

Strategije zbrajanja i oduzimanja kod učenika razredne nastave

Baković, Ivona

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Humanities and Social Sciences, University of Split / Sveučilište u Splitu, Filozofski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:172:340686>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of humanities and social sciences](#)



**SVEUČILIŠTE U SPLITU
FILOZOFSKI FAKULTET**

DIPLOMSKI RAD

**STRATEGIJE ZBRAJANJA I ODUZIMANJA U
RAZREDNOJ NASTAVI**

IVONA BAKOVIĆ

Split, 2021.

Studijska grupa: Učitelji

Predmet: Metodika nastave matematike

STRATEGIJE ZBRAJANJA I ODUZIMANJA U RAZREDNOJ NASTAVI

Studentica:

Ivona Baković

Mentorica:

doc. dr. sc. Irena Mišurac

Komentorica:

Josipa Jurić, mag. educ. math. et inf.

Split, kolovoz 2021.

Zahvala

Zahvaljujem doc.dr.sc. Ireni Mišurac na prihvaćanju mentorstva.

*Zahvaljujem OŠ Lučac te učiteljicama Rajki Lasić i Đurđici Grgić što su mi omogućile
provođenje istraživanja u svrhu ovoga diplomskoga rada.*

*Veliku zahvalnost dugujem asistentici Josipi Jurić na stručnim savjetima i beskrajnoj strpljivosti
koje mi je pružala pri izradi ovoga rada.*

*Zahvaljujem svima onima koji su mi davali podršku tijekom svih godina moga studiranja, a
ponajviše suprugu Ivanu koji je i u najtežim trenucima bio uz mene.*

*Najveću zaslugu za ono što sam postigla pripisujem svojim roditeljima koji su uvijek bili uz mene
pružajući mi bezuvjetnu ljubav i podršku.*

Povrh svega, zahvaljujem Bogu na daru života i obilju milosti kojom me prati kroz život.

Sažetak

Strategija je namjerni postupak pomoću kojega želimo ostvariti neki cilj, odnosno riješiti problem. Mentalne su strategije skupovi mentalnih procesa koji se svjesno provode u svrhu rješavanja problema. Mentalne matematičke strategije koriste činjenice o brojevima za rješavanje složenijih matematičkih operacija. U mentalnim strategijama koje učenik koristi očituju se njegove kognitivne sposobnosti.

U ovome diplomskom radu ispitali smo koje strategije učenici uče u školi, a usporedno tome, koje strategije spontano koriste prilikom rješavanja zadataka zbrajanja i oduzimanja. Predmet ispitivanja također je bila promjena u korištenju strategija s obzirom na dob učenika. Teorijski dio rada bavi se pojmom broja i računskih operacija, strategijama računanja te pruža uvid u strategije računanja u udžbenicima razredne nastave.

Analizom rezultata istraživanja može se zaključiti kako učenici koriste strategije kojima su u školi poučavani, no koriste i pojedine strategije koje su sami razvili. Zaključeno je, također da se prelaskom u viši razred mijenja, ali i proširuje izbor učenikovih strategija.

Ključne riječi: strategija, strategije mentalnog računanja, mentalna strategija, udžbenik iz matematike

Summary

Strategy is a deliberate process by which we want to achieve a goal or solve a problem. Mental strategies are sets of mental processes consciously implemented to solve problems. Mental mathematical strategies use numbers facts to solve problems. Mental mathematical strategies use numbers facts to solve more complex mathematical operations. In the mental strategies used by the student, his cognitive abilities are manifested.

In this thesis, we examined which strategies students learn in school, and in parallel, which strategies they subtly use when solving addition and subtraction tasks. Subject of the study was also a change in the use of strategies with regard to the age of students. The theoretical part of the thesis deals with the concept of number and arithmetic operations, computational strategies and provides insight into computational strategies in classroom textbook

By analyzing the results of the research, it can be concluded that students use strategies they were taught in school, but they also use certain strategies that they have developed themselves. It was also concluded that the transition to a higher grade changes and expands the choice of student strategies.

Keywords: strategy, mental computing strategies, mental strategy, mathematics textbook

SADRŽAJ

1. UVOD	2
1. POJAM BROJA I RAČUNSKIH OPERACIJA	3
3. STRATEGIJA RAČUNANJA	7
3.1. Strategije zbrajanja i oduzimanja	8
3.2. Strategije zbrajanja i oduzimanja u udžbenicima	15
4. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA	18
4.1. Predmet i problem istraživanja	18
4.2. Cilj i zadatci istraživanja	18
4.3. Problemi	18
4.4. Instrument istraživanja i uzorak	19
4.5. Tijek istraživanja	19
4.6. Rezultati	20
4.7. Rasprava o rezultatima	35
5. ZAKLJUČAK	38
6. LITERATURA	40
PRILOZI	42

1. UVOD

Bez obzira na društveni stav matematika je uvijek bila i bit će jedan od najvažnijih predmeta u osnovnoj školi. To je zbog toga što uspjeh u ovome društvu velikim dijelom ovisi o sposobnostima kompetentnog korištenja matematičkih radnji i vještina. Primjena matematike je svakodnevna počev od navijanja budilice koja nas podsjeća na odlazak na posao do sastavljanja obiteljskog budžeta na temelju mjesečnih prihoda. Između te dvije krajnosti leži bezbroj svakodnevnih aktivnosti za koje nam je potrebna matematika (Sharma, 2001, str 5). Već u ranoj predškolskoj dobi djeca stječu znanja vezana uz skupove, zbrajanje i oduzimanje, mjerenje. Svakodnevna iskustva, stečena u igri s drugom djecom, pri kupovini, na putovanjima, pomažu im da bolje razumiju svijet oko sebe i uspješno rješavaju neke probleme o kojima će tek kasnije biti poučavana (Vizek Vidović i sur, 2003).

Postoji ogromna razlika u tome kako svaki pojedinac uči matematiku. Također, postoji razlika u tome kako svaki učenik vidi i rješava matematički problem. Ljudi se razlikuju u obrađivanju informacija i tako se i razlikuju u obrađivanju matematičkih informacija (Sharma, 2001, str.48).

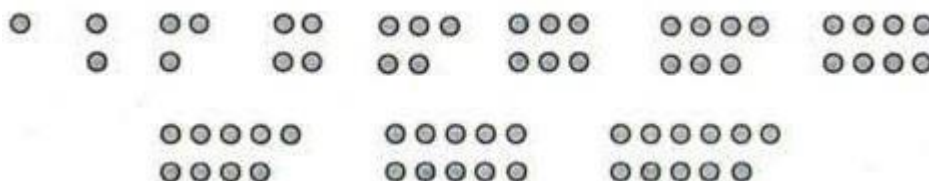
Školsko poučavanje matematike i prirodnih znanosti ima svrhu poučiti nas da razumijemo prirodne zakonitosti i njihove manifestacije, olakšati svakodnevno funkcioniranje poznavanjem matematičkih strategija i tehnika (Vizek Vidović i sur., 2003).

Postavlja se pitanje hoće li se učenici suočeni s određenim problemom koristiti strategijama i tehnikama kojima su podučavani u školi ili će u tim situacijama biti kreatori vlastitih strategija. Upravo ćemo u ovome radu pružiti uvid u strategije kojima se uči u školi te ćemo ispitati, prikazati i opisati koje su to strategije kojima se učenici suptilno koriste kao i postoji li promjena u korištenim strategijama s obzirom na dob učenika.

1. POJAM BROJA I RAČUNSKIH OPERACIJA

Pojmovi nam omogućuju upoznavanje predmeta i pojava. Postoje različiti pristupi formiranju pojma broja, a zasnovani su na različitim shvaćanjima o tome što je izvorište spoznaje samoga pojma. Izvorište spoznaje može biti vizualna percepcija, operacije sa skupovima ili brojenje. Uzimajući određeno shvaćanje za osnovicu svaki pristup izgrađuje konzistentan sistem djelatnosti kojima se, prema tome shvaćanju, izgrađuje pojam broja. Tri su metodička pristupa formiranju pojma broja – perceptivno-predodžbeni, brojevni i skupovni.

Perceptivno predodžbeni pristup zasniva se na shvaćanju po kojemu su percepcije i predodžbe glavnim izvorima pojmovi prirodni broj i operacija s tim brojevima. Prema tome pristupu pojmovi se izgrađuju na osnovi percepcija i predodžaba stečenih promatranjem kvantitativnih obilježja objektivne realnosti. Smatra se da se promatranjem uspostavlja veza između perceptivne, fizičke strukture promatranih objekata i mentalnih struktura koje se njima pokreću. Predmet promatranja su objekti raspoređeni u prostoru, slike objekata i osobito tzv. brojne slike koje se prebrojavaju, izgovaraju se brojevne riječi, upoznaju se matematički znakovi i sl. među različitim brojnim slikama najpodesnijim se smatraju Bornove koje izgledaju ovako:



Slika 1. Bornove brojne slike (Markovac, 1992: 42)

Promatrajući takve figure, stječu se percepcije i predodžbe, pri čemu pojam broja nastaje iz percepcije točaka (krugova) raspoređenih u statičke figure. Bitno obilježje takva metodičkog pristupa jest što više promatranja da bi se steklo što više percepcija iz kojeg se zatim apstrakcijom dospijeva do općeg (karakteristična figura brojne slike) koje se izražava brojevnim znakom, znamenkom.

Brojevni pristup. Dok perceptivno predodžbeni pristup pojam broja izgrađuje promatranjem brojnih slika, brojevni pristup zasniva se na shvaćanju po kojem se pojam prirodnog broja i pojmovi operacija s tim brojevima izgrađuju brojenjem i aktivnostima s brojenjem. Polazeći od pretpostavke

da dijete dolaskom u školu zna brojiti, brojevni pristup to znanje uzima za sredstvo upoznavanja broja, relacija među brojevima te operacija s brojevima.

Do pojma broja dolazi se, prema brojevnom pristupu, brojenjem. Pribrajajući po 1, može se izgraditi svaki prirodni broj ako se broj 1 dovoljno puta uzima kao pribrojnik. Postupak je ovakav:
 $a + n = a + \underbrace{1 + 1 + 1 \dots + 1}_{n \text{ puta}} = n\text{-ti sljedbenik od } a.$

Da bi se, primjerice, izgradio broj 5, broj 1 treba pribrojiti pet puta, tj. uzeti ga pet puta kao pribrojnik; da bi se izgradio broj 7, broj 1 treba pribrojiti sedam puta, uzeti ga toliko puta kao pribrojnik. Pojam prirodnog broja formira se određivanjem neposrednog sljedbenika; broj 2 je sljedbenik broja 1, broj 3 je sljedbenik broja 2 itd.

Skupovni pristup. Taj se pristup zasniva na shvaćanju da se pojmovi prirodni broj, pojmovi relacija i operacija s tim brojevima, izgrađuju radom sa skupovima konkretnih predmeta, apstrahirajući pritom nebitna i generalizirajući bitna kvantitativna svojstva. Radnje sa skupovima su ishodište, a pojmovi brojeva i operacija s brojevima cilj učenja. Pojam prirodnog broja izgrađuje se radnjama s ekvivalentnim skupovima (didaktički materijal) apstrahirajući nebitna svojstva (boja, oblik, veličina, raspored elemenata, materijal iz kojega su načinjeni i sl.) i generalizirajući bitna, tj. broj elemenata u skupovima (Markovac, 1992, str. 41-45).

Liebeck (1984) navodi kako djeca svugdje oko sebe vide znamenke – na kućnim vratima, autobusima, automobilskim registarskim tablicama, satovima. Također kaže kako su znamenke apstraktnije od količina te da upotrebljavajući znamenke zapravo upotrebljavamo brojeve u apstraktnom obliku.

Djeca pojam broja doživljavaju na 3 različita načina: broj kao količinu, brojevu riječ (kad malo dijete kaže da zna brojati do deset to znači da poznaje redoslijed brojevnih riječi, ponavlja ga mehanički) te broj kao brojka, odnosno grafički zapis, simbol kojim se označava neka količina (Čudina-Obradović, 2008). Dijete na samome početku stjecanja matematičkih znanja poučavamo da prepozna brojke kao zamjenu za nazive brojeva, tek onda znamenke povezuje s brojenjem. Upravo je brojenje jedna od važnih matematičkih vještina koju djeca stječu vrlo rano, neformalnim obrazovanjem (Pavlin-Bernardić, 2006).

