda ovako:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx\ dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx + b_k\ \sin kx)\cos nx\ dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx\ dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_k\cos kx\cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k\sin kx\cos nx\,dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 + a_k\pi + 0$$

Konačni izraz za koeficijent a_k glasi

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (5-20)$$

Iste jednakosti se primjenjuju i za dobivanje koeficijenata a_ki b_k, samo što je za dobivanje koeficijenta b_k izraz (5 - 10) potrebno prvo pomnožiti sa $\sin nx$. [10, str. 4] Postupak izgleda ovako:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin nx\ dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx + b_k\ \sin kx)\sin nx\ dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin nx\ dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_k\cos kx\sin nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k\sin kx\sin nx\,dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 + 0 + b_k\pi$$

Konačni izraz za koeficijent b_k glasi

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \qquad (5-21)$$

Koeficijenti a_0, a_k i b_k zovu se Fourierovi koeficijenti, a red (5 - 10) zove se Fourierov red od funkcije f. Ako je funkcija f parna, Fourierov red ne sadrži sinusne članove te onda vrijedi izraz (5 - 22). Ako je funkcija f neparna, Fourierov red ne sadrži kosinusne članove te onda vrijedi izraz (5 - 23). [10, str. 5]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \qquad (5-22)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \qquad (5-23)$$

Funkcija ne mora biti definirana na segmentu $[-\pi, \pi]$, stoga je potrebno dobivene formule za Fourierov red i Fourierove koeficijente poopćiti na segment $[-L, L]$ duljine 2π. Da bi se to postiglo, prema [11, str. 6] potrebno je poći od izraza (5 – 24).

Neka je funkcija $f$periodična funkcija s temeljim periodom 2π, a c bilo koji realni broj. Tada vrijedi jednakost:

$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \qquad (5-24)$$

Da bi se dokazala jednakost (5 - 24), potrebno je prvo uvesti supstituciju $t = x + 2\pi$. [11] Nakon uvođenja supstitucije, mijenjaju se i granice određenog integrala te se primjenjuje pravilo za periodične funkcije:

$$\int_{-\pi}^{-\pi+c} f(x) \, dx = \int_{\pi}^{\pi+c} f(t-2\pi) dt = \int_{\pi}^{\pi+c} f(t) \, dt \qquad (5-25)$$

Ako se pretpostavi da je $c \geq 0$ te se primjeni prethodna jednakost (5 – 25), dobije se sljedeće:

$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} f(x) \, dx = \int_{-\pi+c}^{-\pi} f(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi+c} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi+c} f(x) \, dx - \int_{-\pi}^{-\pi+c} f(x) \, dx$$

$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi+c} f(x)\,dx - \int_{\pi}^{\pi+c} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (5-26)$$

Iz izraza (5 – 26) može se zaključiti da formule za računanje Fourierovih koeficijenata vrijede za bilo koji interval duljine 2π.

5.2.4. Fourierov red za simetrični interval [-L, L]

Funkcija ne mora biti razvijena u Fourierov red samo u intervalu duljine 2π, već se može razviti i u bilo kojem simetričnom intervalu oblika $[-L, L]$ gdje je $L > 0$. No, za to je potrebno prevesti segment $[-\pi, \pi]$ na segment $[-L, L]$.

Neka je funkcija f zadana na segmentu $[-L, L]$ te ima temeljni period $2L$. Neka je z: $[-\pi, \pi] \rightarrow [-L, L]$ linerarna funkcija oblika $z = ax + b$ za koju vrijedi $z(\pi) = L\ i\ z(-\pi) = -L$. Funkcija g: $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$ definirana je kao kompozicija funkcija f i z, $g = f \circ z$. [11, str. 7]
Ako se u funkciju $z(x)$ uvrsti $x = \pi$ i $x = -\pi$, dobije se sustav jednadžbi iz kojeg se mogu izračunati koeficijenti a i b:

$$-a\pi + b = -L$$
$$a\pi + b = L \qquad (5-27)$$

Iz izraza (5 – 27) slijedi $b = 0$ i $a = \frac{L}{\pi}$ pa funkcija $z(x)$ glasi $z(x) = \frac{Lx}{\pi}$. Sada je potrebno izračunati Fourierove koeficijente za funkciju $g(x)$. Da bi se dobio izraz za koeficijent a_0, potrebno je uvesti supstituciju $z(x) = t$ te zbog toga promijeniti granice određenog integrala i primijeniti pravilo za promjenu diferencijala dt = $z'(x)dx$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f \circ z)(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(z(x)\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f\,(t)\,\frac{\pi}{L}dt$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\,(t)\,dt \qquad (5-28)$$

Ista supstitucija uvodi se i za izračun koeficijenta a_k, samo što je potrebno još primijeniti supstituciju na argument funkcije kosinus ($x = \frac{\pi}{L}t$), a postupak izgleda ovako:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ z)(x) \cos(kx)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(z(x)\right) \cos(kx)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \frac{\pi}{L} dt$$

Konačno rješenje za koeficijent a_k glasi:

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) dt \qquad (5-29)$$

Isti postupak je i za Fourierov koeficijent b_k, samo što se tu radi o argumentu funkcije sinus.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx)\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ z)(x) \sin(kx)\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(z(x)\right) \sin(kx)\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \frac{\pi}{L} dt$$

Konačno rješenje za b_k ima ovaj oblik:

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f\,(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\, dt \qquad (5-30)$$

Budući da je funkcija z ovisna o varijabli x, a vrijedi $f(t) = g(x)$ i $t = z(x)$, dobije se sljedeći izraz:

$$f(t) = g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + \, b_k \, \sin kx)$$

$$f(t) = \; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) + \, b_k \, \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \qquad (5-31)$$

Prema [11, str. 8 – 9] ako se u izrazu (5 – 31) promijeni naziv varijable funkcije f iz t u x, tada vrijedi za Fourierov red sljedeće

$$f(x) \sim \; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + \, b_k \, \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)) \qquad (5-32)$$

a za Fourierove koeficijente

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f\,(x)\, dx \qquad (5-33)$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f\,(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\, dx \qquad (5-34)$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f\,(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\, dx. \qquad (5-35)$$

5.2.5. Fourierov red za segment [a, b]

Funkcija f nije uvijek definirana na simetričnom segmentu $[-L, L]$, već može biti definirana i na segmentu oblika $[a, b]$. Takav slučaj se naziva periodičko proširenje F funkcije f, a definirano je kao $T = b - a$. [10, str. 6] Sada je potrebno prevesti segment $[-\pi, \pi]$ na segment $[a, b]$.

Neka je h linearna funkcija koja glasi $h = \frac{b-a}{2\pi}x + \frac{a+b}{2}$. Funkcija $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definirana je kao kompozicija funkcija f i h. $h(x)$ se zamijeni supstitucijom t, gdje je $dx = \frac{b-a}{2\pi}dt$, te se izračunaju nove granice određenog integrala da bi se dobio izraz (5 – 36) za koeficijent a_0. [10, str. 6]

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\big(h(x)\big)dx = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)dt \qquad (5-36)$$

Za koeficijente a_k i b_k potrebno je izraziti x iz supstitucije $t = \frac{b-a}{2\pi}x + \frac{a+b}{2}$, no zbog jednostavnosti se zanemaruje slobodni član $\frac{a+b}{2}$ te onda vrijedi jednakost $x = \frac{2\pi}{b-a}t$. Prema [10, str. 6] jednadžbe Fourierovih koeficijenata a_k i b_k dobiju sljedeće oblike:

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)\cos\left(\frac{2k\pi t}{b-a}\right) dt \qquad (5-37)$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)\sin\left(\frac{2k\pi t}{b-a}\right) dt \qquad (5-38)$$

Kao i u slučaju gdje se segment $[-\pi, \pi]$ prevodio na segment $[-L, L]$, varijabla t se prema [10, str. 6] preimenuje u varijablu x te se dobiju sljedeće jednadžbe za Fourierov red i koeficijente:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{2k\pi x}{b-a} + b_k\sin\frac{2k\pi x}{b-a}) \qquad (5-39)$$

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (5-40)$$

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{2k\pi x}{b-a}dx \qquad (5-41)$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2k\pi x}{b-a}dx \qquad (5-42)$$

5.3. Postojanje i konvergencija Fourierovog reda

Matematičku strogost Fourierovom redu dao je njemački matematičar Dirichlet tako što je dao dovoljne uvjete uz koje se funkcija može prikazati pomoću Fourierovog reda. Ako funkcija zadovoljava Dirichletove uvjete, onda se može odrediti i konvergencija njenog Fourierovog reda.

