

Proračun konstrukcije roštilja dvodna broda metodom konačnih elemenata

Haraminčić, Bruno

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:188066>

Rights / Prava: [In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-19**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Bruno Haraminčić

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Pero Prebeg, dipl. ing.

Student:

Bruno Haraminčić

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru Doc.dr.sc. Peri Prebegu na potpori tijekom izrade završnog rada te na stručnoj pomoći i savjetima pruženim tijekom izrade ovog rada.

Bruno Haraminčić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija brodogradnje



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Bruno Haraminčić**

Mat. br.: 0035186970

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **PRORAČUN KONSTRUKCIJE ROŠTILJA DVODNA BRODA METODOM KONAČNIH ELEMENATA**
Naslov rada na engleskom jeziku: **STRUCTURAL CALCULATION OF DOUBLE BOTTOM GRILLAGE USING FINITE ELEMENT METHOD**
Opis zadatka:

Stanje alternativnog krcanja broda, kod brodova poput brodova za prijevoz rasutog tereta, karakterizira jako opterećena konstrukcija roštilja dvodna. Takvo stanje krcanja izaziva velike progibe i sekundarna naprezanja u konstrukciji roštilja dvodna, naročito u praznim skladištima. Stoga je pri projektiranju brodske konstrukcije neophodno provesti analizu čvrstoće konstrukcije dvodna metodom adekvatne točnosti. U skorije vrijeme u tu svrhu, umjesto analitičkih metoda, sve se više koristi metoda konačnih elemenata (MKE). Pri tome se najčešće koriste komercijalni programski alati, dok je primjena besplatnih MKE alata otvorenog programskog koda, poput programa OOFEM, izuzetno rijetka.

U radu je potrebno za postojeću konstrukciju roštilja dvodna broda za rasuti teret provesti proračun čvrstoće metodom konačnih elemenata koristeći otvoren programski kod OOFEM te usporediti rezultate s rezultatima komercijalnih programskih paketa dostupnih na Fakultetu (MAESTRO, NASTRAN). Pri tome je za modeliranje konstrukcije roštilja dvodna programom OOFEM iz biblioteke raspoloživih elemenata neophodno odabrati konačne elemente prikladne za linearnu statičku analizu tankostjenih konstrukcija te obrazložiti odabir.

Na istoj konstrukciji roštilja dvodna potrebno je provesti i studiju konvergencije usitnjavanjem mreže konačnih elemenata.

Zadatak zadan:

25. studenog 2015.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

1. rok: 25. veljače 2016

2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.

3. rok: 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016.

2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016.

3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016.


Doc. dr. sc. Pero Prebeg

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli

SADRŽAJ

SADRŽAJ.....	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA	V
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY	VII
1. UVOD	1
1.1 O metodi konačnih elemenata [4].....	1
1.2 Program otvorenog koda.....	2
1.2.1 OOFEM	2
1.3 FEMAP (Nastran).....	3
1.4 MAESTRO	3
2. METODA KONAČNIH ELEMENATA	4
2.1 Osnovne jednačbe teorije elastičnosti [4]	4
2.1.1 Veze između deformacije i pomaka - kinematičke relacije.....	4
2.1.2 Veze između naprezanja i deformacije - konstitutivne jednačbe	5
2.1.3 Ravninsko stanje naprezanja i deformacija	6
2.2 Konvergencija rješenja [4].....	8
2.2.1 Uvjeti konvergenције.....	9
2.3 Konačni elementi za dvodimenzijску analizu [4].....	10
2.3.1 Izvod pravokutnog ravninskog elementa s konstantnim smičnim naprezanjima (Constant Shear Stress Rectangular element – CSSR) [5]	11
2.4 Osnovne informacije o korištenim konačnim elementima	17
3. JEDNOSTAVNI NUMERIČKI PRIMJERI	19

3.1	Primjer modela konzole	19
3.1.1	Analiza rezultata	20
3.2	Primjer modela ploče	24
3.2.1	Analiza rezultata	25
4.	ANALIZA ODZIVA KONSTRUKCIJE ROŠTILJA DVODNA	27
4.1	Izrada modela.....	28
4.2	Izrada mreže konačnih elemenata	30
4.3	Analiza rezultata	32
4.3.1	Nastran.....	32
4.3.2	Maestro	33
4.3.3	OOFEM	35
4.4	Usporedba svih rezultata.....	37
5.	ZAKLJUČAK	40
	POPIS LITERATURE.....	41
	PRILOG.....	42

POPIS SLIKA

Slika 1 a) ravninsko stanje naprezanja, b) ravninsko stanje deformacije	7
Slika 2 Konvergencija rješenja pri metodi pomaka	8
Slika 3 Pascalov trokut	10
Slika 4 Prikaz nekih 2D elemenata a) trokutni b) pravokutni c)četverokutni	11
Slika 5 CSSR konačni element	11
Slika 6 Distribucija naprezanja po elementu	12
Slika 7 Prikaz PlaneStress2d konačnog elementa [1]	18
Slika 8 Prikaz modela konzole i diskretizacije modela [10]	20
Slika 9 Konvergencija rješenja na primjeru konzole	21
Slika 10 Uvećani detalj konvergencije rješenja na modelu konzole	22
Slika 11 Konvergencija rješenja na modelu konzole za nepravilnu mrežu	23
Slika 12 Pomaci na modelu konzole za nepravilnu mrežu u Femapu (CQUAD4)	24
Slika 13 Primjer modela ploče [10]	24
Slika 14 Konvergencija rješenja na modelu ploče	25
Slika 15 Pomaci ploče u Femapu (CQUAD4)	26
Slika 16 Prikaz ekvivalentnih debljina limova	28
Slika 17 Raspodjela opterećenja tlaka po stranicama	29
Slika 18 Rubni uvjeti modela dvodna [6]	30
Slika 19 Prikaz svih mreža konačnih elemenata	31
Slika 20 Prikaz pomaka modela dvodna u Femapu (Mreža 4)	32
Slika 21 Konvergencije CQUAD4 I QUADR na modelu dvodna	33
Slika 22 Konvergencija CQUAD4R elementa na modelu dvodna	34
Slika 23 Prikaz pomaka modela dvodna (Mreža 2) u Maestru	35
Slika 24 Konvergencija CSSRK3d i Quad1MindlinShell3d na modelu dvodna	36
Slika 25 Prikaz pomaka modela dvodna u OOFEM-u pomoću Paraviewa	37
Slika 26 Zajednički prikaz konvergencije rješenja na modelu dvodna	38
Slika 27 Uvećani detalj zajedničkog prikaza konvergencije rješenje modela dvodna ..	39

POPIS TABLICA

Tablica 1 Usporedba rezultata maksimalnog progiba konzole.....	21
Tablica 2 Usporedba rezultata maksimalnog progiba ploče.....	25
Tablica 3 Geometrijske karakteristike modela dvodna [6].....	27
Tablica 4 Prikaz izračunatih ekvivalentnih debljina limova	28
Tablica 5 Iznosi čvornih sila.....	29
Tablica 6 Prikaz broja čvorova i elemenata za različite mreže	30
Tablica 7 Izračunati progibi modela dvodna u Nastranu.....	32
Tablica 8 Izračunati progibi modela dvodna u Maestru	34
Tablica 9 Izračunati progibi modela dvodna u OOFEM	35
Tablica 10 Usporedba svih rezultata analiza modela dvodna.....	37
Tablica 11 Rezultati analiza iz [6]	38

POPIS OZNAKA

A	linearni diferencijalni operator, matrica međusobne ovisnosti naprezanja i čvornih sila
A⁻¹	inverzna matrica
B	matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i čvorovima, operator rubnih veličina
C	matrica međusobne ovisnosti stupnjeva slobode i koeficijenata interpolacijskih polinoma
D	matrice elastičnosti
D_k, L	kinematički diferencijalni operator
E	Youngov modul elastičnosti
f	vektor koncentriranih sila u čvorovima konačnog elementa
G	modul smicanja
K	globalna matrica krutosti
L, l	duljine
N	matrica funkcije oblika
q_x, q_y, q_z	komponente vektora opterećenja u Kartezijevu koordinatnom sustavu
S	matrica raspodjele naprezanja u konačnom elementu
u	vektor pomaka
u, v, w	komponente pomaka u Kartezijevu koordinatnom sustavu
W_{int}, W_{ext}	virtualni rad unutrašnjih i vanjskih sila
x, y, z	Kartezijeve koordinate
γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}	kutne deformacije u Kartezijevu koordinatnom sustavu
δ	matrica funkcije oblika za opis pomaka duž elementa
ε	tenzor deformacije
ε_x, ε_y, ε_z	duljinske deformacije u Kartezijevu koordinatnom sustavu
ν	Poissonov faktor
σ	tenzor naprezanja
σ_x, σ_y, σ_z	normalne komponente naprezanja u Kartezijevu koordinatnom sustavu

SAŽETAK

U radu je analiziran odziv postojeće konstrukcije roštilja dvodna broda za rasuti teret. Odziv je analiziran metodom konačnih elemenata koristeći program otvorenog koda OOFEM. Odabrani su prikladni elementi za linearno statičku analizu tankostjenih konstrukcija te su uspoređeni rezultati sa komercijalnim programskim paketima (Maestro i Nastran). Također, analiziran je odziv i na jednostavnim numeričkim primjerima za koje postoji analitičko rješenje kako bi dobili dodatni uvid u ponašanje korištenih konačnih elemenata. Temeljem studija konvergencije provedenih na jednostavnim numeričkim primjerima i modelu konstrukcije roštilja dvodna izvedeni su zaključci o primjenjivosti pojedinih formulacija konačnih elemenata implementiranih u program OOFEM za analizu konstrukcije broda.

Ključne riječi: metoda konačnih elemenata, OOFEM, Maestro, Nastran, studija konvergencije

SUMMARY

A bulk carrier double bottom structure was analyzed in this thesis. A structural response was analysed using finite element method with an open source software package OOFEM. Proper finite elements were chosen for the linear static analyses of thin walled structures and the structural response was compared with commercial FEM software packages. Conclusions about applicability of finite element formulations implemented in OOFEM for the purpose of ship strength analysis have been made based on the study of convergence carried on the simple numerical examples and the ship double bottom structure.

Keywords: finite element method, OOFEM, Maestro, Nastran, study of convergence

1. UVOD

Stanje alternativnog krcanja broda, kod brodova poput brodova za prijevoz rasutog tereta, karakterizira jako opterećena konstrukcija roštilja dvodna. Takvo stanje krcanja izaziva velike progibe i sekundarna naprezanja u konstrukciji roštilja dvodna, naročito u praznim skladištima. Stoga je pri projektiranju brodske konstrukcije neophodno provesti analizu čvrstoće konstrukcije dvodna metodom adekvatne točnosti. U skorije vrijeme u tu svrhu, umjesto analitičkih metoda, sve se više koristi metoda konačnih elemenata (MKE). Pri tome se najčešće koriste komercijalni programski alati, dok je primjena besplatnih MKE alata otvorenog programskog koda, poput OOFEM-a [1], izuzetno rijetka.

U radu je za postojeću konstrukciju proveden proračun čvrstoće metodom konačnih elemenata korištenjem otvorenog programskog koda OOFEM te su dane usporedbe s rezultatima komercijalnih programskih paketa (Maestro [2], Nastran [3]). Pri tome su se za modeliranje konstrukcije koristili različiti konačni elementi te je analizirano njihovo ponašanje. Također, elementi su ispitani i na jednostavnim numeričkim primjerima za koje postoji analitičko rješenje.

Provedena je i studija konvergencije usitnjavanjem mreže konačnih elemenata. Njome se utvrđivala konvergencija pojedinog modela odnosno konvergencija razmatranih formulacija konačnih elemenata.

1.1 O metodi konačnih elemenata [4]

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja je nezaobilazna u inženjerskim proračunima. Danas postoji velik broj računalnih programa temeljenih na toj metodi, koji omogućuju analizu konstrukcija bez razmatranja složene teorije koja opisuje fizikalno ponašanje konstrukcije. Njihovo korištenje nerijetko se svodi na zadavanje ulaznih podataka prema propisanim uputama, a dobivena rješenja, koja svojim grafičkim prikazom fasciniraju korisnike, prihvaćaju se bez dovoljno kritičnosti. Računalni program shvaća se kao crna kutija (*Black-Box*) u kojoj je skrivena složena teorija koja se smatra nepotrebnom za rješavanje inženjerskih problema. Takav pristup može dovesti do pogrešne procjene stanja naprezanja i deformacije u konstrukciji, a to može ugroziti njezinu čvrstoću i stabilnost.

Metoda konačnih elemenata približna je numerička metoda. Svaki njezin korisnik treba imati na umu da su dobivena rješenja približna, a realnim vrijednostima mogu se približiti samo uz pravilan izbor proračunskog modela i uz pravilno odabrane konačne elemente koji su u mogućnosti opisati realni proces deformiranja. Kako bi to bilo moguće, potrebno je razumjeti fizikalno ponašanje konstrukcije koja se analizira te poznavati teorijske osnove konačnih elemenata, a na taj način i ograničenja njihove primjene. Osim toga, korisnik mora biti u stanju kritički analizirati dobivene rezultate.

1.2 Program otvorenog koda

U današnje vrijeme, programi otvorenog koda koriste se sve više, osobito na akademskoj razini. Otvoreni kod odnosi se na računalni program čiji je izvorni kod dostupan javnosti za korištenje i modifikaciju. Izvorno je osmišljen s ciljem da okupi zajednicu programera kako bi razvijali kod i međusobno ga dijelili. Na taj način, pojedinac može više naučiti, ali raste i kvaliteta programa. Danas postoji velik broj licenci koje definiraju prava i obveze kako autora, tako i korisnika programa otvorenog koda.

1.2.1 OOFEM

OOFEM je program otvorenog koda za rješavanje strukturnih i transportnih problema te problema iz dinamike fluida metodom konačnih elemenata. Temelji se na objektno orijentiranom programiranju. Za razliku od ostalih pristupa, u kojima je težište na akcijama koje se vrše na programskim strukturama, ovdje je težište na projektiranju aplikacije kao skupa objekata koji izmjenjuju poruke. Program je izdan pod *GNU Lesser General Public License (LGPL)* licenci te je dostupan u Windows i Linux okruženju. Sastoji se samo od rješavača, dok se za predprocesiranje i postprocesiranje koriste druga rješenja. Za pripremu modela najčešće se koristi Salome, program otvorenog koda koji ima mogućnost pripreme ulazne datoteke za OOFEM. Za vizualnu obradu rezultata najčešće se koristi još jedan program otvorenog koda imena Paraview.

U sklopu ovog rada, OOFEM je instaliran na Linux operacijskom sustavu. Sama instalacija i korištenje programa zahtjeva napredno poznavanje rada u Linux okruženju obzirom da program nema pristupačno grafičko sučelje nego mu se pristupa putem konzole. Izrada modela konstrukcije dvodna broda, napravljena je komercijalnim programskim alatom Femap. U njemu

se generirala izlazna datoteka koja sadrži geometriju modela i sve potrebne podatke za provedbu analize. Iz navedene datoteke, kreirana je ulazna datoteka za OOFEM. Postupak je proveden korištenjem računalnog koda razvijenog na Fakultetu strojarstva i brodogradnje. Učitavanje modela u Maestro programski paket bila je puno jednostavnija. Naime, Maestro ima ugrađenu mogućnost uvoza Nastran datoteka koje je Femap u mogućnosti generirati. Na taj način, eliminirali smo potrebu za izradom zasebnog modela za svaki programski paket u kojem su vršene analize. Za vizualnu obradu rezultata, korišten je već navedeni program Paraview.

OOFEM projekt je započeo 1993. godine na Češkom Tehničkom Sveučilištu u Pragu kao dio doktorskog rada. Od tada, program se učestalo razvija na istom Sveučilištu uz podršku nekolicine akademskih institucija.

1.3 FEMAP (Nastran)

Femap je napredni inženjerski simulacijski paket (CAE) koji vrši analize metodom konačnih elemenata za složene tehničke proizvode i sustave. Kao vodeći predprocesor i postprocesor za analizu metodom konačnih elementa, koji u Windows okruženju ima daleko najviše korisnika, Femap za potrebe proračuna uključuje vodeće NX Nastran algoritme, koje je Siemens dodatno nadopunio, najviše u području kontaktnih i nelinearnih problema.

