Upravljanje autonomnim letjelicama primjenom algebarskog filtera za estimaciju derivacija signala

Breški, Mario

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:318142

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Mario Breški

Zagreb, 2019.

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:
Mario Breški

Zagreb, 2019.

Veliku zahvalnost dugujem mentoru prof. dr. sc. Josipu Kasaću na pruženoj podršci, korisnim savjetima i strpljenju prilikom izrade ovoga rada.
Posebno se zahvaljujem majci Zdenki i sestri Martini na pruženoj podršci i neizmjernom strpljenju tijekom studija i izrade ovoga rada.
Zahvaljujem se djedu Josipu i stricu Stanku na podršci i savjetima tijekom ovih godina studiranja.
Na kraju, posebno se zahvaljujem prijateljima i djevojci Mariji na pruženoj potpori.
Ovaj rad posvećujem ocu Josipu.

Izjava

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, prosinac 2019. Mario Breški

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **MARIO BREŠKI** Mat. br.: 0035196323

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Upravljanje autonomnim letjelicama primjenom algebarskog filtera za estimaciju derivacija signala**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Control of unmanned aerial vehicles by using algebraic signal derivatives filter**

Opis zadatka:

Asimptotski stabilno upravljanje autonomnim letjelicama poput kvadkoptera, uz pretpostavku mjerljivosti samo pozicija letjelice, zahtijeva estimaciju tri derivacije vanjskih pozicije letjelice. Primjena konvencionalnih observera stanja ograničena je zahtjevom za poznavanjem dinamičkog modela objekta upravljanja. Primjena konvencionalnih linearnih filtera za estimaciju brzina ima ograničenu točnost uzrokovanu faznim pomakom filtera. U ovom radu razmatra se primjena nove klase algebarskih filtera za estimaciju derivacija signala.

U radu je potrebno:
- Implementirati algebarski filter za estimaciju derivacija signala proizvoljne razine točnosti te ga primijeniti na estimaciju prve četiri derivacije referentne pozicije letjelice.
- Implementirati algebarski filter za estimaciju prve tri derivacije mjerenog signala pozicije letjelice.
- Implementirati upravljanje autonomnom letjelicom primjenom standardne metode eksterne linearizacije uz pretpostavku mjerljivosti prve tri derivacije pozicije.
- Derivacijske filtere mjerenog i referentnog signala implementirati kao dio zatvorenog regulacijskog kruga autonomne letjelice uz pretpostavku mjerljivosti samo pozicije letjelice.
- Provesti simulacijsku analizu utjecaja parametara derivacijskog filtera na točnost estimacije i stabilnost regulacije.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
26. rujna 2019.

Rok predaje rada:
28. studenog 2019.

Predviđeni datum obrane:
04. prosinca 2019.
05. prosinca 2019.
06. prosinca 2019.

Zadatak zadao:
Kasać Josip
prof. dr. sc. Josip Kasać

Predsjednica Povjerenstva:
prof. dr. sc. Biserka Runje

Sadržaj

Sadržaj **v**

Popis slika **vii**

Popis oznaka **xi**

Sažetak **xvi**

Summary **xvii**

1. Uvod **1**

2. Algebarski estimator stanja **3**

3. Primjena algebarskog estimator na sustavu drugog reda **7**

3.1. Sustav drugog reda 7

3.2. Upravljanje sustavom drugog reda uz primjenu estimatora stanja 8

3.3. Simulacijski rezultati upravljanja MDS sustavom 10

3.3.1. Upravljanje s poznatim derivacijama referentnog signala 11

3.3.2. Upravljanje s estimiranim derivacijama referentnog signala 16

3.3.3. Upravljanje s estimiranim derivacijama referentnog signala uz šum mjerenja pozicije 20

4. Estimacija poremećaja sustava drugog reda **22**
4.1. Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom algebarskog estimatora . . . 22
4.2. Simulacija estimacije poremećaja primjenom algebarskog estimatora . . . 24
4.3. Estimacija i kompenzacija poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora . . . 26
4.4. Simulacija estimacije i kompenzacije poremećaja primjenom robusnog estimatora . . . 28

5. Dinamički model kvadkoptera **32**
5.1. Uvod . . . 32
5.2. Osnovni koncept . . . 33
5.3. Kinematika . . . 37
5.4. Dinamika . . . 41
5.5. Newton-Eulerov model . . . 43
5.6. Linearizacija modela . . . 49

6. Upravljanje letjelicom **52**
6.1. Sinteza linearnog regulatora uz primjenu estimatora . . . 52
6.2. Simulacijski rezultati upravljanja kvadkopterom . . . 54
6.2.1. Poznate derivacije referentnog signala . . . 54
6.2.2. Estimirane brzine sustava i derivacije referentnih trajektorija . . . 58

7. Zaključak **68**

Literatura **69**

A. Prilog **71**

Popis slika

2.1 Iznos pogreške estimiranih vrijednosti s obzirom na utjecaj parametra a i reda filtera n. [1] 6

3.1 Primjer MDS sustava 7
3.2 Usporedba mjerene i estimirane vrijednosti pozicije i brzine s poznatim referentnim trajektorijama ($a = 8, n = 8$) 12
3.3 Usporedba mjerene i estimirane vrijednosti pozicije i brzine s poznatim referentnim trajektorijama ($a = 8, n = 8$) uz dodani Gauss-ov šum 12
3.4 Usporedba mjerene i estimirane vrijednosti pozicije i brzine s poznatim referentnim trajektorijama ($a = 15, n = 15$) 13
3.5 Usporedba mjerene i estimirane vrijednosti pozicije i brzine s poznatim referentnim trajektorijama ($a = 8, n = 15$) 14
3.6 Odziv pozicije i estimirane brzine sustava s poznatim referentnim trajektorijama, $a = 15, n = 15$ 15
3.7 Odziv upravljačke varijable s poznatom derivacijom referentne trajektorije, $a = 15, n = 15$ 15
3.8 Usporedba poznate i estimirane vrijednosti referentne trajektorije, $a = 15, n = 15$ 16
3.9 Usporedba poznate i estimirane vrijednosti referentne trajektorije, $a = 8, n = 8$ 17
3.10 Usporedba poznate i estimirane vrijednosti $x, \dot{x}$ uz estimiranu referentnu trajektoriju i parametre $a = 15, n = 15$ 17

3.11 Odziv pozicije i estimirane brzine u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije s parametrima $a = 15, n = 15$ 18
3.12 Odziv pozicije i estimirane brzine u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije s parametrima $a = 8, n = 8$ 19
3.13 Upravljačka varijabla u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije i estimirane brzine, $a = 15, n = 15$ 19
3.14 Usporedba poznate i estimirane vrijednosti $x, \dot{x}$ uz estimiranu referentnu trajektoriju i parametre $a = 15, n = 15$ te dodani šum mjerenja pozicije . 20
3.15 Odziv pozicije i estimirane brzine u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije s parametrima $a = 15, n = 15$ te dodanim šumom mjerenja pozicije 21
3.16 Upravljačka varijabla u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije i estimirane brzine uz dodani šum mjerenja pozicije, $a = 15, n = 15$ 21

4.1 Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom algebarskog estimatora 25
4.2 Odziv sustava bez kompenzacije poremećaja 25
4.3 Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora, $\lambda = 50$ 28
4.4 Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora, $\lambda = 5$ 29
4.5 Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora, $\lambda = 100$ 29
4.6 Odziv sustava s kompenzacijom poremećaja primjenom robusnog estimatora, $\lambda = 100$ 30
4.7 Usporedba pogreške između robusnog estimatora i algebarskog estimatora poremećaja 31

5.1 Primjer modernog kvadrotora 33
5.2 Shema kvadkoptera u stanju lebdenja 34
5.3 Pokret uzdizanja ili spuštanja 35
5.4 Pokret valjanja 35
5.5 Pokret poniranja 36
5.6 Pokret skretanja 37

5.7 Koordinatni sustav kvadkoptera 38
5.8 Rotacija kuta ψ oko osi z_E 39
5.9 Rotacija kuta θ oko osi y_1 39
5.10 Rotacija kuta ϕ oko osi x_2 40