5.3.1. Dirichletovi uvjeti

Funkcija $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ je po dijelovima neprekinuta na intervalu $[a, b]$ ako je f neprekinuta na $[a, b]$ ili ima na tom intervalu samo konačno mnogo prekida. U tom slučaju postoje točke a $= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ takve da je f neprekinuta na intervalima $(x_{i-1}, x_i), i = 1, \dots, n$. Ako u djelišnim točkama postoje i konačni su jednostrani limesi $f(a+0), f(x_i \pm 0), f(b-0), i = 1, \dots, n-1$, onda se prekidi zovu prekidima prve vrste. Ako su svi prekidi funkcije f prve vrste, tada je po dijelovima neprekinuta funkcija ograničena na $[a, b]$ jer se na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ može proširiti do neprekinute funkcije. Takva funkcija je apsolutno integrabilna na $[a, b]$, odnosno postoji integral $\int_a^b |f(x)|\, dx$ koji je i konačan. [1]

Funkcija je po dijelovima glatka ako postoji rastav intervala a $= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ takav da je f neprekinuto diferencijabilna na svim intervalima (x_{i-1}, x_i). Jednostrani limesi $f'(x_i \pm 0)$ ne moraju biti konačni. [12]

Prema [12] Dirichletovi uvjeti su zadovoljeni na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi:

- f je po dijelovima neprekinuta funkcija i njezini su prekidi prve vrste
- f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

5.3.2. Konvergencija Fourierovog reda

Općenito se ne mogu izjednačiti polazna funkcija $f(x)$ i suma reda $S(x)$. Postavlja se pitanje kada dobiveni red predstavlja polaznu funkciju.

Ako je $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima glatka funkcija, onda njen Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \epsilon [-\pi, \pi]$ te za sumu reda vrijede sljedeće tvrdnje:

- $S(x) = f(x)$, pod uvjetom da je funkcija f neprekidna u točki x;
- $S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, ako je $x \ \epsilon < -\pi, \pi >$ točka prekida;
- $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$. [10, str. 8]

5.4.Primjena Fourierovog reda

J. B. Fourieru je „stvorio“ Fourierov red kako bi riješio toplinsku jednadžbu, a kasnije se došlo do zaključka da se ista metoda može primijeniti na široko područje matematičkih problema i problema iz fizike. Samo neka od područja u kojima se koristi Fourierov red su elektrotehnika, akustika, optika, analiza oscilacija, obrada signala, obrada slike. Njime se rješavaju problemi u elektromagnetizmu, statici, komunikciji, kvantnoj mehanici itd. Fourierov red olakšava brojne izračune jer se periodični signali mogu prikazati koristeći samo harmonike sinusa i kosinusa. Za neperiodične funkcije koristi se Fourierova transformacija. U aproksimacijskoj teoriji Fourierov red se koristi kako bi se funkcija zapisala kao trigonometrijski polinom. U kontrolnoj teoriji uloga Fourierovog reda je predviđanje kako će se rješenje neke diferencijalne jednadžbe ponašati, odnosno predviđanje dinamike sustava. Također, Fourierov red se koristi i za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi višeg stupnja metodom separacije varijabli. [13]

Mnoge promatrane pojave u elektrotehnici, kao što su izmjenična struja i napon, su periodične. Fourierov red služi kako bi se trokutasti, kvadratni, pilasti i ostali često korišteni signali u elektronici i elekrotehnici zapisali pomoću funkcija sinus i kosinus. Ako želimo promatrati izlaz strujnoga kruga kojemu je izvor periodični signal, a strujni krug sadrži i zavojnice i kondenzatore, jednadžbe koje opisuju sustav će sadržavati integralne i derivacijske članove. Kada se ne bi koristio Fourierov red, integriranje i deriviranje složenog oblika signala bi bilo jako teško. Korištenjem Fourierovog reda potrebno je derivirati i integrirati trigonometrijske funkcije, a ti postupci se često svode na tablične integrale i derivacije.

U analizi signala i sustava Fourierove metode su jedan od najkorisnijih alata. Zadaća signalne analize je eliminacija visokofrekventnih zvukova, a to se postiže raspisom funkcije u Fourierov red tako da visokofrekventni koeficijenti a_k i b_k za velike vrijednosti k budu što bliži nuli. [11, str. 26]

5.5. Primjeri raspisa funkcija u Fourierov red

Zadane su tri funkcije te su za njih izračunati Fourierovi koeficijenti i Fourierov red. Napisan je i postupak računanja.

5.5.1. Primjer 1

$$f(x) = \begin{cases} -E, & za\ x \in [-L, 0\rangle \\ E, & za\ x \in [0,\ L] \end{cases} \qquad (5-43)$$

Funkcija $(5-43)$ je neparna funkcija, a to znači da su koeficijenti a_0 i a_k nula te Fourierov red ima samo sinusne članove. U ovome primjeru je naveden postupak računanja koeficijenata a_0 prema izrazu (5 – 33) i a_k prema izrazu (5 – 34) kako bi se pokazalo da su jednaki nuli.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{E}{L}\left(\int_{-L}^{0} -1\,dx + \int_{O}^{L} dx\right) = \frac{E}{L}\left((-x)\Big|_{-L}^{0} + x\Big|_{0}^{L}\right)$$

$$a_0 = \frac{E}{L}\,(0 - L + L + 0) = 0$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{E}{L}\left(\int_{-L}^{0} -1\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx + \int_{O}^{L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\right)$$

$$a_k = \frac{E}{k\pi}\left(-1\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Big|_{-L}^{0} + \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Big|_{0}^{L}\right) = \frac{E}{k\pi}(0 - 0 + 0 - 0) = 0$$

Koeficijent b_k dobiven je koristeći formulu (5 – 35).

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{E}{L}\left(\int_{-L}^{0} -1\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx + \int_{O}^{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\right) = \frac{E}{k\pi}$$

$$b_k = \frac{E}{L}\left(cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Big|_{-L}^{0} - cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Big|_{0}^{L}\right)(1 - \cos k\pi - \cos k\pi + 1)$$

$$b_k = \frac{2E}{k\pi}(1-(-1)^k)$$

Konačan oblik Fourierovog reda je zapisan prema izrazu (5 – 32).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right))$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(1-(-1)^k)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right)$$

5.5.2. Primjer 2

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{x}, & za\ x \in \langle -\pi, \pi\rangle \\ 0, & za\ x = -\pi,\ x = \pi \end{cases} \qquad (5-44)$$

Funkcija (5 – 44) je neparna, stoga treba izračunati samo koeficijent b_k prema izrazu (5 – 21), dok su članovi a_0 i a_k jednaki nuli, a to se može provjeriti pomoću izraza (5 -19) i (5 – 20).