Femap ima ugrađene translatore za preuzimanje geometrije iz svih vodećih CAD programa, kao što su Solid Edge, NX, Pro/E, Catia, Solid Works, Inventor, AutoCAD itd. Također na raspolaganju su svi potrebni alati za kreiranje krivulja, površina i tijela. Priprema geometrije za različite vrste analiza je zato brza i jednostavna, [7].

1.4 MAESTRO

Maestro je računalni program namijenjen za analize velikih, složenih tankostijenih konstrukcija. Osim klasičnih strukturnih analiza, uključuje analize granične čvrstoće te optimizaciju konstrukcije. Program je dostupan u Windows okruženju te ima vrlo pristupačno grafičko sučelje. Najviše se koristi u brodograđevnoj industriji te je iz tog razloga olakšana izrada modela složenih brodskih konstrukcija uporabom podstrukture i modula. Model cijelog broda može se izraditi u vrlo brzom vremenskom roku.

2. METODA KONAČNIH ELEMENATA

U ovom poglavlju iznesene su osnovne jednačbe iz teorije elastičnosti, uvjeti konvergencije te su ukratko opisani membranski tipovi elemenata. Također je prikazan izvod pravokutnog membranskog konačnog elementa s konstantnim smičnim naprezanjima.

2.1 Osnovne jednačbe teorije elastičnosti [4]

Za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela pomoću metode konačnih elemenata u elastičnom području, neophodne su osnovne relacije teorije elastičnosti. Te relacije obuhvaćaju uvjete ravnoteže, vezu između deformacije i pomaka te konstitutivne jednačbe. Osim tih osnovnih jednačbi, moraju biti zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti, zajedno s rubnim uvjetima sila i rubnim uvjetima pomaka.

2.1.1 Veze između deformacije i pomaka - kinematičke relacije

Deformiranje kontinuuma opisano je pomacima koji se određuju komponentama u , v i w u pravcu koordinatnih osi Kartezijeva koordinatnog sustava. U općem slučaju komponente pomaka funkcije su koordinata x , y i z . Tu se pretpostavljaju mali pomaci i male deformacije. Komponente tenzora deformacije određuju se deriviranjem komponenata pomaka

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2.1)$$

Ako su komponente tenzora deformacije jednake nuli, pripadne funkcije pomaka opisuju gibanje krutoga tijela. Kinematičke relacije (2.1) moguće je napisati u matričnom obliku na sljedeći način:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_k \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

gdje je $\mathbf{D}_k$ kinematički diferencijalni operator

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Ako se komponente tenzora deformacije i pomaka prikaži u obliku vektora, relacija (2.2) može se prikazati u obliku

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Veze između naprezanja i deformacije - konstitutivne jednačbe

Veza između naprezanja i deformacije za linearno elastičan, homogen i izotropan materijal prikazan je pomoću relacija koje čine Hookeov zakon

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)], \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)], \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_x)], \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdje su Youngov modul elastičnosti E i Poissonov koeficijent ν dvije neovisne konstante materijala, a G je modul smicanja koji se može izračunati pomoću relacije

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.6)$$

Relacije (2.5) mogu se prikazati u matičnom obliku

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.7)$$

gdje je $\mathbf{D}$ matrica elastičnosti. Njezini članovi različiti od nule ovise o elastičnim konstantama materijala

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

2.1.3 Ravninsko stanje naprezanja i deformacija

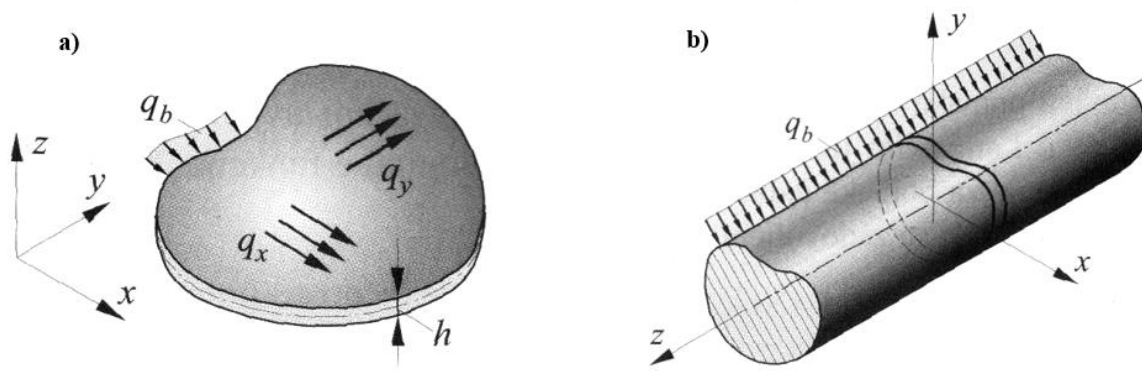
Ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije posebni su slučajevi trodimenzijskog naprezanja. Problem ravninskog stanja naprezanja najčešće se pojavljuje u tijelima kad im je dimenzija u pravcu jedne koordinate osi mnogo manja od dimenzija u pravcu ostalih koordinata. Ako tijelo leži u ravnini xy , a dimenzija u pravcu osi z mnogo je manja od ostalih dimenzija, ravninsko stanje naprezanja nastaje kad opterećenje djeluje u ravnini tijela, jednoliko raspodijeljeno po debljini i funkcija je samo koordinata x i y . Na Sliku 1 su opterećenja q_x , q_y i q_b jednoliko raspodijeljena po debljini ploče. U tom slučaju komponente naprezanja σ_z , τ_{yz} , i τ_{zx} jednake su nuli, a ostale komponente naprezanja σ_x , σ_y , i τ_{xy} te pripadne komponente tenzora deformacije ε_x , ε_y i γ_{xy} funkcije su koordinata x i y . Komponente naprezanja i deformacije prikazuju se u obliku

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]. \quad (2.10)$$

Matrica elastičnosti $\mathbf{D}$ jednaka je

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$



Slika 1 a) ravninsko stanje naprezanja, b) ravninsko stanje deformacije

Problem ravninskog stanja deformacija može se pojaviti kad je dimenzija tijela u pravcu jedne koordinate znatno veća od ostalih dimenzija. Ako je os z uzdužna os tijela, opterećenje djeluje okomito na os i ne mijenja se po duljini tijela, te ako je geometrija po duljini konstantna, uz rubne uvjete iz kojih slijedi $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, u tijelu vlada ravninsko stanje deformacije, Slika 1. Komponente naprezanja i deformacije jednake su kao i pri ravninskom stanju naprezanja, a jedina je razlika u matrici elastičnosti koja sada ima oblik

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Komponente deformacije za ravninsko stanje naprezanja i za ravninsko stanje deformacije izračunavaju se pomoću iste kinematičke relacije $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}$ gdje je kinematički diferencijalni operator jednak

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

a vektor pomaka opisan je s dvije komponente u pravcu koordinatnih osi x i y

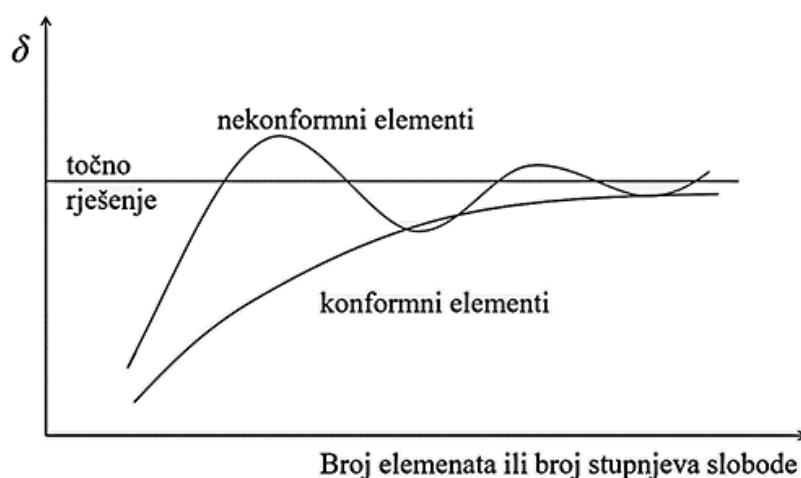
$$\mathbf{u}^T = [u \quad v]. \quad (2.14)$$

Potrebno je napomenuti da je za slučaj ravninskog stanja naprezanja komponenta deformacije ε_z različita od nule. Jednako tako pri ravninskom stanju deformacije u općem slučaju

komponenta naprezanja σ_z nije jednaka nuli. Spomenute veličine ne uzimaju se u razmatranje jer ne pridonose energiji elastičnog deformiranja zato što je i u jednom i u drugom slučaju produkt $\sigma_z \varepsilon_z$ jednak nuli.

2.2 Konvergencija rješenja [4]

Za proračun primjenom metode konačnih elemenata, stvarni fizikalni problem zamjenjuje se proračunskim modelom pri čemu se razmatrani kontinuum dijeli na konačne elemente. Cilj je da se rješenja dobivena metodom konačnih elemenata što više približe vrijednostima koje točno opisuju razmatrani problem. S povećanjem broja konačnih elemenata numerička rješenja moraju se približavati točnim vrijednostima. To fizikalno znači da usitnjavanjem mreže konačnih elemenata energija deformiranja konvergira k točnom iznosu energije deformiranja proračunskog modela. Pritom se podrazumijeva da se mreža s većim brojem elemenata dobiva tako da se elementi početne mreže dijele na dva ili više manjih elemenata. Kako bi se ostvarilo približavanje točnom rješenju povećavanjem broja elemenata, potrebno je da interpolacijske funkcije zadovoljavaju odgovarajuće uvjete.



Slika 2 Konvergencija rješenja pri metodi pomaka

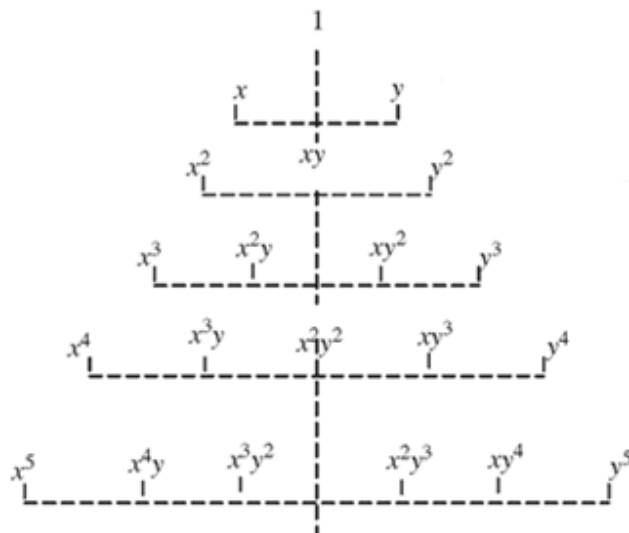
2.2.1 Uvjeti konvergencije

Kako bi se osigurala monotona konvergencija, potrebno je da interpolacijske funkcije mogu opisati pomake krutog tijela te da je moguće opisati polje konstantnih deformacija. Također moraju biti zadovoljeni svi potrebni uvjeti kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata. Pomaci krutog tijela nastaju kad se element pomiče kao kruto tijelo, tj. pritom se ne pojavljuju deformacije odnosno naprezanja. Mogućnost opisivanja pomaka krutog tijela utvrđuje se analizom vlastitih vrijednosti matrice krutosti.

Za mogućnost opisivanja stanja konstantne deformacija, funkcija pomaka mora sadržavati članove koji omogućuju opisivanje polja konstantnih deformacija. Ne ispuni li taj uvjet, konvergencija rješenja ne može se postići. To se fizikalno može objasniti na sljedeći način. Povećanjem broja elemenata njihova se veličina smanjuje te se za jako male dimenzije elementa deformacija mora približiti konstantnoj vrijednosti. U tom slučaju dovoljan broj tih malih elemenata s konstantnim poljem deformacije može opisati svaku proizvoljnu raspodjelu deformacije, a na taj način i naprezanja u konstrukciji.

Uvjet kompatibilnosti pomaka duž rubova za štapne i gredne elemente je zadovoljen sam od sebe jer se ti elementi spajaju samo u čvorovima. Relativno je jednostavno zadovoljiti uvjete kompatibilnosti za dvodimenzijske elemente za proračun ravninskog stanja naprezanja i deformacije, pri razmatranju osnosimetričnih problema te kod prostornih elemenata kad su u čvorovima definirani samo pomaci u , v i w u pravcu tri koordinatne osi. Uvjete kompatibilnosti nije uvijek lako zadovoljiti pri proračunu savijanja ploča i pri analizi naprezanja u ljuskama jer se za te elemente traži kontinuitet kutova zakreta duž rubova. Kontinuitet pomaka i kutova zakreta zadovoljen je ako je njihovu raspodjelu duž rubova elemenata moguće jednoznačno opisati s veličinama u čvorovima, što veže sa sobom veliki broj stupnjeva slobode, a na taj način i visok stupanj polinoma interpolacijskih funkcija.

Brzina konvergencije ovisi o stupnju polinoma interpolacijske funkcije. Viši stupanj polinoma pridonosi bržoj konvergenciji rješenja. Osim toga, poželjno je da polinomi budu potpuni te da su elementi prostorno izotropni, što znači da je raspodjela pomaka u elementu neovisna o orijentaciji koordinatnih osi. Ako nije moguće postići potpunost polinoma, poželjno je da je zastupljena simetričnost članova, što u Pascalovu trokutu znači simetričnost obzirom na os, Slika 3.

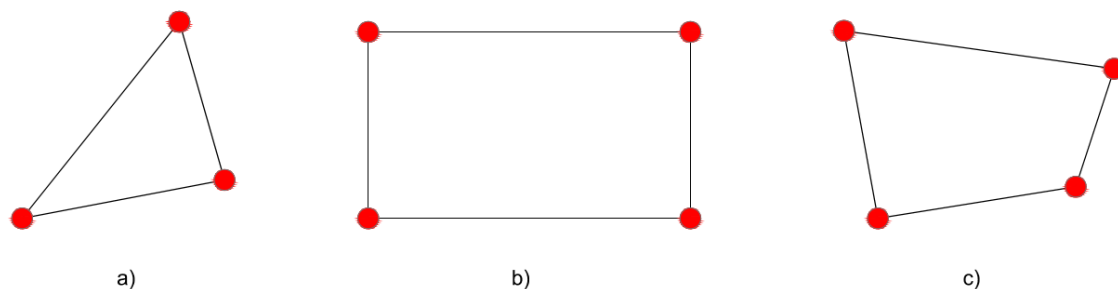


Slika 3 Pascalov trokut

2.3 Konačni elementi za dvodimenzijску analizu [4]

Za rješavanje problema ravninskog stanja naprezanja i deformacije primjenjuju se dvodimenzijски konačni elementi u kojima je funkcija pomaka najčešće prikazana u Kartezijevom koordinatnom sustavu xy . Razlikuju se osnovni trokutni i osnovni pravokutni konačni elementi s čvorovima u vrhovima trokuta odnosno pravokutnika, te elementi s većim brojem čvorova. Osim elemenata s ravnim stranicama, za dvodimenzijску analizu primjenjuju se četverokutni (kvadrilateralni) elementi te elementi čije stranice mogu biti zakrivljene te ih je moguće opisati različitim interpolacijskim funkcijama koje mogu biti jednake funkcijama za opisivanje polja pomaka. Takvi elementi nazivaju se izoparametarski elementi.

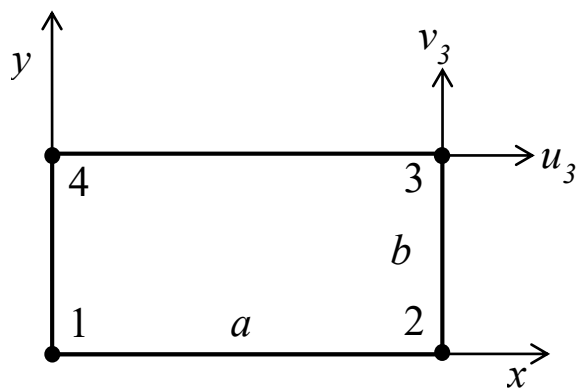
U sljedećem poglavlju izvest će se pravokutni ravninski element s konstantnim smičnim naprezanjima (Constant Shear Stress Rectangular element – CSSR) s kojim su u sklopu ovog rada, uz nekolicinu drugih elementa, provedene različite analize.



