Utjecaj postupaka sprezanja na točnost analize brodograđevnog proizvodnog procesa

Matić, Saša

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:687409

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Saša Matić

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor: Student:

Doc. dr. sc. Neven Hadžić Saša Matić

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija brodogradnje

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum 24 -02- 2016	Prilog
Klasa: 602 - 04/16 - 6/3	
Ur.broj: 15 - 1703 - 16 - 75	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Saša Matić** Mat. br.: 0035123691

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **UTJECAJ POSTUPAKA SPREZANJA NA TOČNOST ANALIZE BRODOGRAĐEVNOG PROIZVODNOG PROCESA**

Naslov rada na engleskom jeziku: **INFLUENCE OF AGGREGATION PROCEDURES ON ACCURACY OF THE SHIPBUILDING PRODUCTION PROCESS ANALYSIS**

Opis zadatka:

Brodograđevni proizvodni proces obuhvaća niz složenih tehnoloških operacija čiji je međusobni odnos moguće matematički opisati primjenom Markovljevih lanaca. Pri tome se nastoji matematički problem pojednostavniti primjenom postupaka sprezanja karakteristika proizvodnih strojeva uz izvjestan gubitak točnosti rezultata.

U radu je potrebno:

1. Prikazati matematičku formulaciju i analitičko rješenje za slučaj Bernoullijeve serijske linije s jednim i s dva međuskladišta.
2. Provesti analizu temeljenu na metodama sprezanja za slučaj Bernoullijeve serijske linije s jednim i s dva međuskladišta.
3. Izvršiti usporedbu rezultata.
4. Predložiti nove postupke približnog rješavanja.
5. Provesti analizu temeljenu na predloženim postupcima te izvršiti kritičku usporedbu s analitičkim rješenjem problema.

Tijekom izrade rada koristiti literaturu i računalnu potporu dostupnu na FSB-u.

Zadatak zadan:
25. studenog 2015.

Rok predaje rada:
1. rok: 25. veljače 2016
2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.
3. rok: 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016.
2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016.
3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Neven Hadžić

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i uz navedenu literaturu.

Posebno se zahvaljujem mentoru Dr. sc. Nevenu Hadžiću na savjetima i pomoći tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se mojim roditeljima, sestri i maloj obitelji na vjeri, razumijevanju i podršci.

.

Saša Matić

Sadržaj

POPIS SLIKA 5
POPIS TABLICA 6
POPIS OZNAKA 7
SAŽETAK 9
SUMMARY 10
1. UVOD 11
2. OSNOVNI POJMOVI IZ TEORIJE VJEROJATNOSTI 12
2.1. Slučajni događaji 13
2.2. Teoremi vjerojatnosti 13
3. STOHASTIČKI PROCESI 18
3.2. Markovljev proces 18
3.3. Markovljevi lanci 19
4. MATEMATIČKO MODELIRANJE PROIZVODNOG PROCESA 22
4.1. Uspostava matematičkog modela 22
4.2. Linijski proizvodni proces 22
4.3. Okrupnjavanje 23
4.4. Strukurno modeliranje 24
4.5. Modeliranje stroja 25
4.6. Vrste modela pouzdanosti stroja u diskretnim procesima 26
4.7. Određivanje vrijednosti parametara stroja 27
4.8. Mjere za određivanje učinkovitosti proizvodnog sustava 28
4.9. Pregled modeliranja, analize, inženjerstva i poboljšanja proizvodnog procesa 29
5. ANALIZA BERNOULLIJEVE PROIZVODNE LINIJE 30
5.1. Bernoullijeva linija s dva stroja i međukladištem 30
5.2. Bernoullijeva linija s tri stroja i dva međukladišta 34
5.3. Analitička i približna metoda za određivanje parametara *PR*, *WIP*, *BL* i *ST* 37
5.4. Numerički primjer analize Bernoullijeve linija s tri stroja i dva međuskladišta 38
5.5. Analiza Bernoullijeve linije s pet strojeva i četiri međuskladišta 41
5.6. Proizvodna linija predobrade crne metalurgije sa sedam strojeva i šest međuskladišta 43
ZAKLJUČAK 45
LITERATURA 46

POPIS SLIKA

Slika 1. Komplement od *A* 14
Slika 2. *A* je podskup od *B* 14
Slika 3. Unija i presjek događaja *A* i *B* 15
Slika 4. Potpuna vjerojatnost događaja *B* 16
Slika 5. Dijagram prijelaznih vrijednosti Markovljevog lanca 20
Slika 6. Linijski proizvodni proces 23
Slika 7. Okrupnjavanje 23
Slika 8. Linijski proizvodni proces s paralelnim strojevima 24
Slika 9. Linijski proizvodni proces sa sinhroniziranim zavisnim strojevima 24
Slika 10. Strukturni model linijskih proizvodnih procesa (slika 8.) i (slika 9.) 25
Slika 11. Geometrijski stroj 26
Slika 12. Blok dijagram analize Bernoullijeve proizvodne linije 30
Slika 13. Bernoullijeva proizvodna linija s dva stroja i dijagram prijelaznih vjerojatnosti 31
Slika 14. Bernoullijeva proizvodna linija s tri stroja i dva međuskladišta 35
Slika 15. Linija predobrade i matematički model 43

POPIS TABLICA

Tablica 1. Karakteristike linija $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8$ i L_9 38

Tablica 2. Usporedba vrijednosti PR i WIP dobivenih analitičkom AS i približnom metodom AP 39

Tablica 3. Usporedba vjerojatnosti zastoja *BL* i praznog hoda *ST* dobivenih analitičkom AS i približnom metodom AP 40

Tablica 4. Karakteristike linija $L_1^5, L_2^5, L_3^5, L_4^5, L_5^5$ 41

Tablica 5. Usporedba vjerojatnosti proizvodnosti *PR* dobivenih analitičkom AS i približnom metodom AP za Bernoullijevu liniju s pet strojeva 42

Tablica 6. Kapaciteti strojeva 43

Tablica 7. Kapaciteti međuskladišta 44

Tablica 8. Operativni kapaciteti strojeva 44

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
L_i	/	proizvodna linija *i*
m_i	/	stroj *i*
b_i	/	međuskladište *i*
E	/	eksperiment
ζ_i	/	ishod *i*
S	/	skup događaja
P	/	vjerojatnost da stroj radi
R	/	vjerojatnost da je stroj u kvaru
t	s	vrijeme
n	/	broj poluproizvoda na međuskladištu *i*
$X(t)$	/	stohastički proces
PR	/	proizvodnost
TP	/	propusnost
WIP_i	/	broj poluproizvoda
ST_i	/	prazan hod stroja *i*
BL_i	/	zastoj stroja *i*
P_{ijkl}	/	prijelazne vjerojatnosti
N	/	stanje popunjenosti međuskladišta
τ	s	vremenski ciklus
c	s^{-1}	kapacitet stroja
$\{P\}$	/	svojstveni vektor
Ω_k	/	svojstvena vrijednost

$h(n)$	/	stanje međuskladišta u n-tom ciklusu
T_{up}	s	prosječno vrijeme kad stroj radi
T_{down}	s	prosječno vrijeme kad je stroj u kvaru
RT	s	prosječno vrijeme koje proizvod provede u procesu

SAŽETAK

Brodograđevni proizvodni proces sastavljen od niza složenih tehnoloških operacija se može matematički opisati primjenom teorije vjerojatnosti, stohastičkih procesa i Markovljevih lanaca. Matematički problem se može pojednostaviti postupkom sprezanja karakteristika proizvodnih strojeva uz određeni gubitak točnosti rezultata. U ovom radu je prikazano analitičko rješenje Bernoulijeve linije s jednim i dva međuskladišta te parametri za učinkovitost proizvodne linije. Također su predloženi novi postupci sprezanja te je provedena analiza brodograđevne linije predobrade limova.

Ključne riječi: brodograđevni proizvodni proces, Markovljev lanac, teorija vjerojatnosti, stohastički proces, matematički model proizvodnog procesa, Inženjerstvo proizvodnih sustava, Bernoullijeva serijska linija

SUMMARY

Shipbuiding production process is set of complex tehnological operations that can be mathematicaly described using probability theory, random procesess and Markov chains. Mathematical problem can be simplified via aggregation procedure but with some influence on accuracy of the obtained results. Analytical solution of steady state behavior of serial Bernoulli production line with one and two buffers is considered in this thesis.Performance measures equations are formulated and application of the presented theory is demonstrated in case of shipbuilding serial plate prefabricition line.

Key words: Shipbuiding production process, Markov chain, probability theory, random process, mathematical modeling of production system, production systems engineering, serial Bernoulli line

1. UVOD

Inženjerstvo proizvodnih sustava ima bitnu ulogu pri analizi, projektiranju, praćenju i održavanju proizvodnih sustava s ciljem osiguravanja pouzdane i veće zarade proizvodnih tvrtki, a sve na osnovi smanjenja gubitaka koji nastaju prilikom tehnoloških postupaka i transportnih operacija u proizvodnim radionicama. Svoju primjenu nalazi u granama industrije koje ponavljajućim tehnološkim operacijama stvaraju proizvode u velikim serijama.

Zbog složenosti matematičkih modela inžinjerstva proizvodnih sustava, samo mali broj egzaktnih rješenja je poznat, a kako ona opisuju samo manji broj proizvodnih sustava, npr. Bernoullijeva linija s jednim međuskladištem, njihovo rješenje ne daje odgovor na stvarne industrijske zahtjeve. Stoga će se u ovom radu uz matematičku formulaciju i analitičko rješenje Bernoullijeve serijske linije s jednim i dva međuskladišta prikazati i poluanalitički (približni) model koji se temelji na postupku sprezanja na linijama s više od tri stroja te će biti uspoređene dobivene vrijednosti parametara za opis učinkovitosti proizvodnih linija.

Prikazana teorija će biti primjenjena i na brodograđevnoj serijskoj liniji predobrade limova koja se nalazi u svakom hrvatskom brodogradilištu.

2. OSNOVNI POJMOVI IZ TEORIJE VJEROJATNOSTI

Na ponašanje proizvodnih sustava veliki utjecaj imaju slučajni događaji, kao što su npr. kvar stroja ili nasumični zahtjevi kupaca. Takve vrste događaja vode do drugih pojava poput promijenjive propusnosti, zastoja i praznog hoda pri radu, broja neispravnih dijelova, neispunjenja određenih želja kupaca, itd. Teorija vjerojatnosti će nam zato poslužiti kao matematički odgovor za kvalitetno inženjerstvo proizvodnih sustava.

Teorija vjerojatnosti se može podijeliti na:

1) slučajne događaje (događaji slučajne naravi, npr. vjerojatnost da stroj radi ili je u kvaru)
2) slučajne varijable (veličine povezane sa slučajnim događajima, npr. vremenski interval u kojem stroj radi ili je u kvaru)
3) slučajni procesi (veze između različitih slučajnih varijabli, npr. isječci vremenskih intervala u kojima je stroj radio ili bio neispravan)

U svakom od ta tri dijela su sadržani izrazi za izračunavanje pojedinih vjerojatnosti, odnosno:

1) vjerojatnosti unije događaja
2) vjerojatnost presjeka događaja
3) uvjetne vjerojatnosti
4) potpune vjerojatnosti
5) Bayes-ova formula (kombinacija vjerojatnosti presjeka i potpune vjerojatnosti)

S obzirom da je primjena Markovljevog lanca u analizi proizvodnih sustava brodogradilišta u fokusu ovog rada, u nastavku je dano objašnjenje osnovnih pojmova vezanih uz slučajne događaje.

2.1. Slučajni događaji

Definicija slučajnih događaja se temelji na nekoliko pojmova: eksperiment, ishod, skup, događaj i vjerojatnost.