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,(x)\sin kx\ dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin kx\,dx\right)$$

Integral $\int x\sin kx\,dx$ rješava se postupkom parcijalne integracije, izraz (5 – 45), gdje je $u = x, dv = \sin kx\,dx, du = dx,\ v = -\frac{1}{k}\cos kx$.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (5-45)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{k}x\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{k}x\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$b_k = \frac{-2}{k}\cos kx = \frac{2}{k}\ (-1)(-1)^k = \frac{2}{k}$$

Konačan izgled Fourierovog reda dobije se uvrštavanjem izračunatog koeficijenta b_k u izraz (5 – 23).

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

$$f(x) = 2(sinx - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots)$$

5.5.3. Primjer 3

Funkcija $f(x) = x^2$ definirana je na segmentu $[-\pi, \pi]$. Funkcija je parna, stoga je koeficijent b_k jednak nuli, a to se može provjeriti primjenom izraza (5 – 21). Koeficijent a_0 izračuna se prema formuli (5 – 19), a koeficijent a_k prema formuli (5 – 20).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx$$

Za rješavanje integrala $\int x^2 \cos kx \, dx$ potrebno je prvo uvesti supstituciju $t = kx$, a zatim dva puta primi

jeniti metodu parcijalne integracije (5 – 45). U prvoj parcijalnoj integraciji $u = t^2$, $dv = \cos t \, dt$, $du = 2t \, dt, v = \sin t$. U drugoj parcijalnoj integraciji $u = t$, $dv = \sin t \, dt$, $du = dt, v = -\cos t$.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^3}(k^2x^2 \sin kx + 2\, kx \cos kx - 2 \sin kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{k^2}\cos kx = \frac{4}{k^2}(-1)^k$$

Funkcija $f(x) = x^2$ raspisana u Fourierov red prema izrazu (5 – 23) glasi ovako:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 4x + \cdots)$$

6. APROKSIMACIJA SIGNALA FOURIEROVIM REDOM

U elektronskim uređajima su često potrebni i drugi oblici valova osim sinusnih, ali s nekim oblicima signala je teško dalje računati, stoga ih je potrebno aproksimirati. Periodične signale je moguće aproksimirati Fourierovim redom. U ovome odlomku će se nekoliko tipičnih oblika signala prikazati i aproksimirati Fourierovim redom koristeći MATLAB.

6.1.1. MATLAB

MATLAB (MATrix LABoratory) je i okruženje i programski jezik visokih performansi. To je moderno programsko okruženje koje podržava objektno-orijentirano programiranje, a svi se podaci prikazuju u obliku matrica te se kaže da je to matrično-orijentiran jezik. MATLAB služi za računanje, vizualizaciju i programiranje, a svoju primjenu ima u obrazovanju i u industriji. Alati za specifične primjene se nalaze u paketima koji se na engleskom nazivaju *toolbox*. Pomoću takvih paketa u MATLAB je moguće koristiti za duboko strojno učenje, robotiku, računalni vid, upravljanje sustavima i obradu signala. [14]

6.1.1. Korištene naredbe u MATLAB-u

MathWorks nudi probnu inačicu MATLAB-a, a brojna sveučilišta imaju licencu za korištenje. U ovome radu signali su definirani i aprokisimirani u inačici MATLAB R2018a. Niz naredbi koje se žele zajedno izvršavati može se napisati u skriptu, datoteku s ekstenzijom .m.

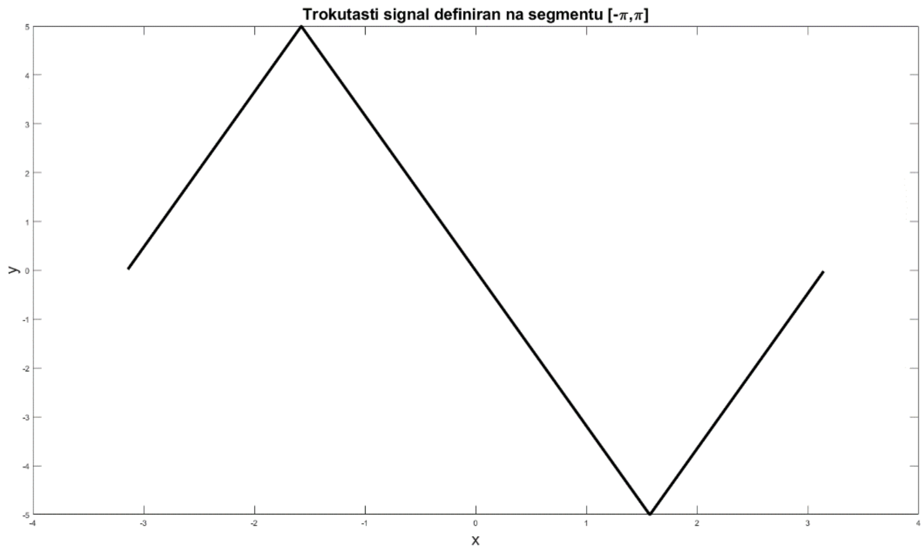
Naredbom *figure* otvara se novi prozor u kojem će se prikazati grafovi. Da bi se dobio graf, koristi se naredba *plot* kojoj se predaju apscisa i ordinata, a mogu se još predati i razni parametri kao što je boja grafa, debljina linije, vrsta linija i mnogi drugi. U skripti iz priloga korištena je naredba *plot (x,y,'-k', 'LineWidth',2)* što znači da će graf biti crne boje *(k)*, crta će biti puna *(-)*, a debljina crte će biti 2 točke. Kako bi se crtanjem grafova koji prikazuju Fourierov red zadržao graf koji prikazuje signal, potrebno je koristiti naredbu *hold on.* U aproksimaciji signala će se k kretati od 1 do *m*, a kako bi se dobili grafovi različitih boja koristi se naredba *jet(m)* koja vraća mapu od m boja. Da bi graf bio pregledniji, potrebno je imenovati osi x i y, a to se postiže naredbama *xlabel('Naslov x-osi')* i *ylabel('Naslov y-osi')*, a cijeli graf se imenuje naredbom *title('Naslov').*

Sumiranje (naredba *sum*) je iterativni postupak, što znači da je potrebno koristiti petlju. U MATLAB-u se petlja ostvaruje pomoću naredbi *for indeks = početna vrijednost : krajnja vrijednost* i *end* unutar kojih se nalazi kod koji će se ponavljati u petlji.

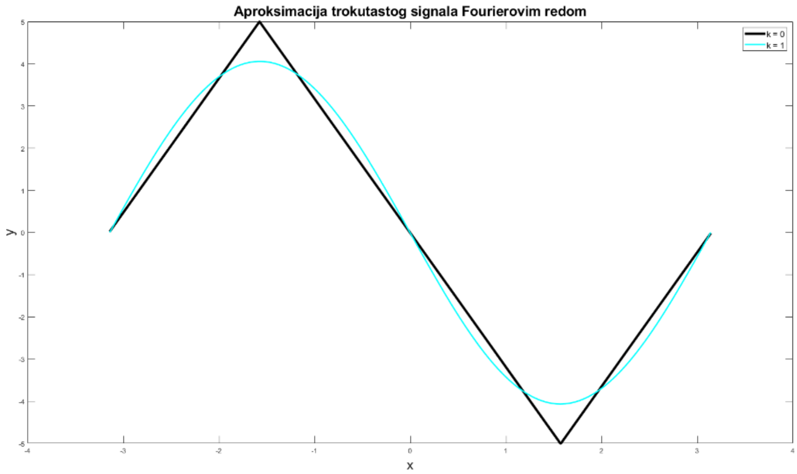
Jedan od načina kako zapisati signale koji će se aproksimirati je pomoću vektora, a oni se zapisuju ovako *x=j:i:k* gdje je j početna vrijednost, i inkrement, odnosno razlika između sljedećeg i trenutnog elementa, a k konačna vrijednost. Ako je vektor zapisan u obliku *x=j:k*, onda inkrement ima vrijednost jedan.