Slika 4 Prikaz nekih 2D elemenata a) trokutni b) pravokutni c) četverokutni

2.3.1 Izvod pravokutnog ravninskog elementa s konstantnim smičnim naprezanjima (Constant Shear Stress Rectangular element – CSSR) [5]

CSSR konačni element je pravokutni konačni element koji se sastoji od četiri čvora u vrhovima pravokutnika s po dva stupnja slobode, Slika 5. Sve relacije najčešće se izvode u odnosu na lokalni koordinatni sustav s osima paralelnim sa stranicama elemenata i ishodištem u čvoru 1.



Slika 5 CSSR konačni element

Stupnjevi slobode pomaci su u pravcu koordinatnih osi x i y

$$\delta^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}, \quad (2.15)$$

a vektor čvornih sila glasi

$$\mathbf{f}^T = \{f_{x1} \ f_{y1} \ f_{x2} \ f_{y2} \ f_{x3} \ f_{y3} \ f_{x4} \ f_{y4}\}. \quad (2.16)$$

Općenito prvi korak je odabiranje pogodne funkcije oblika za opis pomaka duž elementa

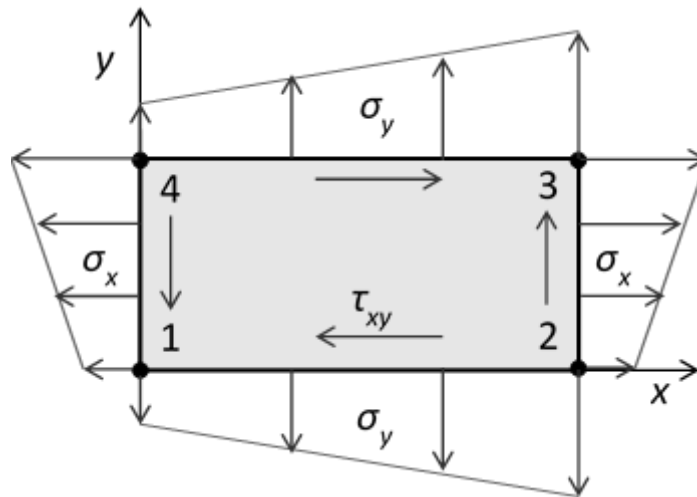
$$\delta(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(x, y) \cdot \mathbf{C}, \quad (2.17)$$

no u izvodu ovog elementa matrica $\mathbf{H}(x, y)$ određuje se kasnije.

Dakle prvo se pretpostavlja distribucija naprezanja po elementu

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= C_1 + C_2 y \\ \sigma_y(x, y) &= C_3 + C_4 x \\ \tau_{xy}(x, y) &= C_5, \end{aligned} \quad (2.18)$$

odnosno u grafičkom prikazu vidljivo na Slika 6.



Slika 6 Distribucija naprezanja po elementu

Nakon toga mogu se odrediti deformacije iz naprezanja

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

što nakon sređivanja daje sljedeću relaciju

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} C_1 + C_2 y - \nu(C_3 + C_4 x) \\ -\nu(C_1 + C_2 y) + C_3 + C_4 x \\ 2(1+\nu)C_5 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Pomaci se određuju iz deformacija

$$\mathbf{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} C_1 + C_2 y - \nu(C_3 + C_4 x) \\ -\nu(C_1 + C_2 y) + C_3 + C_4 x \\ 2(1+\nu)C_5 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Nakon integriranja za u i v , relacija (2.21) rezultira s

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} C_1 x + C_2 xy - \nu \left(C_3 x + \frac{C_4 x^2}{2} \right) + f(y) \\ -\nu \left(C_1 y + \frac{C_2 y^2}{2} \right) + C_3 y + C_4 xy + g(x) \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

dok dodatna jednadžba daje

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E} 2(1+\nu)C_5 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \left(C_1 x + C_2 xy - \nu \left(C_3 x + \frac{C_4 x^2}{2} \right) + f(y) \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(-\nu \left(C_1 y + \frac{C_2 y^2}{2} \right) + C_3 y + C_4 xy + g(x) \right)}{\partial x} = 2(1+\nu)C_5. \quad (2.24)$$

Sređivanjem relacije (2.24) mogu se izračunati nepoznate funkcije $f(y)$ i $g(x)$ što je prikazano u sljedećim relacijama od (2.25) do (2.28).

$$C_2 x + \frac{\partial(f(y))}{\partial y} + C_4 y + \frac{\partial(g(x))}{\partial x} = 2(1+\nu)C_5 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial(f(y))}{\partial y} + C_4 y = 2(1+\nu)C_5 - \left(\frac{\partial(g(x))}{\partial x} + C_2 x \right) = C_6 \quad (2.26)$$

Relacija (2.26) jednaka je konstanti C_6 jer je konstanta jedino moguće rješenje te jednakosti.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f(y))}{\partial y} &= C_6 - C_4 y \\ \frac{\partial(g(x))}{\partial x} &= 2(1+\nu)C_5 - C_6 - C_2 x \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
 f(y) &= C_6 y - \frac{C_4 y^2}{2} + C_7 \\
 g(x) &= (2(1+\nu)C_5 - C_6)x - \frac{C_2 x^2}{2} + C_8
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Nakon uvrštavanja $f(y)$ i $g(x)$, relacija (2.22) rezultira poljem pomaka

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} C_1 x + C_2 xy - \nu \left(C_3 x + \frac{C_4 x^2}{2} \right) + C_6 y - \frac{C_4 y^2}{2} + C_7 \\ -\nu \left(C_1 y + \frac{C_2 y^2}{2} \right) + C_3 y + C_4 xy + (2(1+\nu)C_5 - C_6)x - \frac{C_2 x^2}{2} + C_8 \end{Bmatrix}.
 \tag{2.29}$$

Relacija (2.29) funkcija je oblika za opis pomaka duž elementa koja se može zapisati u matričnom zapisu već spomenutom u izrazu (2.17). Slijedi da je

$$\mathbf{C}^T = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6 \quad C_7 \quad C_8],
 \tag{2.30}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} x & xy & -\nu x & -\frac{y^2 + \nu x^2}{2} & (\nu + 1)y & y & 1 & 0 \\ -\nu y & -\frac{\nu y^2 + x^2}{2} & y & xy & (\nu + 1)x & -x & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \tag{2.31}$$

Drugi glavni korak izvoda je povezivanje generalne distribucije po elementu sa čvornim pomacima. Obzirom da $\delta(x)$ predstavlja pomake u i v u bilo kojoj točki elementa, čvorni pomaci jednostavno se dobivaju supstituiranjem pripadajućih koordinata (npr. u čvoru 2 $x=a$ i $y=0$, itd.).

$$\begin{aligned}
 \delta_1(x=0, y=0) &= \mathbf{H}(x=0, y=0) \cdot \mathbf{C} \\
 \delta_2(x=a, y=0) &= \mathbf{H}(x=a, y=0) \cdot \mathbf{C} \\
 \delta_3(x=a, y=b) &= \mathbf{H}(x=a, y=b) \cdot \mathbf{C} \\
 \delta_4(x=0, y=b) &= \mathbf{H}(x=0, y=b) \cdot \mathbf{C}
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Iz relacija (2.32) može se formirati matrica $\mathbf{A}$, koja slijedi iz odnosa $\delta = \mathbf{A}\mathbf{C}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} \\ \frac{a}{E} & 0 & -\frac{a\nu}{E} & -\frac{a^2\nu}{2E} & 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{2E} & 0 & 0 & \frac{a(\nu+1)}{E} & -\frac{a}{E} & 0 & \frac{1}{E} \\ \frac{a}{E} & \frac{ab}{E} & -\frac{a\nu}{E} & -\frac{a^2\nu+b^2}{2E} & \frac{b(\nu+1)}{E} & \frac{b}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ -\frac{b\nu}{E} & -\frac{b^2\nu+a^2}{2E} & \frac{b}{E} & \frac{ab}{E} & \frac{a(\nu+1)}{E} & -\frac{a}{E} & 0 & \frac{1}{E} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{b^2}{2E} & \frac{b(\nu+1)}{E} & \frac{b}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ -\frac{b\nu}{E} & -\frac{b^2\nu}{2E} & \frac{b}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} \end{bmatrix}
 \tag{2.33}$$

Obzirom da je matrica $\mathbf{A}$ poznata, vektor nepoznatih koeficijenata se može izračunati kao

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\delta}. \quad (2.34)$$

Inverz matrice $\mathbf{A}$ glasi

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{(\nu^2-2)E}{2a\nu^2-2a} & \frac{\nu E}{2b\nu^2-2b} & \frac{(\nu^2-2)E}{2a\nu^2-2a} & \frac{\nu E}{2b\nu^2-2b} & -\frac{\nu^2 E}{2a\nu^2-2a} & -\frac{\nu E}{2b\nu^2-2b} & \frac{\nu^2 E}{2a\nu^2-2a} & -\frac{\nu E}{2b\nu^2-2b} \\ \frac{E}{ab} & 0 & -\frac{E}{ab} & 0 & \frac{E}{ab} & 0 & -\frac{E}{ab} & 0 \\ \frac{\nu E}{2a\nu^2-2a} & -\frac{(\nu^2-2)E}{2b\nu^2-2b} & -\frac{\nu E}{2a\nu^2-2a} & \frac{\nu^2 E}{2b\nu^2-2b} & -\frac{\nu E}{2a\nu^2-2a} & -\frac{\nu^2 E}{2b\nu^2-2b} & \frac{\nu E}{2a\nu^2-2a} & \frac{(\nu^2-2)E}{2b\nu^2-2b} \\ 0 & \frac{E}{ab} & 0 & -\frac{E}{ab} & 0 & \frac{E}{ab} & 0 & -\frac{E}{ab} \\ -\frac{E}{4b\nu+4b} & -\frac{E}{4a\nu+4a} & -\frac{E}{4b\nu+4b} & \frac{E}{4a\nu+4a} & \frac{E}{4b\nu+4b} & \frac{E}{4a\nu+4a} & \frac{E}{4b\nu+4b} & -\frac{E}{4a\nu+4a} \\ -\frac{3E}{4b} & \frac{3E}{4a} & \frac{E}{4b} & -\frac{3E}{4a} & -\frac{E}{4b} & \frac{E}{4a} & \frac{3E}{4b} & -\frac{E}{4a} \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Pomaci unutar elemenata se mogu izraziti u ovisnosti o čvornim pomacima

$$\boldsymbol{\delta}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(x, y) \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{N}(x, y) \boldsymbol{\delta}, \quad (2.36)$$

gdje je funkcija oblika $\mathbf{N}(x, y)$ glasi

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{H}(x, y) \mathbf{A}^{-1}, \quad (2.37)$$

odnosno može se zapisati u obliku

$$\mathbf{N}(x, y) = \begin{bmatrix} N_u(x, y) \\ N_v(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Nakon matričnog množenja i sređivanja dobivamo izraz koji se zbog preglednosti nalazi u Prilogu 1.

Treći glavni korak izvoda izražavanje je deformacija u elementu kao funkcije čvornih pomaka (kinematičke relacije) koje slijede iz teorije elastičnosti

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \boldsymbol{\delta}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (2.39)$$

Dolje navedenim odnosima moguće je definirati matricu funkcije oblika $\mathbf{B}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\delta} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}, \quad (2.40)$$

koja nakon uvrštavanja poprima oblik

$$\mathbf{B}(x, y) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \\ \mathbf{B}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(x, y) \\ \mathbf{N}_v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial N_v(x, y)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

odnosno

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{y-b}{ab} & -\frac{\nu(2x-a)}{2ab} & -\frac{y-b}{ab} & \frac{\nu(2x-a)}{2ab} & \frac{y}{ab} & -\frac{\nu(2x-a)}{2ab} & -\frac{y}{ab} & \frac{\nu(2x-a)}{2ab} \\ -\frac{\nu(2y-b)}{2ab} & \frac{x-a}{ab} & \frac{\nu(2y-b)}{2ab} & -\frac{x}{ab} & -\frac{\nu(2y-b)}{2ab} & \frac{x}{ab} & \frac{\nu(2y-b)}{2ab} & -\frac{x-a}{ab} \\ -\frac{1}{2b} & -\frac{1}{2a} & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2a} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Četvrti korak je izražavanje naprezanja u elementu kao funkcije čvornih pomaka (konstitutivne jednažbe)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.43)$$

Iz dolje navedenih odnosa moguće je formirati matricu raspodjele naprezanja $\mathbf{S}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{S}\boldsymbol{\delta}, \quad (2.44)$$

čiji je potpuni oblik nakon sređivanja dat u Prilogu 2.

Posljednji korak je određivanje matrice krutosti postavljanjem veze između čvornih sila i pomaka (korištenjem principa virtualnih radova). Virtualne pomake mogu se izraziti kao

$$\boldsymbol{\delta}^{*T} = \{u_1^* \quad v_1^* \quad u_2^* \quad v_2^* \quad u_3^* \quad v_3^* \quad u_4^* \quad v_4^*\}. \quad (2.45)$$

Virtualni rad čvornih sila $\mathbf{f}$ na virtualnim pomacima $\boldsymbol{\delta}^*$ mogu se izraziti kao

$$W_{ext} = \boldsymbol{\delta}^{*T} \mathbf{f}, \quad (2.46)$$

gdje je vektor čvornih sila $\mathbf{f}$ već dat relacijom (2.16).

Unutrašnji virtualni rad može se izraziti kao

$$W_{int} = \int_V \left(\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)^* \right)^T \boldsymbol{\sigma}(x, y) dV, \quad (2.47)$$

koji uz relaciju (2.44) glasi

$$W_{int} = \int_V \boldsymbol{\delta}^{*T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} dV. \quad (2.48)$$

Izjednačavanjem virtualnih radova unutrašnjih i vanjskih sila

$$W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}, \quad (2.49)$$

uz date relacije (2.47) i (2.48) te uz postavljenje jediničnih virtualnih pomaka dobivamo

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \delta = \mathbf{f}, \quad (2.50)$$

iz kojeg se može definirati matrica krutosti elementa $\mathbf{k}$ koja glasi

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = t \int_0^b \int_0^a \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy. \quad (2.51)$$

U relaciji (2.51) članovi matrice $\mathbf{B}$ nisu konstantni te se množenje $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ mora napraviti prije integriranja. Konačni izgled matrice $\mathbf{k}$ zbog kompleksnosti dat je u Prilogu 3.

2.4 Osnovne informacije o korištenim konačnim elementima

U ovom poglavlju date su osnovne informacije o korištenim konačnim elementima za provedbu analiza. U Nastranu su korišteni CQUAD4 i CQUADR konačni elemnti, dok se u Maestru koristio QUAD4R konačni element. Za analize u OOFEM, korišteni su PlaneStress2d, QDTK i Quad1MindlinShell3d konačni elementi.

CQUAD4 konačni element Nastranov je najrašireniji element u modeliranju membrana, ploča i ljusaka. To je izoparametarski, četverokutni (kvadrilateralni) ravninski element koji može opisati slučaj ravninskog stanje naprezanja, savijanje i utjecaj poprečnih smičnih sila. Koristi se za mreže konačnih elemenata na ravnim ili blago zakrivljenim površinama. Element dopušta odstupanja od ortogonalnosti susjednih stranica elementa, ali dozvoljena odstupanja moraju biti što manja da bi rezultati bili pouzdaniiji. Ovaj element nema izravnu krutost za rotacijski stupanj slobode oko normale na površinu elementa (drilling stupanj slobode), nego se taj stupanj slobode sprječava, ili rješavač sam računa minimalnu krutost kako bi se izbjegla singularnost globalne matrice krutosti, [9].

CQUADR konačni element, za razliku od CQUAD4 elementa, izravno računa rotacijsku krutost oko normale na površinu elementa. Samim time, manje je osjetljiv na veće omjere i vrijednosti Poissonovog koeficijenta te bolje opisuje slučaj ravninskog stanja naprezanja od CQUAD4 konačnog elementa, [9].