6.1 Usporedba mjerenih i estimiranih brzina kvadkoptera 55
6.2 Greška estimiranja brzina drona 55
6.3 Slijeđenje referentnih pozicija drona upravljanjem s estimiranim brzinama 56
6.4 Greška slijeđenja upravljanja s estimiranim brzinama 56
6.5 Prikaz slijeđenje referentnih pozicija drona u ravninama 56
6.6 3D trajektorije 57
6.7 Upravljačke varijable letjelice uz poznate referentne trajektorije i estimirane brzine 58
6.8 Usporedba poznate referentne trajektorije letjelice x_d i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{x}_d$ 59
6.9 Usporedba poznate referentne trajektorije letjelice y_d i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{y}_d$ 60
6.10 Usporedba poznate referentne trajektorije letjelice z_d i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{z}_d$ 60
6.11 Odziv sustava letjelice upravljanjem s estimiranim brzinama i referentnim trajektorijama 61
6.12 Upravljačke varijable u slučaju estimiranih derivacija referentnih trajektorija 62
6.13 Usporedba poznate referentne trajektorije $\overline{x}_d$ i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{\overline{x}}_d$ 63
6.14 Usporedba poznate referentne trajektorije $\overline{y}_d$ i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{\overline{y}}_d$ 64
6.15 Usporedba poznate derivacije pozicija i estimiranih vrijednosti derivacija pozicije uz $\overline{x}_d, \overline{y}_d, \overline{z}_d$ 65
6.16 Slijeđenje referentnih trajektorija $\overline{x}_d$, $\overline{y}_d$ i $\overline{z}_d$ s estimiranim brzinama i referentnim trajektorijama 65
6.17 Upravljačke varijable u slučaju estimiranih derivacija referentnih trajektorija primjenom $\overline{x}_d$, $\overline{y}_d$ i $\overline{z}_d$ 66

6.18 3D prikaz slijeđenje referentne trajektorije uz korištenje $\hat{\bar{x}}_d$,$\hat{\bar{y}}_d$ i $\hat{\bar{z}}_d$ 67

Popis oznaka

$\mathbf{A}$ Matrica koeficijenata estimatora . . . 4
$\mathbf{C}$ Matrica izlaza estimatora . . . 4
D Koeficijent prigušnice MDS sustava, [N s m^{-1}] . . . 7
M Masa MDS sustava, [kg] . . . 7
$\mathbf{R}(\psi, z)$ Rotacijska matrica koja opisuje zakret kuta ψ oko z_E [rad] . . . 38
$\mathbf{R}(\phi, x)$ Rotacijska matrica koja opisuje zakret kuta ϕ oko x_2 [rad] . . . 39
$\mathbf{R}(\theta, y)$ Rotacijska matrica koja opisuje zakret kuta θ oko y_1 [rad] . . . 39
S Konstanta opruge, [N m^{-1}] . . . 8
X Linearna pozicija kvadkoptera po osi x_E [m] . . . 40
Y Linearna pozicija kvadkoptera po osi y_E [m] . . . 40
Z Linearna pozicija kvadkoptera po osi z_E [m] . . . 40
a Slobodni parametar filtera . . . 5
$\mathbf{b}$ Matrica ulaza estimatora . . . 4
b Faktor potiska [N s^2] . . . 45
d Faktor otpora [N m s^2] . . . 45
$d(t)$ Ukupni poremećaj . . . 22
$\mathbf{e}$ Jedinični vektor . . . 23
g Gravitacijska sila ubrzanja [m s^{-2}] . . . 44
$\mathbf{k}$ Generički vektor anti-simetrične matrice . . . 44
l Udaljenost između centra mase kvadkoptera i središta propelera [m] . . . 45
m Masa kvadkoptera [kg] . . . 42
n Red filtera . . . 5

p Kutna brzina kvadkoptera oko osi x_B [rad s^{-1}] . . . 40
q Kutna brzina kvadkoptera oko osi y_B [rad s^{-1}] . . . 40
r Kutna brzina kvadkoptera oko osi z_B [rad s^{-1}] . . . 40
u Linearna brzina kvadkoptera oko osi x_B [m s^{-1}] . . . 40
u Ulaz sustava . . . 3
v Linearna brzina kvadkoptera oko osi y_B [m s^{-1}] . . . 40
w Linearna brzina kvadkoptera oko osi z_B [m s^{-1}] . . . 40
$\mathbf{x}$ Vektor stanja sustava . . . 3
y Mjerena pozicija sustava . . . 3
$\mathbf{\Lambda}$ Generalizirani vektor sila [N] . . . 43
λ Proizvoljni parametar filtera trećeg reda . . . 26
$\boldsymbol{\nu}$ Generalizirani vektor brzine u koordinatnom sustavu kvadkoptera [m s^{-1}] . . 40
$\mathbf{\Omega}$ Vektor brzine propelera [rad s^{-1}] . . . 45
Ω Ukupna brzina vrtnje propelera [rad s^{-1}] . . . 45
ϕ Eulerov kut, valjanje [rad] . . . 38
ψ Eulerov kut, skretanje [rad] . . . 38
θ Eulerov kut, poniranje [rad] . . . 38
$\boldsymbol{\xi}$ Generalizirani vektor položaja u Zemljinom koordinatnom sustavu [m] 40
$\boldsymbol{\zeta}$ Generalizirani vektor brzine u odnosu na hibridni koordinatni sustav [m s^{-1}] 48

Indeksi

$\mathbf{A_s}$ Matrica koeficijenata sustava . . . 3
$\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})$ Coriolisova centripetalna matrica u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera 43
$\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta})$ Coriolisova centripetalna matrica u odnosu na hibridni koordinatni sustav . 48
$\mathbf{C}_s$ Matrica izlaza sustava . . . 3
$\mathbf{E}_B(\boldsymbol{\xi}$ Matrica gibanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera . . . 45
$\mathbf{E}_H(\boldsymbol{\zeta})$ Matrica gibanja u odnosu na hibridni koordinatni sustav . . . 48
$\mathbf{F}^B$ Vektor sila kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N] . . 37
$\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi})$ Gravitacijski vektor u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera . . . 44
$\mathbf{G}_H$ Gravitacijski vektor u odnosu na hibridni koordinatni sustav . . . 48
I_{xx} Moment inercije oko x osi [N m s^2] . . . 47
I_{yy} Moment inercije oko y osi [N m s^2] . . . 47

I_{zz} Moment inercije oko z osi [N m s^2] . . . 47
$\mathbf{J}_\Theta$ Generalizirana matrica transformacija . . . 41
J_{TP} Ukupni moment inercije propelera [N m s^2] . . . 45
$\mathbf{M}_B$ Inercijska matrica sustava u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera . . . 43
$\mathbf{M}_H$ Inercijska matrica sustava u odnosu na hibridni koordinatni sustav . . . 48
$\mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})$ Matrica žiroskopskoga utjecaja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera 45
$\mathbf{O}_H(\boldsymbol{\zeta})$ Matrica žiroskopskoga utjecaja u odnosu na hibridni koordinatni sustav . . 48
$\dot{\mathbf{R}}_\Theta$ Derivacija rotacijske matrice . . . 42
$\mathbf{R}_\Theta$ Rotacijska matrica . . . 38
$\mathbf{S}_o$ Matrica anti-simetričnog operatora . . . 44
$\mathbf{T}_\Theta$ Matrica transformacija . . . 41
U_1 Vertikalni potisak u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N] . . . 35
U_2 Moment valjanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N m] . . . 36
U_3 Moment poniranja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N m] . . . 36
U_4 Moment skretanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N m] . . . 37
$\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\Omega})$ Vektor gibanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera . . . 45
$\mathbf{V}^B$ Vektor linearne brzine kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [m s^{-1}] . . . 37
$\mathbf{V}^E$ Vektor linearne brzine kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav Zemlje [m s^{-1}] . . . 40
$\mathbf{b_s}$ Matrica ulaza sustava . . . 3
$u_e(t)$ Ulaz estimatora . . . 4
x_d Referentna trajektorija . . . 10
$\mathbf{z}$ Vektor varijabli stanja estimatora . . . 4
Δ_A Inkrementalno povećanje brzine prvog propelera [rad s^{-1}] . . . 35
Δ_B Inkrementalno povećanje brzine drugog propelera [rad s^{-1}] . . . 36
$\boldsymbol{\Gamma}^E$ Vektor linearne pozicije kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m] 37
$\boldsymbol{\omega}^B$ Vektor kutne brzine kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [rad s^{-1}] . . . 37
Ω_H Brzina propelera tijekom lebdjenja [rad s^{-1}] . . . 34
Ω_1 Brzina vrtnje prednjeg propelera [rad s^{-1}] . . . 45

Ω_2 Brzina vrtnje desnog propelera [rad s^{-1}] . . . 45
Ω_3 Brzina vrtnje stražnjeg propelera [rad s^{-1}] . . . 45
Ω_4 Brzina vrtnje lijevog propelera [rad s^{-1}] . . . 45
$\boldsymbol{\tau}^B$ Vektor momenata kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N m] . . . 37
$\boldsymbol{\tau}^E$ Vektor momenata kvadrotora u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [N m] 43
$\boldsymbol{\Theta}^E$ Vektor kutne pozicije kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [rad] 37