6.2. Trokutasti signal

Trokutasti signal ili val (*engl. triangle wave*) često se koristi u simulaciji zvuka. Trokutasti signal na slici 6.1. definiran je na segmentu $[-\pi, \pi]$, a njegova amplituda iznosi $A = 5$ V. U MATLAB-u je definiran pomoću N točaka. Segment je podijeljen na N točaka, a signal na tri dijela (tri jednadžbe pravca) koji se definiraju pomoću vektora. Ispis koda za trokutasti signal dan je u prilogu 6.1.



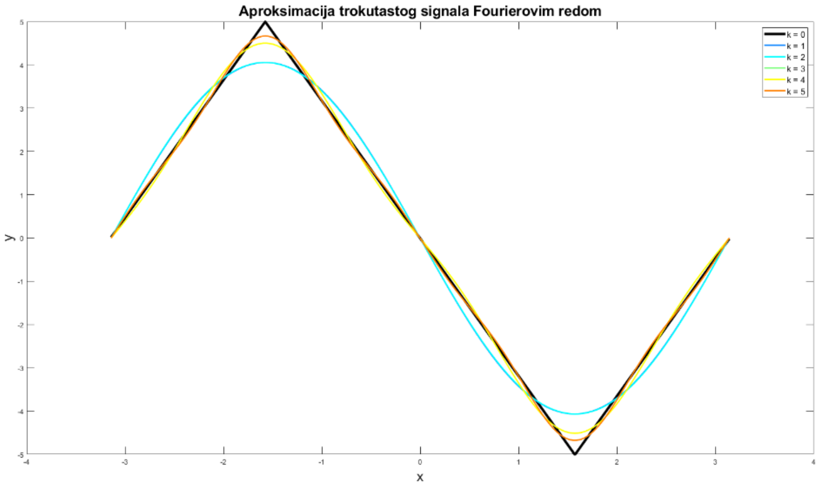
Slika 6.1. Trokutasti signal definiran na segmentu $[-\pi, \pi]$



Slika 6.2. Trokutasti signal i njegov Fourierov red kada je $k = 1$

Na slici 6.2. nalaze se graf trokutastog signala i njegova aproksimacija Fourierovim redom k kada je $k = 1$ čija jednadžba glasi:

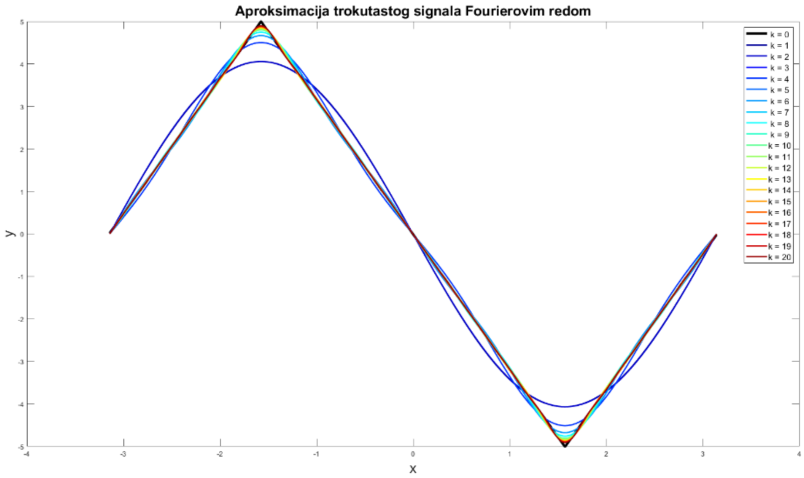
$$f(x) = -4{,}0613 \sin x \qquad (6-1)$$



Slika 6.3. Trokutasti signal i njegov Fourierov red kada je $k = 5$

Na slici 6.3. nalaze se graf trokutastog signala i njegove aproksimacije Fourierovim redom za vrijednosti od $k = 1$ do $k = 5$. Jednadžba Fourierovog reda za $k = 5$ glasi:

$$f(x) = -4{,}0163 \sin x + 0{,}0124 \sin 2x + 0{,}4457 \sin 3x - 0{,}1644 \sin 5x \qquad (6-2)$$



Slika 6.4. Trokutasti signal i njegov Fourierov red kada je $k = 20$

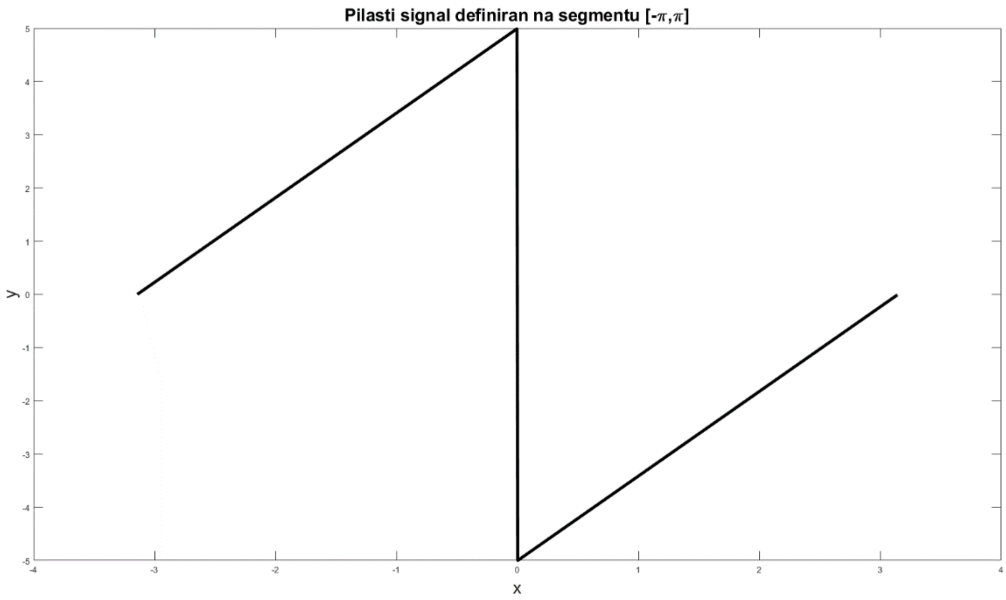
Na slici 6.4. nalaze se graf trokutastog signala i njegove aproksimacije Fourierovim redom za vrijednosti od $k = 1$ do $k = 20$. Jednadžba Fourierovog reda za $k = 20$ glasi:

$$f(x) = -4{,}0163\sin x + 0{,}0124\sin 2x + 0{,}4457\sin 3x - 0{,}1644\sin 5x + 0{,}0041\sin 6x$$
$$+ 0{,}0808\sin 7x - 0{,}0513\sin 9x + 0{,}0025\sin 10x + 0{,}0323\sin 11x + 0{,}0105\sin 19x \quad (6-3)$$