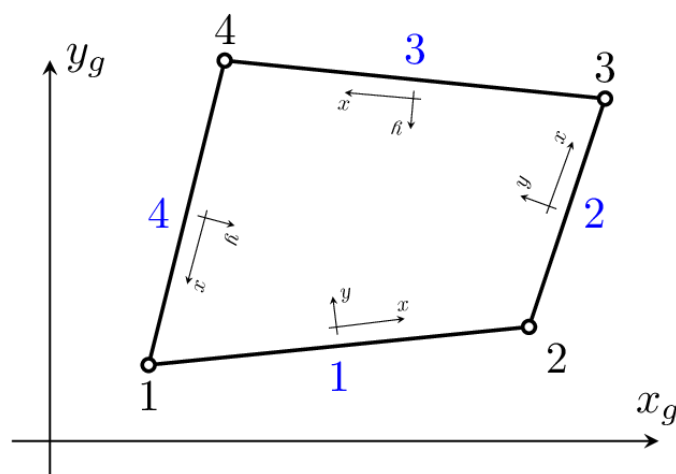
QUAD4R konačni element odgovara Nastranovom CQUADR konačnom elementu za slučaj neukrepljene ljuske, [2].

PlaneStress2d je izoparametarski, četverokutni ravninski konačni element za slučaj ravninskog stanja naprezanja. Svaki čvor ima dva stupnja slobode, translaciju u smjeru x i y koordinatnih osi. Cijeli model mora biti u smješten u xy ravnini, [1].

QDKT ravninski je konačni element za slučaj savijanja ploča. Svaki čvor ima 3 stupnja slobode, translaciju u smjeru z koordinatne osi te rotacije oko x i y koordinatne osi. Cijeli model mora biti smješten u xy ravnini. Element je prikladan za slučaj savijanja tankih ploča jer se zanemaruje utjecaj energije deformiranja poprečnih smičnih sila., [1].

Quad1MindlinShell3d je izoparametarski, četverokutni ravninski konačni element koji služi za modeliranje membrana, ploča i ljusaka. Ovaj element također nema izravnu krutost za rotacijski stupanj slobode oko normale na površinu elementa, ali ima mogućnost da mu se dodijeli fiktivna krutost (*drilling stiffness*) kako bi se spriječilo da globalna matrica krutosti bude singularna.

MITC4Shell je četvorkutni ljuskasti element, prikladan za tankostijene i debelostijene ljuske jer je formuliran koristeći MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) pristup, a tim pristupom izbjegnuta je pojava *shear locking* efekta. Ima šest stupnjeva slobode po čvoru, ali također nema pridruženu krutost za rotaciju oko normale na površinu elementa. Element nije korišten u analizama jer nema mogućnost dodijele fiktivne krutosti poput Quad1MindlinShell3d elementa, a sprječavanje rotacija 6. stupnju slobode za složene modele nije odgovarajući pristup za složene modele. Više o tome objašnjeno je u poglavlju 3.1.



Slika 7 Prikaz PlaneStress2d konačnog elementa [1]

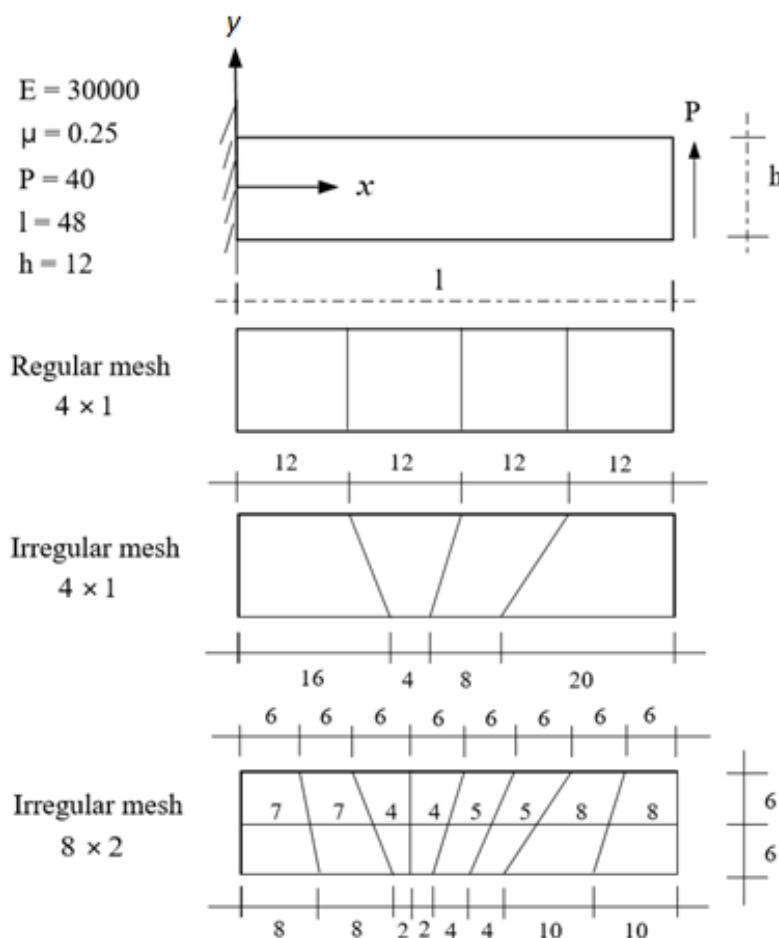
3. JEDNOSTAVNI NUMERIČKI PRIMJERI

Prije analize konstrukcije roštilja dvodna, analizirat će se odziv konstrukcije na jednostavnim numeričkim primjerima za koje postoji analitičko rješenje. Prvi primjer je konzola opterećena sa silom na slobodnom kraju, a drugi je kvadratna ploča, zglobo oslonjenja na rubovima sa kontinuiranim opterećenjem po cijeloj ploči. Analize su provedene u OOFEM i Nastran programskim paketima.

3.1 Primjer modela konzole

U ovom primjeru konzola je opterećena sa silom na slobodnom kraju. Zbog same geometrije konzole i navedenog opterećenja, vlada slučaj ravninskog stanja naprezanja. Proračunski model je diskretiziran s četverokutnim elementima, Slika 8.

Primjer je također zanimljiv iz razloga što daje pomake za „*drilling*“ stupanj slobode odnosno rotaciju φ_z . Konačni elementi koji služe za rješavanje problema ljesaka izvedeni su superpozicijom dvodimenzijanskog membranskog elementa za ravninsko stanje naprezanja i elementa za rješavanje problema savijanja ploča. Ako su elementi koji se spajaju u zajedničkom čvoru koplanarni, pojavljuju se numeričke poteškoće prilikom formiranja globalne jednadžbe proračunskog modela. Naime, zbog nulte krutosti koja je pridružena rotaciji oko osi z lokalnog koordinatnog sustava, globalna matrica krutosti postaje singularna. Taj nedostatak uklanja se najčešće na dva načina. U zajedničkim čvorovima koplanarnih elemenata potrebno je spriječiti rotacije oko lokalnih osi z . Drugi način, koji se primjenjuje češće, pridruživanje je fiktivne krutosti rotacijama oko normala na srednju ravninu. Stupnjevima slobode φ_z pridružuju se fiktivni članovi matrice krutosti čiji je iznos dovoljan da se ukloni singularnost globalne matrice krutosti, a da se pritom ne naruši točnost rješenja, [4].



Slika 8 Prikaz modela konzole i diskretizacije modela [10]

3.1.1 Analiza rezultata

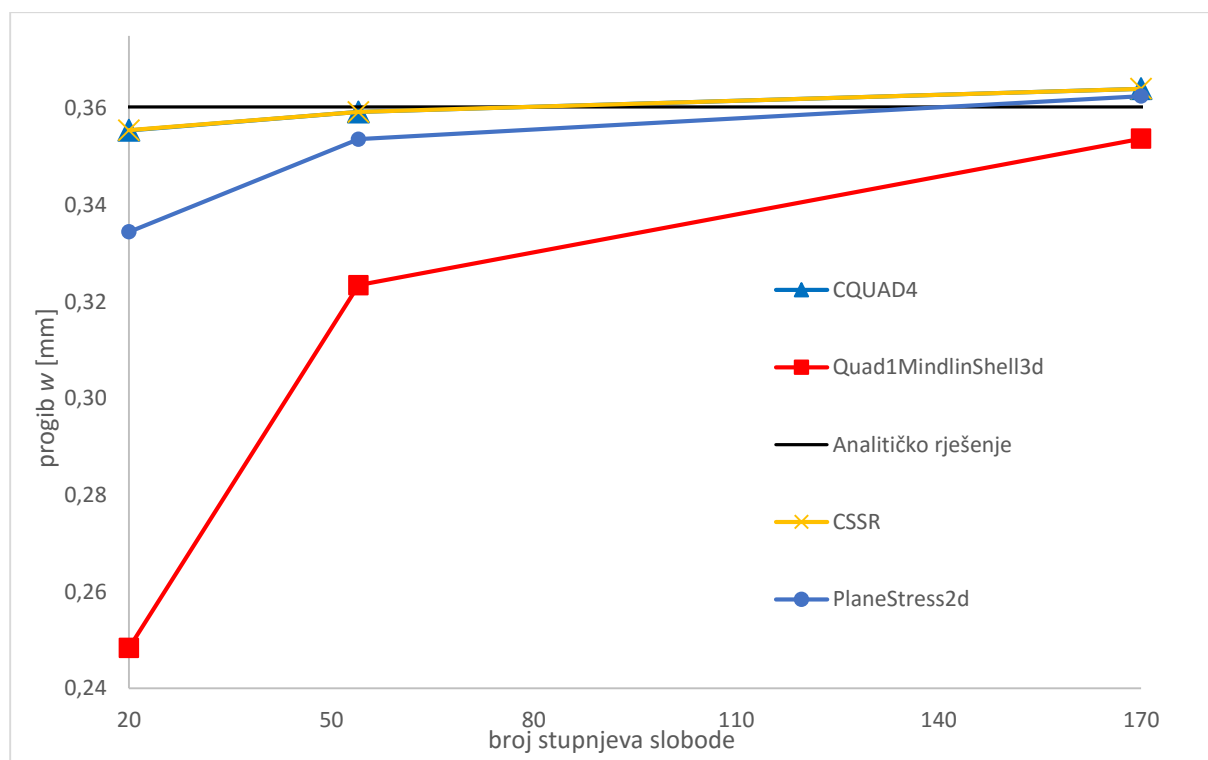
Analitičko rješenje za maksimalni progib konzole se računa relacijom

$$w = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{(4+5\mu)Pl}{2Eh}. \quad (3.1)$$

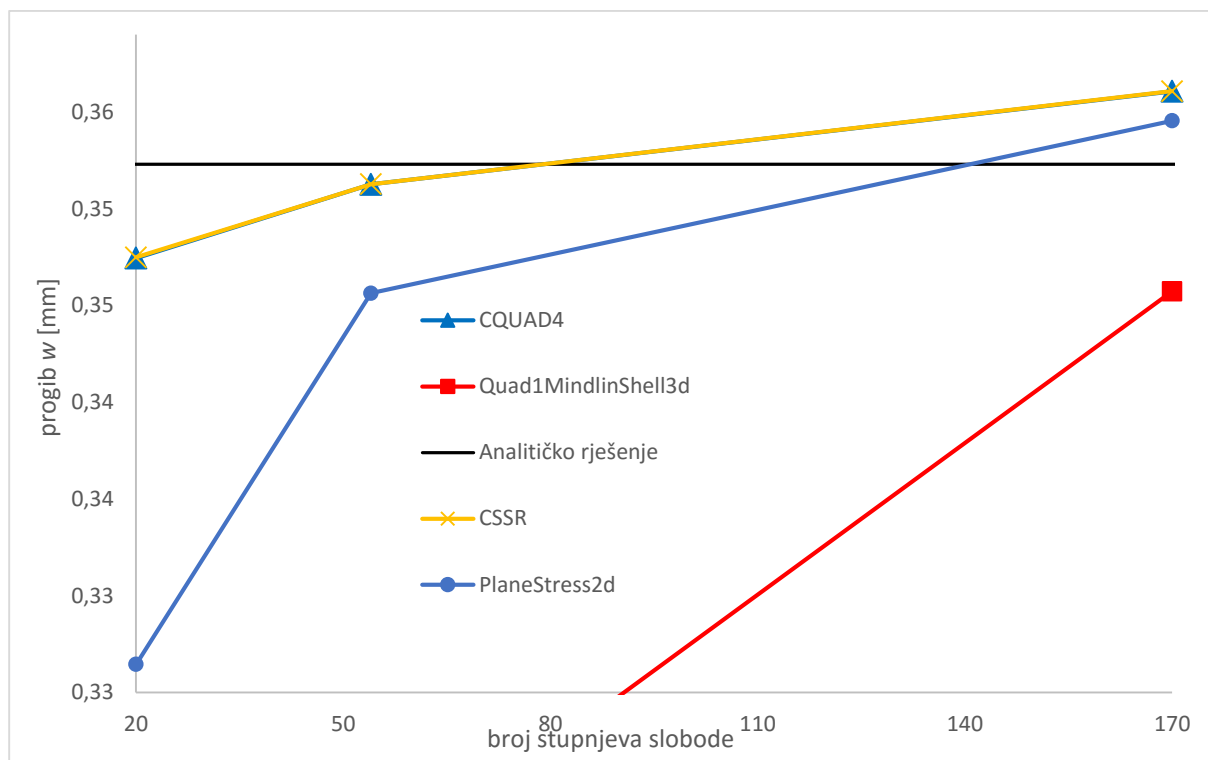
Uvrštavanjem vrijednosti sa Slika 8 u relaciju (3.1), dobije se iznos maksimalnog progiba $w = 0,3553$. U Tablica 1 uspoređene su vrijednosti maksimalnog progiba numeričke metode konačnih elemenata sa analitičkim rješenjem te su dana odstupanja.

Mreže konačnih elemenata	4 x 1	8 x 2	16 x 4	4 x 1*	8 x 2*
CQUAD4 (Nastran)	0,3504	0,35426	0,35907	0,32899	0,35314
Greška	1,37%	0,29%	1,06%	7,40%	0,61%
CSSR (OOFEM)	0,35049	0,35427	0,35907	0,15136	0,15684
Greška	1,35%	0,29%	1,06%	57,40%	55,86%
Quad1MindlinShell3d (OOFEM)	0,24338	0,31843	0,34873	0,21307	0,30115
Greška	31,50%	10,38%	1,85%	40,03%	15,24%
PlaneStress2d	0,3294	0,3486	0,3575	0,2936	0,3380
Greška	7,28%	1,88%	0,63%	17,36%	4,87