Akcenti

$\bar{\mathbf{M}}$ Matrica konstanti momenata estimatora . . . 4
$\dot{\mathbf{V}}^B$ Vektor linearnog ubrzanja kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [m s^{-2}] . . . 42
$\ddot{X}$ Linearno ubrzanje kvadkoptera po osi x_E [m s^{-2}] . . . 49
$\dot{X}$ Linearna brzina kvadkoptera po osi x_E [m s^{-1}] . . . 47
$\ddot{Y}$ Linearno ubrzanje kvadkoptera po osi y_E [m s^{-2}] . . . 49
$\dot{Y}$ Linearna brzina kvadkoptera po osi y_E [m s^{-1}] . . . 47
$\ddot{Z}$ Linearno ubrzanje kvadkoptera po osi z_E [m s^{-2}] . . . 49
$\dot{Z}$ Linearna brzina kvadkoptera po osi z_E [m s^{-1}] . . . 47
$\dot{p}$ Kutno ubrzanje kvadkoptera oko osi x_B [rad s^{-2}] . . . 47
$\dot{\phi}$ Kutna brzina kvadkoptera oko osi x_2 [rad s^{-1}]] . . . 41
$\dot{\psi}$ Kutna brzina kvadkoptera oko osi z_E [rad s^{-1}] . . . 41
$\dot{q}$ Kutno ubrzanje kvadkoptera oko osi y_B [rad s^{-2}] . . . 47
$\dot{r}$ Kutno ubrzanje kvadkoptera oko osi z_B [rad s^{-2}] . . . 47
$\dot{\theta}$ Kutna brzina kvadkoptera oko osi y_1 [rad s^{-1}] . . . 41
$\dot{u}$ Linearno ubrzanje kvadkoptera oko osi x_B [m s^{-2}] . . . 47
$\dot{v}$ Linearno ubrzanje kvadkoptera oko osi y_B [m s^{-2}] . . . 47
$\dot{w}$ Linearno ubrzanje kvadkoptera oko osi z_B [m s^{-2}] . . . 47
$\dot{\hat{x}}$ Estimirana brzina sustava . . . 10
$\dot{\mathbf{x}}$ Vektor derivacija stanja sustava . . . 3
$\tilde{x}$ Greška regulacije . . . 10
$\ddot{\hat{x}}_d$ Estimacija druge derivacije referentne trajektorije . . . 10
$\ddot{x}_d$ Druga derivacija referentne trajektorije . . . 10

$\dot{\hat{x}}_d$ Estimacija derivacije referentne trajektorije 10
$\dot{x}_d$ Derivacija referentne trajektorije 10
$\hat{\mathbf{y}}$ Vektor izlaza estimatora 4
$\dot{\mathbf{z}}$ Vektor derivacija varijabli stanja estimatora 4
$\ddot{\mathbf{\Gamma}}^E$ Vektor linearnog ubrzanja kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m s^{-2}] 42
$\dot{\mathbf{\Gamma}}^E$ Vektor linearne brzine kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m s^{-1}] 40
$\dot{\boldsymbol{\nu}}$ Generalizirani vektor ubrzanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [m s^{-2}] 43
$\dot{\boldsymbol{\omega}}^B$ Vektor kutnog ubrzanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [rad s^{-2}]43
$\dot{\mathbf{\Omega}}$ Vektor ubrzanja propelera [rad s^{-2}] 43
$\ddot{\mathbf{\Theta}}^E$ Vektor kutnog ubrzanja u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [rad s^{-2} . . 43
$\dot{\mathbf{\Theta}}^E$ Vektor kutne brzine kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m s^{-1}] 40
$\dot{\boldsymbol{\xi}}$ Generalizirani vektor brzine u Zemljinom koordinatnom sustavu [m s^{-1}] . . . 41
$\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ Generalizirani vektor ubrzanja u odnosu na hibridni koordinatni sustav [m s^{-2}] 48

Sažetak

U ovom diplomskom radu razmatran je algebarski estimator stanja i njegova primjena za upravljanje sustava drugog reda te kvadkoptera uz pretpostavku mjerljivosti samo pozicije. Izvedene su jednadžbe dinamičkog modela oba sustava s kojima se pristupilo upravljanju i primjeni estimatora. Algebarski estimator iskorišten je za estimaciju brzina te estimaciju derivacija referentnih trajektorija. Estimator je primijenjen i za estimaciju poremećaja na sustavu drugoga reda. Uspoređene su poznate i estimirane vrijednosti varijabli stanja, te se prikazao utjecaj reda filtera na točnost estimacije. Provedena je simulacija upravljanja u slučaju s poznatim derivacijama referentne trajektorije te upravljanja u slučaju s estimiranim derivacijama za oba sustava.

Ključne riječi: algebarski estimator, sustav drugog reda, kvadkopter, estimacija brzina, estimacija referentnih trajektorija, estimacija poremećaja

Summary

Throughout this master thesis application of algebraic derivatives estimator is discussed. An estimator is used to control a second-order system and quadcopter with the presumption that only position is measurable. Equations of dynamic models are derived for both systems which are then used to approach system control and algebraic estimator application. An algebraic estimator is used to estimate speed and to estimate derivations of desired referent trajectories. Also, an estimator is used to estimate disturbances in second-order systems. Observed and estimated state variables are compared, where estimator order influence is shown on the accuracy of estimations. Simulations were performed for both systems in two variants, one where derivatives of the desired trajectories are known, and others where they are estimated.

Keywords: algebraic derivatives estimator, second-order system, quadcopter, speed estimation, desired trajectories estimation, disturbances estimation

1 Uvod

U današnje vrijeme primjetna je sve veća pojava autonomnih letjelica čiji razvoj je i dalje izazov modernoj industriji. Autonomne letjelice su složeni multivarijabilni i nelinearni sustavi za čije upravljanje je potrebno poznavati određene varijable. Pa tako postojeća tehnologija omogućava mjerenje pozicije letjelica, ali mogućnost mjerenja brzine je otežana. Taj nedostatak potaknuo je razvoju estimatora stanja, odnosno algoritama koji predviđaju derivacije poznate vrijednosti varijable stanja, što nam uz poznatu poziciju omogućuje estimiranje brzine koja je potrebna za upravljanje. Također estimatori se koriste za predviđanje poremećaja koji se pojavljuju prilikom leta letjelice, a jedan od najčešćih takvih poremećaja je vjetar. Koriste se i za estimiranje derivacije željene referentne trajektorije, pa je tako sve navedeno prikazano u ovom radu. Kroz ovaj rad opisan je princip rada algebarskog estimatora koji se temelji na pretvorbi *Taylorovog* razvoja u skup linearno neovisnih jednadžbi koje se odnose na derivacije signala i njihovu primjenu. Prednost algebarskog estimatora stanja u odnosu na konvencionalne estimatore stanja leži u tome što se osigurava stabilna konvergencija bez potrebe periodičkog ponovnog pokretanja [1]. Za razliku od algebarskih observera stanja [2], algebarski estimator derivacija ne zahtijeva poznavanje dinamičkog modela sustava. U ovom radu estimator je primijenjen kod upravljanja sustavom drugog reda i autonomnom letjelicom gdje su u oba slučaja pozicije i referentne trajektorije bile poznate odnosno mjerljive, a za njihove nepoznate derivacije upotrijebljene su estimirane vrijednosti derivacija pozicije i derivacija referentnih trajektorija. Prikazan je utjecaj određenih parametara na sustav upravljanja te su izvedene sve dinamičke i kinematičke jednadžbe koje su potrebno za uspješno upravljanje sustavima. Simulacije su odrađene u programskom paketu *Matlab*.

Pregled po poglavljima

U drugom poglavlju opisan je algebarski estimator stanja zajedno s pripadajućim jednadžbama koje su potrebne kako bih se uspješno primijenio na sustav drugog reda te na kvadkopteru.

U trećem poglavlju algebarski estimator je primijenjen na sustavu drugog reda za estimaciju brzine i derivacija referentne trajektorije..

Četvrto poglavlje sadrži implementaciju estimatora za predviđanje poremećaja na sustavu drugoga reda. Također primijenjen je i robusni estimator stanja za upravljanje s kompenzacijom poremećaja.

Kroz peto poglavlje izveden je kinematički model kvadkoptera primjenom Eulerovih kuteva, a također je izveden i dinamički model. Model se linearizirao kako bih se omogućilo upravljanje s algebarskim estimatorom stanja.