Eksperiment E je pojava (pokus) koju možemo provesti proizvoljan broj puta pod naizgled jednakim okolnostima, no pritom se dobiveni rezultati ne moraju podudarati.(Da li je stroj ispravan ili u kvaru u recimo 11:15 sati prijepodne).

Rezultat eksperimenta naziva se ishod ζ, a svi mogući ishodi čine skup S, npr. za proizvodnu liniju s dva stroja, S={ζ_1=(radi,radi), ζ_2=(radi, u kvaru) ζ_3=(u kvaru, radi), ζ_4=(u kvaru, u kvaru)}

Podskup od S naziva se događaj $A,B,C,...$ te sadrži jedan ili više ishoda npr., za proizvodnu liniju s dva stroja, A={oba stroja ili rade ili su u kvaru}={ζ_1}, B={ barem jedan stroj je u pogonu}={$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$}.

Izvjesnost (relativna učestalost) različitih događaja naziva se vjerojatnost P.

2.2. Teoremi vjerojatnosti

Vjerojatnost pojedinih događaja se može odrediti dužim periodom opažanja. Na taj način možemo primjerice odrediti vjerojatnost od P[{stroj radi}], dok P[{ako jedan stroj radi onda svi strojevi rade}] moramo izračunati. Tu nam pomažu tri teorema vjerojatnosti [1] koji glase:

1) svaki događaj ima vjerojatnost veću od nule: $P[A] \geq 0$,
2) skup ima vjerojatnost jednaku jedan: $P[S]=1$,
3) ako dva događaja nemaju zajednički ishod, njihov presjek glasi $A \cap B=0$, iz čega slijedi: $P[A \cup B]= P[A] + P[B]$.

Na osnovu ovih teorema definiraju se pojmovi: suprotan događaj, podskup i unija dva događaja.

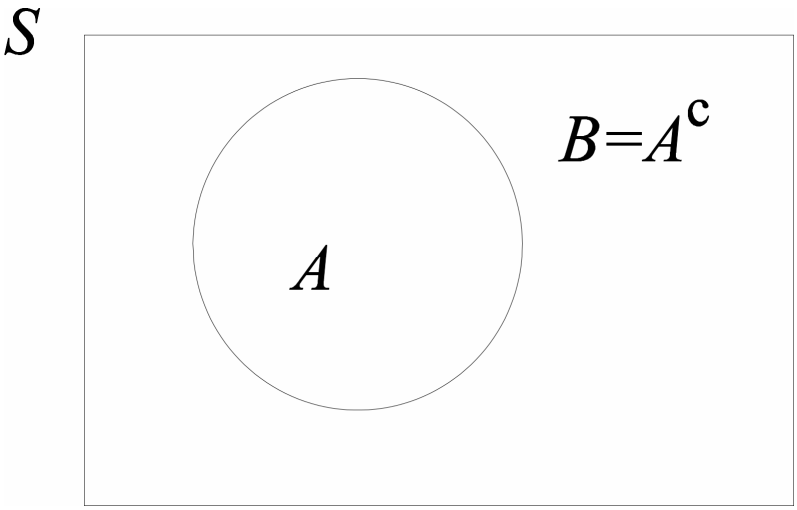
Odnosno, ako vrijedi

$$\begin{aligned} A \cup B &= S \\ A \cap B &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

tada slijedi da je

$$P[B]=1-P[A]. \tag{2.2}$$

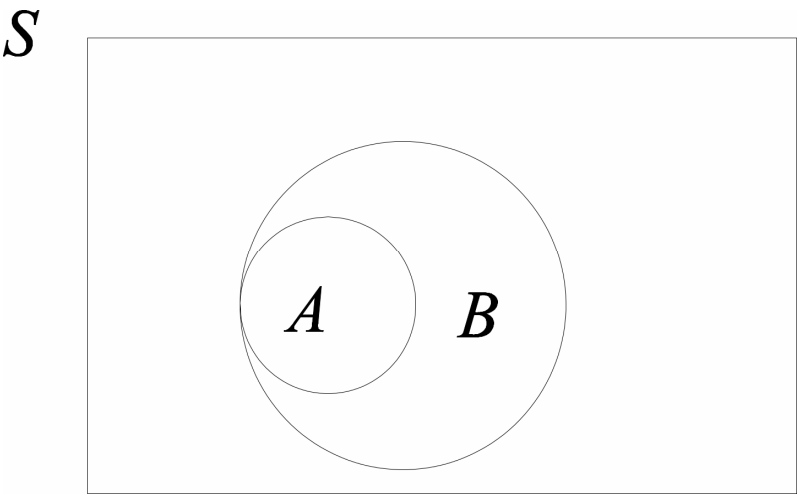
Skup B koji zadovoljava ove relacije zove se komplement od A, odnosno $B=A^C$, Slika 1.



Slika 1. Komplement od A

Ako je A uključen u ili jednak B, Slika 2, tada vrijedi,

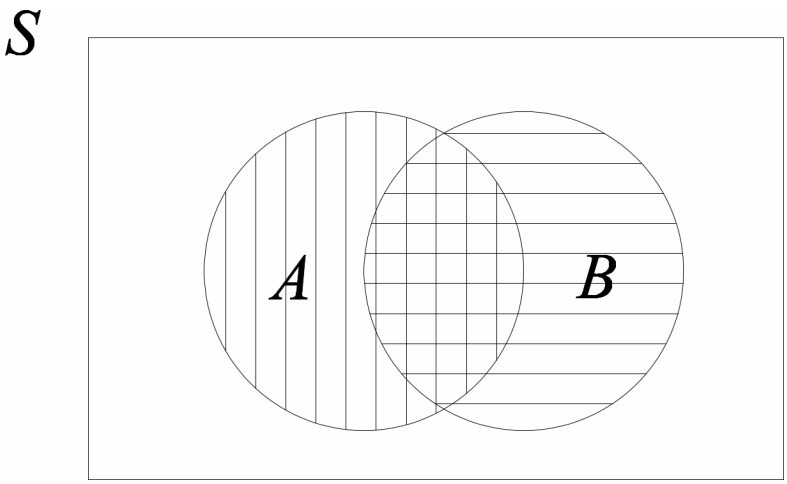
$$\begin{aligned} &A \subseteq B \\ &P[A] \leq P[B]. \end{aligned} \tag{2.3}$$



Slika 2. A je podskup od B

Vjerojatnost unije dvaju događaja u A i B u skupu S, Slika 3, dana je izrazom

$$P[A \cup B]= P[A] + P[B]- P[A \cap B]. \tag{2.4}$$



Slika 3. Unija i presjek događaja *A* i *B*

Uvjetna vjerojatnost u obzir uzima barem dva događaja iz čega proizlazi da je vjerojatnost događaja *B,* ako se dogodio događaj *A*, Slika 3,

$$P\left[B|A\right]=\frac{P\left[A\cap B\right]}{P\left[A\right]}, \tag{2.5}$$

odnosno vrijedi

$$P\left[A\cap B\right]=P\left[B|A\right]P\left[A\right]=P\left[A|B\right]P\left[B\right]. \tag{2.6}$$

Još jedno svojstvo koje definira odnos između dva ili više događaja je nezavisnost događaja. Dva događaja *A* i *B* unutar *S* su nezavisna ako je:

$$P\left[B|A\right]=P\left[B\right]. \tag{2.7}$$

Iz te jednakosti slijedi:

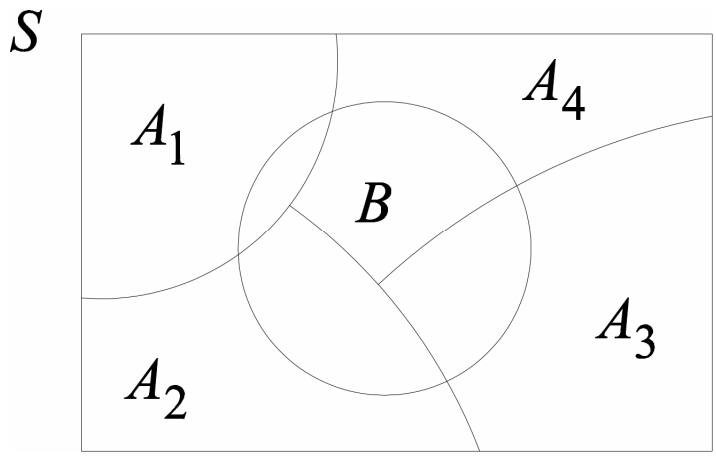
$$P[A\cap B]=P[A]P[B]. \tag{2.8}$$

Tako možemo definirati i nezavisnost od tri ili više događaja:

$$P[A_1\cap A_2\cap A_3]=P[A_1]P[A_2]P[A_3]. \tag{2.9}$$

Nadalje, ako imamo skup događaja A_i u *S*, i=1,...,n, koji se međusobno isključuju a, njihova unija je *S*, tada je:

$$\begin{aligned} &A_i\cap A_j=0 \qquad i\neq j \\ &\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i\right)=S \end{aligned} \tag{2.10}$$



Slika 4. Potpuna vjerojatnost događaja *B*

te ako je *B* također skup unutar *S*, Slika 4, odmah se može zaključiti kako je

$$\{B \cap A_1\} \cup \{B \cap A_2\} \cup ... \cup \{B \cap A_n\} = B\,. \tag{2.11}$$

Ako upotrijebimo treći teorem vjerojatnosti (unija dva događaja koji nemaju zajednički ishod) dobivamo

$$P[B] = P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2] + ...P[B \cap A_n]. \tag{2.12}$$

Primjenom izraza za vjerojatnost presjeka dva događaja (2.6) slijedi

$$\begin{aligned} P[B] &= P[B|A_1]P[A_1] + P[B|A_2]P[A_2] + ... \\ ... &+ P[B|A_n]P[A_n] = \sum_{i=1}^{n} P[B|A_i]P[A_i]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ovaj izraz se zove potpuna vjerojatnost i odgovara nam na potrebu za računanjem vjerojatnosti događaja uzimajući u obzir uvjetnu vjerojatnost događaja i vjerojatnosti pojedinih uvjeta koji se međusobno isključuju.

Ako su A_i, i=1,2,...,n dijelovi od *S* a *F* događaj u *S* tada koristeći izraz za uvjetnu vjerojatnost možemo pisati:

$$P[A_i|F] = \frac{P[A_i \cap F]}{P[F]}. \tag{2.14}$$

Ako u brojniku upotrebimo izraz za vjerojatnost presjeka, a u nazivniku za potpunu vjerojatnost [1] dobivamo:

$$P\left[A_i \middle| F\right] = \frac{P\left[F \middle| A_i\right] P\left[A_i\right]}{P\left[F \middle| A_1\right] P\left[A_1\right] + P\left[F \middle| A_2\right] P\left[A_2\right] + \ldots + P\left[F \middle| A_n\right] P\left[A_n\right]}. \tag{2.15}$$

Ovaj izraz se naziva Bayes-ova formula i omogućuje nam izračunati vjerojatnost događaja iz skupa *S* koji je prethodio tj. uvjetovao događaj. Primjerice, imamo tri proizvođača žarulja i pitamo se tko je od njih proizveo žarulju koja je pregorjela nakon godinu dana, a poznavajući količine dostavljenih žarulja i postotak žarulja koji pregori, za svakog pojedinog proizvođača u promatranom jednogodišnjem ciklusu.