Tablica 1 Usporedba rezultata maksimalnog progiba konzole

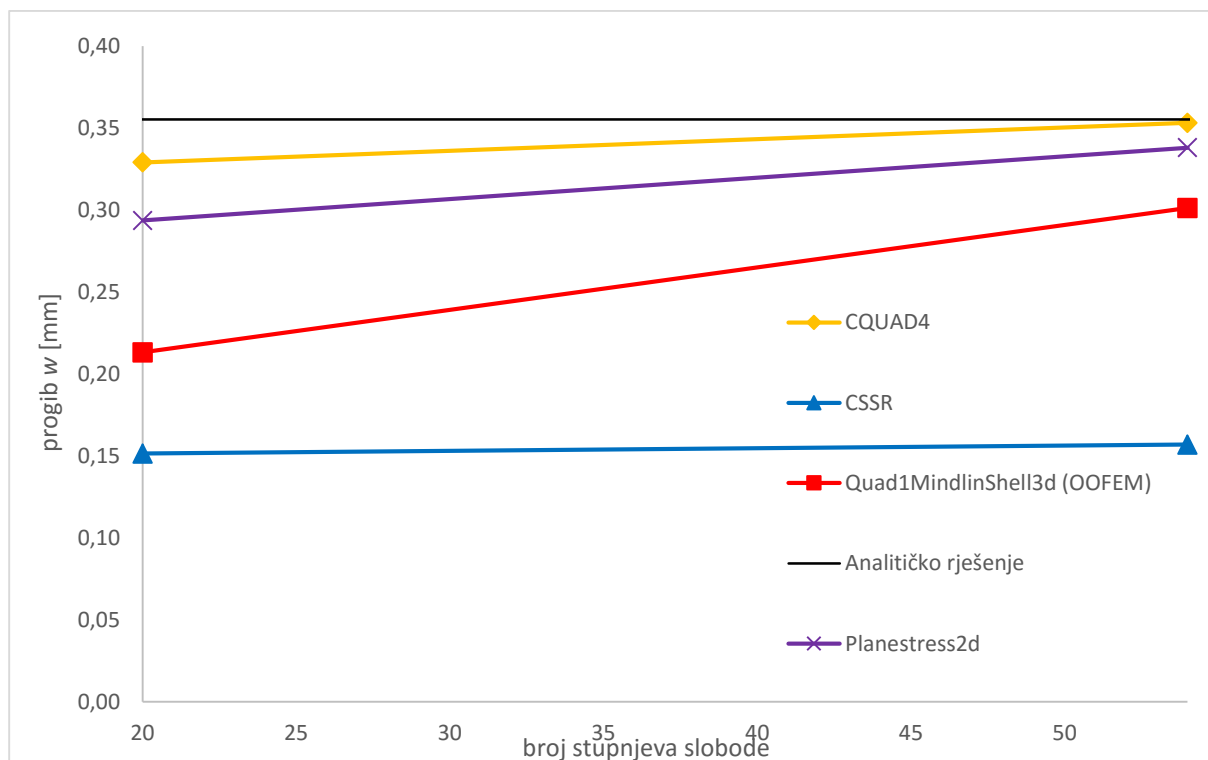


Slika 9 Konvergencija rješenja na primjeru konzole



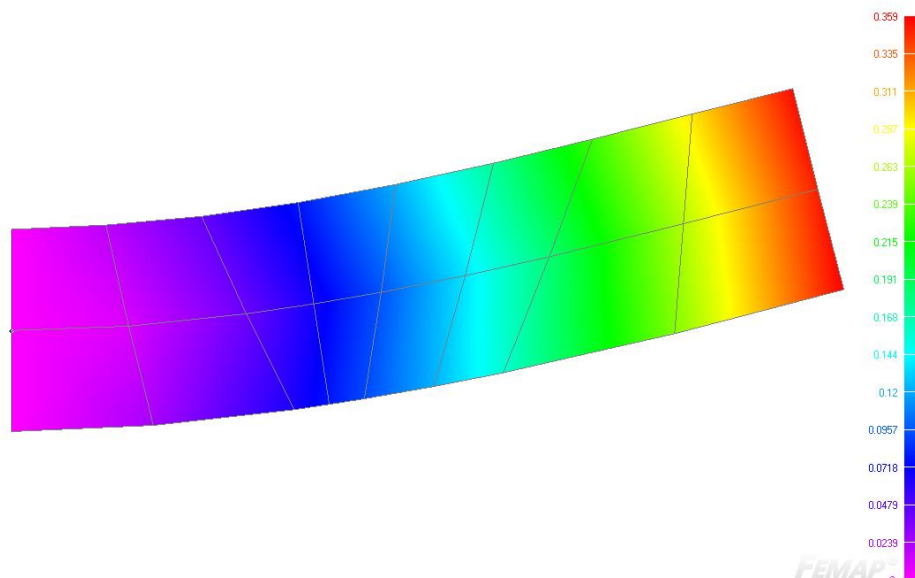
Slika 10 Uvećani detalj konvergencije rješenja na modelu konzole

Može se primijetiti da se CQUAD4 i CSSR konačnim elementima podudaraju rezultati. Već pri najgrubljoj podjeli mreže, rezultati su zadovoljavajuće točni. PlaneStress2d konačni element pri najgrubljoj podjeli mreže ima nešto veće odstupanje od CQUAD4 i CSSR elementa, ali vrlo brzo konvergira k točnom rješenju. Naspram ostalih elemenata, Quad1MindlinShell3d konačni element ima veliko odstupanje (31,5%) pri najgrubljoj podjeli mreže. Tek pri najfinijoj mreži se približava točnom rješenju.



Slika 11 Konvergencija rješenja na modelu konzole za nepravilnu mrežu

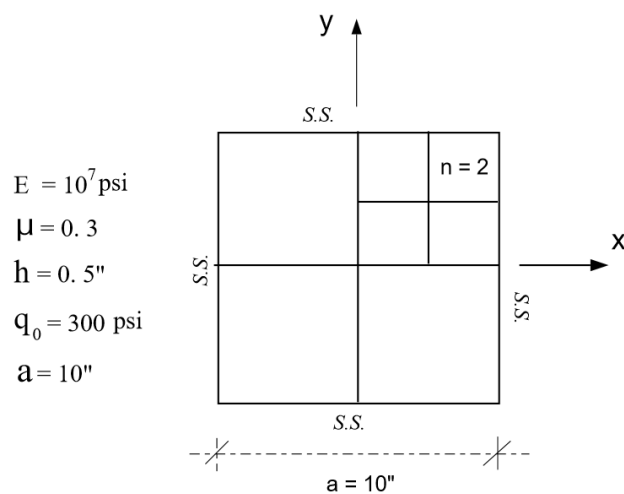
Za nepravilnu podjelu mreže konačnih elemenata može se primijetiti velika razliku u rezultatima između pravokutnog CSSR konačnog elementa i ostalih četverokutnih konačnih elemenata. Naime, pravokutni CSSR element je formuliran na način da ga se smije koristiti samo za pravokutne oblike mreža konačnih elemenata. U protivnome, rezultati potpuno odstupaju od točnog rješenja. To se jasno vidi na ovom primjeru.



Slika 12 Pomaci na modelu konzole za nepravilnu mrežu u Femapu (CQUAD4)

3.2 Primjer modela ploče

Zglobno oslonjena kvadratna ploča sa kontinuiranim opterećenjem po površini standardni je primjer za testiranje elemenata za savijanje ploča, Slika 13. Obzirom da je ploča simetrična oko x i y osi, analiza je vršena samo za jednu četvrtinu ploče sa dodanim rubnim uvjetima simetrije. Ploča je diskretizirana sa 4 elementa u najgrubljoj mreži, a u najfinijoj mreži sa 16 elemenata.



Slika 13 Primjer modela ploče [10]

3.2.1 Analiza rezultata

Analitičko rješenje za progib u sredini ploče se računa prema relaciji

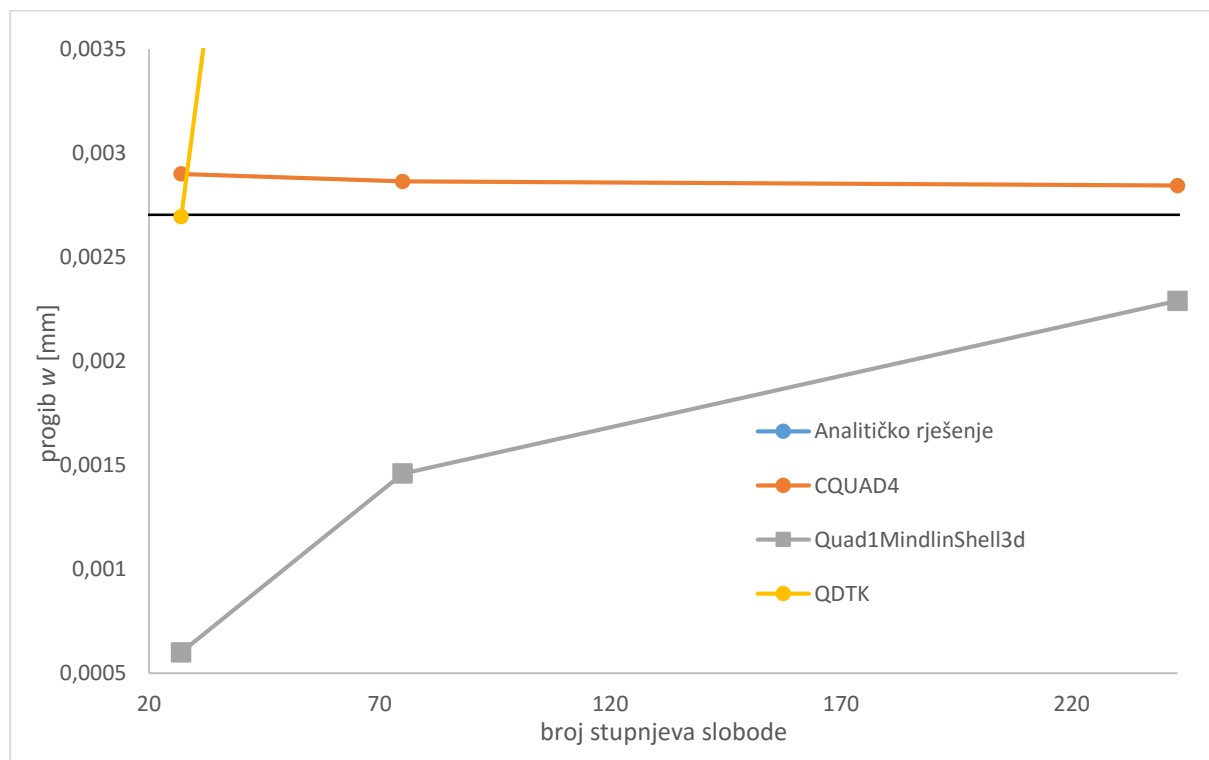
$$w = 0,00406 \frac{q_0 a^4}{D} . \quad (3.2)$$

Uvrštavanjem vrijednosti sa Slika 13 u (3.2) dobivamo iznos progiba $w = 0,0027027$.

U Tablica 2 uspoređene su vrijednosti progiba numeričke metode konačnih elemenata sa analitičkim rješenjem te su dana odstupanja.

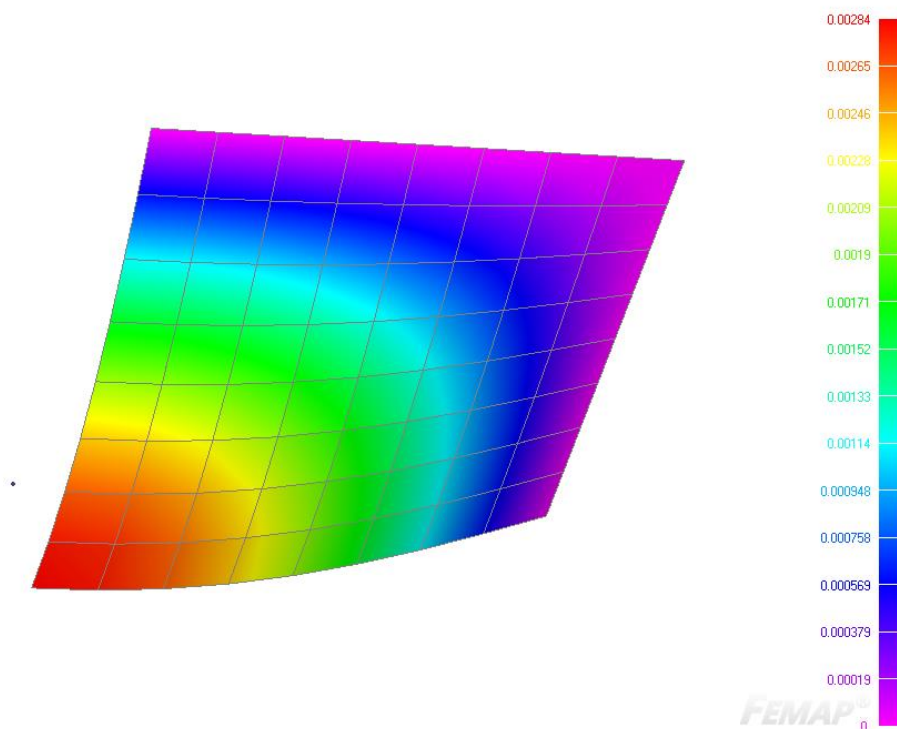
Mreže konačnih elemenata	2 x 2	4 x 4	8 x 8
CQUAD4 (Nastran)	0,00290000	0,00286340	0,00284380
Greška	7,30%	5,95%	5,22%
QDTK (OOFEM)	0,0026931	0,0108103	0,043261
Greška	0,35%	299,99%	1500,67%
Quad1MindlinShell3d (OOFEM)	0,00059988	0,00145952	0,00228971
Greška	77,80%	46,00%	15,28%

Tablica 2 Usporedba rezultata maksimalnog progiba ploče



Slika 14 Konvergencija rješenja na modelu ploče

Može se primijetiti da CQUAD4 element ponovo vrlo dobro opisuje stvarno ponašanje modela dok je Quad1MindlinShell3d elementu potrebna veoma fina mreža da se približi točnom rješenju. QDTK konačni element daje izrazito dobar rezultat već pri najgrubljoj podjeli mreže. No pri ostalim podjelama mreže očito dolazi do neke greške i te rezultate nećemo razmatrati. To je jedan od problema korištenja programa otvorenog koda jer ne možemo biti sigurni da je element implementiran na odgovarajući način.



Slika 15 Pomaci ploče u Femapu (CQUAD4)

4. ANALIZA ODZIVA KONSTRUKCIJE ROŠTILJA DVODNA

U sklopu ovog rada, analiziran je odziv konstrukcije na primjeru konstrukcije roštilja dvodna koristeći otvoreni programski kod OOFEM. Pri tome su za modeliranje konstrukcije izabrani odgovarajući konačni elementi za linearno statičku analizu te su dane usporedbe sa rezultatima komercijalnih programskih paketa (Maestro, Nastran). Geometrija modela i proračun opterećenja preuzet je iz [6] kako bi se dobiveni rezultati mogli usporediti i sa rezultatima iz navedene literature. U njoj je proveden analitički proračun dvodna kao ortotropne ploče te numerički proračun metodom konačnih elemenata pomoću programskog paketa Maestro. Geometrijske karakteristike preuzetog modela dane su u Tablica 3.

OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE OPLOČENJA		
dulja stranica [cm]	a	2400
kraća stranica [cm]	b	2080
ukupna visina dvodna [cm]	h	174,4
debljina oplata dna [cm]	t_d	1,9
površina uzdužnjaka dna [cm ²]	A_u^d	36,1
broj uzdužnjaka u donjem pojasu (dno)	n_d	2
debljina pokrova dvodna [cm]	t_g	2,5
površina uzdužnjaka pokrova dna [cm ²]	A_u^g	49,7
broj uzdužnjaka u donjem pojasu (pokrov dvodna)	n_g	2
OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE NOSAČA		
UZDUŽNI NOSAČI		
broj uzdužnih nosača	n_a	7
širina pojasa uzdužnog nosača [cm]	s_a	260
CENTRALNI UZDUŽNI NOSAČ		
debljina struka centralnog nosača [cm]	t_{sa}	1,3
smična površina [cm ²]	A_a	226,72
OSTALI UZDUŽNI NOSAČI		
debljina struka ostalih nosača [cm]	t_{sna}	1,1
REBRENICE		
broj rebrenica	n_b	11
širina pojasa rebrenice [cm]	s_b	240
CENTRALNA REBRENICA		
debljina struka centralne rebrenice [cm]	t_{sb}	1,6
smična površina [cm ²]	A_b	279,04
OSTALE REBRENICE		
debljina struka ostalih rebrenica [cm]	t_{snb}	1,2
TLAK [N/cm ²]	p	14,252
modul elastičnosti [N/cm]	E	21000000

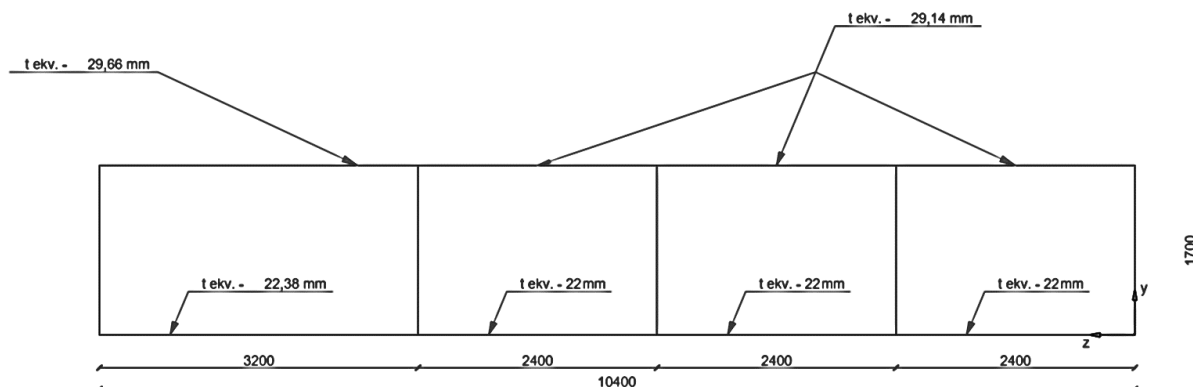
Tablica 3 Geometrijske karakteristike modela dvodna [6]

4.1 Izrada modela

Obzirom da su rubni uvjeti i opterećenje simetrični, modelirana je samo polovica modela te su iz tog razloga dodani rubni uvjeti simetrije. Model je izrađen u Femap programskom paketu uz nekoliko pojednostavljenja. Obzirom da ispituje samo sekundarni odziv, ukrepe nisu modelirane posebnim elementima, već je njihova površina dodana oplati. Zbog navedenog, aproksimiralo se opterećenje hidrostatskog tlaka morske vode na oplati dna sa čvornim silama na spojevima jakih uzdužnih nosača i rebrnica. Time je isključen tercijarni odziv iz konstrukcije. Kratki pregled prikazan je u Tablica 4.