Šesto poglavlje sadrži sintezu linearnog regulatora za sustav letjelice te simulacijske rezultate upravljanja s estimiranim brzinama i referentnim trajektorijama koje su u prvom slučaju bile poznate, a drugom su se koristile estimirane vrijednosti derivacija referentnih trajektorija.

2 Algebarski estimator stanja

Algebarski estimator stanja se temelji na razvoju Taylorovog reda u skup linearno neovisnih jednadžbi koje se odnose na derivacije signala. U odnosu na ostale postojeće estimatore, prednosti ovog algebarskog estimatora leže u stabilnoj konvergenciji bez potrebe za periodičkim ponovnim pokretanjem estimatora. Uz navedeno moguće je dobiti estimirane vrijednosti derivacija višeg reda. Parametre filtera moguće je prilagođavati neovisno o redu filtera.
Linearizirani dinamički model nekog mehaničkog podsustava s jednim ulazom i jednim izlazom možemo prikazati u obliku jednadžbi prostora stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_s u(t), \tag{2.1}$$

$$y = \mathbf{C}_s\mathbf{x}(t), \tag{2.2}$$

gdje je (2.1) jednadžba stanja sustava, a (2.2) jednadžba izlaza sustava, pri čemu su

- $\mathbf{A_s}$ - matrica koeficijenata sustava
- $\mathbf{b_s}$ - matrica ulaza sustava
- $\mathbf{C_s}$ - matrica izlaza sustava
- $\dot{\mathbf{x}}$ - derivacije vektora stanja sustava
- $\mathbf{x}(t)$ - vektor stanja sustava
- $u(t)$ - ulaz sustava
- y - mjerena pozicija sustava. [3]

Cilj filtera odnosno estimatora je dobivanje varijabli koje ne možemo izmjeriti tehničkim putem već ih je potrebno predvidjeti uz pomoć algoritma. Pa je tako potrebno uzeti

vrijednosti iz jednadžbe (2.2) i dobiti njihove estimirane vrijednosti. Estimator zapisan u prostoru stanja ima oblik

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u_e(t), \tag{2.3}$$

gdje su

- $\dot{\mathbf{z}}(t)$ - vektor derivacija varijabli stanja estimatora
- $\mathbf{A}$ - matrica koeficijenata estimatora
- $\mathbf{z}(t)$ - vektor varijabli stanja estimatora
- $\mathbf{b}$ - matrica ulaza estimatora
- $u_e(t)$ - ulaz estimatora.

Ulaz filtera mora biti signal koji je potrebno estimirati, a u ovom slučaju želimo estimirati izlazne varijable sustava pa je ulaz filtera jednadžba (2.2) odnosno ulaz u jednadžbi (2.3) je $u_e(t) = y$ gdje y mjerena pozicija sustava.
Izlazna jednadžba filtera odnosno vektor izlaza filtera opisuje se jednadžbom

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}(t), \tag{2.4}$$

gdje je $\hat{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{C}$ pri čemu su

- $\hat{\mathbf{y}}(t)$ - vektor izlaza estimatora (estimirane derivacije signala)
- $\bar{\mathbf{M}}$ - matrica konstanti momenata estimatora
- $\mathbf{C}$ - matrica izlaza estimatora.

Vektor estimiranih vrijednosti signala sadrži derivacije varijable stanja, a broj derivacija ovisi o redu filtera n i ima oblik

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_e & \hat{u}_e^{(1)} & \hat{u}_e^{(2)} & \hat{u}_e^{(3)} & \dots & \hat{u}_e^{(n-1)} \end{bmatrix}^T. \tag{2.5}$$

Vektor $\hat{\mathbf{y}}$ sadrži estimirane vrijednosti derivacija signala koje se mogu upotrijebiti kao ulaz sustava. Tako se dobije zatvorena petlja koja upravlja sustavom uz pomoć željenih estimiranih vrijednosti. Da bi se dobio vektor $\hat{\mathbf{y}}$ potrebno je poznavati matrice $\bar{\mathbf{M}}$ i $\mathbf{C}$. Matrica $\bar{\mathbf{M}}$ je

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\hat{m}_1}{a} & \frac{\hat{m}_2}{a^2} & \frac{\hat{m}_3}{a^3} & \dots & \frac{\hat{m}_{n-1}}{a^{n-1}} \\ 0 & 1 & \frac{\hat{m}_1}{a} & \frac{\hat{m}_2}{a^2} & \dots & \frac{\hat{m}_{n-2}}{a^{n-2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\hat{m}_1}{a} & \dots & \frac{\hat{m}_{n-3}}{a^{n-3}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\hat{m}_{n-4}}{a^{n-4}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

a $\hat{m}$ je definiran izrazom

$$\hat{m}_k = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}, \qquad k = 1, 2, ..., n-1. \tag{2.7}$$

Parametar a je pozitivan realan broj, a n predstavlja proizvoljni red filtera. Matrica $\mathbf{C}$ ima oblik

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu_{10} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_{20} & \mu_{21} \\ 0 & \cdots & \mu_{30} & \mu_{31} & \mu_{32} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n,0} & \cdots & \mu_{n,n-3} & \mu_{n,n-2} & \mu_{n,n-1} \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

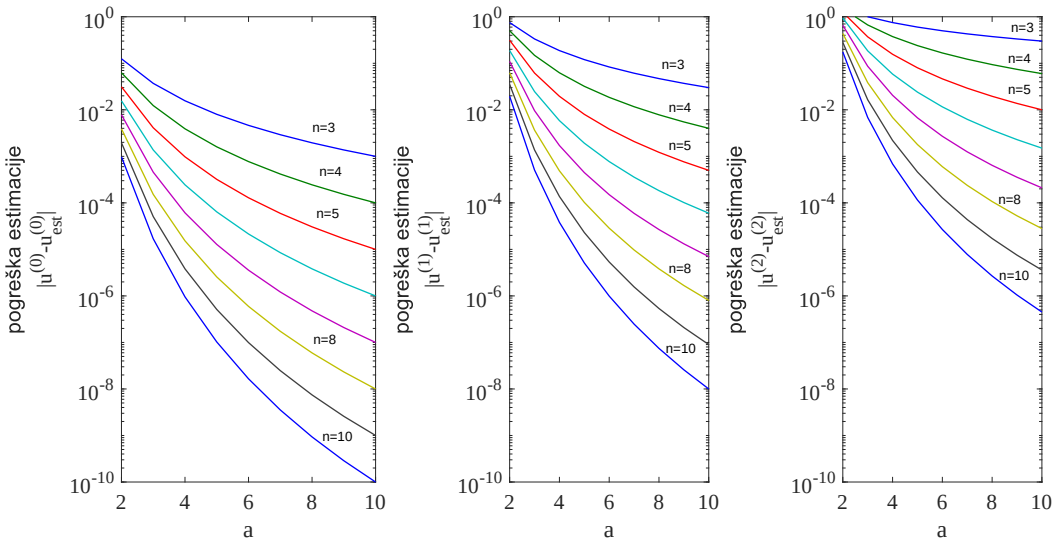
gdje je μ_{ik}

$$\mu_{ik} = (-1)^k a^{i-1} \binom{i-1}{k}. \tag{2.9}$$

Sada je potrebno opisati matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{b}$ kako bih dobili funkcionalni oblik algebarskog estimatora stanja.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Proizvoljni parametar a i red filtera n utječu na točnost estimirane vrijednosti što se može vidjeti sa slike (2.1). Vidljivo je da povećanjem vrijednosti ta dva broja smanjujemo pogrešku estimacije. S računske strane bitno je napomenuti da veći red sustava estimatora smanjuje pogrešku estimacije, ali i produljuje vrijeme potrebno za računanje varijabli.

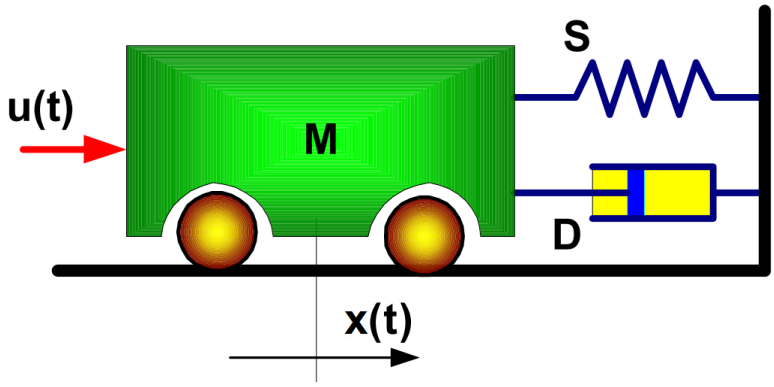


Slika 2.1: Iznos pogreške estimiranih vrijednosti s obzirom na utjecaj parametra a i reda filtera n. [1]

3 Primjena algebarskog estimator na sustavu drugog reda

3.1. Sustav drugog reda

MDS je dinamički sustav drugog reda i kao takav je jedan od najpopularnijih sustava koji se koriste za analiziranje novih metoda upravljanja, a sustav se sastoji od mase, opruge i prigušnice. MDS sustav se može prikazati slikom 3.1.