Čudina-Obradović (2008) ističe kako su određena znanja, iskustva i misaone operacije zapravo predmatematičke vještine jer stječući ih, dijete ovladava vještinama mišljenja koje su preduvjeti za razumijevanje matematike: pojma broja i svih matematičkih operacija s brojevima. Također,

navodi kako pravo razumijevanje matematike obuhvaća povezivanje količine s pripadajućom brojevnom riječi i brojkom koja je njihova pisana oznaka.

Prema Piagetu kod djece od 7. do 11. godine nastupa faza konkretnih operacija što znači da ih djeca uče i koriste. Djeca već u toj dobi razumiju osnovna svojstva predmeta kao i odnose među predmetima ili događajima.¹

Temeljni preduvjet za učenje zbrajanja i oduzimanja jest vještina brojenja, koju većina djece svlada već u dobi između 4 i 5 godina (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998).

Da bismo rekli da dijete zna brojiti trebaju biti zadovoljena sljedeća načela (Gelman i Meck 1986, prema Pavlin-Bernardić, 2006):

- Načelo pridruživanja „jedan prema jedan“ poštujuemo kada pri prebrojavanju predmeta u nekom skupu svakom predmetu pridružujemo samo jedan broj.
- Prema načelu kardinalnosti posljednji broj koji se izgovori pri brojenju skupa predmeta je kardinalni i označava ukupan broj predmeta u skupu.
- Načelo ordinalnosti govori o poretku brojeva, a oni su poredani prema uzlaznom nizu veličine.
- Prema načelu konzervacije broj predmeta u skupu je neovisan o njihovu prostornom rasporedu.
- Pravilo reverzibilnosti predstavlja spoznaja o tome koje promjene utječu na količinu, a koje ne.

Vlahović-Štetić i Vizek Vidović (1998) ističu važnost usporedbe usmenog i pismenog bilježenja brojeva. Navode kako se pri nabrananju i pisanju znamenaka niz piše s lijeva nadesno, no da kod višeznamenastih brojeva vrijednost pojedinih znamenki raste s desna nalijevo te kako je na takve proturječnosti bitno upozoriti. Također, navode da pri poučavanju matematičkih simbola valja izbjegavati istodobno preopterećenje računom i svladavanjem novih znakova. I treća stvar koju navode, a potrebna za razumijevanje matematičkih operacija je situacija u kojoj se određeni matematički postupak primjenjuje. Odnosno kako je važno prepoznati opća načela u specifičnoj situaciji kako bi se prepoznalo je li neka opća procedura primjerena za rješavanje određenog problema.

¹ <https://aloha.hr/aloha/pedagoska-osnova-aloha-mental-arithmetic-programa/>

Osim pojmova prirodnih brojeva i relacija među tim brojevima, u početnoj nastavi matematike učenici usvajaju i pojmove zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja tih brojeva. Da bi usvojili operacije s prirodnim brojevima, učenici moraju prevaliti dug spoznajni put početak kojega je u realnom, a završetak u mentalnom, misaonom svijetu (Markovac, 1992).

Mentalno računanje uključuje korištenje strategija da bi se došlo do točnih odgovora, ali koristeći se samo pomoću ljudskog mozga bez pomoći bilo kakvog materijala (poput olovke i papira) ili uređaja poput kalkulatora. Mentalnim se računanjem koristimo kad računalni alati nisu dostupni, kada je brže od drugih načina računanja ili čak u kontekstu natjecanja² Većina ljudi na dnevnoj bazi čini barem neke mentalne izračune. Na primjer, možemo mentalno dodati trošak dviju stavki da bismo odredili ukupni iznos koji dugujemo. Ili možemo mentalno oduzeti broj minuta koje smo već proveli na traci za trčanje od našeg ukupnog cilja kako bismo utvrdili koliko ćemo još morati trčati³.

² https://en.wikipedia.org/wiki/Mental_calculation

³ <https://hr.drafare.com/mentalna-matematika-i-kako-se-koristi/>

3. STRATEGIJA RAČUNANJA

Pod pojmom strategije podrazumijevamo namjerni postupak pomoću kojeg želimo ostvariti neki cilj, odnosno riješiti problem (Siegler i Jenkins, 1989 prema Pavlin Bernardić, 2006).

Naime, učiteljima odgovor na određeni matematički zadatak sam po sebi ne znači previše sve dok ne saznaju na koji je način dijete do njega došlo. Profesor Sharma kaže učiteljima da u odnosu na dijete trebaju biti poput mini-znanstvenika koji pokušavaju doznati što se zapravo događa u djetetovom razmišljanju (Sharma, 2001).

Brojna istraživanja upućuju na to da djeca imaju na raspolaganju i koriste veći broj strategija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Odabir strategija je adaptivan što znači da u skladu s karakteristikama zadatka djeca imaju tendenciju birati najbržu i najtočniju strategiju koja im je dostupna. Školsko poučavanje matematike i prirodnih znanosti ima istu svrhu – poučiti nas da razumijemo prirodne zakonitosti i njihove manifestacije, olakšati svakodnevno funkcioniranje poznavanjem matematičkih strategija i tehnika (Vizek Vidović, 2003). Njihovim poznavanjem i korištenjem učenje se odvija na lakši i brži način te ga učenik može bolje kontrolirati, a što pridonosi većoj učinkovitosti.

Mentalne su strategije skupovi mentalnih procesa koji se svjesno provode u svrhu rješavanja problema. Mentalne matematičke strategije koriste činjenice o brojevima za rješavanje složenijih matematičkih operacija. Numeričke činjenice su zapravo veze među brojevima koje su pohranjene u memoriju i razlikuju se od osobe do osobe iako neke mogu biti i svima nama zajedničke. Jednom kad učenik ovlada takvim činjenicama nema potrebu učiti nove strategije za činjenice kojima je ovladao. Takvo razumijevanje bitno je za razvoj osjećaja za broj. U mentalnim strategijama koje učenik bira očituju se njegove kognitivne sposobnosti. Učitelj treba obratiti pozornost koje strategije pojedini učenik koristi kako bi mogao procijeniti kakve su njegove kognitivne sposobnosti te je li spreman za usvajanje novog sadržaja ili ne. Analiziranje strategija rješavanja zadatka daje učitelju informaciju 1) o stupnju kognitivnog razvoja učenika, 2) o individualnom stilu učenja, 3) o spremnosti za usvajanje novog koncepta (Sharma, 2001).

Učenici često u procesu rješavanja zadataka računanja koriste gotove algoritme. Algoritmi su postupci koji se mogu koristiti na isti način u rješavanju mnogo različitih problema s različitim situacijama i različitim brojevima. Upotreba standardnih algoritama ima svoje pozitivne, ali i negativne strane. Naime, za svaki novi problem ne trebaju se izmišljati novi postupci te njihova

upotreba može pozitivno djelovati na razvoj matematičkog mišljenja ako se analizira zašto su algoritmi uspješni te koje su njihovi prednosti i nedostaci (National Research Council, 2009). Većina negativnih strana se svodi na to da djeca previše vremena troše na učenje gotovih postupaka bez razumijevanja što utječe na slab ili nikakav razvoj matematičkoga mišljenja. U ostatku rada ovakve smo strategije nazivali „nementalnim“ jer se ne oslanjaju na vlastite mentalne procese, ne potiču aktivno razumijevanje brojeva niti razmišljanje o razumnosti rješenja.

Mnoga istraživanja ukazuju na to da djeca u bilo kojoj točki razvoja posjeduju i koriste ne samo jedan već mnogo različitih pristupa problemu te da se varijabilnost u njihovom kognitivnom funkcioniranju ne može pripisati samo varijanci pogreške (Bjorklund i Rosenblum, 2001; Siegler, 2000 prema Pavlin-Bernardić, 2006). Istraživači, između ostalog, pokušavaju odgovoriti na pitanja kako se dječje strategije rješavanja različitih problema razvijaju te kako djeca odabiru između različitih strategija. Kada govorimo o upotrebi strategija zapravo govorimo o strateškom ponašanju, a ono za razliku od nestrategičkog ponašanja, kao što je nasumično pogađanje rješenja ili pak automatsko pozivanje neke činjenice iz dugoročnog pamćenja, uključuje prepoznavanje cilja te izbor sredstava kojima se taj cilj može ostvariti (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998).

3.1. Strategije zbrajanja i oduzimanja

U ovom će se radu detaljnije analizirati samo strategije zbrajanja i oduzimanja. Naime, prilikom rješavanja zadataka djeca mogu koristiti objekte iz okoline i prste ili verbalno brojanje (Geary, 1994 prema Pavlin-Bernardić, 2006). Za većinu je djece prijelaz s brojanja prstiju na verbalno postepen (Pavlin-Bernardić, 2006). Ipak, do kraja prvog razreda osnovne škole većina djece koristi verbalno brojanje češće od brojanja prstiju. (Geary, Brown i Samaranyake, 1991 prema Pavlin-Bernardić, 2006).

Djeca vrtićke dobi najčešće koriste strategiju prebrojavanja svih članova u skupu, kao i nastavljajanje brojanja od prvog pribrojnika. Kada prijeđu na računanje s većim brojevima, djeca često koriste strategiju rastavljanja (Siegler 1987a, prema Pavlin-Bernardić, 2006). Pokazalo se da djeca ranije upamte zbrojeve dva ista pribrojnika (npr. $1+1$, $2+2$ i slično) od drugih (Aschraft, 1992 prema Pavlin-Bernardić, 2006). Ovo činjenično znanje može poslužiti kao osnova za rješavanje drugih zadataka zbrajanja. Korištenjem ranije navedenih strategija djeca pohrane odgovore na neke zadatke u dugoročno pamćenje, tako da se kasnije pri rješavanju tih zadataka mogu koristiti i

strategijom dosjećanja (Siegler i Shrager, 1984 prema Pavlin-Bernardić, 2006). Istraživanja su pokazala da je dosjećanje to sporije i broj pogrešaka veći, što su pribrojnici u zadatku veći. Ovaj nalaz je poznat pod nazivom “efekt veličine problema“ (LeFevre, Sadesky i Bisanz, 1996 prema Pavlin-Bernardić, 2006).

Kod oduzimanja početne strategije oduzimanja oslanjaju se na mogućnost i razumijevanje brojenja unazad (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998). Pri oduzimanju, kao i pri zbrajanju, djeca najprije koriste objekte iz okoline, prste, a onda verbalno oduzimanje (Geary, 1994 prema Pavlin-Bernardić, 2006). Pokazalo se i da se pri rješavanju jednostavnih zadataka oduzimanja djeca često pozivaju na zbrajanje (Siegler 1989 prema Pavlin-Bernardić, 2006). Kao i kod ostalih operacija, uslijed iskustva u rješavanju jednostavnih zadataka oduzimanja s vremenom dominantna strategija postaje dosjećanje (Siegler i Jenkins, 1989. prema Pavlin-Bernardić, 2006).

Efekt veličine problema pokazao se i kod oduzimanja – što su brojevi u zadatku veći, dosjećanje je sporije, a broj pogrešaka veći (Geary, Frensch i Wiley, 1993; Seyler, Kirk i Aschraft, 2003 prema Pavlin-Bernardić, 2006).

Danas većina učitelja, matematičara i psihologa kojima je područje rada matematika, smatra da djecu treba prije svega podučiti kako matematika počinje „s mentalnom reprezentacijom problema, ona je proces razmišljanja o mogućim putevima za rješenje, a tek potom simboličko prikazivanje problema i izvođenje matematičkih operacija“ (prema Vizek-Vidović i sur. 2014, str. 394).

Mentalne strategije zbrajanja i oduzimanja razlikuju se kod pojedinih autora, a na osnovu iščitane literature (Thompson,1999, Thompson 2000, Vlahović Štetić i Vizek Vidović, 1998, Mental Computation Strategies⁴) dajem sljedeći popis:

- *Udvostručavanje*

Npr. $18-9 \dots '9$ jer je poznato da je $9+9=18$.

- *Komplementarno zbrajanje/ Račun trgovca*

Ova se strategija koristi dodavanjem do desetica, kod primjera $73-68$ na 68 se prvo nadoda 2 , a zatim preostala 3 do 73 te je rezultat 5 .

- *Oduzimanje kao inverzija zbrajanja*

⁴ URL:

<https://deebingheightss.eq.edu.au/Supportandresources/Formsanddocuments/Documents/Parent%20resources/mental-computation-strategies.pdf>

Ova je strategija važna jer znači da su djeca shvatila da su zbrajanje i oduzimanje suprotne računске operacije. ($7-3=4$...zato što je poznato da je $4+3=7$).