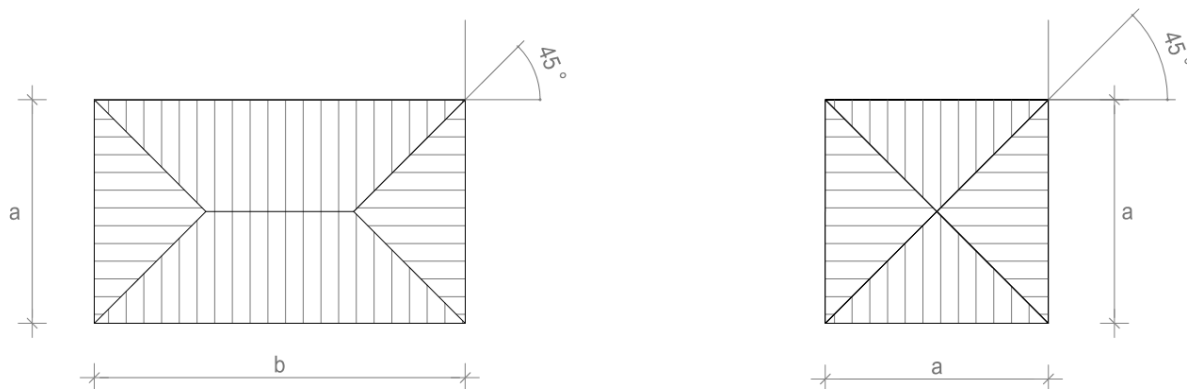
Ukepe	A[cm ²]	Lim	t[mm]	t _{ekv} [mm]	t _{ekv} [mm]
HP260x10	36,05	oplata dna	19	22	22,38
HP300x12	49,73	pokrov dvodna	25	22,38	29,66

Tablica 4 Prikaz izračunatih ekvivalentnih debljina limova



Slika 16 Prikaz ekvivalentnih debljina limova

Hidrostatski tlak morske vode preračunat je u čvorne sile prema pravilima o raspodjeli opterećenja kod konstrukcije roštilja, Slika 17.



Slika 17 Raspodjela opterećenja tlaka po stranicama

$$F(a) = \frac{p \cdot a^2}{4}, \quad F(b) = \frac{p \cdot a}{2} \cdot \frac{b-a}{2} \quad (4.1)$$

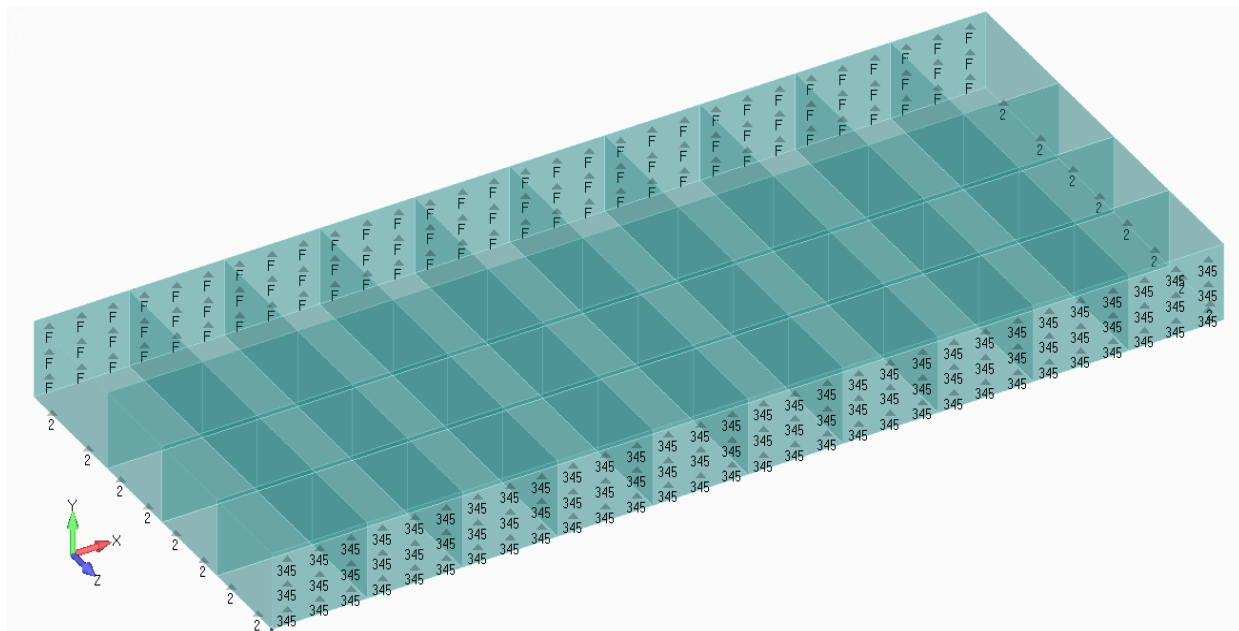
Sile po stranici su izračunate prema relaciji (4.1), a sile u čvorovima su dobivene tako da se svakom čvoru dodijelili polovicu sile od stranica na kojima se nalazi. Ukupno je rezultiralo sa 7 različitih iznosa sila prikazanim u Tablica 5.

Čvorne sile	Iznos [N]
a	205228,8
2a	410457,6
4a	820915,2
a+b	547276,8
(a+b)/2	273638,4
3a+b	957734,4
(3a+b)/2	478867,2

Tablica 5 Iznosi čvornih sila

Rubni uvjete modela nismo mijenjali. Dulja stranica modela je upeta što znači da joj je spriječena translacija i rotacija po sve tri koordinatne osi, dok je kraća stranica zgloбно oslonjena što znači da joj je spriječena translacija po osi y. U ravnini simetrije xy koja leži na

centralnoj liniji (CL) modela implementirani su rubni uvjeti simetrije (spriječena je translacija po osi z, te rotacije oko osi x i y, Slika 18.



Slika 18 Rubni uvjeti modela dvodna [6]

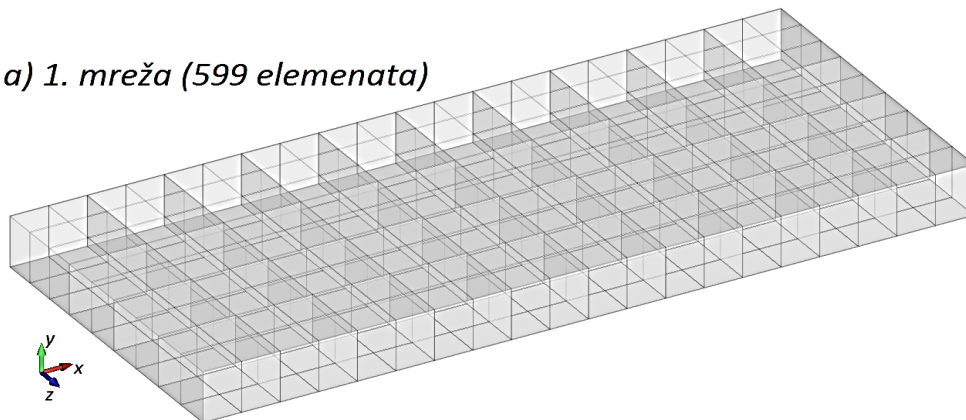
4.2 Izrada mreže konačnih elemenata

Mreža konačnih elemenata izrađena je na način da najgrublja podjela ima je dan konačni element po visini modela te po 2 konačna elementa između rebrenica po duljini, Slika 19. U tom slučaju, elementi oplata dna i pokrova dvodna su kvadratnog oblika, dok su elementi jakih uzdužnih nosača i rebrenica pravokutnog oblika sa omjerom stranica 1,416 što je prihvatljiv omjer. U Tablica 6 dat je prikaz broja elemenata i čvorova ovisno o podjeli mreže.

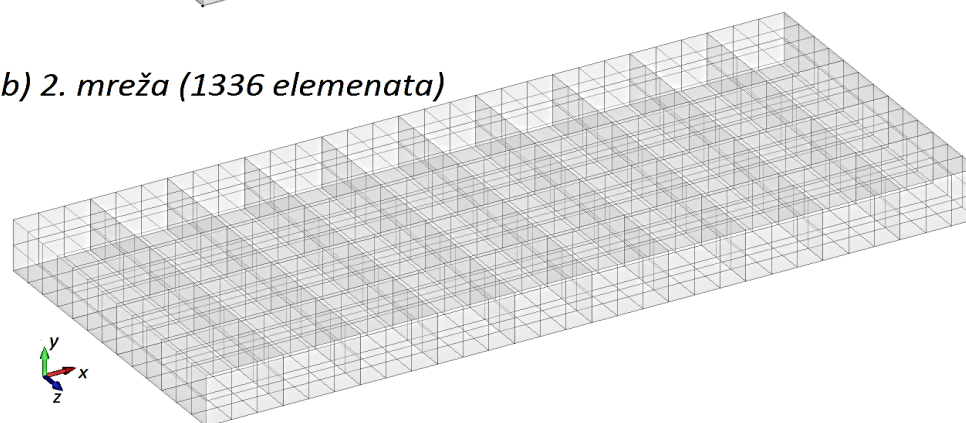
Mreža	Broj čvorova	Broj elemenata
1	420	559
2	1122	1336
3	4935	5464
4	11480	12294

Tablica 6 Prikaz broja čvorova i elemenata za različite mreže

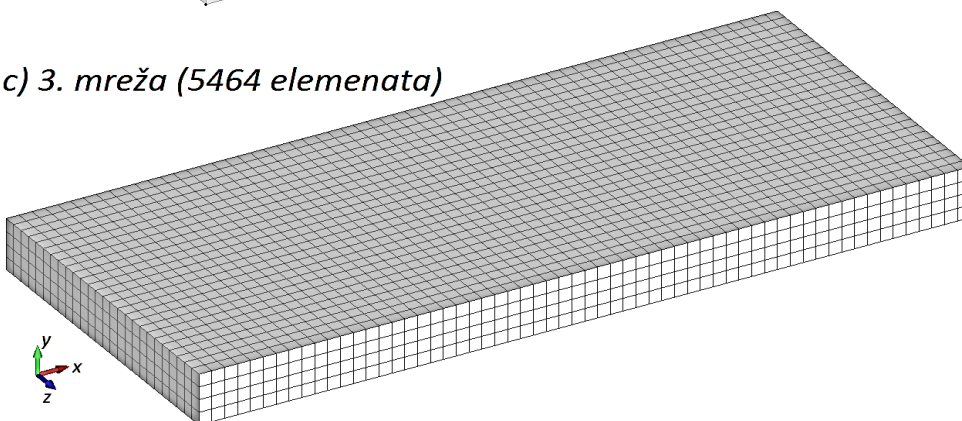
a) 1. mreža (599 elemenata)



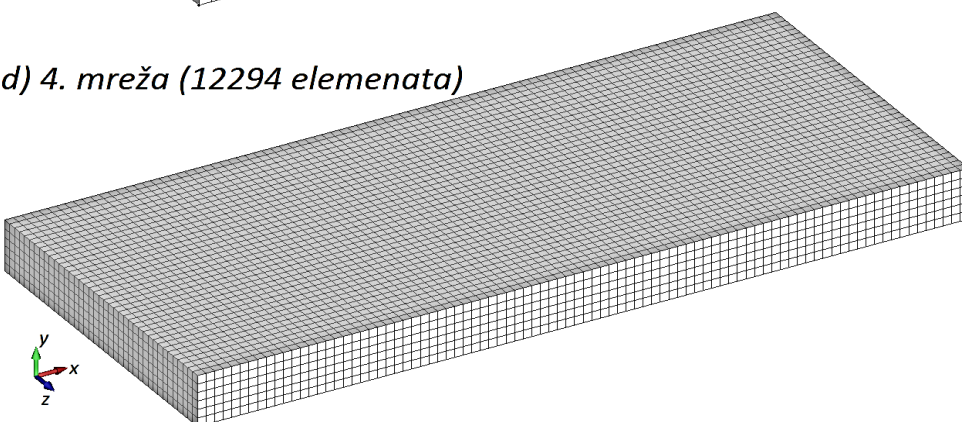
b) 2. mreža (1336 elemenata)



c) 3. mreža (5464 elemenata)



d) 4. mreža (12294 elemenata)



Slika 19 Prikaz svih mreža konačnih elemenata

4.3 Analiza rezultata

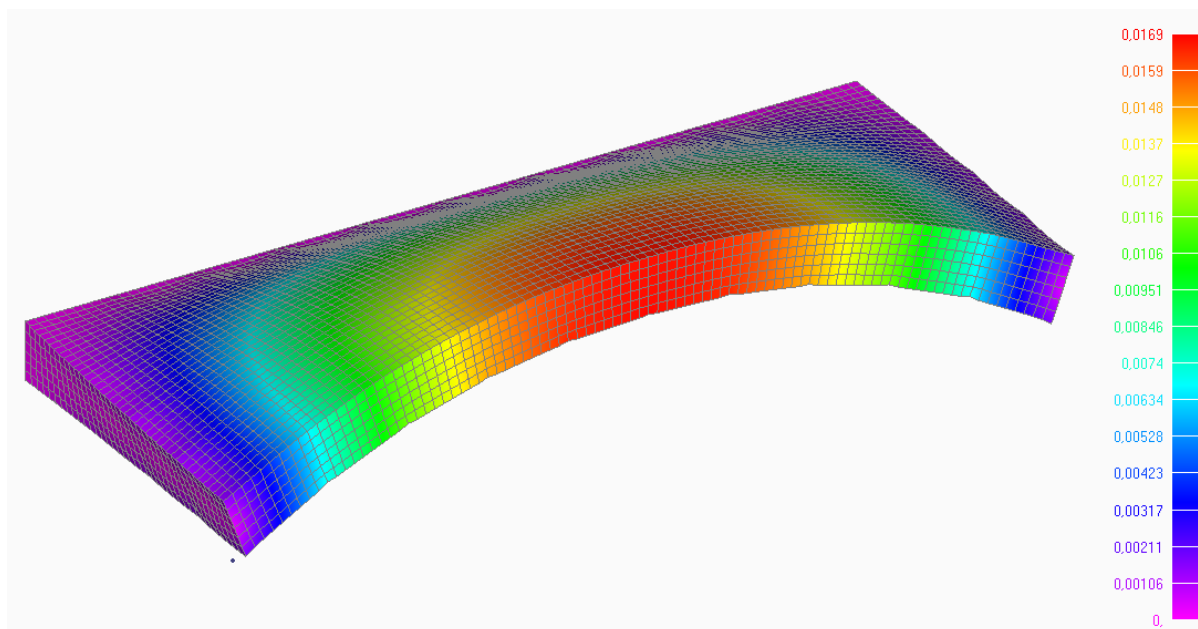
4.3.1 Nastran

Analiza je provedena sa 2 vrste konačnih elemenata, CQUAD4 I CQUADR elementom. Elementi se razlikuju u tome što CQUADR konačni element ima dodatni 6. stupanj slobode odnosno rotaciju oko normale (*drilling* stupanj slobode). Za CQUAD4 element, Nastran automatski računa minimalnu krutost kako bi sustav jednadžbi bio rješiv. Zbog toga, kao što je već navedeno u poglavlju 2.4, CQUADR element bolje opisuje slučaj ravninskog stanja naprezanja.