Slika 3.1: Primjer MDS sustava [3]

Dinamika MDS sustava prikazana slikom (3.1) opisuje se jednadžbom

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Sx = u(t), \tag{3.1}$$

gdje je M masa sustava, D koeficijent prigušnice, S konstanta opruge, a $x, \dot{x}$ i $\ddot{x}$ predstavljaju poziciju, brzinu i ubrzanje sustava odnosno to su varijable stanja sustava.

Jednadžbu (3.1) prikazat ćemo u prostoru stanja uz pomoć faznih varijabli stanja

$$x_1 = x, \tag{3.2}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2, \tag{3.3}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{S}{M}x - \frac{D}{M}\dot{x} + \frac{1}{M}u, \tag{3.4}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{S}{M}x_1 - \frac{D}{M}x_2 + \frac{1}{M}u, \tag{3.5}$$

što zapisano u matričnom obliku daje

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{S}{M} & -\frac{D}{M}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_s}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_s} u, \tag{3.6}$$

pa tako jednadžba stanja sustava ima oblik jednadžbe (2.1),a jednadžba izlaza sustava izgleda kao (2.2), odnosno

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_s}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}. \tag{3.7}$$

3.2. Upravljanje sustavom drugog reda standardnim PD regulatorom uz primjenu algebarskog estimatora stanja

Osnovna cilj regulacije je svesti pogrešku na nulu.

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_d(t) \to 0, \tag{3.8}$$

a željena dinamika pogreške mora biti

$$a_2\ddot{\tilde{x}} + a_1\dot{\tilde{x}} + a_0\tilde{x} = 0. \tag{3.9}$$

Parametri a_2, a_1, a_0 moraju biti veći od nule kako bi garantirali globalnu asimptotsku stabilnost

$$a_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0. \tag{3.10}$$

Ako jednadžbu (3.8) posložimo u prikladniji oblik, dobije se

$$x = \tilde{x} + x_d,\ \dot{x} = \dot{\tilde{x}} + \dot{x}_d,\ \ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d. \tag{3.11}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (3.11) u (3.1) dobije se

$$m\ddot{\tilde{x}} + D\dot{\tilde{x}} + K\tilde{x} + m\ddot{x}_d + D\dot{x}_d + Kx_d = u, \tag{3.12}$$

pa tako u mora imati oblik

$$u = m\ddot{x}_d + D\dot{x}_d + Kx_d - K_p\tilde{x} - K_d\dot{\tilde{x}}. \tag{3.13}$$

Ako uvrstimo (3.13) u (3.12) dobijemo oblik željene dinamike pogreške (3.9)

$$\underbrace{m}_{a_2}\ddot{\tilde{x}} + \underbrace{(K_d + D)}_{a_1}\dot{\tilde{x}} + \underbrace{(K_p + K)}_{a_0}\tilde{x} = 0, \tag{3.14}$$

gdje

$$\begin{aligned} K_d + D > 0, \\ K_p + K > 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Jednadžbe iznad opisuju upravljanje sustavom kada se koriste poznate odnosno mjerene vrijednosti što u ovom radu nije slučaj. Kao što je ranije spomenuto, koristit će se estimirane vrijednost brzine, pa je potrebno umjesto mjerene brzine $\dot{x}$ uvrstiti estimiranu brzinu $\dot{\hat{x}}$ u jednadžbu (3.11) koja poprima oblik

$$\dot{\hat{x}} = \dot{\tilde{x}} + \dot{x}_d. \tag{3.16}$$

$\dot{\hat{x}}$ je dobiven korištenjem estimatora brzina opisanog jednadžbama

$$\dot{\mathbf{z}}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}_1(t) + \mathbf{b}y, \tag{3.17}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}_1, \tag{3.18}$$

gdje je $\dot{\mathbf{z}}_1$ derivacija vektora stanja filtera za estimaciju brzina, $\mathbf{z}_1$ vektor stanja filtera za estimaciju brzina, i $\hat{\mathbf{y}}_1$ vektor izlaza estimatora brzine. Estimirana brzina $\dot{\hat{x}}$ se dobije izrazom

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{e}_2^T\hat{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{e}_2^T\hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}_1, \tag{3.19}$$

gdje je $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$.

Pokazat će se slučaj gdje se koristi poznate derivacije referentne trajektorije, te drugi slučaj gdje se koriste estimirane derivacije referentne trajektorije. Zamjenom mjerenih derivacija referentne trajektorije $\dot{x}_d$ i $\ddot{x}_d$ sa estimiranima $\dot{\hat{x}}_d$ i $\ddot{\hat{x}}_d$ jednadžba (3.13) dobiva oblik koji se koristi za simulacije drugog slučaja

$$u = m\ddot{\hat{x}}_d + D\dot{\hat{x}}_d + Kx_d - K_p\tilde{x} - K_d\dot{\tilde{x}}, \tag{3.20}$$

gdje se naravno za $\dot{\hat{x}}$ koristi jednadžba (3.16). $\dot{\hat{x}}_d$ i $\ddot{\hat{x}}_d$ se dobivaju preko filtera za estimaciju derivacija referentnih trajektorija izraženog sa jednadžbama

$$\dot{\mathbf{z}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}_2(t) + \mathbf{b}x_d, \tag{3.21}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_2 = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}_2, \tag{3.22}$$

gdje je $\dot{\mathbf{z}}_2$ derivacija vektora stanja filtera za estimaciju referentnih trajektorija, $\mathbf{z}_2$ vektor stanja filtera za estimaciju referentnih trajektorija, i $\hat{\mathbf{y}}_2$ vektor izlaza estimiranih trajektorija. Estimirane referentne trajektorije $\dot{\hat{x}}_d$ i $\ddot{\hat{x}}_d$ se dobiju izrazima

$$\dot{\hat{x}}_d = \mathbf{e}_2^T\hat{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{e}_2^T\hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}_2, \tag{3.23}$$

$$\ddot{\hat{x}}_d = \mathbf{e}_3^T\hat{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{e}_3^T\hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}_2, \tag{3.24}$$

gdje je $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T$.
Konačni oblik upravljačke varijable za slučaj upravljanja s estimiranim derivacijama referentne trajektorije i estimiranom brzinom opisan je izrazom

$$u = m\ddot{\hat{x}}_d + D\dot{\hat{x}}_d + Kx_d - K_p(x - x_d) - K_d(\dot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}}_d). \tag{3.25}$$

3.3. Simulacijski rezultati upravljanja MDS sustavom

Kako bi se napravila analiza sustava potrebno je postaviti određene parametre. Pa tako imamo početni uvjet $x(0) = 0$, parametre regulatora $K_p = 15, K_d = 5$ te referentnu trajektoriju

$$x_d = (1 - e^{-3t})^3 x_{dr}, \tag{3.26}$$

gdje x_{dr} ima formu

$$x_{dr} = a_0 + a_1\sin(\omega_1 t) + a_2\sin(\omega_2 t). \tag{3.27}$$

Konstanta opruge $S = 0.2$, koeficijent prigušnice $D = 2$ i masa $M = 1$. Dana referentna trajektorija (3.26) je odabrana zato što nam garantira nul-vrijednost u trenutku $t = 0$ do druge derivacije kako bih se izbjegao takozvani *picking* koji uzrokuje nagli neželjeni skok

upravljačke varijable na početku simulacije. Parametar a u jednadžbi (3.27) predstavlja amplitudu referentnog signala, a ω frekvenciju referentnog signala. Njihove vrijednosti su poznate i prikazane kako slijedi

$$\begin{aligned} &a_0 = 0.5, \quad a_1 = 0.5, \quad a_2 = 0.5, \\ &\omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = 2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