- *Blizu dvostrukoga*

Ova strategija većinom se koristi kod brojeva koji se razlikuju za 1, ali je upotrebljiva i u drugim situacijama (npr. $8+5$... 13 zato što je $8+8=16$, sa 16 uklonimo 3)

Primjer oduzimanja: $9-5=4$ zato što kada s 10 oduzmemo 5 dobijemo 5, zatim samo oduzmemo jedan jer je 9 za jedan manji od 10.

- *Korištenje petica*

Ova se strategija koristi na način da se iz pribrojnika izdvoje petice te nadoda preostali dio (npr. $6+7$... $5+5+3$).

- *Premošćivanje desetice*

Npr. $8+6$... s obzirom da je 8 za 2 manje od 10 tih 2 se nadoda s drugoga pribrojnika; $8+2=10$ te se nadoda preostali dio drugoga pribrojnika te je $10+4=14$. Ova je strategija pogodna jer jedan pribrojnik postaje višekratnik broja 10 što olakšava daljnje računanje.

Kod postupka oduzimanja cilj je doći do višekratnika broja 10 tako da se umanjitelj podijeli na dva dijela: npr.: $12-4$... $12-2=10$...zatim se oduzme preostali dio, u ovome slučaju 2.

- *Kompenzacija*

Strategija je pogodna za računanje kada je jedan od pribrojnika broj 9. Koristi se na način da se umjesto 9 doda 10 jer je s deseticama lakše računati, a potom se taj 1 „viška“ oduzme.

U slučaju oduzimanja $86-39$, na umanjitelja se doda 1 pa se oduzima $86-40$, to iznosi 46 i onaj jedan više što smo oduzeli je 47.

- *Balansiranje*

Strategija slična strategiji kompenzacije, međutim računa se na način da onoliko koliko se uzme s jednoga pribrojnika odmah se nadoda na drugi (npr. $9+7 = 10+6$...na 9 smo nadodali 1 koji smo uzeli sa 7).

- *Particija*

Kod ove se strategije pribrojnici rastavljaju na desetice i jedinice, potom se zbrajaju zajedno desetice te se nadodaje zbroj jedinica (npr. $63+56=60+50+3+6$).

Kod zadatka oduzimanja umanjjenik i umanjitelj se rastavljaju na desetice i jedinice te se oduzimaju desetice, a potom jedinice (npr. $68-32=60-30$ te $8-2$...36)

- *Sekvencioniranje*

Za razliku od particije kod ove se strategije na desetice i jedinice rastavlja samo jedan pribrojnik (npr. $55+42=55+40+2$) odnosno u slučaju oduzimanja samo umanjitelj (npr. $54-27=54-20-7$)

- *Strategija duploga*

Ova strategija uključuje prepoznavanje objekata koji u realnom životu dolaze u paru (npr. *par cipela ili 2 ruke...prste stoga zbrajamo 5+5*).

- *Računanje s deseticama*

Strategija se koristi udvostručavanjem koje se kasnije prenese na veće brojeve (npr. $40+40$ se računa kao $4+4$ te se jednostavno rezultat prenese na desetice)

- *Kompatibilni parovi*

Npr. kod zbroja $14+19+16$ prepozna se da brojevi 14 i 16 daju 30 te se na njihov zbroj jednostavnije nadoda 19.

- *Strategija prilagodbe brojeva*

Brojevi se prilagode kako bi se lakše njima računalo. Npr. zbroj $59+13$ se prilagodi u $60+12$.

- *Strategija dosjećanja*

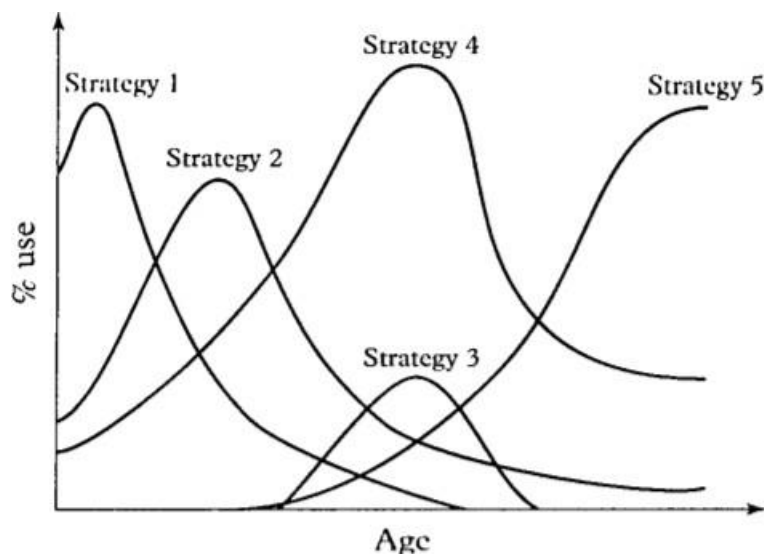
Strategija u kojoj se dozove informacija iz dugoročnog pamćenja. Primjerice, dijete odmah odgovori da je $7 + 9 = 16$.

- *Kombinacija dosjećanja i strategije*

Kad se prijeđe na računanje s većim brojevima, istodobno se koriste i činjenično znanje i strategije.. Primjerice, djeca i odrasli ponekad zbrajaju $7 + 9$ tako da jedan pribrojnik rastave na $7 + 2$, automatski iz sjećanja povuku rezultat $7 + 7 = 14$ i zatim, rabeći strategiju pribrojavanja manjeg, dodaju 2.

Nisu sve strategije jednako učinkovite niti upotrebljive u svim zadacima, npr. strategija blizu dvostrukoga dobar je izbor kad je razlika među pribrojnicima ili između umanjenika i umanjitelja manja od 5. Suprotno tomu, strategija premošćivanje desetice je upotrebljiva u svim zadacima zbrajanja u kojima zbroj jedinica dvaju pribrojnika prelazi 10. Naravno, nije moguće sve probleme rješavati određenim brojem poznatih metoda jer se neprestano pojavljuju novi problemi koji zahtijevaju nove načine rješavanja. Međutim, poznavanje većeg broja različitih strategija omogućuje lakše svladavanje novih problema i pozitivno utječe na matematičke sposobnosti učenika. Zato je vrlo važno njegovati i razvijati strategije koje učenici poznaju te ih postupno upoznavati s novim. Osobito je bitno da učenici sami upotrebom različitih strategija na različitim zadacima uoče značajke i djelotvornost pojedinih strategija jer je to preduvjet za prepoznavanje potrebe njihove primjene.

Korištenje različitih strategija pojavljuje se kod sličnih problema, pa čak i kada se isti problem djetetu zada u dva uzastopna dana. Na primjer, u istraživanju Sieglera i Shragera (1984 prema Pavlin-Bernardić, 2006), koje se bavilo dječjim strategijama zbrajanja i oduzimanja, pokazalo se da je trećina djece koristila različite strategije na istom problemu u dva uzastopna dana. Razvoj strategija Siegler (2002) uspoređuje s valovima koji se preklapaju.



Slika 2. Model valova koji se preklapaju (Siegler 2002, prema Pavlin-Bernardić 2006, str. 15.str)

S dobi i iskustvom, relativna čestina korištenja svake strategije se mijenja – neke strategije se koriste sve manje (Strategija 1 na slici), neke se koriste sve više (Strategija 5), a neke nikad nemaju visok postotak korištenja (Strategija 3). Osim što se relativna frekvencija korištenja postojećih strategija mijenja, otkrivaju se nove, a neke stare strategije prestaju se koristiti.

Siegler i Shrager (1984 prema Pavlin-Bernardić, 2006) ističu da je izuzetno bitno znati više strategija koje mogu dovesti do cilja: strategije se razlikuju po točnosti rješenja dobivenih njihovom primjenom, količini vremena koje zahtijevaju, opterećenju za pamćenje i rasponu problema na koje se mogu primijeniti. Izbor strategije uzima u obzir ove karakteristike kako bi se osoba mogla nositi sa zahtjevima situacije (primjerice vremenskim ograničenjima i uputama) i problema (koji mogu biti lakši i teži). Što je širi raspon strategija kojima osoba raspolaže, to ona bolje može odgovoriti na zahtjeve različitih situacija i problema (Pavlin-Bernardić, 2006).

Važno metodološko pitanje je na koji način utvrditi koje su strategije rješavanja matematičkih zadataka djeca koristila. Naime, nakon provedenih istraživanja dobivene rezultate treba razvrstati kako bi dali transparentan prikaz strategija koje djeca koriste. Tri su glavna metodološka pristupa

ovom problemu: klasifikacija strategija na temelju vremena latencije odgovora, klasifikacija na temelju verbalnih izvještaja ispitanika te klasifikacija na temelju vidljivog ponašanja ispitanika.

- Klasifikacija strategija na temelju vremena latencije odgovora

Prvi od navedenih pristupa se odnosi na konstrukciju kronometrijskih modela koji se zasnivaju na prosječnom vremenu rješavanja različitih zadataka. Glavna pretpostavka ovih modela je da se na osnovu najboljeg prediktora vremena rješavanja zadatka može zaključiti koja je strategija rješavanja zadatka korištena. Groen i Parkman (1972. prema Pavlin-Bernardić) utvrdili su da je veličina manjeg pribrojnika najbolji prediktor vremena rješavanja zadataka kod učenika prvog razreda osnovne škole. Stoga su pretpostavili da djeca ove dobi uvijek koriste strategiju pribrajanja manjeg pribrojnika većem kako bi riješila jednostavne zadatke zbrajanja. Primjerice, dijete koje koristi ovu strategiju riješilo bi zadatak $7+2$ tako što bi počelo od 7 i odbrojalo „8, 9“. pretpostavili su da je jedini izvor varijacija u vremenu rješavanja za različite zadatke veličina manjeg pribrojnika. Stoga bi vrijeme rješavanja zadataka $4+3$, $3+7$ i $9+3$ trebalo biti isto jer sva tri zadatka zahtijevaju odbrojavanje tri broja iznad većeg pribrojnika. Aschraft (1982. prema Pavlin-Bernardić, 2006) utvrdio je da je veličina manjeg pribrojnika najbolji prediktor vremena rješavanja zadatka za učenike prvog razreda dok su veličina manjeg pribrojnika i kvadrirani zbroj pribrojnika podjednako dobri prediktori vremena rješavanja zadatka za učenike trećeg razreda, a nakon trećeg razreda najbolji prediktor je kvadrirani zbroj pribrojnika.

- Klasifikacija strategija na temelju verbalnih izvještaja

U drugoj skupini istraživanja o korištenim se strategijama zaključuje na temelju verbalnih iskaza djece. Nakon svakog zadatka istraživač pita dijete da objasni na koji ga je način riješilo. Istraživanja koja se koriste ovim pristupom pokazala su da djeca određene dobi ne koriste samo jednu, već više različitih strategija prilikom rješavanja matematičkih zadataka. Iako u određenoj dobnoj skupini neka strategija može biti dominantno korištena, često se pojavljuju i ostale i to ne samo kod različite djece iste dobi, već i kod istog djeteta. Siegler (1987b prema Pavlin-Bernardić, 2006) navodi da su verbalni izvještaji djece valjan način da se dođe do podataka o strategijama koje su koristili prilikom rješavanja zadataka.

Postavljalo se pitanje zbog čega istraživanja koja se koriste kronometrijskom analizom i ona koja se koriste verbalnim iskazima djece daju proturječne rezultate. Siegler (1987b prema Pavlin-Bernardić, 2006) je, stoga proveo nekoliko istraživanja te došao do zaključka da se vremena rješavanja zadataka nikako ne smiju analizirati za sve zadatke zajedno, ali kada se posebno

analiziraju za svaku korištenu strategiju, pružaju dodatne informacije o tome je li klasifikacija dječjih strategija bila točna.

- Klasifikacija strategija na temelju ponašanja ispitanika

U manjem broju istraživanja (Lemaire i Siegler, 1995; Siegler, 1987b; Siegler 1988b, Eksperiment1; Siegler i Shrager, 1984. prema Pavlin-Bernardić, 2006) strategije su klasificirane samo na temelju vidljivog ponašanja djece. U slučajevima kada djeca ne bi pokazivala nikakvo vidljivo ponašanje (primjerice, brojanje na prste ili brojanje na glas), strategija je bila klasificirana kao dosjećanje. Međutim, oslanjanje samo na ove informacije može dovesti do netočnih klasifikacija dječjih strategija, tj. podcijeniti čestinu korištenja različitih proceduralnih , «rezervnih» strategija.

Od navedene tri metode za utvrđivanje repertoara strategija, najprikladnijim se pokazalo korištenje verbalnih izvještaja.