3. STOHASTIČKI PROCESI

3.1. Terminologija stohastičkog procesa

Stohastički procesi (X (t), Y (t), Z (t),...) su definirani kao slučajne varijable koje su vremenski ovisne o ishodu eksprimenta tj.

$$X(\zeta,t) = x(t), \quad x \in S_x \subseteq \mathbf{R}, \zeta \in S, t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Stohastički procesi se obično označavaju velikim slovima, a njihove realizacije malim slovima. Te realizacije stohastičkih procesa zovemo trajektorije. Iz prijašnjeg izraza slijedi: ako imamo stalan t, stohastički proces je slučajna varijabla dok za fiksirani ζ stohastički proces je funkcija od t.

Stoga, stohastički proces možemo shvatiti kao skup slučajnih varijabli (parametriziranu s t) ili kao skup funkcija od t (parametriziranu s ζ).

Kako i t i slučajna varijabla $X(t)$ mogu biti kontinuirani i diskretni, postoji više vrsta stohastičkih procesa. Oni su kombinacija diskretnih i kontinuiranih (vrijeme i skup svih ishoda) stohastičkih procesa. Ako uzmemo u razmatranje diskretni vremenski proces i diskretni skup svih ishoda za stohastički proces, kao jedan od primjera nam može poslužiti broj glava motora proizvedenih po svakom satu tijekom radne smjene od strane promatranog proizvodnog sustava.

3.2. Markovljev proces

Ponašanje većine inženjerskih sustava i problema opisuju diferencijali i diferencijske jednadžbe. Ti izrazi dobro opisuju strogo predvidljive proizvodne procese. Ako se ukažu neki nepredviđeni učinci, opis procesa se mora izmjeniti tako da uključuje obilježja slučajnosti.

$$\begin{aligned} &\frac{dX}{dt} = \Phi\left(X, \xi(t)\right), t \quad X \in \mathbf{R^n}, \xi \in \mathbf{R^m}, \mathbf{\Phi}: \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^m} \in \mathbf{R^n} \\ &X(n+1) = \Phi_1\left(X(n), \xi(n)\right), n = 0,1,... \; X \in \mathbf{R^n}, \mathbf{\Phi_1}: \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^m} \in \mathbf{R^n} \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje su $\xi(t)$ i $\xi(n)$ i kontinuirani i diskretni vremenski procesi. U tom slučaju, $X(t)$ i $X(n)$ su također stohastički procesi, pa je stoga i ponašanje proizvodnog sustava slučajno. Ako su $\xi(t)$ i $\xi(n)$ proizvoljni, rješenja gornjih jednadžbi je nemoguće derivirati pa čak i ako imamo sustav

linearnih jednadžbi [2]. Ovi procesi se nazivaju Markovljevi procesi i imaju ključnu ulogu u analizi proizvodnih sustava koji se često susreću s nepredvidljivim okolnostima pri radu. Iako samo daju odgovor na najjednostavnije probleme iz njih možemo dobiti važne i praktične zaključke.

3.3. Markovljevi lanci

Markovljev lanac $X(n)$, n=0,1,2..., je definiran kao skup diskretnih ishoda u diskretnom vremenu gdje se taj skup S_X sastoji od konačnog i prebrojivog niza točaka i=0,1,2,...S, te zadovoljava slijedeći uvjet:

$$\begin{aligned} &P\left[X\left(n+1\right)=i \middle| X\left(n\right)=j, X\left(n-1\right)=r,...X\left(n-l\right)=s \right] \\ &=P\left[X\left(n+1\right)=i \middle| X\left(n\right)=j \right] \quad =: P_{ij}, \quad \forall i,j,r,...,s\in S_X \end{aligned} \tag{3.3}$$

Uvjetna vjerojatnost nekog stanja procesa u trenutku $n+1$ (bez obzira na stanje u kojem se proces nalazi) je nezavisna u odnosu na stanja $n-1$, $n-2$,.... te stoga ovisi samo o stanju procesa u trenutku n. To zapravo znači kako prijelaz od j do i ne ovisi o tome koliko dugo je proces trajao u j, pa je zato $X(n)$ Markovljev lanac jer „pamti" smo jedan korak. Stoga slijedeći izraz:

$$X\left(n+1\right)=\Phi_1\left(X\left(n\right),\xi\left(n\right)\right) \tag{3.4}$$

gdje je $\xi(n),(n=0,1,2...,$ niz nezavisnih slučajnih varijabli$)$ definira Markovljev proces u slučaju da funkcija distribucije vjerojatnosti od $\xi(n)$ ovisi o stanju procesa u trenutku n.

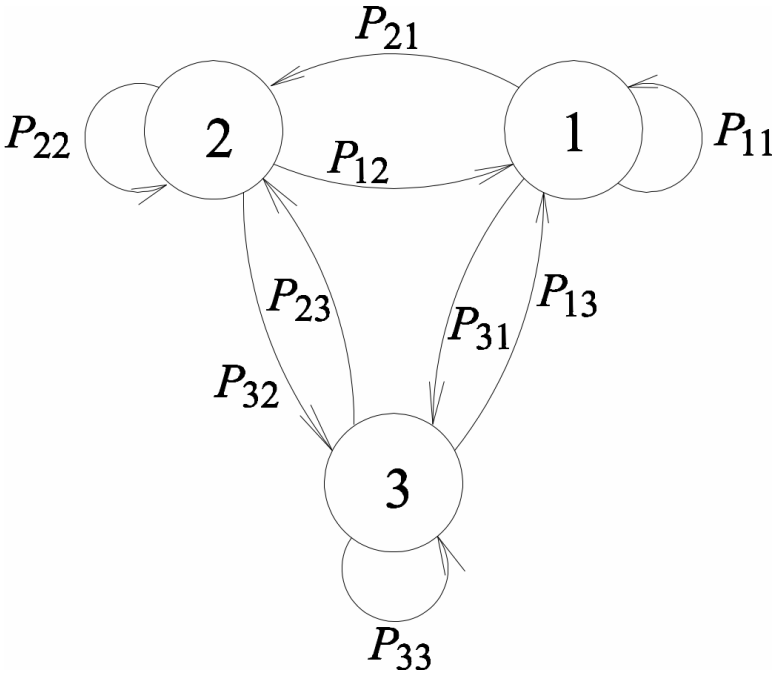
Gore definirane vjerojatnosti, P_{ij}, jednadžba (3.3) zovu se prijelazne vjerojatnosti Markovljevog lanca.

$$\begin{aligned} &P_{ij}\geq 0, \quad \forall\, i,j, \\ &\sum_{i=1}^{S} P_{ij}=1, \ \forall\, j. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Prijelazne vjerojatnosti je prikladno zapisati u obliku matrice koju zovemo matrica prijelaznih vrijednosti. Zbroj elemenata u svakom stupcu iznosi 1 pa tu matricu zovemo i stohastička matrica.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1S} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{S1} & P_{S2} & \dots & P_{SS} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Jednako tako prijelazne vjerojatnosti možemo prikazati kao veze u dijagramu prijelaznih vrijednosti Markovljevog lanca, Slika 5.



Slika 5. Dijagram prijelaznih vrijednosti Markovljevog lanca

Analiza Markovljeva lanca zahtijeva izračun vjerojatnosti svakog stanja. Koristeći izraz za potpunu vjerojatnost, vjerojatnost nekog stanja *i* mozemo pisati

$$P\left[X\left(n+1\right)=i\right] = \sum_{j=1}^{S} P\left[X\left(n+1\right)=i \middle| X\left(n\right)=j\right] P\left[X\left(n\right)=j\right], \quad i=1,2...,S \tag{3.7}$$

Uvodeći notaciju $P_j\left(n\right) := P\left[X\left(n\right)=j\right]$ i uzimajući u obzir kako su gornje uvjetne vjerojatnosti zapravo prijelazne vjerojatnosti Markovljevog lanca, možemo ih zapisati u obliku linearnih vremensko diskretnih jednadžbi:

$$P_i(n+1) = \sum_{j=1}^{S} P_{ij} P_j(n) \quad , \; i = 1, 2, ..., S, \tag{3.8}$$

gdje je $\sum_{i=1}^{S} P_i(n) = 1$. Rezultati jednadžbi (3.8) u potpunosti određuju Markovljev lanac. U većini slučajeva dovoljno je znati ustaljene vrijednosti prijelaznih vjerojatnosti, $P_i := P_i(\infty)$. Ove vjerojatnosti su jedinstvene jer ne ovise o početnoj vjerojatnosti svakog stanja i određene su sljedećim jednadžbama:

$$P_i = \sum_{j=1}^{S} P_{ij} P_{j,} \quad i = 1, 2, ..., S, \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{S} P_i = 1 \tag{3.10}$$

Ove se jednadžbe (3.9) i (3.10) nazivaju jednadžbe ravnoteže. Njihovo rješenje daje vjerojatnosti P_i, $i = 1, 2, ..., S,$ koje su komponente svojstvenog vektora matrice prijelaznih vrijednosti $\boldsymbol{P}$ jednadžba (3.6) sa svojstvenom vrijednošću koja iznosi 1.

4. MATEMATIČKO MODELIRANJE PROIZVODNOG PROCESA

4.1. Uspostava matematičkog modela

Prilikom opisivanja proizvodnih procesa odmah se dolazi do spoznaje kako ne postoje dva identična proizvodna procesa. Ako s vremenskim odmakom usporedimo dva postrojenja identičnih polaznih postavki, njihove karakteristike će se veoma razlikovati te ih slobodno možemo nazvati jedinstvenima. Promjene se dešavaju npr. mijenjanjem parametara rada, prilagođavanjem, poboljšanjima te različitom razinom održavanja postrojenja. Kako postoji nebrojeno mnogo proizvodnih procesa, uspostava jednog poznatog matematičkog modela s osobinama koji će najbolje pristajati promatranom proizvodnom procesu nameće se kao rješenje. Ključ matematičkog modeliranja je prepoznati taj model i odrediti bitne parametre koji će opisati proizvodni proces.

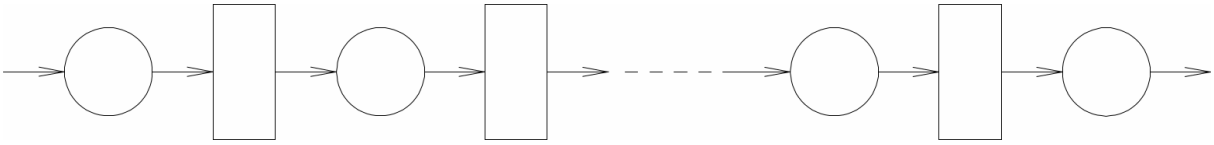
Definiranje matematičkog modela proizvodnog procesa ima pet sastavnica [2]:

1) određivanje vrste proizvodnog procesa
2) modeliranje stroja
3) modeliranje međuskladišta
4) uspostava pravila interakcije između stroja i međuskladišta
5) definiranje mjera koje će opisati učinak proizvodnog procesa

4.2. Linijski proizvodni proces

Linijski proizvodni proces je jedan od najčešćih proizvodnih procesa. Grupe procesno poredanih proizvodnih jedinica su međusobno povezane uređajima za transport. Proizvodne jedinice mogu biti npr, valjaonica, lakirnica, toplinska obrada ili neka druga tehnološka operacija. Kako nas zanima protok materijala i dijelova, a ne sam tehnološki proces, sve proizvodne jedinice ćemo zvati strojevi. S druge strane, sve vrste prijevoza, rukovanja materijalom i skladištenja ćemo zvati međuskladište. Skladišni kapacitet će biti primarni parametar kod definiranja međuskladišta. Pojedini linijski procesi će na samom kraju imati skladište gotovih proizvoda čija je zadaća uravnotežiti slučajnost procesa te osigurati pouzdano zadovoljstvo kupaca u odnosu na proizvodni proces.