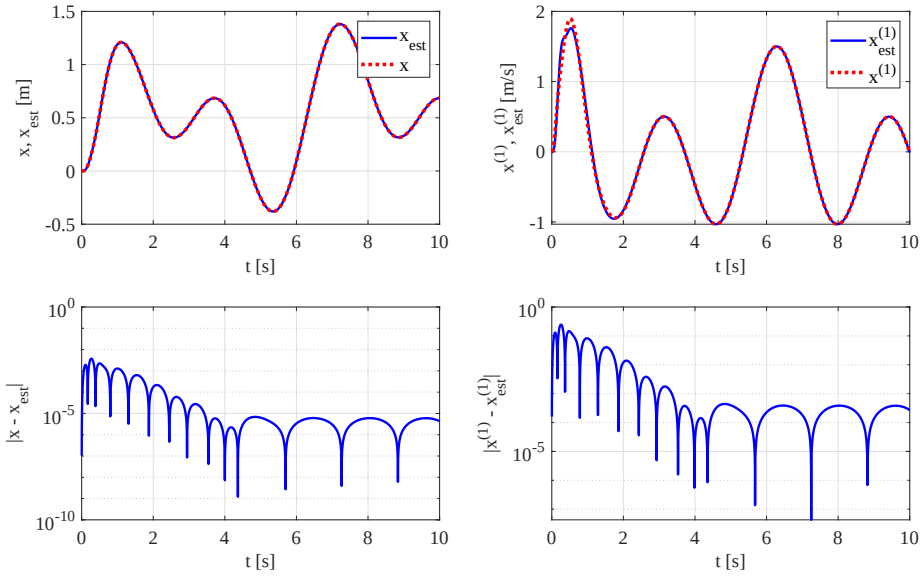
Unutar regulatora točnije u jednadžbu (3.25) dodaje se Gauss-ov šum $\xi(t)$ standardne normalne raspodjele $N(0,1)$ koji je često prisutan u realnim uvjetima, a također utječe na kvalitetu regulaciju.

$$u = m\ddot{\hat{x}}_d + D\dot{\hat{x}}_d + Kx_d - K_p(x - x_d) - K_d(\dot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}}_d) + \xi(t). \tag{3.29}$$

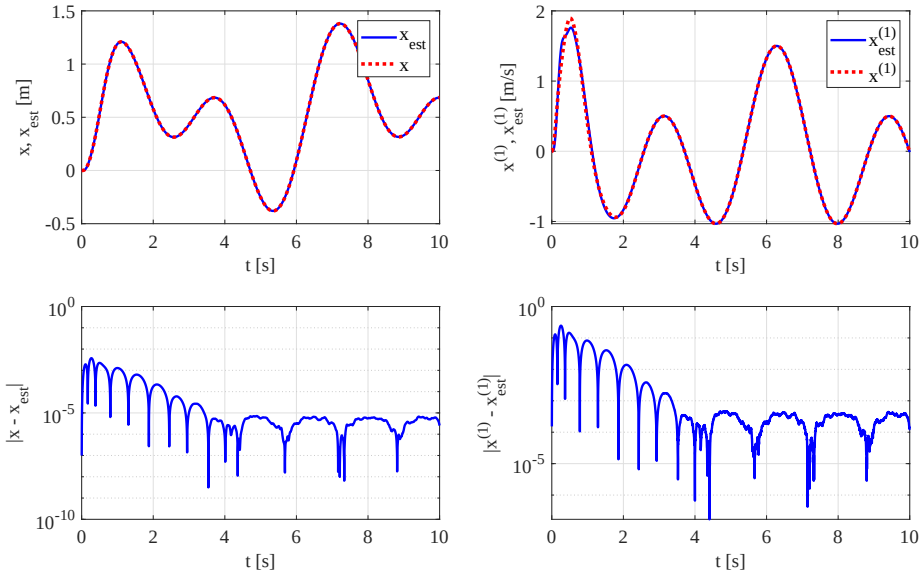
Za parametre filtera postavljeno je $a = 8$ i $n = 8$. Kroz analizu će se prikazati njihov utjecaj na regulaciju sustava.

3.3.1. Upravljanje s poznatim derivacijama referentnog signala uz estimiranu brzinu sustava

S ranije navedenim parametrima se ulazi u analizu izvedenoga sustava. Sustav za upravljanje koristi mjerenu poziciju i estimiranu brzinu dobivenu korištenjem algebarskog estimatora stanja. Slika 3.2 prikazuje točnost filtera za estimaciju bez dodavanja ranije spomenutog Gauss-ovog šuma, gdje se vidi odlično odrađeno estimiranje pozicije i brzine sustava. Vidljivo je da kod estimiranja brzine dolazi do određene pogreške odnosno prebacivanje vrijednosti estimatora u odnosu na poznatu vrijednost na početku simulacije, što se može ispraviti povećanjem reda filtera. Usporedba mjerene i estimirane pozicije je prikazana kako bi se uočila točnost filtera jer se u simulaciji upravljanja sustava ne koristi estimirana već mjerena pozicija.
Ako dodamo Gauss-ov šum u jednadžbu (3.25) dobije se rezultat prikazan slikom 3.3 gdje se može primijetiti da dodani šum nema osjetni utjecaj na estimaciju sustava, odnosno uočava se pojava oscilacija u signalu pogreške na polovici simulacije, a s obzirom na red veličine same greške zaključuje se kako ovaj šum nema utjecaja na estimaciju.

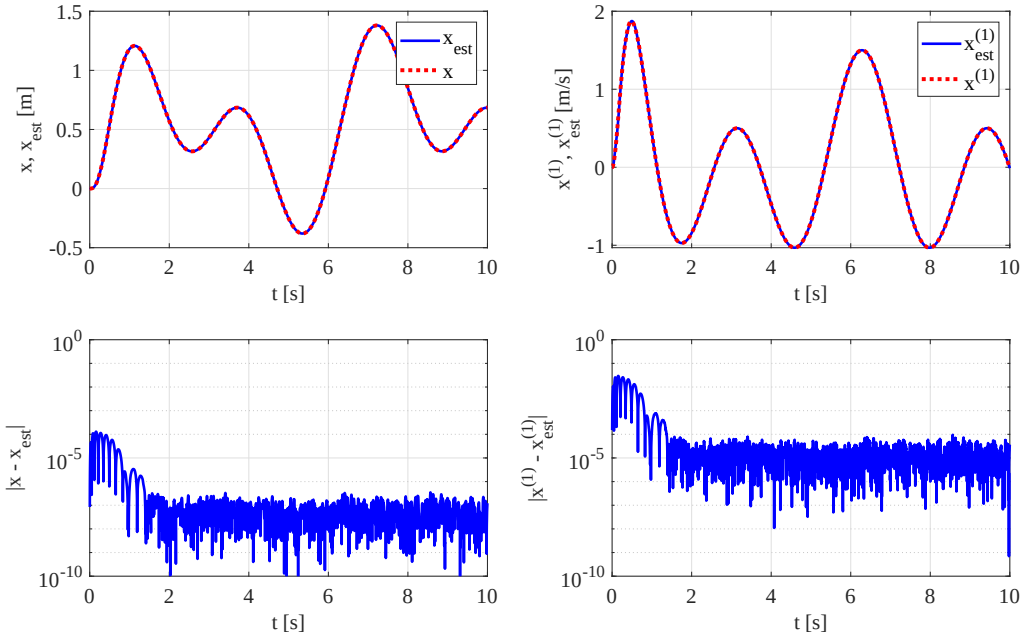


Slika 3.2: Usporedba mjerene i estimirane vrijednosti pozicije i brzine s poznatim referentnim trajektorijama ($a = 8, n = 8$)



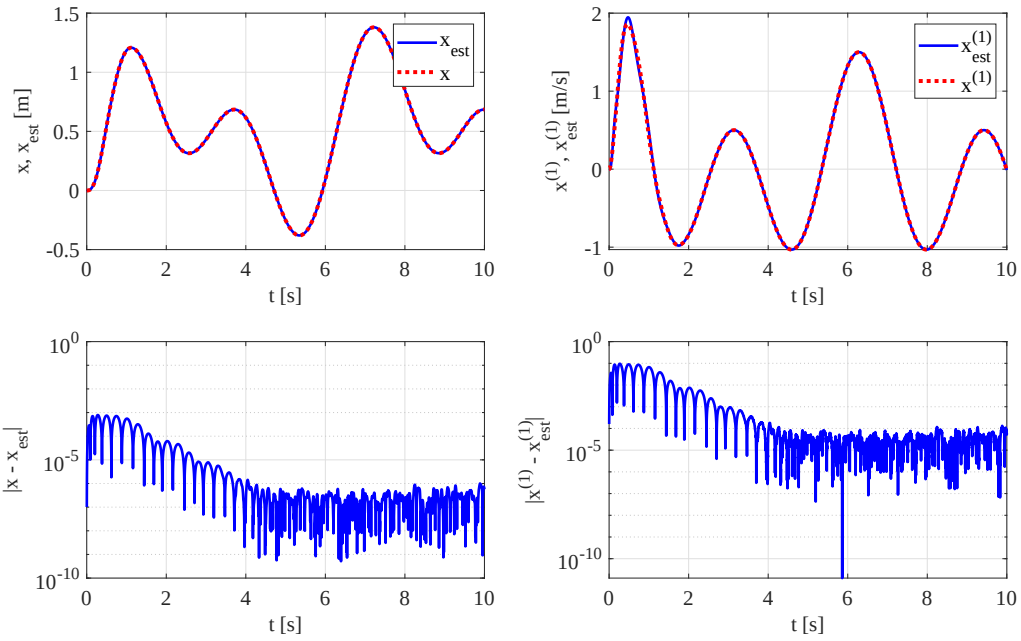
Slika 3.3: Usporedba mjerene i estimirane vrijednosti pozicije i brzine s poznatim referentnim trajektorijama ($a = 8, n = 8$) uz dodani Gauss-ov šum