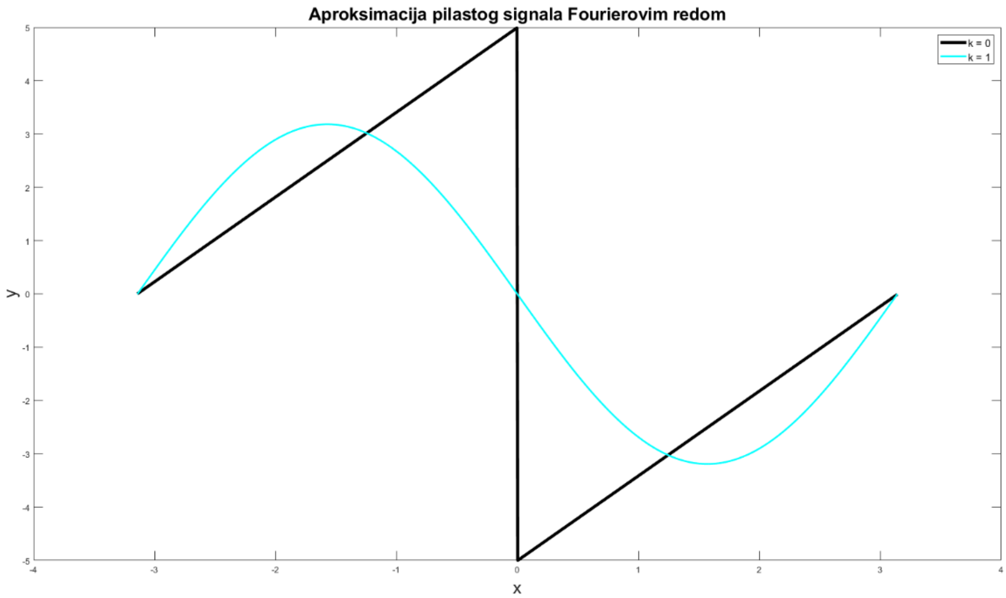
Iz izraza (6 – 2) i (6 – 3) vidi se da je vrijednost koeficijenta b_k uz članove oblika $\sin 4kx$ jednaka nuli.

6.3. Pilasti signal

Pilasti val (*engl. sawtooth wave*) koristi se u simulaciji zvuka, pulsno-širinskoj modulaciji i u uređajima koji sadrže katodne cijevi. Kako bi se definirao signal, potrebno ga je podijeliti na dva dijela, rastući i padajući pravac. Ispis koda za pilasti signal dan je u prilogu 6.2.



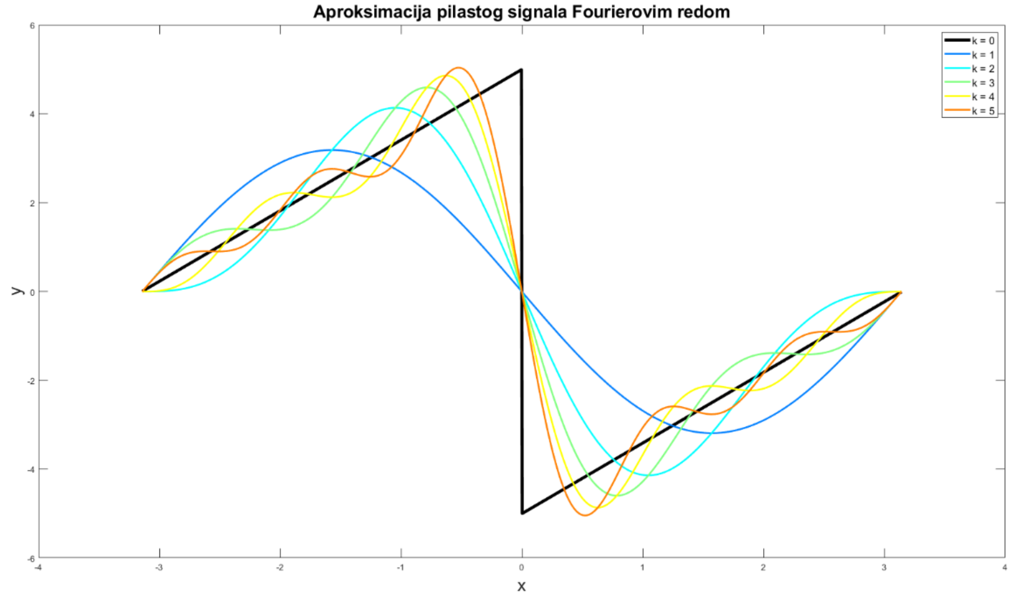
Slika 6.5. Pilasti signal definiran na segmentu [-π,π]



Slika 6.6. Pilasti signal i njegov Fourierov red kada je $k = 1$

Na slici 6.6. nalaze se graf pilastog signala i njegova aproksimacija Furierovim redom za $k = 1$ čija jednadžba glasi:

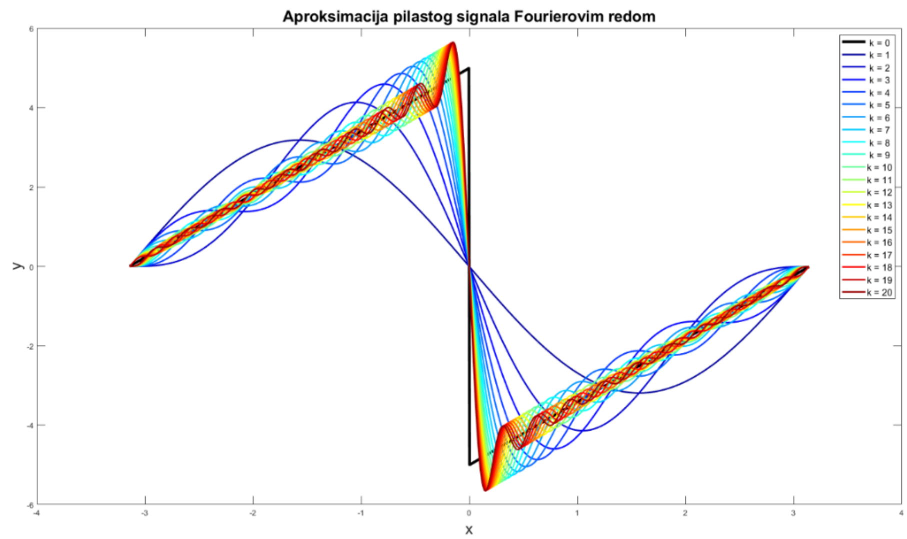
$$f(x) = -3{,}1862 \sin x \qquad (6-4)$$



Slika 6.7. Pilasti signal i njegov Fourierov red kada je $k = 5$

Na slici 6.7. nalaze se graf pilastog signala i grafovi njegovih aproksimacija Fourierovim redom za vrijednosti od $k = 1$ do $k = 5$. Jednadžba Fourierovog reda za $k = 5$ glasi:

$$f(x) = -3.1862 \sin x - 1{,}59 \sin 2x - 1{,}0621 \sin 3x - 0{,}7950 \sin 4x - 0{,}6373 \sin 5x \quad (6-5)$$