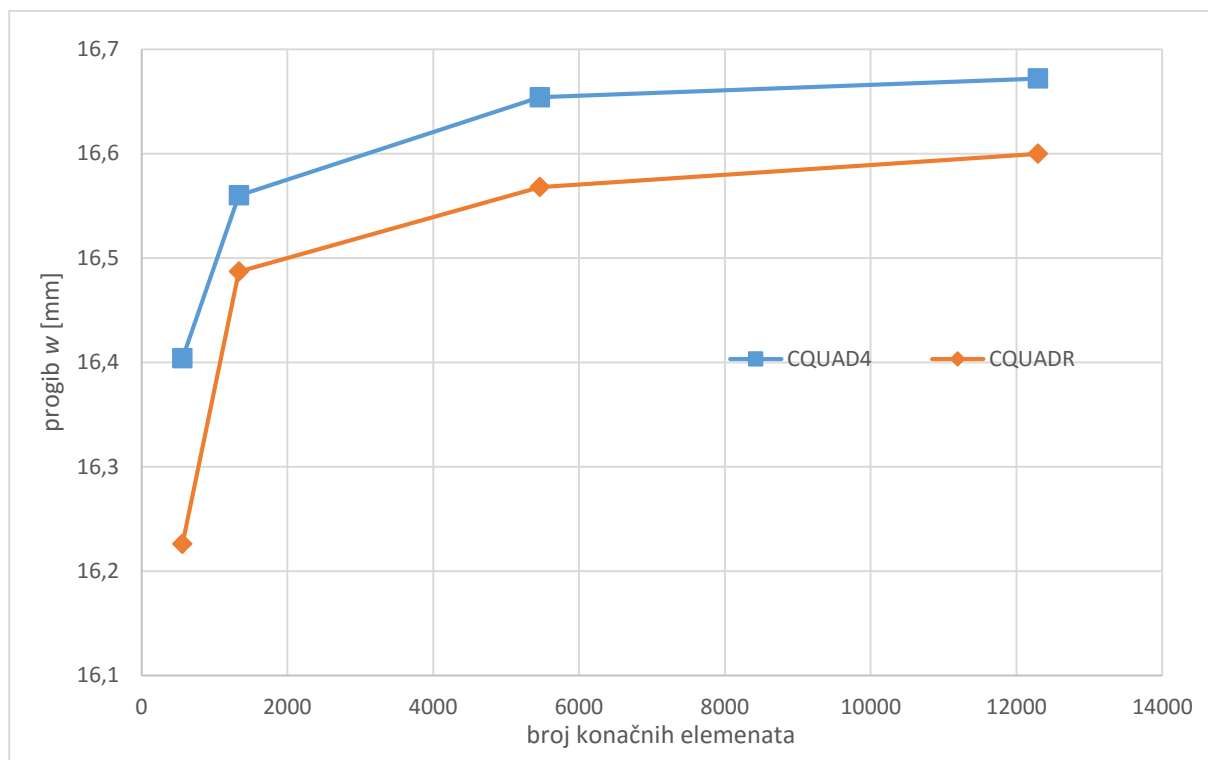
Dobiveni su sljedeći rezultati prikazani u Tablica 7. Mjeren je progib na sredini ploče pokrova dvodna te je izražen u milimetrima.

	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3	Mreža 4
CQUAD4	16,404	16,560	16,654	16,672
CQUADR	16,226	16,487	16,568	16,600

Tablica 7 Izračunati progibi modela dvodna u Nastranu



Slika 20 Prikaz pomaka modela dvodna u Femapu (Mreža 4)



Slika 21 Konvergenције CQUAD4 I QUADR na modelu dvodna

Obzirom da u konstrukciji prevladava slučaj ravninskog stanja naprezanja, može se primijetiti da ta poboljšanja za ovaj primjer nisu velika i da su odstupanja između elemenata relativno mala.

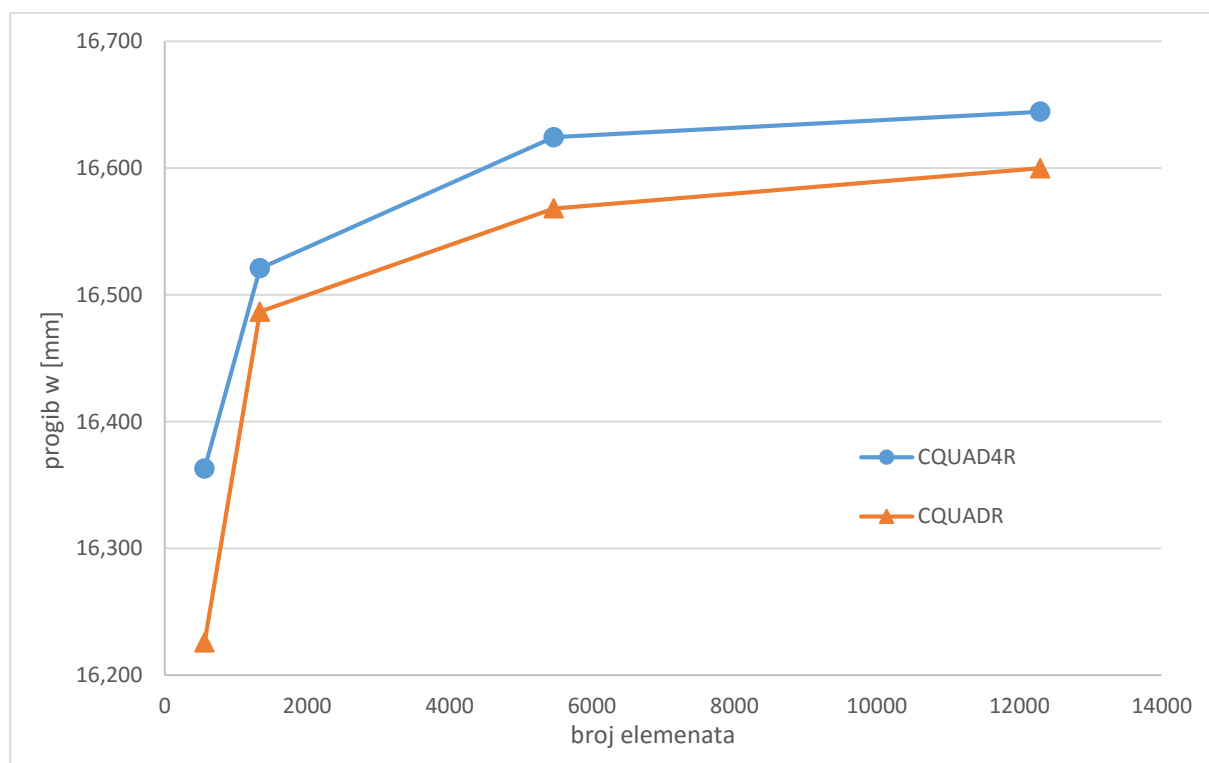
4.3.2 Maestro

Za slučaj programskog paketa Maestro, analiza je provedena sa CQUAD4R elementom, koji prema [2] odgovara Nastranovom QUADR konačnom elementu za slučaj neukrepljene ljuske. Maestrov QUAD4R ima još mogućnost automatskog računanja ortotropnih svojstva elementa. Obzirom da radimo s izotropnim materijalom, elementi su u tom slučaju te bi trebali davati identične rezultate.

Izračunati progibi dati su u Tablica 8.

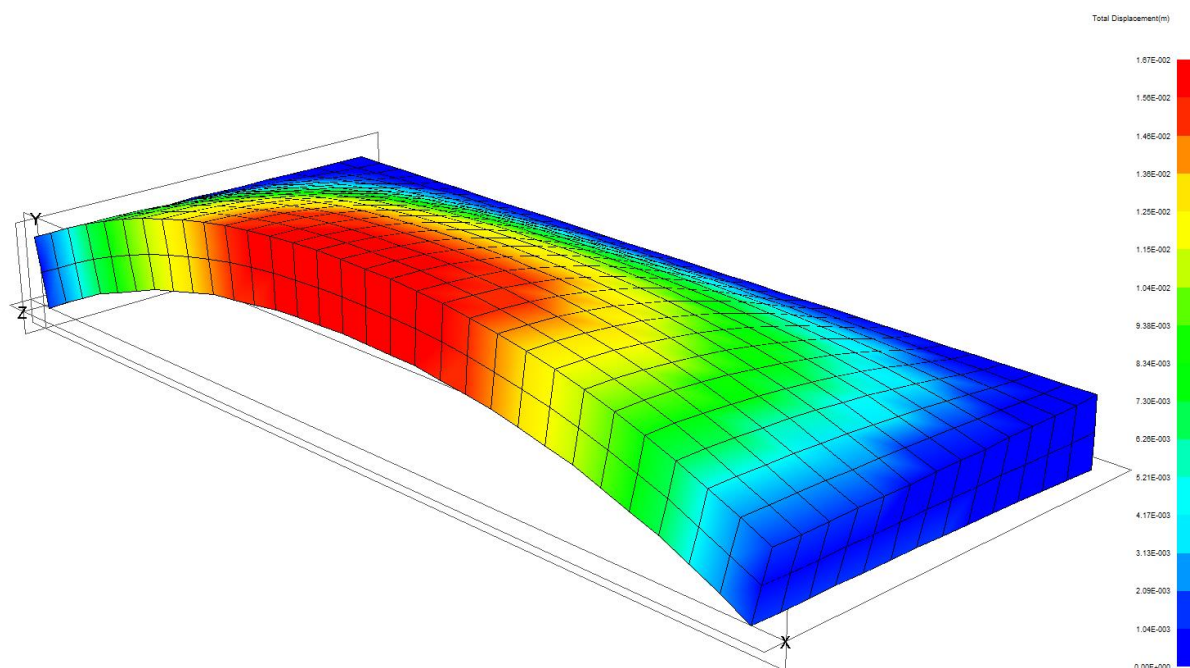
	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3	Mreža 4
CQUAD4R	16,363	16,521	16,624	16,644

Tablica 8 Izračunati progibi modela dvodna u Maestru



Slika 22 Konvergencija CQUAD4R elementa na modelu dvodna

Može se primjetiti da ipak ne daju identične rezultate, ali su odstupanja mala.



Slika 23 Prikaz pomaka modela dvodna (Mreža 2) u Maestru

4.3.3 OOFEM

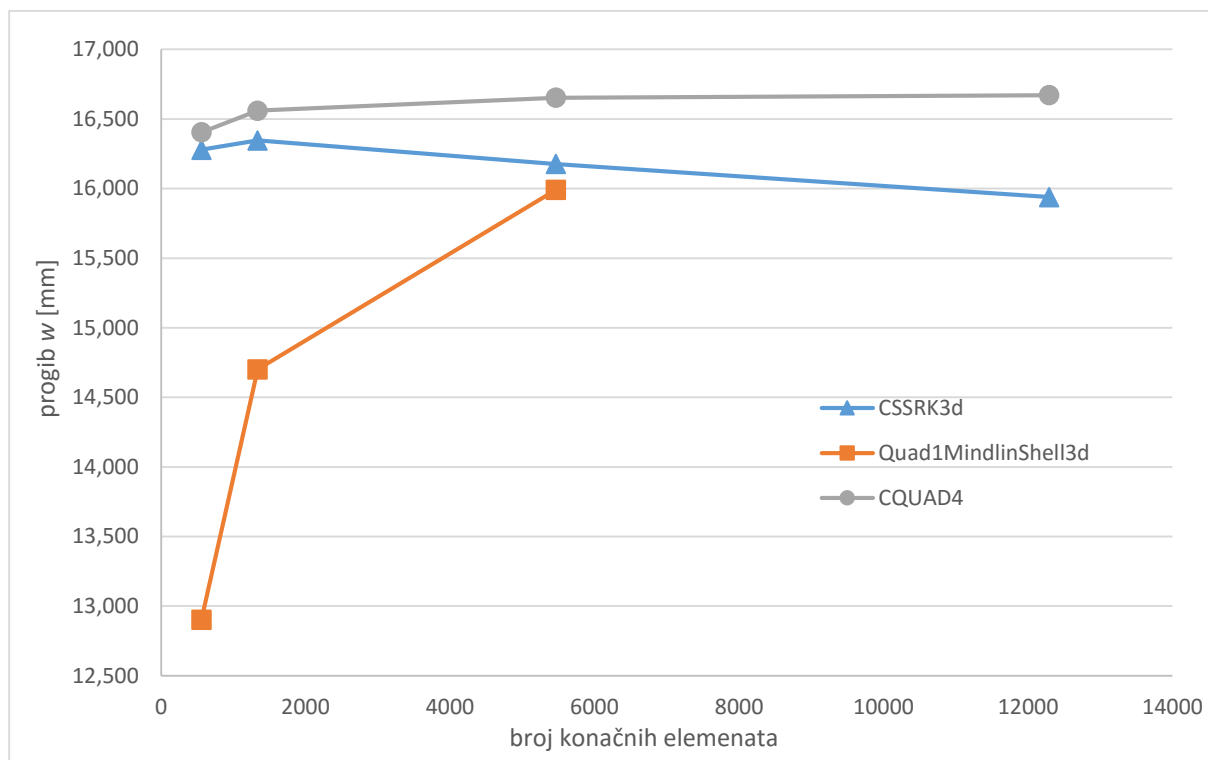
Analize u OOFEM programskom paketu provedene su s Quad1MindlinShell3d i CSSRK3d elementom. Quad1MindlinShell3d element je za rješavanje problema ljuskastih konstrukcija dok je CSSRK3d membranski tip elementa, ali je formuliran da može rješavati probleme u trodimenzijskom koordinatnom sustavu, [8]. Rezultati analize dati su u Tablica 9.

	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3	Mreža 4
CSSRK3d	16,279	16,346	16,177	15,939
Quad1MindlinShell3d	12,901	14,701	15,990	

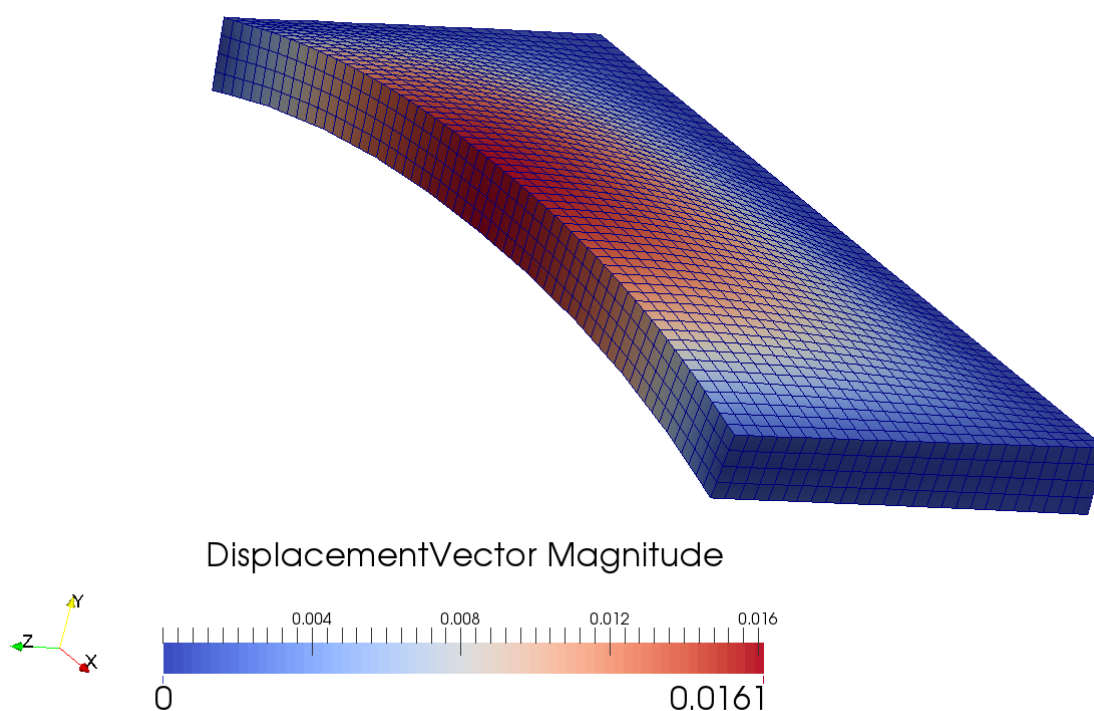
Tablica 9 Izračunati progibi modela dvodna u OOFEM

Proračun s Quad1MindlinShell3d elementom za slučaj podjele mreže 4 nije se uspio provesti jer OOFEM nije uspio riješiti pripadajući sustav linearnih jednačnji. Zbog toga nisu prikazani rezultati tog elementa za mrežu 4.