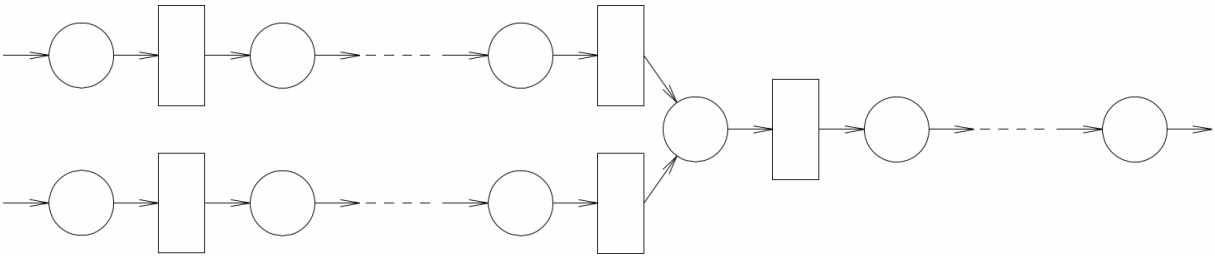
U bloku dijagramu, Slika 6, linijskog proizvodnog procesa pravokutnici predstavljaju međuskladišta, a krugovi strojeve.



Slika 6. Linijski proizvodni proces

4.3. Okrupnjavanje

Okrupnjavanje je proizvodni proces u kojem se linijski proizvodni procesi (dva ili više njih) združuju u proizvodnji dijelova. Dijelovi se sklapaju i na njima se nastavlja tehnološki postupak. Na sljedećem blok dijagramu, Slika 7, prikazan je tipičan proizvodni proces npr. proizvodnje motora gdje jedan linijski proces predstavlja blokove motora (sirovina), a drugi linijski proces dijelove motora (vratila, košuljice cilindre...) koji će se združiti na na jednoj postaji za okrupnjavanje.

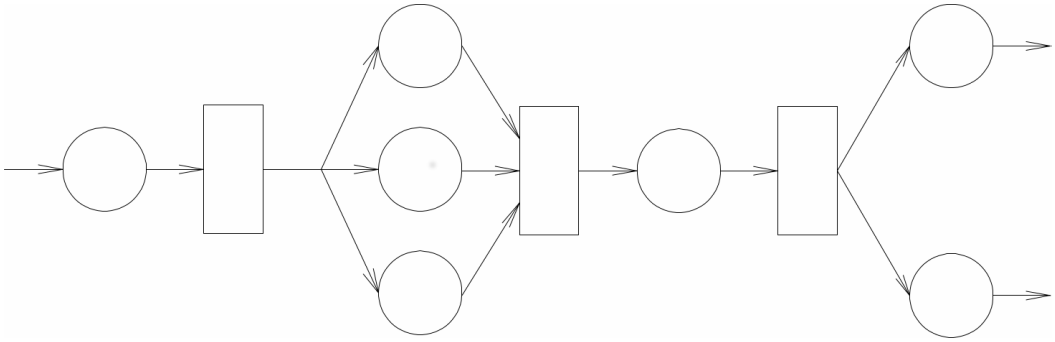


Slika 7. Okrupnjavanje

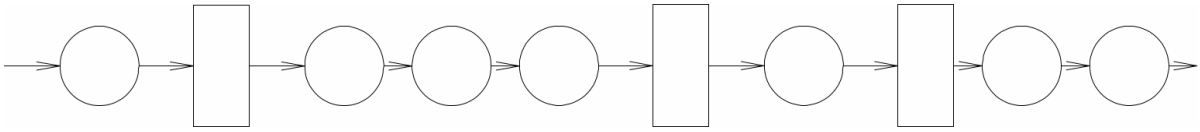
4.4. Strukurno modeliranje

Strukturno modeliranje proizvodnog procesa je jedan od najvažnijih postupaka pri matematičkom modeliranju proizvodnog procesa i njegovoj daljnjoj analizi i stalnom unapređivanju. Glavni pristup ovom problemu je sažet u izreci pripisanoj Einsteinu: "Model mora biti što je više moguće jednostavan, ali ne i jednostavniji." Ta izreka govori kako se dobar postupak strukturnog modeliranja postiže iskustvom pri rješavanju problema te vrste.

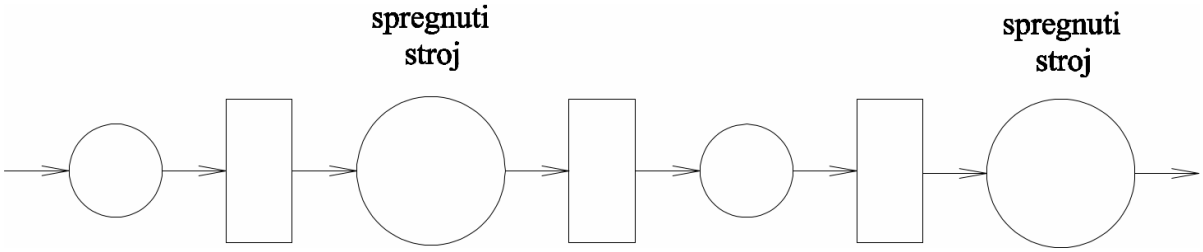
Ponekad je nemoguće nabaviti strojeve željenog proizvodnog kapaciteta, Slika 8, pa imamo linijski proizvodni proces s paralelnim strojevima između međuskladišta, dok Slika 9 pojašnjava drugi linijski proizvodni proces gdje strojevi izvode sinhronizirane i međusobno zavisne (jedan stroj je u kvaru, svi strojevi su u kvaru) operacije. Ta dva linijska proizvodna procesa možemo zamijeniti zajedničkim strukturnim modelom, Slika 10.



Slika 8. Linijski proizvodni proces s paralelnim strojevima



Slika 9. Linijski proizvodni proces sa sinhroniziranim zavisnim strojevima



Slika 10. Strukturni model linijskih proizvodnih procesa, Slika 8. i Slika 9.

4.5. Modeliranje stroja

Modeliranje stroja je definirano slijedećim parametrima:

Vremenski ciklus (τ)- vrijeme potrebno stroju za obradu pojedinog dijela. Vremenski ciklus može biti konstantan, promjenjiv ili slučajan. U velikim proizvodnim procesima τ jest ili je blizu konstantnom iznosu.

Kapacitet stroja (c)- broj dijelova proizvedenih od strane stroja po jedinici vremena kada stroj radi.

$$c = \frac{1}{\tau}$$

Ako u proizvodnom procesu strojevi imaju jednake vremenske cikluse, vremenske osi se smatraju podijeljene na vremenske odsječke, pri tome je neophodno definirati pojmove vremenski odsječak, kontinuirano vrijeme i diskretan događaj, odnosno:

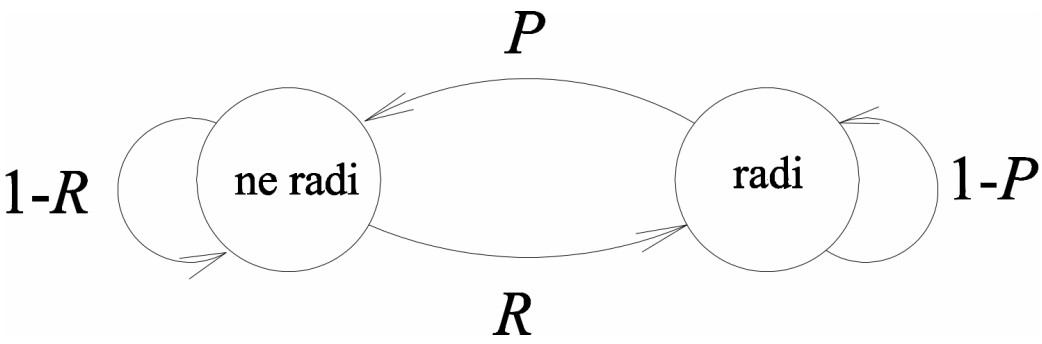
Vremenski odsječci- sve promjene u stanju stroja (radi ili je u kvaru) se dešavaju na početku ili na kraju svakog vremenskog odsječka.

Kontinuirano vrijeme- sve promjene stanja stroja se mogu dogoditi u bilo kojem trenutku na vremenskoj osi.

Diskretan događaj- dio se prenosi sa stroja na međuskladište (ako ono nije puno) tek kad je sav posao odrađen na stroju. U tom slučaju zauzetost skladišta je uvijek pozitivan broj.

4.6. Vrste modela pouzdanosti stroja u diskretnim procesima

Modeli pouzdanosti stroja su funkcije gustoće vjerojatnosti vremena u kojem stroj radi ili je u kvaru. U slučajevima kad je vrijeme podijeljeno na vremenske odsječke razmatramo dva modela. To su Bernoullijev i Geometrijski model pouzdanosti i smatramo ih sustavima diskretnih događaja. Bernoullijev model pouzdanosti je najjednostavniji model, ali je praktičan kod opisivanja operacija koje imaju kratko vrijeme kvara i u trajanju usporedivo s vremenkim ciklusom u kojem stroj radi. Na početku svakog vremenskog odsječka stanje stroja (stroj radi ili je u kvaru) je određeno ishodom eksperimenta gdje je *p* iznos vjerojatnosti kada stroj radi, a $1-p$ vjerojatnost kada je stroj u kvaru i nezavisno je u odnosu na prijašnja stanja stroja. Geometrijski model je funkcija distribucije vjerojatnosti ciklusa (kada stroj radi $P_{t_{up}}(t) = P\left[t_{up} = t\right] = P(1-P)^{t-1}$, $t = 1, 2, ...,$ ili kada je u kvaru $P_{t_{down}}(t) = P\left[t_{down} = t\right] = R(1-R)^{t-1}$, $t = 1, 2, ...,$) koja je izvedena iz geometrijskog stroja [2], Slika 11, gdje su *P* i *R* vjerojatnosti kada stroj radi ili je u kvaru.



Slika 11. Geometrijski stroj

Geometrijski model je dinamički sustav i daje realniji prikaz (pamti jedan korak) od Bernoullijevog modela, a kako svako stanje stroja u svakom vremenskom odsječku ovisi o onom prethodnom opisujemo ga Markovljevim lancem.

4.7. Određivanje vrijednosti parametara stroja

Vremenski ciklus stroja τ se u većini slučajeva određuje stvarnim mjerenjem vremena koje je stroju potrebno da izradi dio. Ako popratne operacije poput pozicioniranja ili odlaganja postoje i njih moramo uključiti u vremenski ciklus. Trajanje tih operacija može znatno produžiti vremenski ciklus iako je sam tehnološki postupak stroja kratak.

Određivanje vjerojatnosti $P_{t_{up}}$ i $P_{t_{down}}$ je mnogo teže odrediti. To bi zahtijevalo stvaranje histograma koji će pokazivati vrijeme kada je stroj radio ili bio u kvaru, a ono zahtijeva veliki broj mjerenja tijekom dužeg vremenskog perioda. U praksi, stvarne vrijednosti (unutar proizvodnog pogona) tih vjerojatnosti su nepoznate. Vrijednosti koje uglavnom imamo dostupne su T_{up} i T_{down} tj. prosječno vrijeme kada je stroj radio ili bio u kvaru. Njihove vrijednosti se određuju mjerenjem trajanja pojedinačnih događaja t_{up} i t_{down} (kada je stroj radio ili bio u kvaru). Uvrštavanjem dobivamo:

$$T_{up} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{up,i}}{n} \tag{4.2}$$

$$T_{down} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{down,i}}{n} \tag{4.3}$$

gdje je broj n dovoljno velik broj promatanja koji će osigurati statistički pouzdanu vrijednost parametara T_{up} i T_{down}.

4.8. Mjere za određivanje učinkovitosti proizvodnog sustava

Proizvodnost, *PR*, prosječan broj dijelova koji je proizveden od strane posljednjeg stroja u proizvodnom sustavu pri ustaljenosti rada u pojedinom vremenskom ciklusu.