Slika 6.8. Pilasti signal i njegov Fourierov red kada je $k = 20$

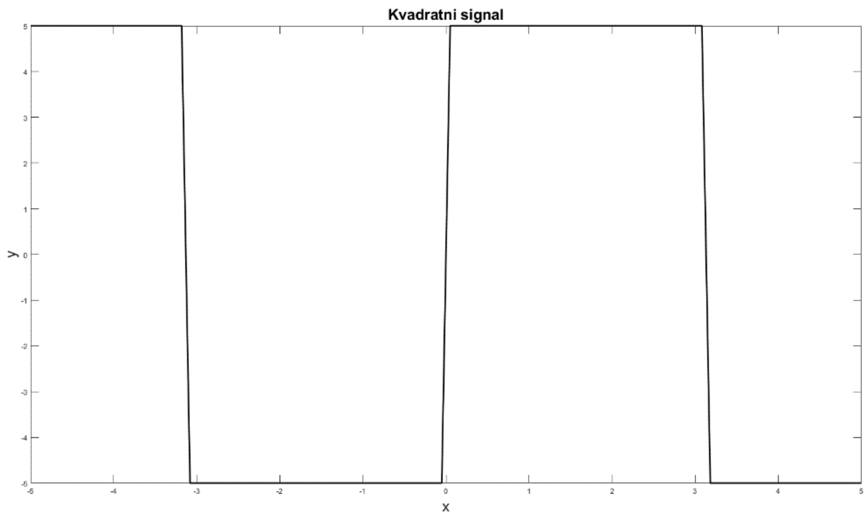
Slika 6.8. prikazuje grafove pilastog signala i njegovih aproksimacija Fourierovim redom za vrijednosti od $k = 1$ do $k = 20$. Jednadžba Fourierovog reda za $k = 20$ glasi:

$$f(x) = -3.1862 \sin x - 1{,}59 \sin 2x - 1{,}0621 \sin 3x - 0{,}7950 \sin 4x - 0{,}6373 \sin 5x$$
$$-0{,}53 \sin 6x - 0{,}4552 \sin 7x - 0{,}3975 \sin 8x - 0{,}3541 \sin 9x - 0{,}3180 \sin 10x$$
$$-0{,}2897 \sin 11x - 0{,}2651 \sin 12x - 0{,}2541 \sin 13x - 0{,}2272 \sin 14x - 0{,}2125 \sin 15x$$
$$-0{,}1988 \sin 16x - 0{,}1875 \sin 17x - 0{,}1768 \sin 18x - 0{,}1678 \sin 19x - 0{,}1591 \sin 20x \quad (6-6)$$

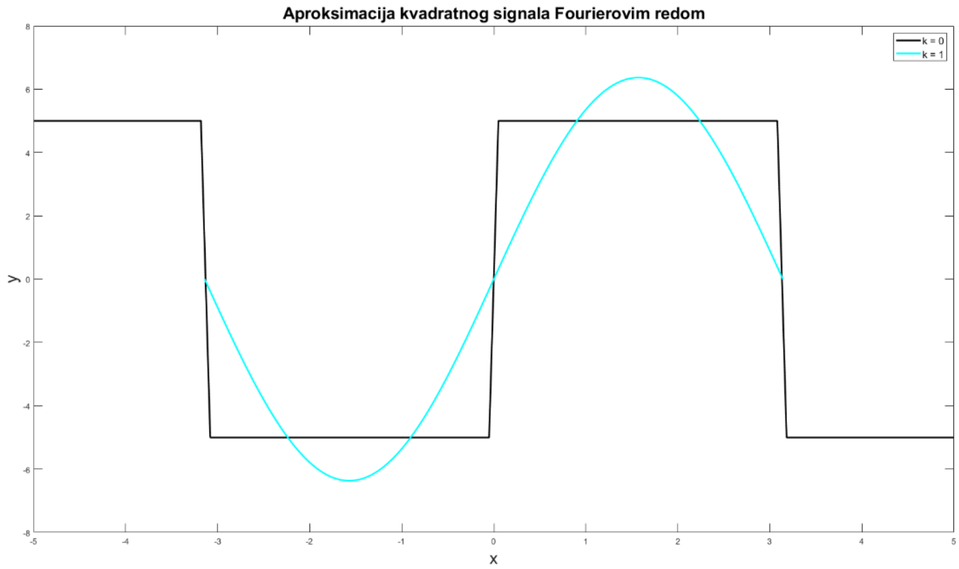
Iz izraza (6 – 5) i (6 – 6) vidi se da su sve vrijednosti koeficijenta $b_k \neq 0$.

6.4. Kvadratni signal

Razlika između pravokutnog (*engl. square wave*) i kvadratnog (*engl. rectangular wave*) signala je u tome što je omjer pauze i signala (*engl. duty cycle*) kvadratnog signala uvijek 50%, što znači da je pola perioda vrijednost amplitude vala iznad nule, a pravokutni signal može imati i veći ili manji omjer pauze i signala od 50%. Kvadratni signali se koriste u elektronici i mikroelektronici za signale takta (*engl. clock*) koji kontroliraju vremenske operacije. Kao i pilasti i trokutasti signali, pravokutni i kvadratni signali koriste se u simulaciji zvuka. Ispis koda za kvadratni signal dan je u prilogu 6.3.



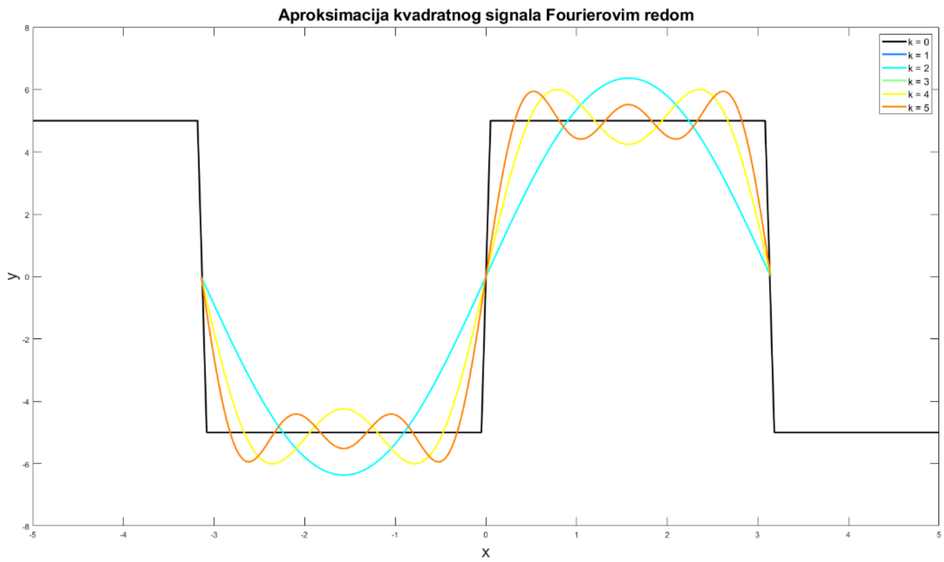
Slika 6.9. Kvadratni signal



Slika 6.10. Kvadratni signal i njegov Fourierov red kada je $k = 1$

Slika 6.10. prikazuje pravokutni signal i njegovu aproksimaciju Fourierovim redom kada je $k = 1$ čija jednadžba glasi:

$$f(x) = 6{,}3662 \sin x \qquad (6-7)$$

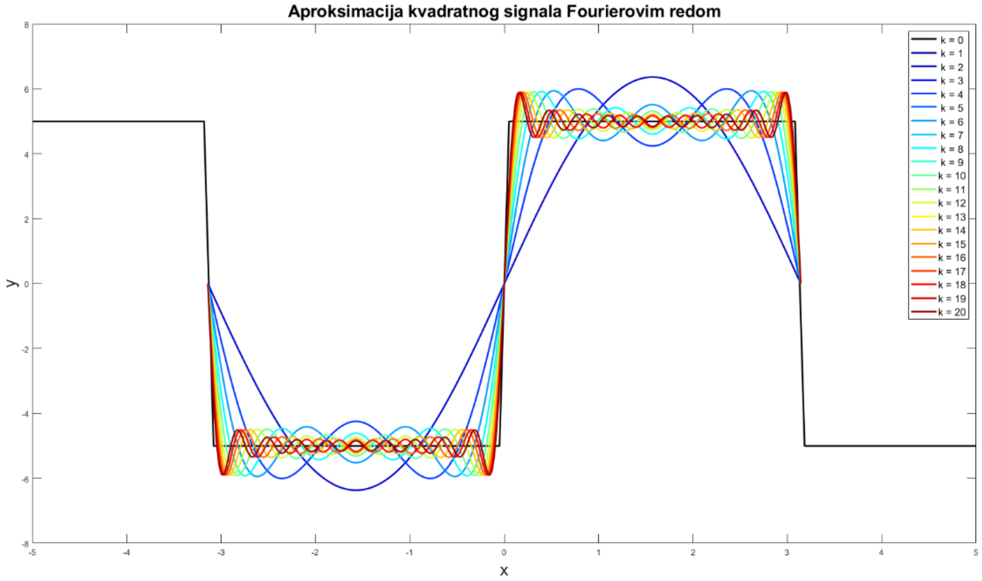


Slika 6.11. Kvadratni signal i njegov Fourierov red kada je $k = 5$

Na slici 6.11. prikazani su grafovi pravokutnog signala i njegovih Fourierovih redova za k u rasponu od $k = 1$ do $k = 5$. Jednadžba Fourierovog reda za pravokutni signal sa slike 6.9. za