Može se primijetiti da CSSRK3d element daje vrlo dobre rezultate u odnosu na četverokutne elemente iz Nastrana i Maestra kao i za slučaj konzole iz poglavlja 3.1. Razlog tomu je što u zadanoj tankostjenoj konstrukciji, prevladava ravninsko stanje naprezanja, kao i kod primjera konzole. Iz istog razloga, i Quad1MindlinShell3d element se ponaša kao i kod primjera konzole, odnosno za prihvatljive rezultate traži finu mrežu konačnih elemenata.



Slika 24 Konvergencija CSSRK3d i Quad1MindlinShell3d na modelu dvodna



Slika 25 Prikaz pomaka modela dvodna u OOFEM-u pomoću Paraviewa

4.4 Usporedba svih rezultata

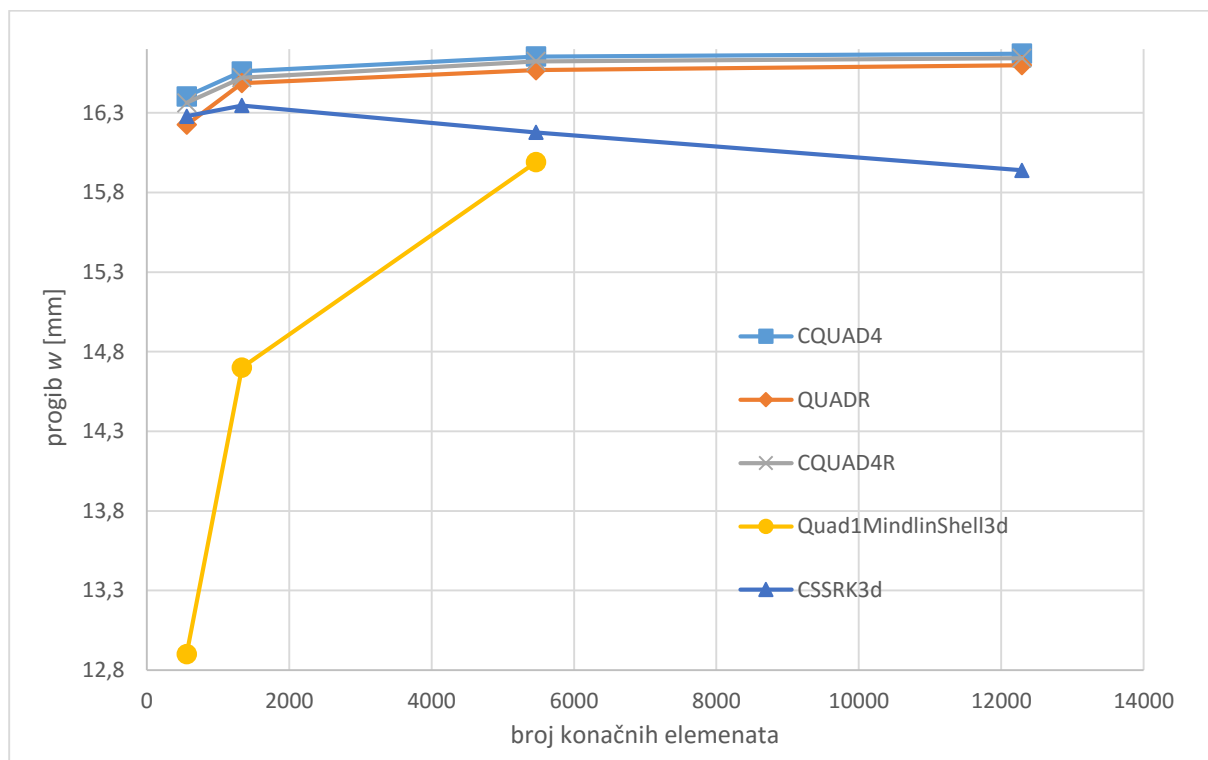
U Tablica 10 i Tablica 11 uspoređeni su svi dobiveni rezultati progiba modela te je dana usporedba sa rezultatima iz literature [6]. Također je dat grafički prikaz dobivenih rezultata na Slika 26 i Slika 27.

Formulacija	Mreža 1	Mreža 2	Mreža 3	Mreža 4
CQUAD4	16,404	16,560	16,654	16,672
QUADR	16,226	16,487	16,568	16,600
CQUAD4R	16,363	16,521	16,624	16,644
CSSRK43d	16,279	16,346	16,177	15,939
Quad1MindlinShell3d	12,901	14,701	15,990	-

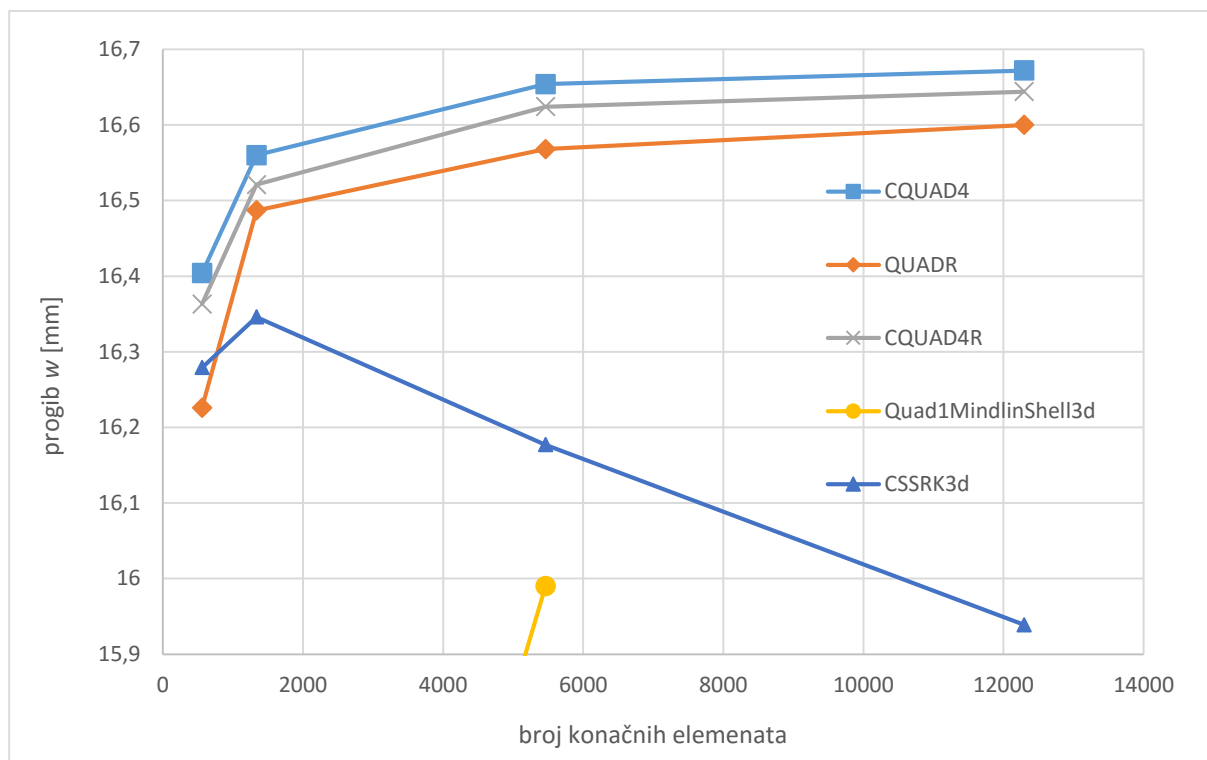
Tablica 10 Usporedba svih rezultata analiza modela dvodna

Metoda	w[mm]
Schade	6,72
Grubi model	16,6
Fini model	18,9
Gredni model	22,3

Tablica 11 Rezultati analiza iz [6]



Slika 26 Zajednički prikaz konvergencije rješenja na modelu dvodna



Slika 27 Uvećani detalj zajedničkog prikaza konvergencije rješenje modela dvodna

Može se primijetiti da se izračunati progibi dobiveni analizama odziva konstrukcije u ovom radu poklapaju sa izračunatim progibima grubog modela u [6]. Obzirom da je tamo modeliran potpuni model, te su zadana stvarna opterećenja, može se zaključiti da pojednostavljenja koja su primijenjena u ovom radu daju vrlo dobre rezultate za analizu sekundarnog odziva (pomaci na jakim uzdužnim nosačima i rebrenicama).

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazana je primjena programa otvorenog koda OOFEM za analizu odziva konstrukcije roštilja dvodna broda za rasuti teret metodom konačnih elemenata. Rezultati su uspoređeni sa komercijalnim programskim paketima (Maestro i Nastran).

Analizirao se sekundarni odziv konstrukcije te iz tog razloga ukrepe nisu modelirane posebnim elementima, već je njihova površina dodana oplati. Zbog navedenog, aproksimiralo se opterećenje hidrostatskog tlaka morske vode na oplati dna sa čvornim silama na spojevima jakih uzdužnih nosača i rebrenica. Time je isključen tercijarni odziv iz konstrukcije. Nakon usporedbe rezultata analiza odziva provedenih u ovom radu sa rezultatima iz [5], može se zaključiti da za analizu sekundarnog odziva ovaj pristup daje vrlo dobre rezultate.

Također, pokazalo se da upotreba programa otvorenog koda OOFEM još nije dovoljno dobra za analizu brodskih konstrukcija u odnosu na komercijalne programske programe. Prije svega, nedostaje formulacija ljuskastih konačnih elemenata. Quad1Mindlin3D konačni element nije se pokazao dobar za analizu tankostijenih konstrukcija. Ima prevelika odstupanja, pogotovo u slučaju grubljih mreža konačnih elemenata. Postoji još jedna formulacija četverokutnog ljuskastog elementa u OOFEM biblioteci, naziva MITC4Shell, ali zbog pristupa rješavanja problema *drilling* stupnja slobode, koji nije odgovarajući za složene modele, konačni element nije bio korišten u ovom radu.

Jedna od prednosti OOFEM-a je jednostavna implementacija konačnih elemenata. Uz odgovarajuće ljuskaste konačne elemente, poput onih u Maestru i Nastranu, OOFEM bi bio vrlo dobar alat za analizu brodskih konstrukcija. Može se zaključiti da unatoč trenutačnim problemima, zasigurno ima potencijala za daljnji razvoj.

POPIS LITERATURE

- [1] B. Patzák, OOFEM project home page, <http://www.oofem.org>, 2000.
- [2] Maestro Marine, url: <http://maestromarine.com/>
- [3] Femap/Nastran, url:
https://www.plm.automation.siemens.com/en_us/products/femap/nxNastran/
- [4] Sorić, J., Metoda konačnih elemenata, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [5] Hughes, O.F. and J.K. Paik: Ship Structural Design and Analysis, Wiley, SNAME, 2010. (Chapter 7)
- [6] Romić, D., Završni rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2015.
- [7] iTCR, url: <http://itcr.hr/>
- [8] Perleta, I., Diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.(u izradi)
- [9] Element Library Reference, url: https://www.plm.automation.siemens.com/en_us/
- [10] Lin, J., Thesis report, University of Maryland at College Park, 1994.

PRILOG**Prilog 1**

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{(x-a)(y-b)}{ab} & -\frac{y^2-b y+\nu x^2-a \nu x}{2ab} & -\frac{x(y-b)}{ab} & \frac{y^2-b y+\nu x^2-a \nu x}{2ab} & \frac{xy}{ab} & -\frac{y^2-b y+\nu x^2-a \nu x}{2ab} & -\frac{(x-a)y}{ab} & \frac{y^2-b y+\nu x^2-a \nu x}{2ab} \\ -\frac{\nu y^2-b \nu y+x^2-a x}{2ab} & \frac{(x-a)(y-b)}{ab} & \frac{\nu y^2-b \nu y+x^2-a x}{2ab} & -\frac{x(y-b)}{ab} & -\frac{\nu y^2-b \nu y+x^2-a x}{2ab} & \frac{xy}{ab} & \frac{\nu y^2-b \nu y+x^2-a x}{2ab} & -\frac{(x-a)y}{ab} \end{bmatrix}$$

Prilog 2

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{(2\nu^2 y-2 y-b \nu^2+2 b) E}{2 a b(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\nu E}{2 b(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2\nu^2 y-2 y-b \nu^2+2 b) E}{2 a b(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\nu E}{2 b(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2\nu^2 y-2 y-b \nu^2) E}{2 a b(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{2 b(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2\nu^2 y-2 y-b \nu^2) E}{2 a b(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{2 b(\nu-1)(\nu+1)} \\ \frac{\nu E}{2 a(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2\nu^2 x-2 x-a \nu^2+2 a) E}{2 a b(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{2 a(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2\nu^2 x-2 x-a \nu^2) E}{2 a b(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{2 a(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2\nu^2 x-2 x-a \nu^2) E}{2 a b(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\nu E}{2 a(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2\nu^2 x-2 x-a \nu^2+2 a) E}{2 a b(\nu-1)(\nu+1)} \\ -\frac{E}{4 b(\nu+1)} & -\frac{E}{4 a(\nu+1)} & -\frac{E}{4 b(\nu+1)} & \frac{E}{4 a(\nu+1)} & \frac{E}{4 b(\nu+1)} & \frac{E}{4 a(\nu+1)} & \frac{E}{4 b(\nu+1)} & -\frac{E}{4 a(\nu+1)} \end{bmatrix}$$

Prilog 3

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{(2b^2\nu^2+3a^2\nu-8b^2-3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{tE}{8(\nu-1)} & -\frac{(2b^2\nu^2-3a^2\nu-8b^2+3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2b^2\nu^2-3a^2\nu+4b^2+3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{tE}{8(\nu-1)} & -\frac{(2b^2\nu^2+3a^2\nu+4b^2-3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} \\ -\frac{tE}{8(\nu-1)} & \frac{(2a^2\nu^2+3b^2\nu-3b^2-8a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2a^2\nu^2+3b^2\nu-3b^2+4a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{tE}{8(\nu-1)} & \frac{(2a^2\nu^2-3b^2\nu+3b^2+4a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2a^2\nu^2-3b^2\nu+3b^2-8a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} \\ -\frac{(2b^2\nu^2-3a^2\nu-8b^2+3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2b^2\nu^2+3a^2\nu-8b^2-3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{tE}{8(\nu-1)} & -\frac{(2b^2\nu^2+3a^2\nu+4b^2-3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2b^2\nu^2-3a^2\nu+4b^2+3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{tE}{8(\nu-1)} \\ -\frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2a^2\nu^2+3b^2\nu-3b^2+4a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{tE}{8(\nu-1)} & \frac{(2a^2\nu^2+3b^2\nu-3b^2-8a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2a^2\nu^2-3b^2\nu+3b^2-8a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{tE}{8(\nu-1)} & \frac{(2a^2\nu^2-3b^2\nu+3b^2+4a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} \\ \frac{(2b^2\nu^2-3a^2\nu+4b^2+3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{tE}{8(\nu-1)} & -\frac{(2b^2\nu^2+3a^2\nu+4b^2-3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2b^2\nu^2+3a^2\nu-8b^2-3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{tE}{8(\nu-1)} & -\frac{(2b^2\nu^2-3a^2\nu-8b^2+3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} \\ \frac{tE}{8(\nu-1)} & \frac{(2a^2\nu^2-3b^2\nu+3b^2+4a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2a^2\nu^2-3b^2\nu+3b^2-8a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{tE}{8(\nu-1)} & \frac{(2a^2\nu^2+3b^2\nu-3b^2-8a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2a^2\nu^2+3b^2\nu-3b^2+4a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} \\ -\frac{(2b^2\nu^2+3a^2\nu+4b^2-3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2b^2\nu^2-3a^2\nu+4b^2+3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{tE}{8(\nu-1)} & -\frac{(2b^2\nu^2-3a^2\nu-8b^2+3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{(2b^2\nu^2+3a^2\nu-8b^2-3a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{tE}{8(\nu-1)} \\ \frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2a^2\nu^2-3b^2\nu+3b^2-8a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{tE}{8(\nu-1)} & \frac{(2a^2\nu^2-3b^2\nu+3b^2+4a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(3\nu-1)tE}{8(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{(2a^2\nu^2+3b^2\nu-3b^2+4a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{tE}{8(\nu-1)} & \frac{(2a^2\nu^2+3b^2\nu-3b^2-8a^2)tE}{24ab(\nu-1)(\nu+1)} \end{bmatrix}$$