Postavlja se pitanje valjanosti verbalnih izvještaja stoga su provedena istraživanja i na tu temu. Verbalni izvještaji mogu biti istovremeni, kada sudionici istraživanja verbaliziraju svoje misli za vrijeme rješavanja nekog problema i retrospektivni, kada o svojim misaonim procesima izvještavaju nakon svakog problema ili serije problema (Lemaire i Fabre, 2005. prema Pavlin-Bernardić, 2006)

Russo i sur. (1989. prema Pavlin-Bernardić, 2006) navode da zahtjev za verbalnim izvještavanjem može smanjiti dostupne mentalne resurse sudionika i/ili motivirati ih na davanje točnijih odgovora jer će njihove pogreške biti javnije izložene tijekom davanja verbalnih izvještaja. Također smatraju da korištenje verbalnih izvještaja ponekad može utjecati na odabir strategije rješavanja nekog problema. Naime, ako sudionici istraživanja znaju da će morati reći nešto o strategiji rješavanja problema, iako zapravo ne mogu (istovremeno ili retrospektivno) reći na koji način su problem riješili, moguće je da će probleme početi rješavati onim strategijama koje mogu točno opisati. Dakle, neće ih rješavati načinima koje bi uobičajeno koristili (Pavlin-Bernardić, 2006, str. 12).

Robinson (2001. prema Pavlin-Bernardić, 2006) je ispitala vjerodostojnost i reaktivnost verbalnih izvještaja učenika 1., 3. i 5. razreda osnovne škole o strategijama koje su koristili prilikom rješavanja jednostavnih zadataka. Učenici su po slučaju sudjelovali u jednoj od tri eksperimentalne situacije: u jednoj su za vrijeme rješavanja zadatka naglas trebali izvještavati o tome na koji način ga pokušavaju riješiti (istovremeni verbalni izvještaj), u drugoj su nakon rješavanja zadatka trebali

izvijestiti na koji način su ga riješili (retrospektivni verbalni izvještaj), a u trećoj nisu trebali izvijestiti na koji način su rješavali zadatke. Pokazalo se kako su i istovremeni i retrospektivni verbalni izvještaji učenika sva tri ispitana razreda osnovne škole vjerodostojni.

Robinson (2001, prema Pavlin-Bernardić, 2006) zaključuje kako verbalni izvještaji predstavljaju valjan izvor podataka o dječjim strategijama rješavanja jednostavnih aritmetičkih zadataka. Uz to, na temelju rezultata ovog istraživanja ona upozorava kako je pri ispitivanju dječjih strategija rješavanja aritmetičkih zadataka prikladnije koristiti retrospektivne verbalne izvještaje od istovremenih.

U većini novijih istraživanja koja se bave dječjim strategijama rješavanja matematičkih zadataka (npr. Kerkman i Siegler, 1993; Kerkman i Siegler, 1997 prema Pavlin-Bernardić, 2006) o korištenim strategijama zaključuje se na temelju snimki ponašanja djece i njihovih retrospektivnih verbalnih izvještaja. Postupak je sljedeći: dijete je samo s eksperimentatorom/icom u prostoriji; zadaci mu se čitaju, a ono treba reći rješenje zadatka. Nakon što kaže rješenje, djetetu se postavi pitanje na koji način je riješilo zadatak. Ako je djetetov odgovor nejasan, postavljaju mu se i dodatna pitanja. Kako bi se odgovori lakše klasificirali, koriste se audio ili video snimke dječjeg ponašanja pri rješavanju zadatka. Uz to se i mjeri vrijeme koje protekne od kada eksperimentator/ica pročita zadatak do djetetovog odgovora. Preporučuje se da odgovore svakog djeteta na svaki zadatak klasificiraju dva nezavisna procjenjivača, a na visoko slaganje između njihovih klasifikacija ukazuju korelacije iznad 0.90 (Lemaire i Fabre, 2005 prema Pavlin-Bernardić, 2006, str. 14).

3.2. Strategije zbrajanja i oduzimanja u udžbenicima

Učenje matematike u školi odvija se često na vrlo suženom uzorku zadataka u kojem djeca najčešće ne vide svrhu takvog učenja i stečena znanja vrlo teško primjenjuju u svakodnevnom životu (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998). Također, broj strategija s kojima se učenici upoznaju često je skučen i oni mogu doživjeti da se zbrajati/ oduzimati može jedino na način prikazan u udžbeniku. To automatski umanjuje potrebu učenika da razvija vlastite strategije za rješavanje zadatka te ga potiče da koristi gotove obrasce, one u kojima često niti ne zna čemu pojedini korak rješavanja služi niti o tome razmišlja.

Danas većina učitelja, matematičara i psihologa kojima je područje rada matematika, smatra da djecu treba prije svega podučiti kako matematika počinje „s mentalnom reprezentacijom problema,

ona je proces razmišljanja o mogućim putevima za rješenje, a tek potom simboličko prikazivanje problema i izvođenje matematičkih operacija“ (Vizek-Vidović i sur 2014). To bi značilo da treba poticati razmišljanje o zadatku i njegovom rješavanju, a ne isključivo na koji će način postupak računanja biti zapisan i slično.

U nastavku ćemo vidjeti koji su načini rješavanja zadataka zbrajanja i oduzimanja prikazani u udžbenicima 1 i 2.

- *Zbrajanje i oduzimanje u skupu brojeva do 10*

U udžbeniku 1 kod zadataka zbrajanja brojeva do 10 nalaze se zadatci s domino kockama gdje se zbrajaju točkice na kockama, zbrajanje na računaljci te na prste.

Zadatci oduzimanja prikazani su pomoću računaljke te pomoću računanja na prste.

- *Zbrajanje i oduzimanje u skupu brojeva do 20*

Zbrajanje brojeva do 20 također je na samome početku prikazano domino kockama. Nadalje nalazimo zadatke zbrajanja pomoću brojevnice. U nekoliko zadataka (pr. $8+5$, $9+2$) prikazana je strategija premošćivanja desetice (na prvi se pribrojnik nadodaje koliko nedostaje do prve desetice, a zatim preostali dio; $8+2+3$) te na primjeru $9+6$ strategija balansiranje. Na primjeru $7+5$ prikazano je zbrajanje pomoću petica ($5+5+2$).

Računska operacija oduzimanja prikazana je pomoću brojevnice, strategijom premošćivanja desetice (pr. $15-6$, $13-6$) te strategijom particije na primjeru $15-12$ gdje je objašnjeno da se oduzmu jedinice, a desetice prepisu.

- *Zbrajanje i oduzimanje u skupu brojeva do 100*

Kod zbrajanja i oduzimanja brojeva do 100 nalazimo prikaz strategije računanje s deseticama (pr. $2D+1D=3D$, $20+10=30$; $2D-1D=1D$, $20-10=10$)

Prikazano je i zbrajanje računaljkom, na primjeru $3+60$, objašnjeno je kako je lakše računati ako pribrojnicima zamijenimo mjesta te računamo kao $60+3$.

U nastavku se nalaze strategije premošćivanje desetice, particija, sekvencioniranje i inverzija.

Premošćivanje desetice prikazano je na primjeru zbrajanja $37+5=37+3+2$ te na primjeru oduzimanja $42-5=42-2-3$. U slučaju zbrajanja vodi se razgovor između dječaka i djevojčice na sljedeći način: „Broj 5 prikazali smo kao zbroj $3+2$.“

„Zbrojili smo $37+3$ te dobili 40.“

„Da, kažemo da smo dopunili do 40.“

„Na kraju smo broju 40 pribrojili broj 2“

Dan je primjer particije $34+25$ gdje je sa strane istaknuta kratka napomena „*Zbrajamo desetice s deseticama, a jedinice s jedinicama*“.

Strategija sekvencioniranje prikazana je kroz primjer zbrajanja $34+25$, a objašnjena: „*Broj 25 prikazali smo kao $20+5$. Broju 30 pribrojili smo 20, a zatim 5*“. Oduzimanje je prikazano na primjeru $59-25$ te objašnjeno: „*Umanjitelj smo rastavili na desetice i jedinice. Od umanjenika oduzeli smo najprije desetice, onda jedinice.*“

Nalazimo i strategiju inverzije koju se želi objasniti kao vezu zbrajanja i oduzimanja, a na primjeru $45+50=95$ pa je $95-45=50$.

4. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

4.1. Predmet i problem istraživanja

Provedenim istraživanjem željelo se istražiti koje sve strategije i koliko često koriste učenici nižih razreda osnovne škole (3. i 4.) prilikom računskih operacija zbrajanja i oduzimanja brojeva do 100. Istraživanje smo odlučili provesti na učenicima 3. i 4. razreda jer su oni već svladali zbrajanje i oduzimanje u skupu brojeva do 100 te smo na takvim zadacima i temeljili ispitivanje.

4.2. Cilj i zadatci istraživanja

Utvrđiti koje sve mentalne strategije (uz učestalost) koriste učenici nižih razreda osnovne škole prilikom zbrajanja i oduzimanja brojeva do 100 te dobiti uvid u strategije kojima se poučava u školskim udžbenicima prvih i drugih razreda osnovne škole.

4.3. Problemi

PROBLEM 1: Ispitati koje sve strategije zbrajanja i oduzimanja koriste učenici 3. i 4. razreda te kolika je zastupljenost u korištenju svake pojedine strategije.

PROBLEM 2: Ispitati koje su sve strategije učenici 3. i 4. razreda koristili na pojedinome zadatku te u kojem postotku.

PROBLEM 3: Ispitati razlike (s obzirom na dob) u broju korištenih strategija te postotku korištenosti svake od njih prema svakome zadatku kod učenika.

Očekujemo da će se broj strategija mijenjati prelaskom u viši razred na način da će učenici 4. razreda koristiti više strategija u odnosu na učenike 3. razreda.

PROBLEM 4: Ispitati koliko je različitih strategija (mentalnih i „nementalnih“ te sveukupno) koristio svaki učenik.

Očekujemo da će svaki učenik koristiti barem 3 različite strategije na svih 10 zadataka.

PROBLEM 5: Ispitati razlike (s obzirom na dob) u prosječnoj vrijednosti korištenja mentalnih, „nementalnih“ te strategija sveukupno kod učenika 3. i 4. razreda

Očekujemo da će učenici četvrtoga razreda koristiti veći broj mentalnih, a manji broj „nementalnih“ strategija.

4.4. Instrument istraživanja i uzorak

U svrhu ispitivanja strategija zbrajanja i oduzimanja te razlika s obzirom na dob u korištenim strategijama provedeno je istraživanje u lipnju 2021. godine. Ukupno su u istraživanju sudjelovala 34 učenika. Od ukupnog broja ispitanika njih 16 (47%) su bili učenici 3., a njih 18 (53%) učenici 4. razreda.

Kako bi se realiziralo istraživanje i dobili odgovori na postavljene probleme primijenjen je modificirani intervju koji se sastojao od 10 zadataka, 5 njih bili su zadatci zbrajanja dok su preostalih 5 zadatci oduzimanja (Prilog 1).

4.5. Tijek istraživanja

Prije provođenja istraživanja zatražena je suglasnost ravnatelja škole i učiteljica razreda u kojima je istraživanje provedeno na što su se oni pozitivno očitovali.

Sa svakim je djetetom provedeno individualno ispitivanje u trajanju od otprilike 5 minuta. Ispitivanje je provedeno na sljedeći način:

Za vrijeme trajanja redovne nastave, a prema prethodnome dogovoru s učiteljicom ispitivač je bio smješten u posljednjoj klupi u stražnjem dijelu razreda. Prije samog provođenja ispitivanja učenicima je objašnjeno da će ih se ispitati 5 zadataka zbrajanja te 5 zadataka oduzimanja. Napomenuto im je kako krajnji rezultat računanja nije bitan već da trebaju detaljno opisati način na koji računaju određeni zadatak. Dogovoreno je kojim će redom prilaziti ispitivaču. Svaki je učenik intervjuiran o svakome zadatku neposredno nakon njegovoga rješavanja. Ispitivač bi učeniku rekao prvi zadatak, a učenik bi mu odmah odgovarao na koji način ga rješava, ispitivač je istovremeno ispisivao bilješke prema odgovoru koji je učenik dao. Na isti su način obrađeni svi zadatci sa svakim učenikom zasebno. Uz ono što su govorili, a pogotovo kad učenici ne bi sami znali verbalizirati način kojim se služe bila bi im postavljana potpitanja kako bi se moglo ustanoviti kojim su postupkom rješavali pojedini zadatak. Učenici nisu imali vizualni pristup zadatcima jer se smatralo kako bi ih vizualni doživljaj omeo te da njihovi odgovori tada ne bi bili realni. Zadatci su bili isti za sve učenike, no za svakoga je učenika postojao zaseban testni papir kako bi se mogli bilježiti njihovi odgovori.