$k = 5$ glasi:

$$f(x) = 6{,}3662 \sin x + 2{,}1221 \sin 3x + 1{,}2732 \sin 5x \qquad (6-8)$$



Slika 6.12. Kvadratni signal i njegov Fourierov red kada je $k = 20$

Na slici 6.12. nalazi se graf pravokutnog signala i grafovi njegovih Fourierovih redova za k u rasponu od $k = 1$ do $k = 20$. Jednadžba Fourierovog reda za $k = 20$ glasi:

$$f(x) = 6{,}3662 \sin x + 2{,}1221 \sin 3x + 1{,}2732 \sin 5x + 0{,}9094 \sin 7x + 0{,}7073 \sin 9x$$
$$+0{,}5787 \sin 11x + 0{,}4896 \sin 13x + 0{,}4243 \sin 15x + 0{,}3744 \sin 17x + 0{,}3350 \sin 19x \quad (6-9)$$

Iz izraza (6 – 8) i (6 – 9) može se uočiti da su za paran broj k vrijednosti koeficijenta b_k jednaki nuli.

6.5. Analiza rezultata

Signali prikazani na slikama 6.1., 6.5. i 6.9. su neparne funkcije, stoga su vrijednosti Fourierovih koeficijenata a_0 i a_k jednaki nuli. Iz slika 6.1. - 6.12. koje prikazuju grafove signala i grafove Fourierovog reda vidi se da se s porastom broja k iz formule $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ izgled grafa koji prikazuje Fourierov red sve više približava originalnom signalu, odnosno funkciji koju se aproksimira. Kod aproksimiranja funkcija ne postoji pravilo koje govori kada je funkcija „dovoljno aproksimirana“. Inženjeri prema potrebi sustava i iskustvu odlučuju koja aproksimacija zadovoljava uvjete za daljnji rad.

7. ZAKLJUČAK

Budući da se ne može razumjeti Fourierov red bez poznavanja funkcija i redova, njih je bilo potrebno prvo definirati. U poglavlju funkcije je definiran pojam funkcije i navedena su njena najvažnija svojstva. Fourierov red aproksimira funkciju koristeći trigonometrijske funkcije sinus i kosinus, stoga je u poglavlju funkcije najveća pozornost na trigonometrijskim funkcijama. U poglavlju redovi dana je definicija reda te su navedeni najpoznatiji kriteriji konvergencije s kojima se susreću i studenti. Poglavlje Fourierov red se za razliku od poglavlja funkcije i redovi ne sastoji samo od strogih matematičkih pravila i definicija. U njemu se nalazi kratka biografija J. B. Fouriera, izvodi formula za Fourierove koeficijente i Fourierov red za različite oblike intervala. Također je navedena i primjena Fourierovog reda u matematici i inženjerstvu. Kako bi se primjenili izvedene formule, nekoliko funkcija je raspisano u Fourierov red.

U praktičnom dijelu rada postignut je prikaz signala i njihovih aproksimacija Fourierovim redom koristeći znanja iz nekoliko kolegija koja su obuhvaćala rad u MATLAB-u te koristeći formule dobivene u teorijskom dijelu ovoga rada. Iz rezultata je vidljivo da se zbrajanjem većeg broja trigonometrijskih funkcija aproksimirana funkcija sve više približava početnoj funkciji. Aproksimacija je nekada nužna, a o potrebama zadatka ovisi koliko može odstupati od funkcije koju se aproksimira. Praktični dio rada se može poboljšati i upotrijebiti na primjeru tako da korišteni signal predstavljaju ulaz nekog strujnoga kruga te se pomoću dobivenih aproksimacija može računati izlaz u vremenskoj domeni.

Proučavajući različite izvore i primjere koji se bave primjenom Fourierovog reda u znanosti, tehnologiji i inženjerstvu, može se uočiti da se često zajedno spominju Fourierov red i Fourierova transformacija, metode koje se zajedno zovu Fourierovom analizom. Primjena Fourierove analize je široka, stoga bi svaki inženjer trebao biti upoznat s njom.

Literatura

[1] U. S., Hegde, S., Uma, P. N., Aravind, S., Malashri, Fourier Transforms and Its Applications in Engineering Field, IJIRSET, No. 6, Vol. 6, pp. 10294 - 10298, lipanj 2017., dostupno na: https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://www.ijirset.com/upload/2017june/24_Fourier%2520Transforms.pdf&ved=2ahUKEwjsjp367MzrAhVrhosKHTQbAQkQFjABegQIChAC&usg=AOvVaw22_Bx-3VNlMYs6yF5dwZdV [27.8.2020.]

[2] M., Hollingsworth, Applications of the Fourier Series [online], Department of Physics – University of Tennessee, Knoxville, TN, 2008., dostupno na: https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://sces.phys.utk.edu/~moreo/mm08/Matt.pdf&ved=2ahUKEwjb1KGb7czrAhWTHHcKHV9PAWQQFjABegQIAhAB&usg=AOvVaw37mtdxXHN_XFg3QCsYH_yZ [27.8.2020.]

[3] G., Grason, Math Methods for Polymer Physics, Lecture 1: Series Representations of Functions [online], Department of Polymer Science and Engineering, University of Massachusetts Amherst, Amherst, MA, dostupno na: https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https://www.pse.umass.edu/ggrason/MathMethods.htm&ved=2ahUKEwiqsJu57czrAhWil4sKHVxqB1QQFjABegQIAhAB&usg=AOvVaw2xanmHOqK99g09g419VpB8 [23.8.2020.]

[4] M., Crnjac, D., Jukić, R., Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[5] B., Mikuličić, E., Vernić, M., Varićak, Zbirka zadataka iz fizike, Školska knjiga, Zagreb, 2010.

[6] B., Dakić, N., Elezović, Matematika 2, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.

[7] C. N. B., Hammond, The Case for Raabe's Test [online], Connecticut College, New London, CT, 2019., dostupno na: https://arxiv.org/abs/1801.07584 [21.8.2020.]

[8] P., Javor, Matematička analiza 1, Element, Zagreb, 2003.

[9] J. J., O'Connor, E. F., Robertson, Jean Baptiste Joseph Fourier [online], School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, St Andrews, Škotska, 1997., dostupno na: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier/ [23.8.2020.]

[10] I., Ivanšić, Fourierovi redovi i diferencijalne jednadžbe, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.

[11] M., Lučić, Fourierovi redovi, diplomski rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[12] N., Elezović, M., Puljiz, Laplaceova transformacija. Fourierov red i Fourierova transformacija, Zagreb, 2016.

[13] M. C., Anumaka, Analysis of Electric Circuits using Fourier Series, International Journal of Engineering and Innovative Technology, No. 5, Vol. 1, pp. 125, svibanj 2012., dostupno na:

https://www.researchgate.net/publication/294088651_Analysis_of_Electric_circuits_using_Fourier_series [23.8.2020.]