Ova mjera je prikladna za opisivanje učina kod proizvodnih sustava koji imaju jednako trajanje vremenskog ciklusa.

Propusnost, *TP*, je prosječan broj dijelova koji je proizveden od strane posljednjeg stroja u proizvodnom sustavu u jedinici vremena pri ustaljenosti operacija proizvodnog sustava.

Prosječan rad u nastanku proizvoda, *WIP*, je prosječan broj poluproizvoda koji se nalaze na međuskladištu između dva stroja ako je prisutna ustaljenost operacija proizvodnog sustava. Za slučaj linijske proizvodnje s *M* strojeva možemo pisati:

$$WIP = \sum_{i=1}^{M-1} WIP_i . \tag{4.4}$$

Zastoj, BL_i, je ustaljena vrijednost vjerojatnosti da stroj *i* radi, da je međuskladište *i* popunjeno, i da stroj *i*+1 ne uzima dio iz međuskladišta *i*.

Prazan hod, ST_i, je ustaljena vrijednost vjerojatnosti da stroj *i* radi dok je međuskladište *i*-1 prazno.

Prosječno vrijeme koje dio provede u proizvodnom sustavu, *RT*, se prema Littleovom zakonu, ako su nam poznati *PR* , ili *TP* i *WIP*, može izraziti:

$$RT = \frac{WIP}{PR}\left[\text{ po vremenskom ciklusu}\right] \quad \text{ili} \quad RT = \frac{WIP}{PR}\left[\text{ po jedinici vremena}\right]. \tag{4.5}$$

Poznavanje vrijednosti *RT* nam određuje vrijeme isporuke gotovih proizvoda kupcima.

4.9. Pregled modeliranja, analize, inženjerstva i poboljšanja proizvodnog procesa

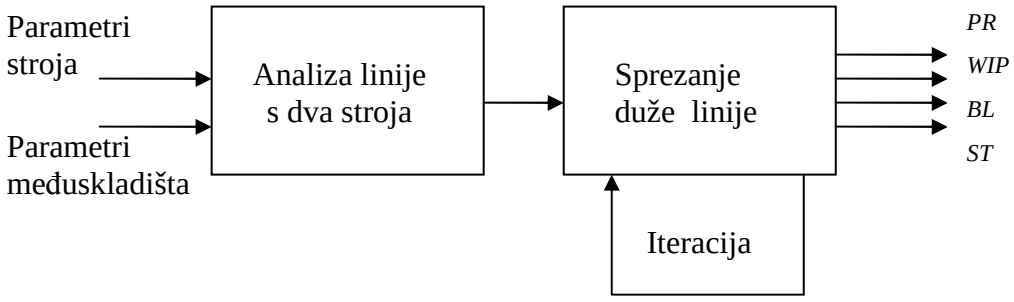
Proces nastajanja matematičkog modela proizvodnog sustava možemo podijeliti na pet koraka. Prvi korak je utvrđivanje stvarne vrste proizvodnog procesa npr. linijska proizvodnja, Slika 8. Drugi korak je strukturno modeliranje kojim ćemo stvarni proizvodni proces zamijeniti jednim od standardnih modela proizvodnih procesa, Slika 10. Slijedeći korak će biti utvrđivanje parametara rada stroja. U slučaju zamjene više strojeva jednim pri postupku strukturnog modeliranja, novi parametri spregnutih strojeva se moraju uzeti u razmatranje. Četvrti korak je utvrđivanje parametra međuskladišta tj. njegovog kapaciteta. Posljednji korak je vrijednovanje modela gdje se uspoređuju podaci dobiveni modelom sa stvarnim vrijednostima izmjerenima u nekom proizvodnom pogonu. Ako su odstupanja prevelika, svi ovi koraci se moraju ponoviti.

Vrijednosti uspostavljenih matematičkih modela se najviše očituju pri daljnjoj analizi, poboljšanjima i inžinjerstvu proizvodnih sustava koji se u suštini sastoje od:

1) ocijene parametara za učinkovitost (*PR, TP, WIP, BL, ST*).
2) prepoznavanje “uskog grla” tj. utvrđivanje stroja ili međuskladišta koji najviše utječu na rezultate proizvodnog procesa.
3) mogućnosti analize senzitivnosti tj. predvidjeti ponašanje proizvodnog procesa ako jedan ili više elemenata (strojevi, međuskladišta) promjene svoje karakteristike.

5. ANALIZA BERNOULLIJEVE PROIZVODNE LINIJE

Analitički pristup izračunu vrijednosti *PR, WIP, BL* i *ST* je baziran na matematičkom modelu proizvodnog sustava, ali zbog obima interakcije između strojeva, gotove izraze za izražavanje učinka proizvodne linije je gotovo nemoguće odrediti osim u slučaju sustava s dva stroja i jednim međuskladištem. Stoga, razvijen je pristup u kojem se prvo definiraju izrazi za učinkovitost proizvodne linije s dva stroja, a potom se metodom sprezanja reduciraju duži sustavi u novi skup uparenih sistema s dva stroja i izračunavaju mjere za učinkovitost. Ovakav pristup, Slika 12, rezultate mjera za učinkovitost *PR, WIP, BL* i *ST* dovodi na razinu točnosti koju želimo utvrditi ovim radom.



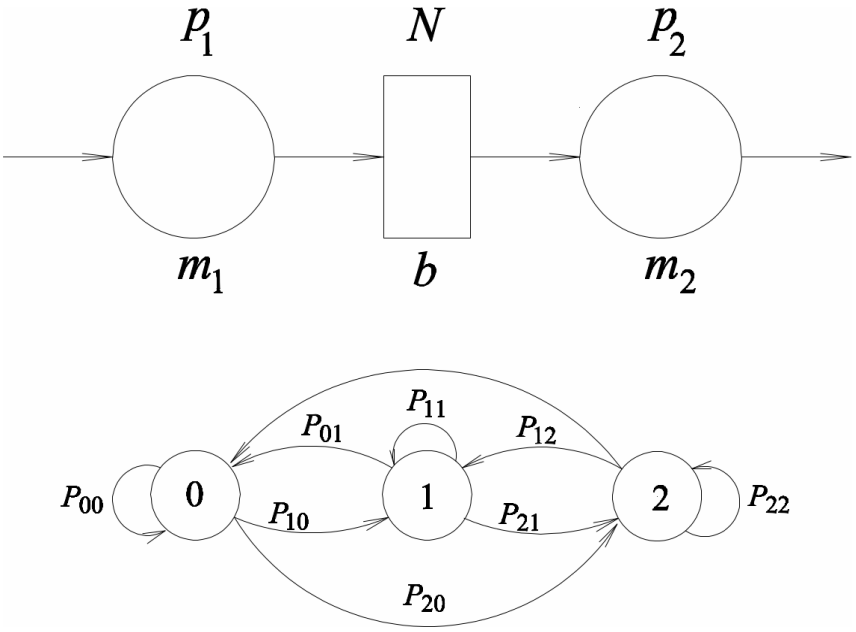
Slika 12. Blok dijagram analize Bernoullijeve proizvodne linije

5.1. Bernoullijeva linija s dva stroja i međukladištem

Modelirajući Bernoullijevu proizvodnu liniju s m_1 i m_2 ćemo označiti strojeve, a sa *b* međuskladište. Vjerojatnost da strojevi rade označiti ćemo s p_1 i p_2, a vjerojatnosti da su strojevi u kvaru s 1- p_1 i 1- p_2. Popunjenost međuskladišta će imati vrijednost N=2. Kako je u slučaju Bernoullijeve proizvodne linije stanje sustava jednako popunjenosti skladišta, skup stanja proizvodne linije opisuje dijagram prijelaznih vjeroatnosti koji ima tri točke. Pri uspostavi matematičkog modela uvode se i slijedeće pretpostavke:

1) strojevi imaju jednaki vremenski ciklus T_c vremenska os je podijeljena na odsječke, a strojevi započinju operacije na početku svakog vremenskog odsječka

2) zastoj se može dogoditi jedino na početku ciklusa
3) prvi stroj nije nikada u praznom hodu, a posljednji stroj nije u zastoju
4) stanje stroja i međuskladišta se određuje na početku svakog vremenskog odsječka
5) stanje svakog stroja određeno je neovisno u odnosu na druge strojeve.



Slika 13. Bernoullijeva proizvodna linija s dva stroja i dijagram prijelaznih vjerojatnosti

Nepoznate prijelazne vjerojatnosti, P_{ij}, Slika 13., se određuju jednadžbama ravnoteže (3.9) i (3.10), teoremima za potpunu i uvjetnu vjerojatnost, definiranim pretpostavkama matematičkog modela i pridržavajući se zakona o održanju mase (sirovina može ući samo preko stroja m_1 i izaći preko stroja m_m).

Analitičko rješenje je povezano s karakteristikama stohastičke matrice, gdje u slučaju homogenog i regularnog procesa najveći iznos svojstvene vrijednosti procesa iznosi 1, a njegov svojstveni vektor sadrži ustaljene vjerojatnosti P_i [1]. Stoga sustav linearnih jednadžbi (3.9) se može smatrati problemom određivanja nepoznatih svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. Jednom određene svojstvene vrijednosti nam omogućuju dobivanje svojstvenih vektora pomoći izraza (3.10). Ovakav pristup se često rabi u analizi vibracija kod

sustava sa dva ili više stupnjeva slobode gibanja. Stoga sustav (3.9) ima *S* stupnjeva slobode, a vlastite vrijednosti i pripadajući vlastiti vektori određuju "prirodni odziv" sustava. Svojstvene vrijednosti određujemo pomoću izraza

$$\det\left(\left[P\right]-\Omega\left[I\right]\right)=0, \tag{5.1}$$

gdje je $\left[P\right]$ matrica prijelaznih vrijednosti, Ω je svojstvena vrijednost, a $\left[I\right]$ je jedinična matrica. Rješenje sustava linearnih jednadžbi

$$\left(\left[P\right]-\Omega_k\left[I\right]\right)\left\{P\right\}_k=0, \tag{5.2}$$

daje nepoznate svojstvene vektore $\left\{P\right\}_k$. Za analizu ustaljenosti Bernoullijeve proizvodne linije bit će nam potrebne samo prva svojstvena vrijednost Ω_1 i prvi svojstveni vektor $\left\{P\right\}_1$.

$$\begin{aligned}
P_{00}&=P\left[h(n+1)=0\middle|h(n)=0\right]=P\left[\{m_1\text{ down}\}\right]=1-p_1\\
P_{01}&=P\left[h(n+1)=0\middle|h(n)=1\right]=P\left[\{m_1\text{ down}\}\cap\{m_1\text{ up}\}\right]=(1-p_1)\,p_2,\\
P_{02}&=P\left[h(n+1)=0\middle|h(n)=2\right]=0,\\
P_{10}&=P\left[h(n+1)=1\middle|h(n)=0\right]=P\left[\{m_1\text{ up}\}\right]=p_1,\\
P_{11}&=P\left[h(n+1)=1\middle|h(n)=1\right]=P\left[\{m_1\text{ up}\}\cap\{m_2\text{ up}\}\cup\{m_1\text{ down}\}\cap\{m_2\text{ down}\}\right]=p_1p_2+(1-p_1)(1-p_2),\\
P_{12}&=P\left[h(n+1)=1\middle|h(n)=2\right]=P\left[\{m_1\text{ down}\}\cap\{m_2\text{ up}\}\right]=(1-p_1)\,p_2,\\
P_{20}&=P\left[h(n+1)=2\middle|h(n)=0\right]=0,\\
P_{21}&=P\left[h(n+1)=2\middle|h(n)=1\right]=P\left[\{m_1\text{ up}\}\cap\{m_2\text{ down}\}\right]=p_1(1-p_2),\\
P_{22}&=P\left[h(n+1)=2\middle|h(n)=2\right]=P\left[\{m_1\text{ up}\}\cap\{m_2\text{ up}\}\cup\{m_2\text{ down}\}\right]=p_1p_2+(1-p_2),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

gdje *h*(*n*) predstavlja stanje međuskladišta u n-tom ciklusu, te može biti zapisano u obliku prijelazne matrice $\left[P\right]$.