Učenici nisu imali uvid u bilješke koje je ispitivač ispisivao povodom njihovih odgovora.

4.6. Rezultati

Sukladno Problemu 1 (ispitati koje sve strategije koriste učenici 3. i 4. razreda) u nastavku slijedi popis.

Prilikom rješavanja zadataka zbrajanja učenici su koristili ove mentalne strategije:

- Particija
- Pamćenje
- Premošćivanje desetice
- Kompenzacija
- Sekvencioniranje
- Balansiranje
- Blizu dvostrukoga.

Prilikom rješavanja zadataka oduzimanja koristili su ove mentalne strategije:

- Particija
- Pamćenje
- Premošćivanje desetice
- Blizu dvostrukoga
- Inverzija
- Udvostručavanje
- Sekvencioniranje
- Kompenzacija

Prilikom rješavanja zadataka zbrajanja i oduzimanja koristili su sljedeće „nementalne“ strategije:

- Pisano računanje
- Računanje na prste

Kako smo već pisali u poglavlju *Strategija računanja*, ne koriste sva djeca mentalne strategije čak ni onda kada se to od njih traži isto smo uvidjeli i tijekom našega istraživanja. Naime, nekolicina je učenika na pitanje „*Kako si doš/ao/la do toga odgovora?*“ dala odgovor „*Ja to sebi u glavi pisano izračunam*“. Oni su postupak pisanoga računanja automatizirali do te mjere da ga koriste bez samoga pisanoga postupka. Neki su, pak učenici govorili da su izračunali na prste što, također, ne spada u mentalne strategije.

Zanimljivo je što u poglavlju *Strategije zbrajanja i oduzimanja u udžbenicima* nismo naveli pisano računanje upravo zato što se ono u udžbenicima prvoga i drugoga razreda niti ne nalazi. Naime, pisano računanje počinje se učiti u 3. razredu kod zbrajanja i oduzimanja u skupu brojeva do 1 000. Iz navedenoga dolazimo do zaključka kako su učenici zadane im zadatke učili rješavati na neke druge načine koji ne uključuju pisano računanje. Međutim, naknadnim učenjem pisanoga računanja su počeli i jednostavnije zadatke rješavati na isti način.

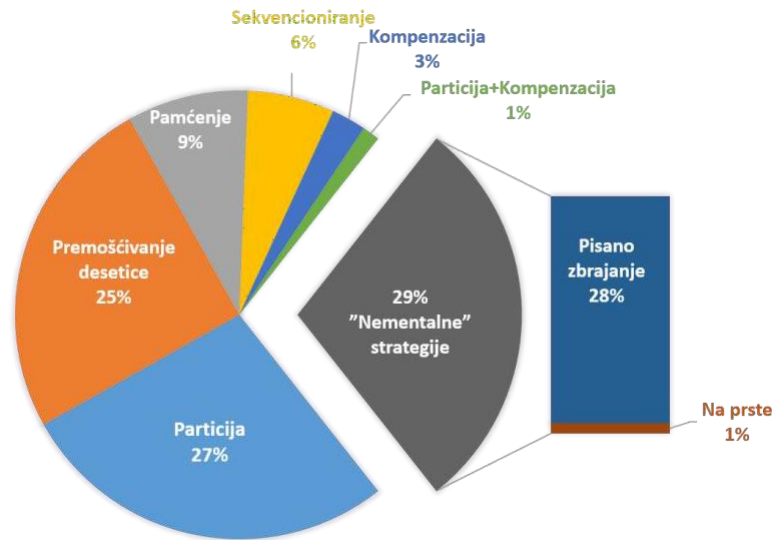
U nastavku slijedi tablični prikaz postotka korištenja mentalnih i „nementalnih“ strategija.

Tablica 1. Tablični prikaz korištenja mentalnih i „nementalnih“ strategija prema razredima kod učenika OŠ Lučac

	MENTALNE	„NEMENTALNE“
ZBRAJANJE		
3.razred	71,25%	28,75%
4.razred	87,78%	12,22%
ODUZIMANJE		
3.razred	88,75%	11,25%
4.razred	82,22%	17,78%

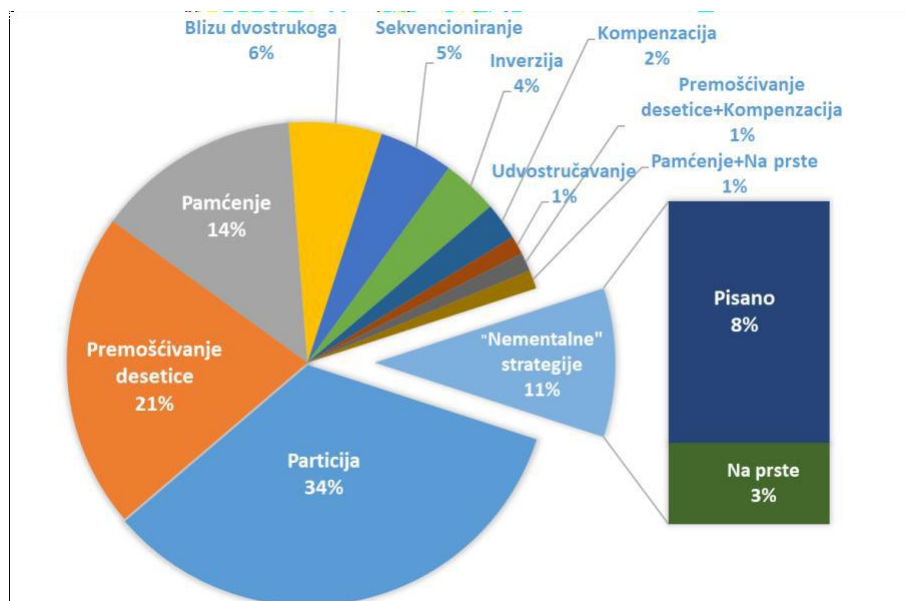
Iz tablice je vidljivo kako učenici trećega razreda koriste nešto veći postotak mentalnih strategija kod zadataka oduzimanja nego što je to slučaj sa zadacima zbrajanja. Suprotno tomu, učenici četvrtoga razreda veći postotak korištenja mentalnih operacija imaju kod zadataka zbrajanja. Kod zadataka zbrajanja postotak „nementalnih“ strategija opada s promjenom dobi što se može prepisati usvajanju sve većega broja mentalnih strategija.

U nastavku su u svrhu odgovora na Problem 1 dijagramom prikazane korištene strategije zbrajanja kod učenika 3. razreda.



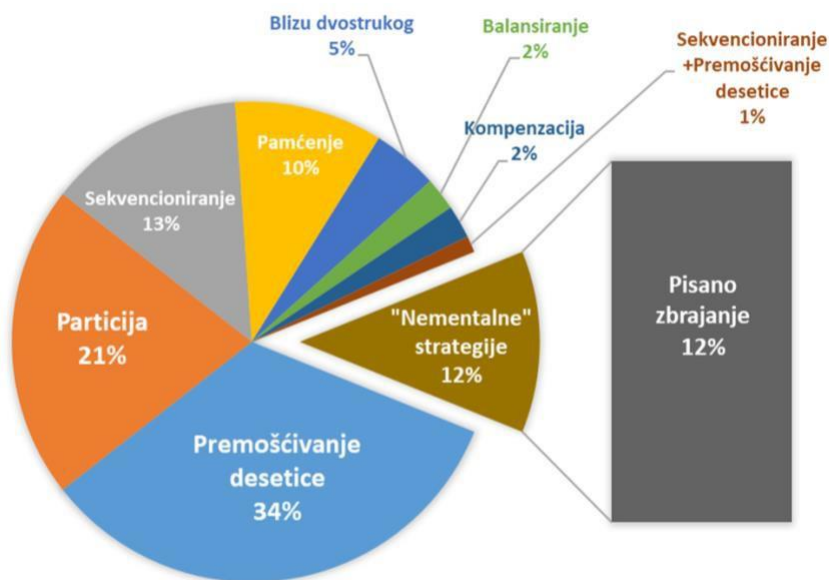
Slika 3. Grafički prikaz strategija zbrajanja kod učenika 3. razreda

Iz dijagrama je uočljivo da od mentalnih strategija prevladavaju particija i premošćivanje desetice, zajedno čine više od polovine strategija ukupno. Uočljivo je također da je udio „nementalnih“ strategija velik i to strategije pisanoga zbrajanja. Podatci unutar dijagrama pokazuju kako koriste pojedine strategije naučene u školi (particiju, premošćivanje desetice, sekvencioniranje te pisano zbrajanje), ali i kompensaciju koju su sami razvili, iako se pojavljuje u jako malom postotku.



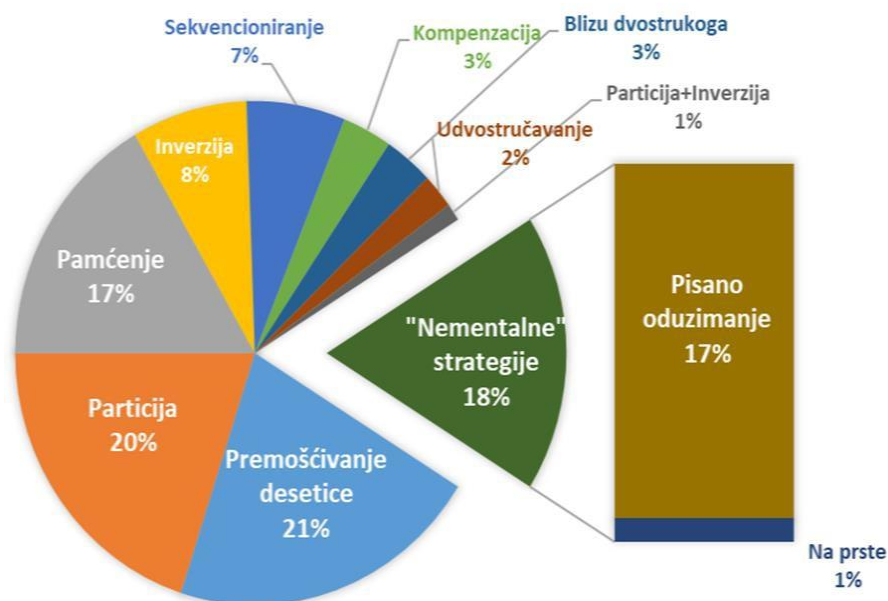
Slika 4. Grafički prikaz strategija oduzimanja u 3. razredu

Na prikazanome dijagramu vidi se da su učenici koristili razne mentalne strategije. Udio particije i premošćivanja desetice opet čini više od polovine, slijedi ih pamćenje te tek u tragovima ostale strategije poput kompenzacije, udvostručavanja te kombinacija. „Nementalne“ su strategije korištene u 11% posto slučajeva od kojih otprilike četvrtina pripada oduzimanju na prste dok preostali dio otpada na pisano oduzimanje. Uočavamo da su učenici 3. razreda kod zadataka oduzimanja koristili strategije iz udžbenika (particija, premošćivanje desetice, sekvencioniranje, inverzija, pisano oduzimanje te računanje na prste), ali su razvili i nekoliko vlastitih strategija kao što su blizu dvostrukog, kompenzacija i udvostručavanje.



Slika 5. Grafički prikaz strategija zbrajanja u 4. razredu

Iz dijagrama je vidljivo da je strategija premošćivanje desetice korištena u trećini slučajeva, slijede je particija, sekvencioniranje i pamćenje dok su strategije blizu dvostrukog, balansiranje, kompenzacija zastupljene u jako niskim postocima. „Nementalne“ su strategije korištene u 12% slučajeva i to u potpunosti kroz strategiju pisanoga zbrajanja. Učenici 4. razreda osim strategija naučenih u školi koristili su strategiju blizu dvostrukog i kompenzaciju koje su sami razvili.



Slika 6. Grafički prikaz strategija oduzimanja u 4. razredu

Iz dijagrama je vidljivo da su učenici 4. razreda prilikom oduzimanja koristili „nementalne“ strategije u čak 18% slučajeva i to gotovo isključivo strategiju pisanoga oduzimanja. Mentalne strategije koje prevladavaju su premošćivanje desetice, particija i pamćenje dok se pojedine strategije kao što su kompenzacija, blizu dvostrukoga i udvostručavanje nalaze tek u neznatnim postotcima. Kod zadataka oduzimanja učenici 4. razreda također su koristili strategije koje su sami razvili (kompenciju, udvostručavanje te strategiju blizu dvostrukog) u jako malom postotku dok su značajno zastupljene strategije naučene iz udžbenika.