Sa slike 3.4 vidljivo je da povećanjem parametara a i n dolazi do poboljšanja kvalitete estimatora jer estimirana brzina manje odstupa od mjerene, a pri tome zadržava zadovoljavajući red veličine pogreške. Kako se povećanjem parametara dobilo preciznije praćenje estimirane vrijednosti brzine *zadržat će se povećani parametri* $a = 15, n = 15$ pri simulaciji ostalih stanja sustava.



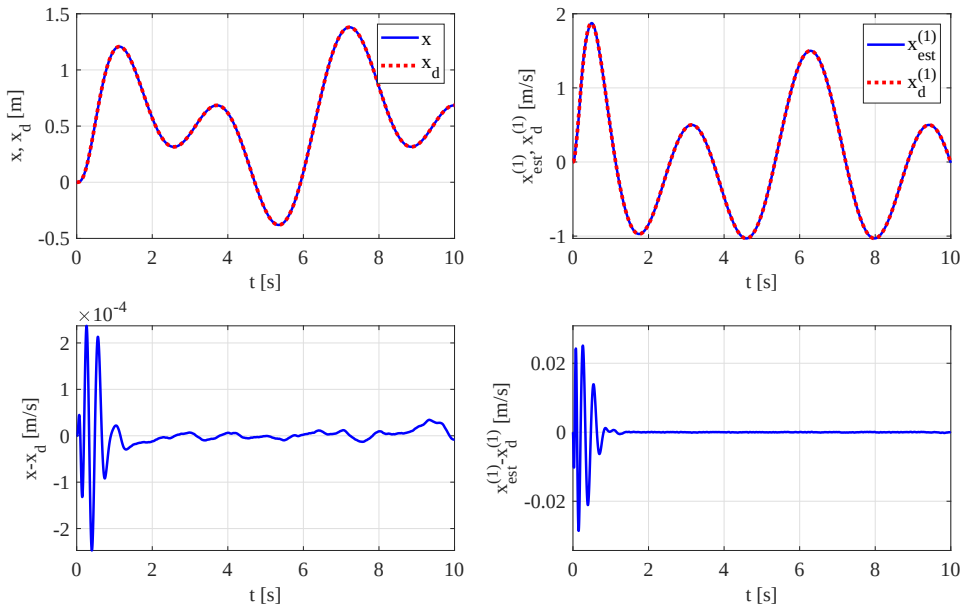
Slika 3.4: Usporedba mjerene i estimirane vrijednosti pozicije i brzine s poznatim referentnim trajektorijama ($a = 15, n = 15$)

Prikazat će se što se događa ako smanjimo parametar a u odnosnu na red filtera, pa tako slika 3.5 prikazuje slučaj smanjenja slobodnog parametra $a = 8$, pri zadržavanju novoizabranog reda filtera $n = 15$. Sa slike se može zaključiti da se gubi na preciznosti estimatora što je jasno lošiji slučaj od prethodnog.

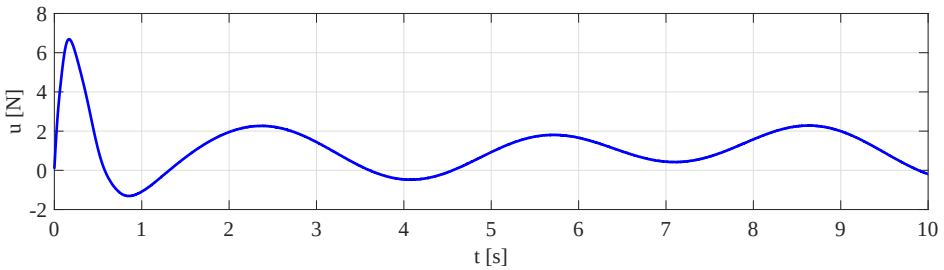


Slika 3.5: Usporedba mjerene i estimirane vrijednosti pozicije i brzine s poznatim referentnim trajektorijama ($a = 8, n = 15$)

Estimator sa zadovoljavajućom točnosti estimira tražene varijable stanja što omogućuje da prikažemo ostale rezultate simulacije. Korištenjem estimirane brzine unutar jednadžbe (3.13) dobije se odziv sustava sa slike 3.6 te odziv upravljačke varijable prikazan na slici 3.7. Sa slika je vidljivo da sustav ima optimalno ponašanje što je i očekivano te bez poteškoća prati zadanu trajektoriju. Vrijedno je uočiti kako upravljačka na početku ima skok koji se brzo stabilizira.



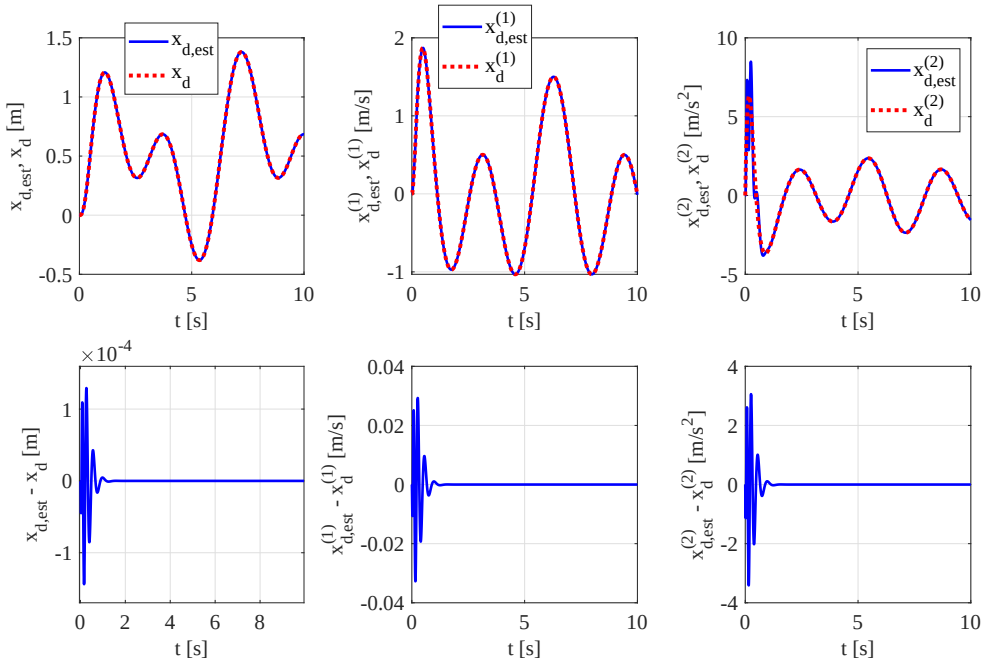
Slika 3.6: Odziv pozicije i estimirane brzine sustava s poznatim referentnim trajektorijama, $a = 15, n = 15$



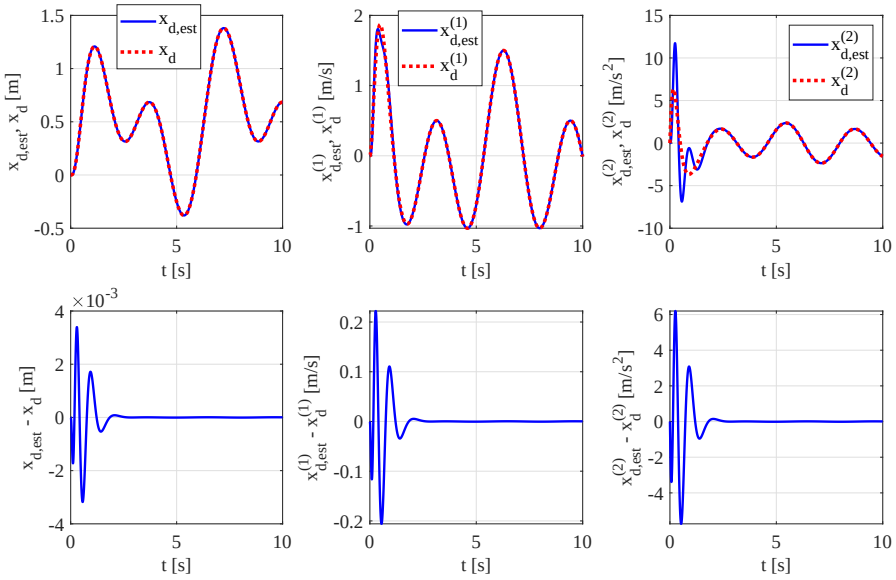
Slika 3.7: Odziv upravljačke varijable s poznatom derivacijom referentne trajektorije, $a = 15, n = 15$