$$\left[P\right]=\begin{bmatrix}1-p_1 & (1-p_1)\,p_2 & 0\\ p_1 & p_1p_2+(1-p_1)(1-p_2) & (1-p_1)\,p_2\\ 0 & p_1(1-p_2) & p_1p_2+(1-p_2)\end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (5.1) u jednadžbu (5.4) i rješavanjem problema svojstvenih vrijednosti dobivamo tri svojstvene vrijednosti

$$\Omega_1 = 1$$
$$\Omega_2 = 1 - p_1 - p_2 + \frac{3p_1p_2}{2} + A \tag{5.5}$$
$$\Omega_3 = 1 - p_1 - p_2 + \frac{3p_1p_2}{2} - A$$

gdje $A = \frac{1}{2}\sqrt{p_1p_2(4 - 4p_1 - 4p_2 + 5p_1p_2)}$. Uvodeći $\Omega_1 = \Omega = 1$ i uvrštavanjem jednadžbe (5.4) u jednadžbu (5.3) i rješavanjem sustava linearnih jednadžbi za P_0 dobivamo nepoznati svojstveni vektor $\langle P \rangle = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ u normalnom obliku, tj.

$$\langle P \rangle = \left\langle P_0, \frac{p_1}{(1-p_1)p_2} P_0, \frac{p_1^2(1-p_2)}{p_2^2(1-p_1)^2} P_0 \right\rangle. \tag{5.6}$$

Nepoznata početna vjerojatnost, P_0 se može odrediti pomoću izraza (3.10) iz čega slijedi nepoznati svojstveni vektor

$$\langle P \rangle = \frac{1}{1 - p_2 + \alpha + \alpha^2} \langle 1 - p_2, \alpha, \alpha^2 \rangle, \tag{5.7}$$

gdje je

$$\alpha = \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)} \tag{5.8}$$

Imajući definirane ustaljene vjerojatnosti, izrazi za mjerenje učinka (*PR, WIP, BL* i *ST*) Bernoullijeve proizvodne linije se mogu formulirati [2].

Proizvodnost, *PR*, je definirana kao prosječni broj dijelova proizvedenih od strane posljednjeg stroja proizvodne linije pri ustaljenosti rada. Stoga u slučaju jednog međuskladišta proizvodnost se prikazuje kao presjek događaja $\{m_2 \text{ radi}\}$ i $\{b \text{ nije prazno}\}$, tj.

$$PR = P\left[\{m_2 \text{ radi}\} \cap \{b \text{ nije prazno}\}\right] = p_2(1 - P_0) \tag{5.9}$$

Prosječan broj poluproizvoda na međuskladištu *b*, tijekom ustaljenosti operacija proizvodne linije odražava se na ustaljene vrijednosti vjerojatnosti i definiran je s *WIP*, te u slučaju jednog međuskladišta glasi :

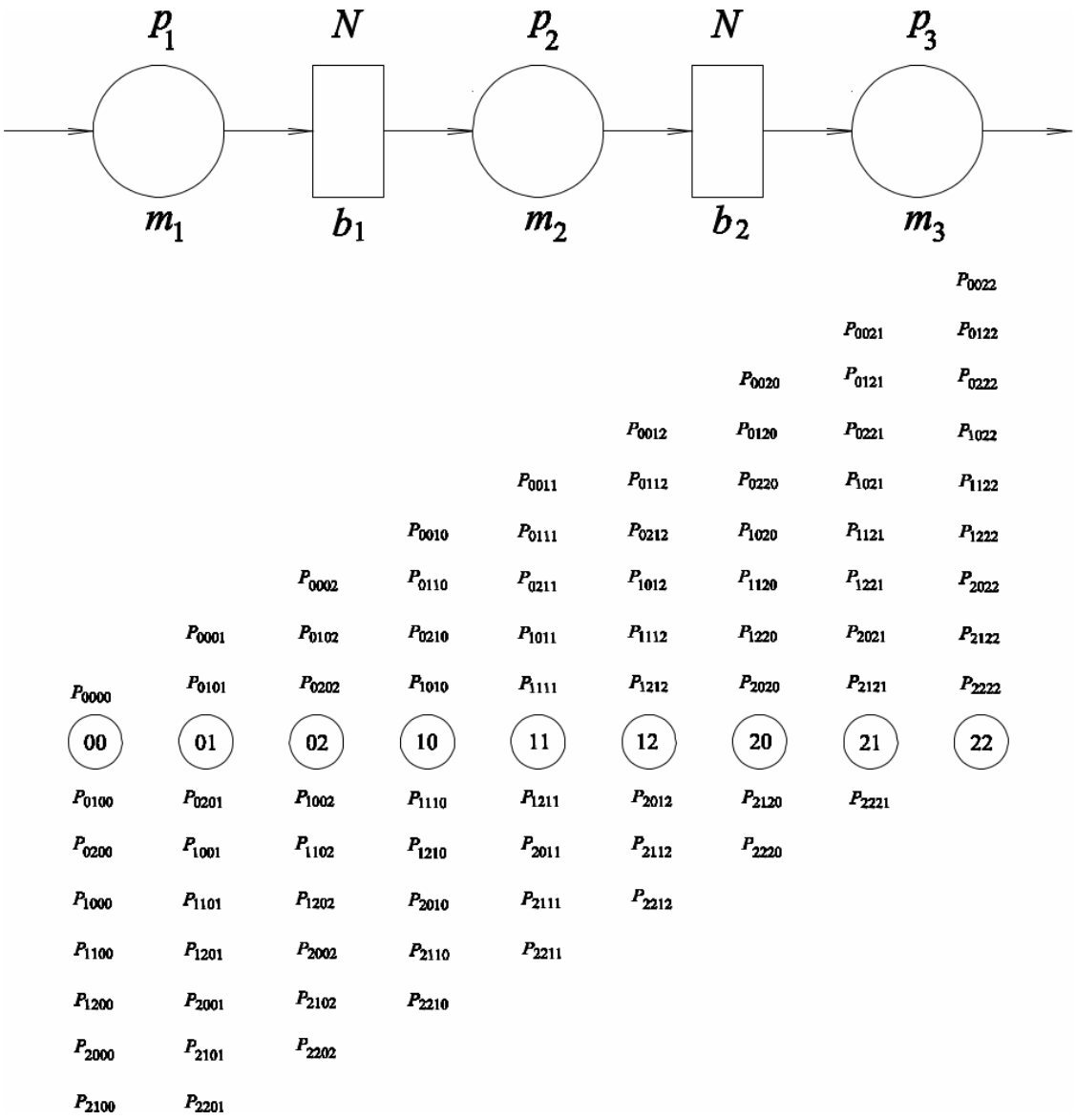
$$WIP = \sum_{i=1}^{N} iP_i. \tag{5.10}$$

Vjerojatnosti zastoja BL i praznog hoda ST predstavljaju presjeci događaja $\{m_1 \text{ radi}\}$, $\{b \text{ puno}\}$ i $\{m_2 \text{ u kvaru}\}$, te za prazan hod $\{b \text{ prazno}\}$ i $\{m_2 \text{ radi}\}$ tj.

$$\begin{aligned} BL &= P\left[\{m_1 \text{ radi}\} \cap \{b \text{ puno}\} \cap \{m_2 \text{ u kvaru}\}\right] = p_1 P_N (1 - p_2), \\ ST &= P\left[\{b \text{ prazno}\} \cap \{m_2 \text{ radi}\}\right] = P_0 p_2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.2. Bernoullijeva linija s tri stroja i dva međukladišta

Razmatrajući Bernoullijevu proizvodnu liniju s tri stroja i dva međuskladišta, slika 14, strojevi m_1, m_2 i m_3 će biti definirani s vjerojatnošću da rade p_1, p_2 i p_3. Vjerojatnosti da su strojevi u kvaru glase $1 - p_1$, $1 - p_2$ i $1 - p_3$. Jednako kao i u slučaju linije s jednim međuskladištem pretpostaviti će se vrijednost popunjenosti međuskladišta $N_1 = N_2 = 2$. Za posljedicu, u odnosu na sve moguće kombinacije, skup stanja proizvodne linije će se sastojati od devet točaka, Slika 14. Prijelazne vjerojatnosti ćemo označavati sa četiri indeksa P_{ijkl} gdje i i j predstavljaju predstavljaju popunjenost međuskladišta b_1 odnosno, b_2 u ciklusu $n+1$, a indeksi k i l označavaju popunjenost skladišta b_1 i b_2 u ciklusu *n.*



Slika 14. Bernoullijeva proizvodna linija s tri stroja i dva međuskladišta

Koristeći isti pristup kao i u slučaju linije s jednim međuskladištem, prijelazne vjerojatnosti se mogu odrediti na osnovi definiranih pretpostavki koristeći teoreme za konačnu i uvjetnu vjerojatnost. U sljedećem izrazu su prikazane prijelazne vjerojatnosti za slučaj $k = l = 1$ tj.

$$
\begin{aligned}
P_{0011} &= P\left[h_1(n+1)=0, h_2(n+1)=0 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=0,\\
P_{0111} &= P\left[h_1(n+1)=0, h_2(n+1)=1 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=P\left[\{m_1 \text{ down}\}\cap\{m_2 \text{ up}\}\cap\{m_3 \text{ up}\}\right]=(1-p_1)\,p_2\,p_3,\\
P_{0211} &= P\left[h_1(n+1)=0, h_2(n+1)=2 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=P\left[\{m_1 \text{ down}\}\cap\{m_2 \text{ up}\}\cap\{m_3 \text{ down}\}\right]=(1-p_1)\,p_2\,(1-p_3),\\
P_{1011} &= P\left[h_1(n+1)=1, h_2(n+1)=0 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=P\left[\{m_1 \text{ down}\}\cap\{m_2 \text{ down}\}\cap\{m_3 \text{ up}\}\right]=(1-p_1)(1-p_2)\,p_3,\\
P_{1111} &= P\left[h_1(n+1)=1, h_2(n+1)=1 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=P\left[\{m_1 \text{ up}\}\cap\{m_2 \text{ up}\}\cap\{m_3 \text{ up}\}\cup\{m_1 \text{ down}\}\cap\{m_2 \text{ down}\}\cap\{m_3 \text{ down}\}\right]\\
&\qquad = p_1p_2p_3+(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3),\\
P_{1211} &= P\left[h_1(n+1)=1, h_2(n+1)=2 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=P\left[\{m_1 \text{ up}\}\cap\{m_2 \text{ up}\}\cap\{m_3 \text{ down}\}\right]=p_1p_2(1-p_3),\\
P_{2011} &= P\left[h_1(n+1)=2, h_2(n+1)=0 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=P\left[\{m_1 \text{ up}\}\cap\{m_2 \text{ down}\}\cap\{m_3 \text{ up}\}\right]=p_1(1-p_2)\,p_3,\\
P_{2111} &= P\left[h_1(n+1)=2, h_2(n+1)=1 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=P\left[\{m_1 \text{ up}\}\cap\{m_2 \text{ down}\}\cap\{m_3 \text{ down}\}\right]=p_1(1-p_2)(1-p_3),\\
P_{2211} &= P\left[h_1(n+1)=2, h_2(n+1)=2 \middle| h_1(n)=1, h_2(n)=1\right]=0
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

gdje $h_1(n)$ i $h_2(n)$ predstavljaju stanja prvog i drugog međuskladišta u n-tom ciklusu [5]. Jednom formulirane, prijelazne vjerojatnosti mogu se prikazati u obliku matrice prijelaznih vrijednosti $[P]$.