U svrhu Problema 2 u sljedećim je tablicama prikazano koje su sve strategije i u kojemu postotku za svaki zadatak koristili ispitanici.

Tablica 2. Tablični prikaz učestalosti različitih strategija zbrajanja na ukupnom uzorku 3. razreda za svaki od zadataka ($N=16$)

ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA
25+26	Particija	43,75%
	Pisano	31,25%
	Sekvencioniranje	18,75%
	Premošćivanje desetice	6,25%
35+15	Particija	50%

	Pisano	31,25%
	Premošćivanje desetice	12,5%
	Sekvencioniranje	6,25%
18+6	Premošćivanje desetice	50%
	Pisano	37,5%
	Particija	12,5%
47+19	Pisano	37,5%
	Particija	31,25%
	Premošćivanje desetice	12,5%
	Kompenzacija	6,25%
	Sekvencioniranje	6,25%
	Particija + Kompenzacija	6,25%
9+6	Pamćenje	43,75%
	Premošćivanje desetice	43,75%
	Kompenzacija	6,25%
	Na prste	6,25%

Uvidom u Tablicu 2. vidljivo je da su učenici 3. razreda prilikom rješavanja zadataka zbrajanja koristili 3 do 6 različitih strategija. Mentalna strategija particija korištena je u čak 4 od 5 zadataka, a u njih 3 nalazila se na samome vrhu po čestini korištenja. Premošćivanje desetice je korišteno u svih 5 zadataka. Strategija pisanoga zbrajanja korištena je također u 4 od 5 zadataka i to u svakome od njih više od 30% puta. Strategija sekvencioniranja je korištena 5 puta, a kompenzacija tek 2 puta. u petome se zadatku javlja i računanje na prste kod samo jednoga učenika.

Tablica 3. Tablični prikaz učestalosti različitih strategija oduzimanja na ukupnom uzorku 3. razreda za svaki od zadataka (N=16)

ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA
46-23	Particija	68,75%
	Sekvencioniranje	25%
	Udvostručavanje	6,25%
30-16	Particija	75%
	Pisano	12,5%

	Blizu dvostrukoga	12,5%
45-7	Premošćivanje desetice	50%
	Particija	25%
	Pamćenje	12,5%
	Pisano	12,5%
7-3	Pamćenje	56,25%
	Na prste	12,5%
	Inverzija	12,5%
	Blizu dvostrukoga	12,5%
	Pisano	6,25%
16-9	Premošćivanje desetice	56,25%
	Kompenzacija	12,5%
	Inverzija	6,25%
	Blizu dvostrukoga	6,25%
	Pisano	6,25%
	Premošćivanje desetice + Inverzija	6,25%
	Pamćenje + Na prste	6,25%

Iz Tablice 3. vidljivo je da su učenici trećega razreda kod rješavanja zadataka oduzimanja koristili od 3 do 6 različitih strategija, a u posljednjem zadatku se javlja i kombinacija dvije strategije. Uočljivo je kako se kod svih 5 zadataka dominantna strategija javlja u 50% slučajeva ili više. Kod prva dva zadatka dominantna strategija je particija, kod trećeg i petog zadatka premošćivanje desetice, a u četvrtom zadatku dominira strategija pamćenja. Pisano se računanje pojavljuje u 6 slučajeva na razini svih pet zadataka.

Tablica 4. Tablični prikaz učestalosti različitih strategija zbrajanja na ukupnom uzorku 4. razreda za svaki od zadataka (N=18)

ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA
25+26	Particija	38,89%
	Blizu dvostrukoga	22,22%
	Pisano	11,11%

	Premošćivanje desetice	11,11%
	Sekvencioniranje	11,11%
	Pamćenje	5,56%
35+15	Sekvencioniranje	33,33
	Particija	27,78%
	Premošćivanje desetice	27,78%
	Pisano	11,11%
18+6	Premošćivanje desetice	50%
	Particija	16,67%
	Pisano	16,67%
	Pamćenje	11,11%
	Balansiranje	5,56%
47+19	Particija	22,22%
	Pisano	22,22%
	Premošćivanje desetice	22,22%
	Sekvencioniranje	16,67%
	Sekvencioniranje + Premošćivanje desetice	11,11%
	Kompenzacija	5,56%
9+6	Pamćenje	33,33%
	Premošćivanje desetice	55,56%
	Kompenzacija	5,56%
	Balansiranje	5,56%

Uvidom u Tablicu 4. vidljivo je da su učenici 4. razreda pri rješavanju zadataka zbrajanja koristili 4 do 6 različitih strategija. U prvome zadatku dominantna je strategija particija. U drugome su zadatku particija, sekvencioniranje i premošćivanje desetice korištene u sličnom broju slučajeva. U trećem i petom zadatku dominantna je strategija premošćivanje desetice dok se u četvrtom zadatku sve strategije koriste u sličnom postotku. Strategija pisanog zbrajanja koristila se u 4 od 5 zadataka i to u 2 do 4 slučaja.

Tablica 5. Tablični prikaz učestalosti različitih strategija oduzimanja na ukupnom uzorku 4. razreda za svaki od zadataka (N= 18)

ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA
46-23	Particija	33,33%
	Sekvencioniranje	33,33%
	Pisano	22,22%
	Udvostručavanje	11,11%
30-16	Particija	55,56%
	Pisano	22,22%
	Blizu dvostrukoga	16,67%
	Pamćenje	5,56%
45-7	Premošćivanje desetice	66,67%
	Pisano	22,22%
	Particija	5,56%
	Particija + Inverzija	5,56%
7-3	Pamćenje	72,22%
	Inverzija	27,78%
16-9	Premošćivanje desetice	38,89%
	Pisano	16,67%
	Kompenzacija	16,67%
	Inverzija	11,11%
	Na prste	5,56%
	Particija	5,56%
	Pamćenje	5,56%

Uvidom u Tablicu 5. uočljivo je da je raspon korištenih strategija velik, od 2 u četvrtome zadatku do čak njih 7 u petome zadatku. U prvome zadatku dominiraju particija i sekvencioniranje, u drugome je zadatku u više od 50% slučajeva korištena particija dok je u trećem u više od 60% slučajeva korištena strategija premošćivanje desetice. U četvrtome zadatku gotovo $\frac{3}{4}$ učenika koristilo je strategiju pamćenja. Strategija pisanoga oduzimanja pojavljuje se kod 4 od pet zadataka i to u 15 slučajeva, a 1 je učenik koristio računanje na prste.

U nastavku su u svrhu odgovora na Problem 3 prikazane razlike (s obzirom na dob) u broju korištenih strategija te postotku korištenosti svake od njih prema svakome zadatku.

Tablica 6. Tablični prikaz raznolikosti i učestalosti različitih strategija zbrajanja na ukupnom uzorku 3. i 4. razreda (N=34)

ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA (3.RAZRED)	ČESTINA (4.RAZRED)
25+26	Particija	43,75%	38,89%
	Pisano	31,25%	11,11%
	Premošćivanje desetice	6,25%	11,11%
	Sekvencioniranje	18,75%	11,11%
	Blizu dvostrukoga		22,22%
	Pamćenje		5,56%
35+15	Particija	50%	27,78%
	Pisano	31,25%	11,11%
	Premošćivanje desetice	12,5%	27,78%
	Sekvencioniranje	6,25%	33,33%
18+6	Particija	12,5%	16,67%
	Pisano	37,5%	16,67%
	Premošćivanje desetice	50%	50%
	Balansiranje		5,56%
	Pamćenje		11,11%
47+19	Particija	31,25	22,22%
	Pisano	37,5%	22,22%
	Premošćivanje desetice	12,5%	22,22%
	Kompenzacija	6,25%	5,56%
	Sekvencioniranje	6,25%	16,67%
	Particija +	6,25%	
	Kompenzacija		
	Sekvencioniranje + Premošćivanje desetice		1,11%
9+6	Pamćenje	43,75%	33,33%
	Premošćivanje desetice	43,75	55,56%
	Kompenzacija	6,25%	5,56%

Na prste	6,25%
Balansiranje	5,56%

Iz Tablice 6. vidljivo je da su učenici 4. razreda uz sve strategije koje su koristili učenici 3. razreda koristili još dvije strategije, to su strategija blizu dvostrukoga te strategija pamćenja. U drugome i četvrtome zadatku koristili su iste strategije, međutim uočljivo je da su mentalne strategije u 4. razredu korištene u većem postotku nego što je to slučaj u 3. razredu. U trećem zadatku učenici 4. razreda su koristili 2 strategije više i to strategiju pamćenja i balansiranja. U petome zadatku učenici 4. razreda koristili su strategiju balansiranja koja se nije pojavila u istome zadatku kod učenika 3. razreda, također, strategija računanja na prste koja je bila korištena u 3. razredu nije korištena u 4. razredu. Uočljivo je da se strategija pisanoga zbrajanja pojavljuje kod učenika oba razreda u prva četiri zadatka, no kod učenika 4. razreda u znatno nižem postotku nego kod učenika 3. razreda.

Tablica 7. Tablični prikaz raznolikosti i učestalosti različitih strategija oduzimanja na ukupnom uzorku 3. i 4. razreda (N= 34)

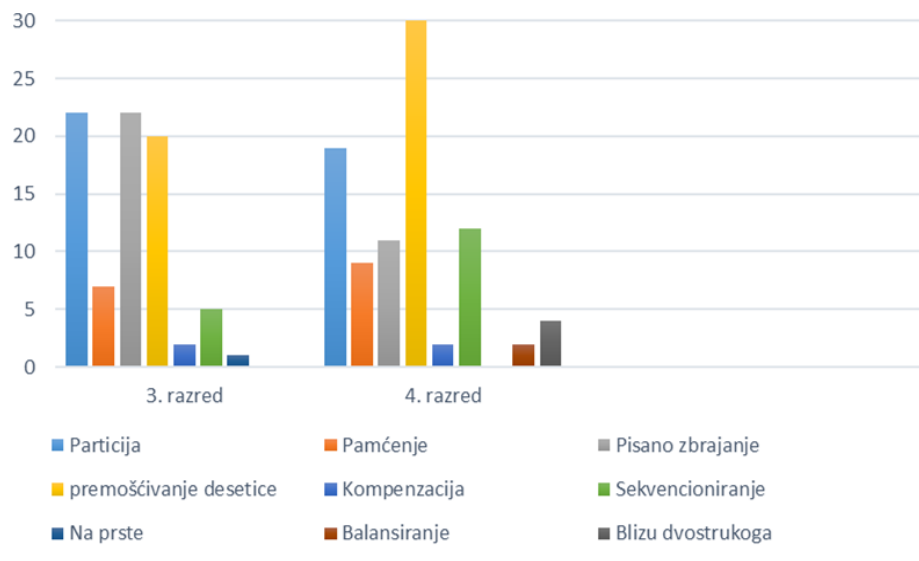
ZADATAK	STRATEGIJA	ČESTINA	ČESTINA
		(3.RAZRED)	(4.RAZRED)
46-23	Particija	68,75%	33,33%
	Sekvencioniranje	25%	33,33%
	Udvostručavanje	6,25%	11,11%
	Pisano		22,22%
30-16	Particija	75%	55,56%
	Pisano	12,5%	22,22%
	Blizu dvostrukoga	12,5%	16,67%
	Pamćenje		5,56%
45-7	Particija	25%	5,56%
	Pisano	12,5%	22,22%
	Premošćivanje desetice	50%	66,67%
	Pamćenje	12,5%	
	Particija + Inverzija		5,56%
7-3	Pamćenje	56,25%	72,22%
	Inverzija	12,5%	27,78%

	Pisano	6,25%	
	Na prste	12,5%	
	Blizu dvostrukoga	12,5%	
16-9	Pisano	6,25%	16,67%
	Premošćivanje desetice	56,25%	38,89%
	Kompenzacija	12,5%	16,67%
	Inverzija	6,25%	11,11%
	Blizu dvostrukoga	6,25%	
	Premošćivanje desetice + Inverzija	6,25%	
	Pamćenje + Na prste	6,25%	
	Particija		5,56%
	Pamćenje		5,56%
	Na prste		5,56%