[14] D., Houcque, Introduction to MATLAB for Engineering Students [online], Northwestern University, Evanston, IL, 2005., dostupno na: https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https://www.mccormick.northwestern.edu/documents/students/undergraduate/introduction-to-matlab.pdf&ved=2ahUKEwjOjpqo78zrAhXk-yoKHXngBIEQFjAAegQIARAB&usg=AOvVaw18Dv3OUFsHXFvdGwcqcK3f [23.8.2020.]

Popis i opis upotrijebljenih oznaka

Simbol	Značenje
D	domena
K	kodomena
$\in$	je element
$\neq$	različito
∞	beskonačno
$f: a \to b$	funkcija f koja preslikava a u b
$p \Rightarrow q$	implikacija, „ako p, onda q"
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup cijelih brojeva
$\circ$	kompozicija funkcija
f^{-1}	inverzna funkcija
:	takav da
a_n	n-ti član niza
s_n	n-ta parcijalna suma
a_0, a_k, b_k	Fourierovi koeficijenti
T	period funkcije
A	amplituda
φ	fazni pomak
ω	kružna brzina
$[a, b]$	zatvoreni interval
$< a, b >$	otvoreni interval
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	red ili suma reda
!	faktorijel
$\sim$	razmjerno
$<$	manje
$\leq$	manje ili jednako
$>$	veće
$\geq$	veće ili jednako

P.6.1. Ispis skripte za definiranje i aproksimaciju trokutastog signala

```
figure

L=pi;
N=1024;
A=5;
n=5;

dx=2*L/(N-1);
x=-L:dx:L;

f(1:N/4)=4*(A/N)*(1:N/4);

f(N/4+1:3*N/4) = A-4*A*(1:N/2)/N;

f(3*N/4+1:N)=-A+4*A*(0:N/4-1)/N;

plot(x,f,'-k','LineWidth',3.5)
hold on
xlabel('x','FontSize',20);
ylabel('y','FontSize',20);
title('Trokutasti signal definiran na segmentu [-\pi,\pi]','FontSize',20)

A0=sum(f.*ones(size(x)))*dx/pi;
CC=jet(n);
fourierSeries=A0/2;
for k=1:n
    A(k)=sum(f.*cos(k*x))*dx/pi;
    B(k)=sum(f.*sin(k*x))*dx/pi;
    fourierSeries= fourierSeries + A(k)*cos(k*x)+B(k)*sin(k*x);
    plot(x,fourierSeries,'-','Color',CC(k,:),'LineWidth',2)
    title('Aproksimacija trokutastog signala Fourierovim redom','FontSize',20)
    str = cellstr(num2str((0:n)','k = %d') );
    legend(str,'FontSize',12)
    pause(.5)
 end
hold off
```

P.6.2. Ispis skripte za definiranje i aproksimaciju pilastog signala

```
figure

L=pi;
 N=1024;
A=5;
n=20;

dx=2*L/(N-1);
x=-L:dx:L;

g(1:N/2)=2*A*(0:1:N/2-1)/N;
g(N/2+1:N)=-2*A*(N/2:-1:1)/N;


plot(x,g,'-k','LineWidth',3.5)
xlabel('x','FontSize',20);
ylabel('y','FontSize',20);
title('Pilasti signal definiran na segmentu [-\pi,\pi]','FontSize',20)
hold on

A0=sum(g.*ones(size(x)))*dx/pi;
fourierSeries=A0/2;


CC=jet(n);

for k=1:n
    A(k)=sum(g.*cos(k*x))*dx/pi;
    B(k)=sum(g.*sin(k*x))*dx/pi;
    fourierSeries= fourierSeries + A(k)*cos(k*x)+B(k)*sin(k*x);
    plot(x,fourierSeries,'-','Color',CC(k,:),'LineWidth',2)
    title('Aproksimacija pilastog signala Fourierovim redom','FontSize',20)
    str = cellstr(num2str((0:n)','k = %d') );
    legend(str,'FontSize',12)
    pause(.5)


end
hold off
```

P.6.3. Ispis skripte za definiranje i aproksimaciju prvokutnog signala

```
L=pi;
N=1024;
A=5;
n=20;
dx=2*L/(N-1);
x=-L:dx:L;


h(1:N/2)=-A*(1:N/2)/(1:N/2);
h(N/2+1:N)=A*(N/2+1:N)/(N/2+1:N);

t=linspace(-5,5);
kvadratniSignal=A*square(t,50);

figure
plot(t,kvadratniSignal,'-k','LineWidth',2)
xlabel('x','FontSize',20);
ylabel('y','FontSize',20);
title('Kvadratni signal','FontSize',20)

hold on
A0=sum(h.*ones(size(x)))*dx/pi;
fourierSeries=A0/2;

CC=jet(n);


for k=1:n
   A(k)=sum(h.*cos(k*x))*dx/pi;
   B(k)=sum(h.*sin(k*x))*dx/pi;
   fourierSeries= fourierSeries + A(k)*cos(k*x)+B(k)*sin(k*x);
   plot(x,fourierSeries,'-','Color',CC(k,:),'LineWidth',2)
   title('Aproksimacija kvadratnog signala Fourierovim redom','FontSize',20);
   str = cellstr(num2str((0:n)','k = %d') );
   legend(str,'FontSize',12)
   pause(.5)


end

hold off
```

Sažetak

U ovom radu razmatra se problematika Fourierovog reda, koji je jedna od metoda Fourierove analize. Fourierovi redovi se koriste kako bi se periodične funkcije prikazale pomoću funkcija sinus i kosinus.

U prvom dijelu definirana je funkcija i njena svojstva. Budući da se Fourierovi redovi temelje na trigonometrijskim funkcijama, one su naglašene.

U drugom dijelu definirani su redovi. Navedeni i objašnjeni su kriteriji konvergencije reda. Uz svaki kriterij konvergencije reda dan je primjer reda čija se konvergencija može dokazati koristeći taj kriterij.

U trećem dijelu definiran je trigonometrijski Fourierov red i dani su primjeri razvoja nekih funkcija u Fourierov red. Sve formule Fourierovog reda i Fourierovih koeficijenata su izvedene. U ovom dijelu navedena je i primjena Fourierovih redova.

U posljednjem poglavlju prikazani su primjeri aproksimacije signala Fourierovim redom. Predstavljen je MATLAB te su navedene i objašnjene korištene naredbe. U MATLAB-u su definirani i nacrtani trokutasti, pilasti i kvadratni signal te njihova aproksimacija Fourierovim redom.

Ključne riječi

aproksimacija signala, Fourierovi koeficijenti, periodična funkcija, trigonometrijska funkcija, trigonometrijski Fourierov red

The Fourier Series and Its Application to Periodic Signals

Summary

This paper discusses the problem of the Fourier series, which is one of the methods of Fourier analysis. Fourier series are used to represent periodic functions using the sine and cosine functions. In the first part, the function and its properties are defined. Since the Fourier series is based on trigonometric functions, they are emphasized.
In the second part, the series are defined. Convergence criteria are listed and explained. Each convergence criterion is accompanied by an example of a series whose convergence can be proven using that criterion.
In the third part, the trigonometric Fourier series is defined and examples of the development of some functions into the Fourier series are given. All formulas of the Fourier series and Fourier coefficients are derived. The application of the Fourier series is also mentioned in this section.
In the last chapter, examples of signal approximation by the Fourier series are presented. MATLAB is introduced and the used commands are listed and explained. In MATLAB, triangular, sawtooth, and square signals are defined and plotted, and their approximation by the Fourier series.

Keywords

signal approximation, Fourier coefficients, periodic function, trigonometric function, trigonometric Fourier series