$$
[P]=\begin{bmatrix}
1-p_1 & (1-p_1)p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & (1-p_1)(1-p_3) & (1-p_1)p_3 & (1-p_1)p_2 & (1-p_1)p_2p_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (1-p_1)(1-p_3) & 0 & (1-p_1)p_2(1-p_3) & (1-p_1)p_2p_3 & 0 & 0 & 0\\
p_1 & p_1p_3 & 0 & (1-p_1)(1-p_2) & (1-p_1)(1-p_2)p_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & p_1(1-p_3) & p_1p_3 & p_1p_2 & (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)+p_1p_2p_3 & (1-p_1)(1-p_2)p_3 & (1-p_1)p_2 & (1-p_1)p_2p_3 & 0\\
0 & 0 & p_1(1-p_3) & 0 & p_1p_2(1-p_3) & (1-p_1)(1-p_3)+p_1p_2p_3 & 0 & (1-p_1)p_2(1-p_3) & (1-p_1)p_2p_3\\
0 & 0 & 0 & p_1(1-p_2) & p_1(1-p_2)p_3 & 0 & (1-p_2) & (1-p_2)p_3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & p_1(1-p_2)(1-p_3) & p_1(1-p_2)p_3 & p_1p_2 & (1-p_2)(1-p_3)+p_1p_2p_3 & (1-p_2)p_3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1(1-p_3) & 0 & p_1p_2(1-p_3) & (1-p_3)+p_1p_2p_3
\end{bmatrix}
\tag{5.13}
$$

Kao i u slučaju Bernoulllijeve linije s dva stroja i jednim međuskladištem, jednadžbe za određivanje vrijednosti parametara (*PR*, *WIP*, *BL* i *ST*) mogu se definirati sličnim postupkom [5]. U slučaju proizvodne linije s dva međuskladišta , proizvodnost, *PR* je definirana kao presjek događaja $\{m_3 \text{ radi}\}$ i $\{b_2 \text{ nije prazno}\}$, tj.

$$
PR = P\left[\{m_3 \text{ radi}\}\cap\{b_2 \text{ nije prazno}\}\right]=p_3\left(1-\sum_{k=0}^{N_1}P_{k0}\right). \tag{5.14}
$$

Kad imamo liniju s dva međuskladišta izraz za *WIP* je definiran kao zbroj izraza WIP_1 i WIP_2 za prvo i drugo međuskladište.

$$
\begin{aligned}
WIP_1 &= \sum_{l=0}^{N_2}\sum_{k=1}^{N_1} kP_{kl},\\
WIP_2 &= \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_2} lP_{kl},
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

$$WIP = WIP_1 + WIP_2 \tag{5.16}$$

Vjerojatnosti zastoja BL_1 i BL_2 za strojeve m_1 i m_2 kao i vjerojatnosti praznog hoda ST_2 i ST_3 za strojeve m_2 i m_3 su prikazane kao presjeci različitih kombinacija događaja, tj.

$$\begin{aligned}
BL_1 &= P\Big[\{m_1 \text{ radi}\} \cap \{b_1 \text{ puno}\} \cap \{m_2 \text{ u kvaru}\} \cap \{m_1 \text{ radi}\} \\
&\qquad \cap \{b_1 \text{ puno}\} \cap \{m_2 \text{ radi}\} \cap \{b_2 \text{ puno}\} \cap \{m_3 \text{ u kvaru}\}\Big] = \\
&\qquad\qquad p_1 \sum_{l=0}^{N_2} P_{N_1 l} \left(1 - p_2\right) + p_1 \sum_{l=0}^{N_2} P_{N_1 l} BL_2, \\
BL_2 &= P\Big[\{m_2 \text{ radi}\} \cap \{b_2 \text{ puno}\} \cap \{m_3 \text{ u kvaru}\}\Big] = p_2 \sum_{k=0}^{N_1} P_{kN_2} \left(1 - p_3\right), \\
ST_2 &= P\Big[\{b_1 \text{ prazno}\} \cap \{m_2 \text{ radi}\}\Big] = \sum_{l=0}^{N_2} P_{01} p_2, \\
ST_3 &= P\Big[\{b_2 \text{ prazno}\} \cap \{m_3 \text{ radi}\}\Big] = \sum_{k=0}^{N_1} P_{k0} p_3.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

5.3. Analitička i približna metoda za određivanje parametara *PR, WIP, BL* i *ST*

Zbog potrebe analize numeričkih primjera Bernoullijevih linija s tri, pet i sedam strojeva i usporedbe rezultata koje će uslijediti u ovom radu potrebno je razlučiti analitičku i približnu metodu koja je također temeljena na analitičkom modelu i postupku sprezanja strojeva.

Analitička metoda će se primjeniti na liniji s tri stroja i dva međuskladišta, a vrijednosti parametara učinkovitosti *PR, WIP, BL* i *ST* ćemo odrediti pomoću jednadžbi (5.14)-(5.17) i kompjuterskog alata Mathcad 14 [3]. Usporedba te linije će biti izvršena približnom metodom pomoću PSEToolbox [4] kompjuterskog alata. Za liniju s pet strojeva i četiri međuskladišta usporediti će se samo parametar *PR* približnom metodom postupkom sprezanja koristeći [3] i [4], a za liniju predobrade crne metalurgije sa sedam strojeva, vrijednost parametra *PR* odrediti će se uz prvi i drugi korak sprezanja, pomoću [3],

5.4. Numerički primjer analize Bernoullijeve linija s tri stroja i dva međuskladišta

U prikazu analitičkog i približnog rješenja biti će uspoređeno devet linija s tri stroja i dva međuskladišta. Svaka linija ima posebno definirane vrijednosti vjerojatnosti za sva tri stroja. Prve tri linije će imati jednake vrijednosti vjerojatnosti kad stroj radi za sva tri stroja $p_1 = p_2 = p_3$, dok ostalih šest linija neće imati jednake vjerojatnosti rada strojeva. Linija L_4 će imati padajuće, a linija L_5 uzlazne vrijednosti vjerojatnosti rada strojeva. Linije L_6 i L_9 opisuju slučaj kad je loš stroj okružen boljim strojevima, a linije L_7 i L_8 situaciju kad je dobar stroj okružen lošijim strojevima. Oba međuskladišta će imati jednak kapacitet $N_1 = N_2 = 2$.

Tablica 1. Karakteristike linija $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8$ i L_9

Line	p_1	p_2	p_3
L_1	0.9	0.9	0.9
L_2	0.8	0.8	0.8
L_3	0.7	0.7	0.7
L_4	0.9	0.8	0.7
L_5	0.7	0.8	0.9
L_6	0.8	0.7	0.9
L_7	0.7	0.9	0.8
L_8	0.7	0.9	0.7
L_9	0.9	0.7	0.9

Bazirajući se na ustaljenosti vjerojatnosti mjera za učinak, vrijednosti *PR* ,*WIP* ,*BL* i *ST* se mogu izračunati koristeći se jednadžbama (5.14) − (5.17). Dobiveni rezultati su uspoređeni s onima koji su utvrđeni približnom metodom pomoću PSEToolbox [4] kompjuterskog alata koji se temelji na metodi sprezanja te se sastoji od postupaka iteracije i kumulativnih izračuna mjera za učinak koji rezultiraju približnim rješenjem pri razmatranju Bernoullijeve linije s dva ili više međuskladišta [5]. Rezultati dobiveni analitičkom metodom

(AS) i približnom metodom (AP) su uspoređeni u tablicama 2 i 3 za slučajeve linija $L_{1,}$ L_2, $L_{3,}$ $L_{4,}$ $L_{5,}$ $L_{6,}$ $L_{7,}$ L_8 i L_9 gdje je relativna pogreška iskazana u obliku,

$$\varepsilon = \frac{\text{AS} - \text{AP}}{\text{AS}} \cdot 100\%. \tag{5.17}$$

Tablica 2. Usporedba vrijednosti PR i WIP dobivenih analitičkom AS i približnom metodom AP

	PR			*WIP*$_1$			*WIP*$_2$			*WIP*		
Linija	AS	AP	ε,%	AS	AP	ε,%	AS	AP	ε,%	AS	AP	ε,%
L_1	0.832	0.832	0.00	1.525	1.52	−0.327	1.313	1.31	−0.228	2.838	2.83	−0.282
L_2	0.688	0.688	0.08	1.479	1.47	−0.603	1.23	1.22	−0.813	2.71	2.69	−0.738
L_3	0.563	0.564	0.301	1.442	1.42	−1.525	1.163	1.15	−1.117	2.605	2.57	−1.343
L_4	0.654	0.653	−0.107	1.801	1.8	−0.055	1.51	1.51	0.00	3.311	3.31	−0.03
L_5	0.643	0.651	1.197	1.194	1.14	−4.522	0.89	0.86	−3.37	2.084	2	−4.03
L_6	0.649	0.651	0.261	1.561	1.55	−0.704	0.853	0.85	−0.352	2.414	2.4	−0.579
L_7	0.662	0.672	1.616	1.088	1.05	−3.492	1.228	1.17	−4.273	2.316	2.22	−4.145
L_8	0.6270	0.639	1.961	1.223	1.2	−1.88	1.465	1.44	−1.706	2.688	2.64	−1.785
L_9	0.68	0,679	−0.117	1.78	1.78	0.00	0.903	0.9	−0.332	2.682	2.68	−0.074

Tablica 3. Usporedba vjerojatnosti zastoja *BL* i praznog hoda *ST* dobivenih analitičkom AS i približnom metodom AP

	BL_1			BL_2			ST_2			ST_3		
Linija	AS	AP	ε,%	AS	AP	ε,%	AS	AP	ε,%	AS	AP	ε,%
L_1	0.051	0.068	3.33	0.035	0.0347	−0.857	0.035	0.0347	−0.857	0.068	0.068	0.00
L_2	0.112	0.1112	−0.714	0.058	0.0577	−0.517	0.058	0.0577	−0.517	0.112	0.1112	−0.714
L_3	0.138	0.1353	−1.956	0.072	0.0713	−0.972	0.072	0.0713	−0.972	0.137	0.1353	−1.24
L_4	0.248	0.2467	−0.524	0.138	0.1381	−0.072	0.01	0.0104	4.00	0.046	0.0467	1.52
L_5	0.049	0.0467	−4.693	0.011	0.0104	−5.454	0.144	0.1381	−0.515	0.257	0.2467	−4.01
L_6	0.151	0.1493	−1.125	0.0086	0.0009	4.456	0.041	0.0408	−0.487	0.251	0.2493	−0.677
L_7	0.03	0.0273	−9.00	0.065	0.0592	−8.923	0.187	0.1799	3.796	0.138	0.1273	−7.753
L_8	0.063	0.0607	−3.65	0.148	0.1415	−4.391	0.148	0.1415	−4.391	0.073	0.0607	−16.84
L_9	0.222	0,2208	−0.54	0.01	0.0105	5.00	0.01	0.0105	5.00	0.22	0.2208	0.363

Usporedba rezultata dobivenih analitičkom metodom (AS) i onih koji su dobiveni približnom metodom (AP) ukazuje da u slučajevima kad imamo strojeve s jednakim vjerojatnostima rada (linije L_1, L_2 i L_3), vrijednosti mjera za učinak se dobro poklapaju i primjenjive su u inženjerske svrhe. Kad uspoređujemo linije L_4 i L_5, linija L_4 (koja ima padajuće vrijednosti vjerojatnosti rada strojeva) daje manje razlike za *PR*, *WIP*, BL_1 i BL_2, dok apsolutna vrijednost relativne pogreške za ST_2 iznosi 4.00%. S druge strane linija L_5 daje veće razlike za *PR*, *WIP*, BL_1 i BL_2 u odnosu na L_4. Značajna odstupanja mogu se zamijetiti u slučajevima kad imamo linije sa strojevima koji imaju različite vjerojatnosti rada, pogotovo kad uspoređujemo rezultate dobivene za zastoj ili prazan hod. U slučaju linije L_7 za iznos zastoja relativna pogreška iznosi 8.92%, dok za liniju L_8 u slučaju praznog hoda ST_3 imamo najveću apsolutnu vrijednost relativne pogreške koja dostiže do 16.84%. Glavni razlog za veća odstupanja je povezan s algoritmom približne metode pri postupku sprezanja koji je baziran na jednakosti proizvodnosti *PR* za dvije pretpostavljene proizvodne linije i jednakim vjerojatnostima za slučaj kvara tih istih proizvodnih linija [5]. Metoda sprezanja ne uzima u obzir ustaljenost vjerojatnosti koje utječu na mjere za učinak pa dobiveni rezultati imaju

smanjenu točnost predviđanja, pogotovo u slučaju Bernoullijevih linija s različitim vjerojatnostima rada strojeva.