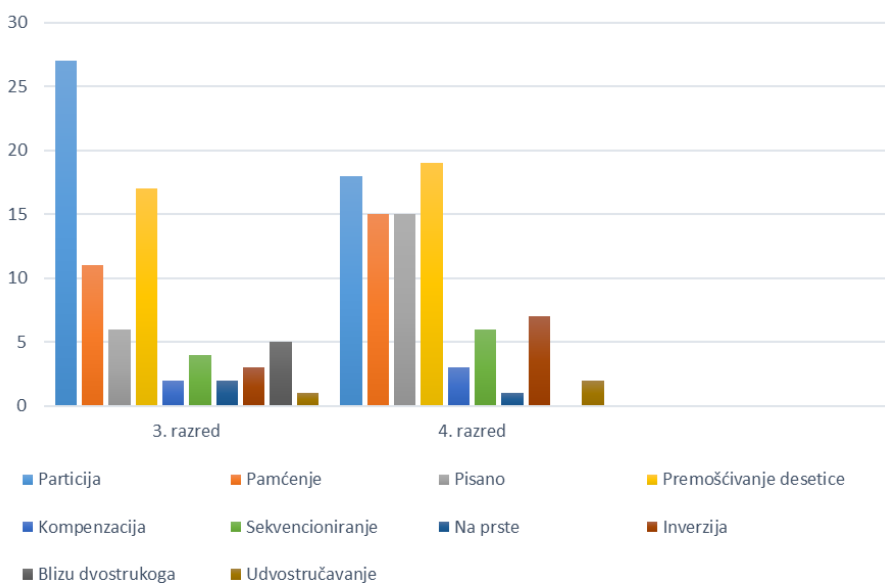
Uvidom u Tablicu 7. vidljivo je da se u prva dva zadatka oduzimanja pojavljuju 3 strategije kod svih učenika, ali se kod oba zadatka u 4. razredu javlja po jedna dodatna strategija, u prvome zadatku to je strategija pisanoga oduzimanja, a u drugome zadatku strategija pamćenja. U trećem se zadatku kod učenika 4. razreda javlja kombinaciju dviju strategija, particije i inverzije dok se strategija pamćenja koja je prisutna kod učenika 3. razreda gubi u 4. razredu.

U četvrtome zadatku učenici 4. razreda koristili su samo 2 strategije dok su u istome zadatku učenici 3. razreda koristili čak njih 5. u petome zadatku značajna je razlika u korištenim strategijama. Mentalne strategije premošćivanje desetice, kompenzacije i inverzije te strategiju pisanoga oduzimanja koristili su svi ispitanici. U 3. je razredu zastupljena strategija blizu dvostrukoga koja se ne pojavljuje u 4. razredu dok su strategije particija, pamćenje i na prste u petom zadatku zastupljene samo kod učenika 4. razreda. Učenici 3. razreda koristili su i kombinacije strategija premošćivanje desetice i inverzije te kombinaciju pamćenja i oduzimanja na prste.

U nastavku se nalaze dijagrami na kojima je zornije prikazana pojavnost te učestalost korištenih strategija.



Slika 7. Grafički prikaz raznolikosti i čestine korištenih strategija zbrajanja s obzirom na dob (3. i 4. razred)



Slika 8. Grafički prikaz raznolikosti i čestine korištenih strategija oduzimanja s obzirom na dob (3. i 4. razred)

U nastavku je u svrhu odgovora na Problem 4 tablicama prikazano koliko je različitih strategija (mentalnih i „nementalnih“ te sveukupno) koristio svaki učenik.

Tablica 8. Tablični prikaz mentalnih, „nementalnih“ te strategija sveukupno prema svakome učeniku 3. razreda

	Mentalne strategije	Nementalne strategije	Ukupno strategija
Učenik 1	5	-	5
Učenik 2	5	-	5
Učenik 3	5	-	5
Učenik 4	4	1	5
Učenik 5	4	1	5
Učenik 6	4	1	5
Učenik 7	3	2	5
Učenik 8	4	-	4
Učenik 9	4	-	4
Učenik 10	3	1	4
Učenik 11	3	1	4
Učenik 12	2	2	4
Učenik 13	3	-	3
Učenik 14	3	-	3
Učenik 15	3	-	3
Učenik 16	2	1	3

Iz tablice 8 vidljivo je da su učenici koristili najmanje 2, a najviše 5 mentalnih strategija u 10 zadataka zbrajanja i oduzimanja. 6 učenika je koristilo po jednu „nementalnu“ strategiju, njih dvoje po dvije, dok 8 učenika nije uopće koristilo „nementalne“ strategije. 3 od 7 učenika koji su koristili sveukupno 5 strategija su koristili isključivo mentalne strategije.

Tablica 9. Tablični prikaz mentalnih, „nementalnih“ te strategija sveukupno prema svakome učeniku 4. razreda

	Mentalne strategije	Nementalne strategije	Ukupno strategija
Učenik 1	7	-	7
Učenik 2	6	-	6

Učenik 3	5	1	6
Učenik 4	5	1	6
Učenik 5	5	-	5
Učenik 6	5	-	5
Učenik 7	5	-	5
Učenik 8	5	-	5
Učenik 9	4	1	5
Učenik 10	4	-	4
Učenik 11	4	-	4
Učenik 12	3	1	4
Učenik 13	3	1	4
Učenik 14	3	1	4
Učenik 15	3	-	3
Učenik 16	2	-	2
Učenik 17	1	1	2
Učenik 18	1	1	2

Iz Tablice 9. vidljivo je da su učenici 4. razreda koristili najmanje 1, a najviše 7 mentalnih strategija, šestero je učenika koristilo po jednu „nementalnu“ strategiju dok ih ostali učenici nisu koristili. Ukupan broj korištenih strategija kreće se od 2 do 7 te je jedini učenik sa 7 strategija ukupno koristio isključivo mentalne strategije. Jedan je učenik koristio 6, a njih čak četvero 5 isključivo mentalnih strategija. Dva od tri učenika s ukupno po dvije strategije su koristili po jednu mentalnu i jednu „nementalnu“ strategiju.

U svrhu Problema 5 u nastavku su prikazane razlike (s obzirom na dob) u korištenju mentalnih, „nementalnih“ te strategija sveukupno kod učenika 3. i 4. razreda.

Tablica 10. Tablični prikaz prosječnih vrijednosti (s obzirom na dob) mentalnih, „nementalnih“ te strategija sveukupno

	Mentalne strategije	„Nementalne“ strategije	Strategije ukupno
3. razred	3,56	0,63	4,19
4. razred	3,94	0,44	4,39

Uvidom u Tablicu 10. vidljivo je da su učenici 4. razreda u prosjeku koristili 3,94 mentalne strategije dok su učenici 3. razreda koristili njih 3,56. Učenici 4. razreda su u prosjeku koristili manje „nementalne“ strategije nego učenici 3. razreda, naime prosječna vrijednost za mentalne strategije je 0,63 dok je za „nementalne“ 0,44. Ukupno su učenici 4. razreda koristili 4,39 strategija što je nešto više nego kod učenika 3. razreda koji su ih koristili 4,19.

4.7. Rasprava o rezultatima

Cilj ovog istraživanja bio je proučiti strategije zbrajanja i oduzimanja kod učenika razredne nastave. Problem 1 bio je ispitati koje sve strategije zbrajanja i oduzimanja koriste učenici 3. i 4. razreda te kolika je zastupljenost u korištenju svake pojedine strategije. Došli smo do zaključka da kod zadataka zbrajanja učenici koriste sljedeće mentalne strategije: particiju, strategiju pamćenja, premošćivanja desetice, kompenzaciju, sekvencioniranje, balansiranje te strategiju blizu dvostrukog. Uz navedene mentalne strategije koriste još i pisano zbrajanje te računanje na prste. Od navedenih sedam mentalnih strategija u programu matematike učenici su naučili njih četiri (particija, premošćivanje desetice, sekvencioniranje i balansiranje). U školi su, također bili poučavani pisanome zbrajanju te zbrajanju na prste dok su preostale tri strategije (strategiju pamćenja, kompenzaciju i blizu dvostrukog) razvili samostalno. Istraživanje je pokazalo da kod zadataka oduzimanja učenici koriste: particiju, strategiju pamćenja, premošćivanja desetice, strategiju blizu dvostrukoga, inverzije, udvostručavanja, pisanoga oduzimanja, sekvencioniranja, kompenzacije te računanje na prste. Od deset korištenih strategija oduzimanja, njih četiri su mentalne strategije naučene u školi u programu matematike (particija, premošćivanje desetice, inverzija, sekvencioniranje), pisano oduzimanje i oduzimanje na prste dok su preostale četiri (strategiju pamćenja, blizu dvostrukoga, udvostručavanja te kompenzacije) učenici samostalno razvili.

Prilikom provođenja istraživanja došli smo do zaključka da učenici koriste više vrsta strategija, mentalne te one koje to nisu, a mi smo ih nazvali „nementalnim“. „Nementalne“ strategije koje su djeca koristila su pisano računanje i računanje na prste. Naime, iako prilikom istraživanja djeca nisu imala papir niti olovku niti ijedan drugi način zapisa svejedno smo dobivali odgovore da su pisano računali. Riječ je o tome da zamisle postupak pisanoga računanja u glavi te postepeno rješavaju zadatak i dolaze do odgovora. Sljedeća strategija koja se pojavljivala, a ne pripada mentalnim strategijama je računanje na prste, iako se ne bi primjećivalo da koriste prste učenici su računali uz pomoć njih.

Problem 2 bio je ispitati koje su sve strategije učenici 3. i 4. razreda koristili na pojedinome zadatku i u kojem postotku. Učenici 3. razreda u 5 zadataka zbrajanja koristili su od 3 do 5 strategija te jednom kombinaciju dviju strategija. U prva dva te u četvrtome zadatku prevladavaju particija i pisano zbrajanje, a u trećem i petom zadatku strategija premošćivanja desetice te u istome postotku i pamćenje u posljednjem zadatku.

Kod zadataka oduzimanja korišteno je 3 do 5 strategija te 2 kombinacije. U prvom i drugom zadatku dominira particija u otprilike tri četvrtine slučajeva. U trećem i petom zadatku dominira strategija premošćivanja desetice, a u četvrtom pamćenje. Strategije inverzija, kompenzacija, blizu dvostrukoga, udvostručavanje i pisano oduzimanje koriste se u jako malome postotku.

Kod zadataka zbrajanja učenici 4. razreda koristili su 4 do 6 različitih strategija. U prvome je zadatku najzastupljenija particija, u drugome sekvencioniranje, u trećem i petome premošćivanje desetice dok su u četvrtome zadatku particija, pisano zbrajanje i premošćivanje desetice isto zastupljene. Kod zadataka oduzimanja koristili su 2 do 7 strategija. Najmanje strategija, njih dvije koristili su u četvrtome zadatku (7-3) gdje su tri četvrtine učenika koristile pamćenje dok su ostali koristili inverziju. U prvome zadatku najkorištenije strategije su particija i sekvencioniranje, obje zastupljene u 33,33% slučajeva, u drugome particija, a u trećem i petom premošćivanje desetice.

Problem 3 bio je ispitati razlike (s obzirom na dob) u broju korištenih strategija te postotku zastupljenosti svake od njih, a prema svakome zadatku. Očekivali smo da će broj korištenih strategija rasti prelaskom u viši razred. Također, očekivali smo da će strategije biti različito zastupljene kod učenika 4. razreda u odnosu na učenike 3. razreda na način da će učenici 4. razreda češće koristiti mentalne strategije u odnosu na učenike 3. razreda. Učenici četvrtoga razreda u prvome i trećem su zadatku koristili 2 strategije više nego učenici trećega razreda. U drugome su zadatku koristili 4 iste strategije. U četvrtome su zadatku koristili 5 istih strategija s po jednom dodatnom kombinacijom i u petome zadatku 3 iste strategije dok su učenici trećega razreda koristili još zbrajanje na prste, a učenici 4. balansiranje. U prvome zadatku particija je dominantna strategija u oba razreda, a u trećem zadatku premošćivanje desetice. U drugome i četvrtome zadatku uočljivo je da postotak sekvencioniranja značajno raste. Uočljivo je također da se kod učenika četvrtoga razreda u potpunosti gubi računanje na prste te da se značajno smanjuje postotak pisanoga zbrajanja.