5.5. Analiza Bernoullijeve linije s pet strojeva i četiri međuskladišta

Analiza Bernoullijeve linije s pet strojeva provedena je na pet linija, Tablica 4. Prva linija L_1^5 ima jednake vjerojatnosti rada za svih pet strojeva. Druga linija L_2^5 ima padajuće vjerojatnosti rada strojeva, a treća linija L_3^5 ima uzlazne vijednosti vjerojatnosti rada stroja. Posljednje dvije linije opisuju slučajeve kad je dobar stroj okružen lošim strojevima i situaciju kad je loš stroj okružen dobrim strojevima.

Tablica 4. Karakteristike linija $L_1^5, L_2^5, L_3^5, L_4^5, L_5^5$

Line	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
L_1^5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
L_2^5	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
L_3^5	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
L_4^5	07	0.7	0.9	0.7	0.7
L_5^5	0.9	0.9	0.7	0.9	0.9

Usporedba rezultata dobivenih približnom metodom pomoću [3] i [4] za opis Bernoullijeve linije s pet strojeva i četiri međuskladišta svesti će se u ovom slučaju na analizu parametara za proizvodnost *PR* jer validirajući numeričke rezutate u prethodnom primjeru može se zaključiti kako u općem slučaju numerička analiza daje pouzdane rezultate jedino za parametar proizvodnost. Za svaku od ovih pet linija je proveden postupak u kojem je izračunata proizvodnost za prva tri stroja. Dobivena vrijednost proizvodnosti u slijedećem koraku se uvrštava kao zajednička vjerojatnost kad stroj radi p_{M-1}^f za spregnuta prva tri stroja m_{M-1}^f te sprezanjem sa strojevima m_4 i m_5 daje konačnu vrijednost proizvodnosti. Ovaj

postupak je definiran kao postupak unaprijed, dok računajući *PR* za strojeve m_3, m_4 i m_5, a potom za m_1, m_2 i spregnuti m_3^b definiramo postupak unatrag.

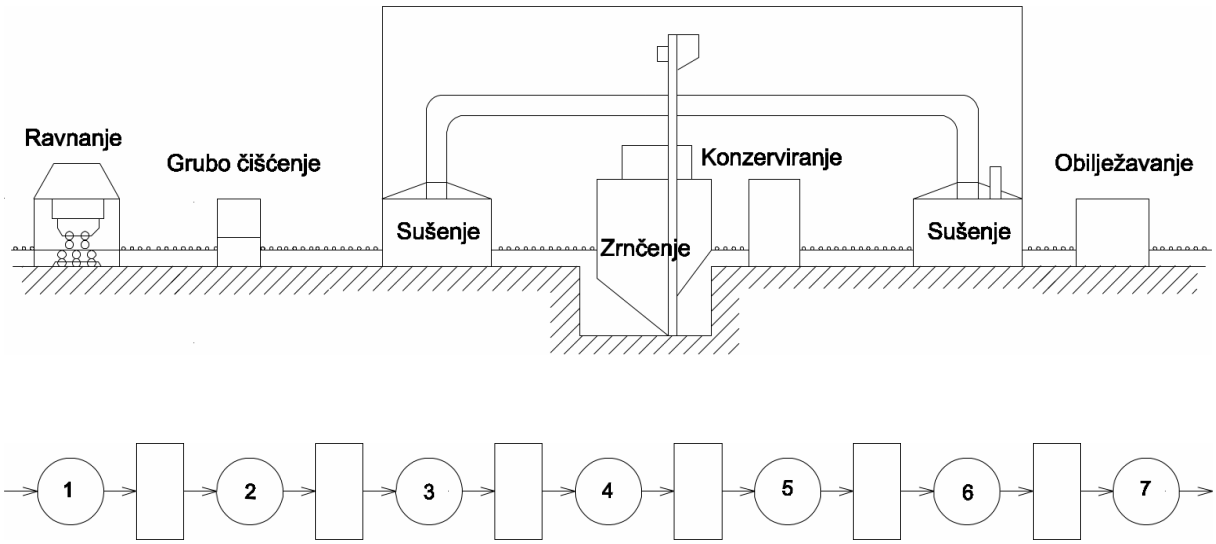
Dobiveni rezultati za parametar proizvodnost, Tablica 5 su približno jednaki i za analitičku i za približnu metodu osim u slučaju linije L_3^5 naprijed, gdje zbog samo jednog koraka iteracije dolazi do problema konvergencije i vrijednost vjerojatnosti *PR* naprijed odstupa od one dobivene približnom metodom.

Tablica 5. Usporedba vjerojatnosti proizvodnosti *PR* dobivenih analitičkom AS i približnom metodom AP za Bernoullijevu liniju s pet strojeva

	PR AS		*PR* AP
Line	naprijed	natrag	
L_1^5	0.79	0.791	0.805
L_2^5	0.426	0.423	0.4294
L_3^5	0.213	0.408	0.4294
L_4^5	0.51	0.523	0.5701
L_5^5	0.657	0.661	0.6740

5.6. Proizvodna linija predobrade crne metalurgije sa sedam strojeva i šest međuskladišta

U svakom hrvatskom brodogradilištu postoji linija predobrade limova koja svoje mjesto zauzima na početku brodograđevnog procesa i služi kao poveznica između ulaznog skladišta limova i brodograđevnih radionica. Proizvodna linija predobrade crne metalurgije vrši pripremu ulazne sirovine za nadolazeće tehnološke operacije. Proces predobrade se sastoji od ravnanja, grubog čišćenja, prvog sušenja, zrnčenja, konzerviranja, drugog sušenja i obilježavanja. Sve postaje su uobičajeno povezane konvejerima koji transportiraju limove s jedne na drugu operaciju, Slika 15, a karakteristike strojeva su određene prema [6] u tablicama 5 i 6. Dimenzije svih limova su jednake i iznose 12×3 m.



Slika 15. Linija predobrade i matematički model

Tablica 6. Kapaciteti strojeva

Operacija	Ravnanje	Grubo ćiščenje	Sušenje	Zrnčenje	Konzerviranje	Drugo sušenje	Obilježavanje
Nazivni kapacitet	2 lima/h	150 m²/h	280 m²/h	185 m²/h	400 m²/h	280 m²/h	4 lima/h
Kapacitet, lim/h	2	2.08	3.88	2.6	4.16	3.88	4
Ciklus, h/lim	0.5	0.48	0.258	0.385	0.24	0.258	0.25

Tablica 7. Kapaciteti međuskladišta

Međuskladište	1	2	3	4	5
Duljina, m	20	20	25	20	25
N*	1	2	2	1	2

Kako bi odredili iznose vjerojatnosti za vremenske intervale u kojima će stroj raditi ili biti u kvaru potrebno je mjerenjem odrediti stvarne kapacitete strojeva. Pretpostavljeni operativni kapaciteti strojeva predobrade crne metalurgije su prikazani u tablici 8. zajedno s odgovarajućim vjerojatnostima koje predstavljaju omjer između operativnih i nazivnih kapaciteta strojeva.

Tablica 8. Operativni kapaciteti strojeva

Operacija	Ravnanje	Grubo ćiščenje	Sušenje	Zrnčenje	Konzerviranje	Drugo sušenje	Obilježavanje
Kapacitet, lim/h	1.8	1.95	3.54	2.3	3.95	3.45	3.82
Vjerojatnost, *p*	0.9	0.936	0.912	0.884	0.949	0.889	0.995

Analiza linije predobrade crne metalurgije sa sedam strojeva i šest međuskladišta provedena je s vjerojatnostima *p,* Tablica 8, postupkom sprezanja pomoću [4] za parametar proizvodnost *PR*. Dobivena vrijednost *PR* iznosi 0.779 te za trajanje proizvodnog ciklusa od 0.5h daje kapacitet proizvodne linije od približno 1.4 lima po satu.

ZAKLJUČAK

U ovom radu je prikazana matematička formulacija i analitičko rješenje za slučaj Bernoullijeve serijske linije s jednim i dva međuskladišta koje se temelji na teoriji vjerojatnosti, stohastičkim procesima i Markovljevim lancima. Prikazana teorija je ilustrirana na različitim Bernoullijevim serijskim linijama s tri stroja i uspoređena s približnom (poluanalitičkom) metodom sprezanjem strojeva određivanjem osnovnih proizvodnih parametara (*PR*, *WIP*, *BL* i *ST*). Kod analiza linije s pet strojeva predložen je postupak sprezanja na dva načina, sprezanjem od kraja linije prema početku i obrnuto sprezanjem prva tri stroja prema kraju linije. U posljednjem primjeru analizirana je brodograđevna linija predobrade limova sa sedam strojeva te je sprezanje izvršeno u dva koraka i određen je parametar *PR*.

Dobiveni rezultati za razmatrane proizvodne linije dali su prilikom usporedbe prihvatljive i približno slične vrijednosti pa se može zaključiti kako su opisani analitički i poluanalitički modeli prikladni za definiranje brodograđevnog procesa.

Treba naglasiti kako primjena analitičke i poluanalitičke metode u projektnoj fazi ne iziskuje velike troškove, a kako prikazana teorija nije ograničena na primjere prikazane u ovom radu, razmatranja drugih, općih analitičkih rješenja ustaljenosti ponašanja Bernoullijeve linije mogu biti predmet slijedećih istraživanja.

Možemo zaključiti da analiza proizvodnih sustava ima nezaobilaznu ulogu od samog početka i projektiranja proizvodnih linija do stalnog promatranja ponašanja sustava u njegovoj operabilnoj fazi koje će omogućiti postizanje i održavanje uspješne i profitabilne proizvodnje.

LITERATURA

[1] Pauše,Ž. Vjerojatnost informacija , Stohastički procesi, Školska knjiga, Zagreb, (1985)

[2] Li, J. and Meerkov, Production System Engineering, Springer, New York, (2009).

[3] Mathcad 14 (2009), www.ptc.com

[4] PSEToolbox (2016), www.productionsystemengineering.com

[5] Hadžić, N.,Tomić, M. Analytical solution of steady-state behavior of Bernoulli production line with two finite buffers, IIE Transactions, poslano na objavljivanje, (2016).

[6] Sladoljev Ž., Tehnologija brodogradnje, FSB, Zagreb. (Interno izdanje) (2016).