Kod zadataka oduzimanja učenici oba razreda u prva su dva zadatka koristili po tri iste strategije, ali se kod učenika četvrtoga razreda u oba slučaja koristila jedna strategija više. U četvrtome su zadatku učenici četvrtoga razreda koristili samo 2 strategije dok su učenici trećega koristili te dvije te dodatne tri strategije. U petome su zadatku koristili 4 iste strategije dok su učenici trećega razreda koristili još jednu, a učenici četvrtoga još tri nove strategije. Kod zadataka oduzimanja uočljivo je da se korištenje pisanoga oduzimanje značajno povećava, također se povećava udio korištenja strategije pamćenja. Rezultati su u skladu s našim očekivanjima jer se korištene strategije djelomično mijenjaju prelaskom iz trećega u četvrti razred, također pojavljuju se neke nove dok se neke stare strategije prestaju koristiti.

Problem 4 bio je ispitati koliko je različitih strategija (mentalnih i „nementalnih“ te sveukupno) koristio svaki učenik OŠ Lučac. Očekivali smo da će svaki učenik koristiti barem 3 različite strategije. Učenici trećega razreda na deset zadataka zbrajanja i oduzimanja koristili su 2 do 5 mentalnih strategija. Također, njih osmero koristilo je jednu ili dvije „nementalne“ strategije dok ih ostali nisu koristili. Uočljivo je da su 3 učenika koristila 5 isključivo mentalnih strategija.

Učenici četvrtoga razreda koristili su 1 do 7 mentalnih strategija, a 6 učenika koristilo je po jednu „nementalnu“. Uočljivo je da je jedan učenik koristio 7 isključivo mentalnih strategija, ali i da je u četvrtome razredu učenik koji je koristio samo jednu mentalnu i jednu „nementalnu“ strategiju. Možemo reći da su dobiveni rezultati u skladu s našim očekivanjima jer su tek po četiri učenika u oba razreda koristila 3 strategije ili manje.

Problem 5 bio je ispitati razlike (s obzirom na dob) u prosječnoj vrijednosti korištenja mentalnih, „nementalnih“ te strategija sveukupno kod učenika 3. i 4. razreda. Očekivali smo da će učenici četvrtoga razreda koristiti veći broj mentalnih, a manji broj „nementalnih“ strategija te su rezultati u skladu s našim očekivanjima.

Uočeno je da se niti jedan učenik ni u jednome zadatku nije prisjetio računanja domino kockama niti računaljkom, a koje smo susreli u promatranim udžbenicima.

Također je uočeno kako su učenici koristili pisano računanje za zbrajanje i oduzimanje u skupu brojeva do 100 iako su ga u programu nastave matematike učili tek kod zbrajanja i oduzimanja u skupu brojeva do 1 000.

5. ZAKLJUČAK

Kao rezultat ovoga rada stekli smo uvid u strategije zbrajanja i oduzimanja koje koriste učenici trećih i četvrtih razreda. Naime, potvrdila su se naša očekivanja da će se strategije mijenjati prelaskom u viši razred kao i da će stariji učenici poznavati veći broj strategija. U poglavlju *Strategije zbrajanja i oduzimanja u udžbenicima* vidjeli smo koje se strategije za zbrajanje i oduzimanje brojeva do 100 spominju u udžbenicima iz matematike na osnovu čega zaključujemo da učenici koriste sve mentalne strategije koje su upoznali putem udžbenika, no osim njih koriste i druge što je svakako pohvalno. Zaključili smo i kako su korištenjem pisanoga računanja za zbrajanje i oduzimanje u skupu brojeva do 100 zapravo napravili korak unatrag jer su u nižim razredima iste zadatke rješavali nekim drugim načinima, onima koji više razvijaju matematičko mišljenje, razumijevanje, a u konačnici i kreativnost.

Uvidjeli smo također značajan napredak u zastupljenosti različitih strategija u udžbenicima, no smatramo da bi autori udžbenika kontinuirano mogli raditi po korak naprijed po pitanju toga. Naime, u njihovim je rukama kao i u rukama učitelja da učenike upoznaju sa što većim brojem različitih strategija, no još je važnije naučiti učenike da sami razvijaju vlastite strategije kako one postojeće ne bi također postale nešto kao standardni algoritmi, napamet naučeni te korišteni bez razumijevanja.

U suvremenom društvu razvoj vještina mentalnog računanja trebao bi biti cilj svih matematičkih programa jer se svaki pojedinac u svakodnevnom životu susreće s mentalnim računanjem, a isto tako u vremenima kad je tehnologija zamijenila papir i olovku ljudi još uvijek moraju imati dobro razvijen sklop mentalnih strategija da bi uočili razumnost odgovora kojega pruža tehnologija. Svako društvo koje želi biti napredno i konkurentno mora podizati razinu matematičke pismenosti svojih članova jer su kompetentnost za prepoznavanje problema, snalaženje u njima i njihovo uspješno rješavanje odlike uspješnog pojedinca u svim područjima privatnog i profesionalnog života.

U međuvremenu, navode konstruktivisti, zadatak je učiteljice da organizira takvo okruženje u kojem rasprava pomaže izgradnji učenikova znanja te da učenike suoči s bogatom okolinom i složenim situacijama koje će upravo potaknuti rješavanje problema jer su strategije važnije od ispravnih odgovora (Vizek Vidović i sur., 2003).

„Razlika između pojedinaca koji postižu mnogo i onih koji postižu manje ne leži samo u mogućnostima mozga s kojim su se rodili, već i u načinu na koji svoj mozak koriste. Uspješni koriste učinkovitije strategije od onih koji postižu malo.“⁵

⁵ URL: <https://aloha.hr/aloha/pedagoska-osnova-aloha-mental-arithmetic-programa/>

6. LITERATURA

1. Čudina-Obradović, M. (2008). *Matematika prije škole, priručnik za roditelje i odgojitelje*, Zagreb: Školska knjiga
2. Jagodić, B., Mrkonjić, I., Curić, M. (2019). *Moja matematika 1, udžbenik za učenike prvog razreda osnovne škole*, Zagreb: Alka Script
3. Jagodić, B., Mrkonjić, I., Curić, M. (2019). *Moja matematika 2, udžbenik za učenike prvog razreda osnovne škole*, Zagreb: Alka Script
4. Liebeck, P. (1984). *Kako djeca uče matematiku*. Zagreb: Educa.
5. Markovac, J. (1992). *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga
6. National Research Council. (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, DC: The National Academies Press.
7. Pavlin-Bernardić, N. (2006.). Modeli dječjeg odabira strategija rješavanja aritmetičkih zadataka. *Suvremena psihologija*, 9 (1/2006), 47-61
8. Prince Edward Island Canada (2008). *Mental Math, Grade 2 Teacher`s Guide*
9. Sharma, M. C. (2001). *Matematika bez suza – kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike*. Buševac: Ostvarenje.
10. Vizek Vidović, V., Rijavec, M., Vlahović-Štetić, V., Miljković, D. (2003). *Psihologija obrazovanja*. Zagreb: IEP/Vern
11. Vlahović-Štetić, V., Nadilo, M., Pavlin-Bernardić, N. (2006). Brojenje: stječemo li prije načela ili vještinu. *Suvremena psihologija*, 9 (1/2006), 21-34.
12. Vlahović-Štetić, V., Vizek Vidović, V. (1998). *Kladim se da možeš... – psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*. Zagreb: Udruga roditelja Korak po korak.

Mrežno dostupni radovi:

13. Aloha Mentalna Aritmetika. URL:
<https://aloha.hr/aloha/pedagoska-osnova-aloha-mental-arithmetic-programa/> (Pristupljeno: 5.svibnja 2021.)
14. Damjanović, B. (2019.) Diplomski rad: *Zastupljenost različitih pristupa računanju kod djece u nižim razredima osnovne škole*. Neobjavljeni rad. URL:

- [file:///C:/Users/User/Desktop/diplomski/bozena diplomski final digitalni oblik%20-%20razliciti%20pristupi%20ra%C4%8Dunanju.pdf](file:///C:/Users/User/Desktop/diplomski/bozena_diplomski_final_digitalni_oblik%20-%20razliciti%20pristupi%20ra%C4%8Dunanju.pdf) (Pristupljeno. 3.kolovoza 2021.)
15. Gliha, M. (2004.). Diplomski rad: *Osnovni principi zbrajanja kod predškolske djece i učenika prvog razreda osnovne škole*. Neobjavljeni rad. URL: <https://bib.irb.hr/datoteka/213673.MarijaGliha.pdf> (Pristupljeno: 7. svibnja 2021.)
 16. Horvatić, T. (2016). Diplomski rad: *Strategije zbrajanja i oduzimanja u nastavi*. Neobjavljeni rad. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/197862721.pdf> (Pristupljeno 7. svibnja 2021.)
 17. Lucić, S. (2007.). Diplomski rad: *Razumijevanje osnovnih principa zbrajanja kod vrtičke djece*. Neobjavljeni rad. URL: <http://darhiv.ffzg.unizg.hr/447/1/LucicSilvija.pdf> (Pristupljeno: 7. svibnja 2021.)
 18. Chesney, M. (2013). *Mental Computation Strategies for Addition: There`s more than one way to skin a cat*. APMC 18/2013 (1) URL: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1093180.pdf> (Pristupljeno 5. kolovoza 2021.)
 19. Morin, A. (2021). *Mentalna matematika i kako se koristi*, URL: <https://hr.drafare.com/mentalna-matematika-i-kako-se-koristi/> (Pristupljeno 24. kolovoza 2021.)
 20. *Mental Computation Strategies*. URL: <https://deebingheightsss.eq.edu.au/Supportandresources/Formsanddocuments/Documents/Parent%20resources/mental-computation-strategies.pdf> (Pristupljeno: 25. srpnja 2021.)
 21. Thompson, I. (1999). Mental Calculation Strategies for Addition and Subtraction. Part 1. *Mathematics in School*, 28/1999 (5). URL: <file:///C:/Users/User/Desktop/diplomski/thompson%20-%20part%201.pdf> (Pristupljeno: 25.srpnja 2021.)
 22. Thompson, I. (2000). Mental Calculation Strategies for Addition and Subtraction. Part 2. *Mathematics in School*, 29/2000 (1). URL: <file:///C:/Users/User/Desktop/diplomski/thompson%20-.pdf> (Pristupljeno: 25.srpnja 2021.)

PRILOZI

Prilog 1.

Zadaci:

25+26	
35+26	
18+6	
47+19	
9+6	
46-23	
30-16	
45-7	
7-3	
16-9	

Obrazac A.Č.

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FILOZOFSKI FAKULTET

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

kojom ja, *Ivona Baković*, kao pristupnica za stjecanje zvanja *magistrice primarnog obrazovanja*, izjavljujem da je ovaj diplomski rad rezultat isključivo mojega vlastitoga rada, da se temelji na mojim istraživanjima i oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem da niti jedan dio diplomskoga rada nije napisan na nedopušten način, odnosno da nije prepisan iz necitiranoga rada, pa tako ne krši ničija autorska prava.

Također izjavljujem da nijedan dio ovoga diplomskoga rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

Split, rujan, 2021.

Potpis



/Ivona Baković/

OBRAZAC I.P.**IZJAVA O POHRANI ZAVRŠNOG / DIPLOMSKOG RADA U DIGITALNI
REPOZITORIJ FILOZOFSKOG FAKULTETA U SPLITU**

STUDENT/ICA	Ivona Baković
NASLOV RADA	Strategije zbrajanja oduzimanja u razrednoj nastavi
VRSTA RADA	Diplomski rad
ZNANSTVENO PODRUČJE	Prirodne znanosti
ZNANSTVENO POLJE	Matematika
MENTOR/ICA (ime, prezime, zvanje)	Doc.dr.sc. Irena Mišurac
KOMENTOR/ICA (ime, prezime, zvanje)	Mag.educ.math.et inf.
ČLANOVI POVJERENSTVA (ime, prezime, zvanje)	1. doc.dr.sc. Irena Mišurac 2. mag.educ.math.et inf. Josipa Jurić 3. doc.dr.sc. Suzana Tomaš

Ovom izjavom potvrđujem da sam autorica predanog diplomskog rada i da sadržaj njegove elektroničke inačice u potpunosti odgovara sadržaju obranjenog i nakon obrane uređenog rada. Slažem se da taj rad, koji će biti trajno pohranjen u Digitalnom repozitoriju Filozofskog fakulteta Sveučilišta u Splitu i javno dostupnom repozitoriju Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (u skladu s odredbama *Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju*, NN br. 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15, 131/17), bude u otvorenom pristupu.

U slučaju potrebe dodatnog ograničavanja pristupa Vašem ocjenskom radu, podnosi se obrazloženi zahtjev nadležnom tijelu u ustanovi.

9. rujna 2021.

mjesto, datum

Baković

potpis studenta/ice