3.3.2. Upravljanje s estimiranim derivacijama referentnog signala uz estimiranu brzinu sustava

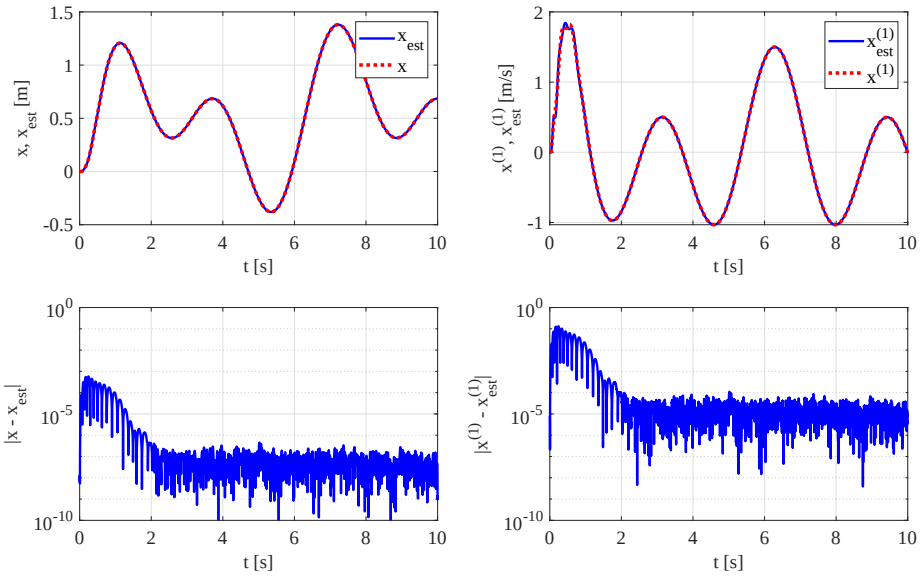
Realno upravljanja nekog sustava je u slučaju kada se poznaje samo referentna trajektorija, ali ne i njene derivacije, pa je u ovom slučaju to i primijenjeno, odnosno za upravljanje su korištene estimirane vrijednosti derivacije referentne trajektorije. Slika 3.8 daje rezultate usporedbe poznatog signala referentne trajektorije i estimirane vrijednosti. Može se zaključiti kako filter s novoizabranim parametrima $a = 15$ i $n = 15$ daje izuzetno pogodne rezultate kod estimiranja derivacija trajektorije. Slika 3.9 prikazuje ponašanje estimatora kada bi se zadržali prvi odabrani parametri estimatora $a = 8$ i $n = 8$, iz čega se primjećuje da taj odabir ne bi bio povoljan. Pojavljuje se veća greška u estimacijama, pogotovo izražena kod druge derivacije što bi se odrazilo na estimiranje brzine pa tako i na upravljanje cijelog sustava. Iz toga razloga su zadržani veći parametri koji daju povoljniju estimaciju pozicije ali i ovdje važnije brzine sustava što je primjetno sa slike 3.10.



Slika 3.8: Usporedba poznate i estimirane vrijednosti referentne trajektorije, $a = 15, n = 15$

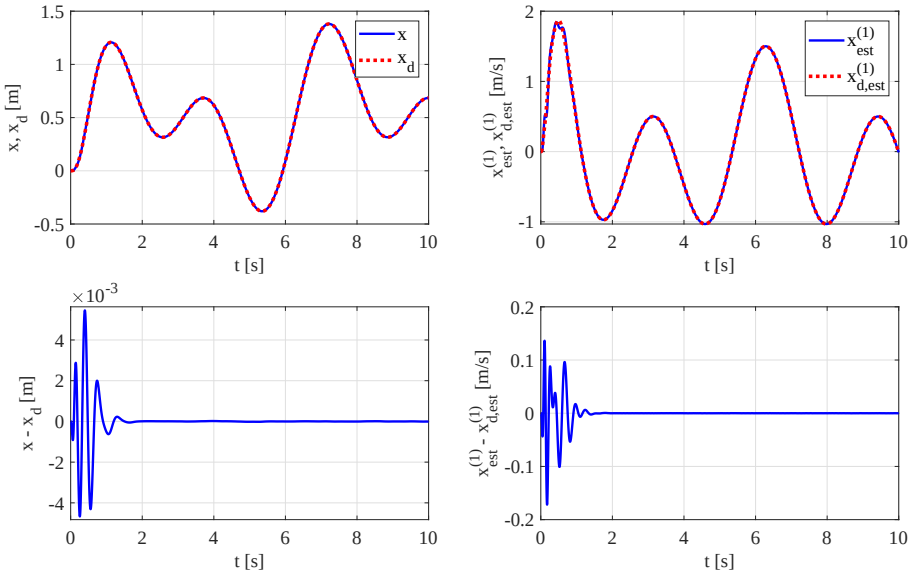


Slika 3.9: Usporedba poznate i estimirane vrijednosti referentne trajektorije, $a = 8, n = 8$

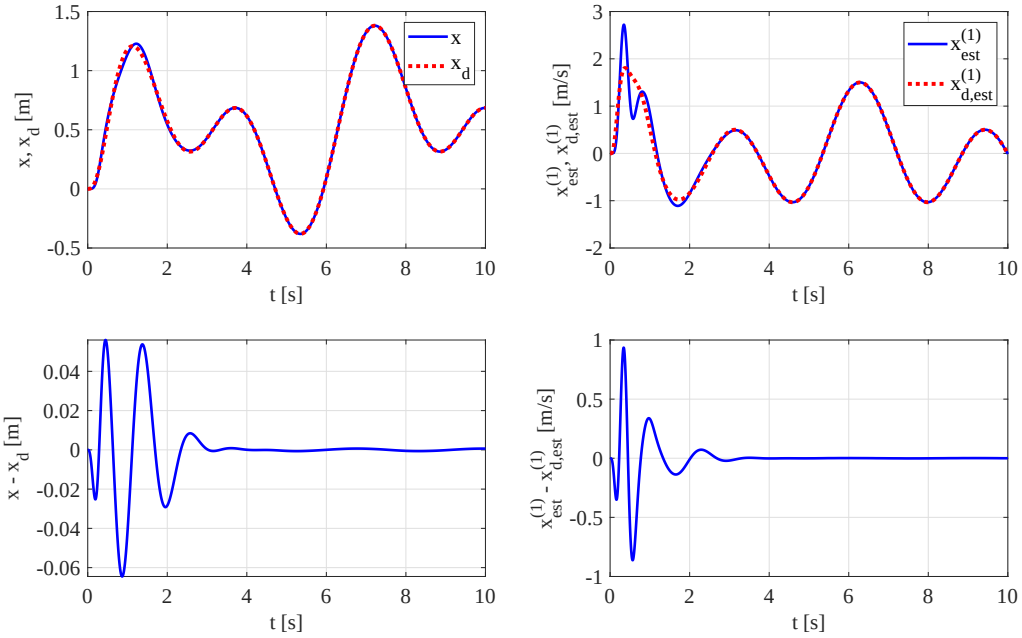


Slika 3.10: Usporedba poznate i estimirane vrijednosti $x, \dot{x}$ uz estimiranu referentnu trajektoriju i parametre $a = 15, n = 15$

Odziv sustava prikazan je na slici 3.11. Sustav ima povoljan i stabilan odziv uz prihvatljiv red greške koja je smanjenja s povećanjem parametara estimatora. Da su se zadržali prethodni parametri filtera dobio bi se puno lošiji odziv s većim greškama i nepravilnostima pogotovo izraženim kod brzine sustava. Taj slučaj prikazan je slikom 3.12 s koje je jasno vidljivo da je greška odziva brzine približno pet puta veća odnosno ne povoljnija od prethodnog slučaja.

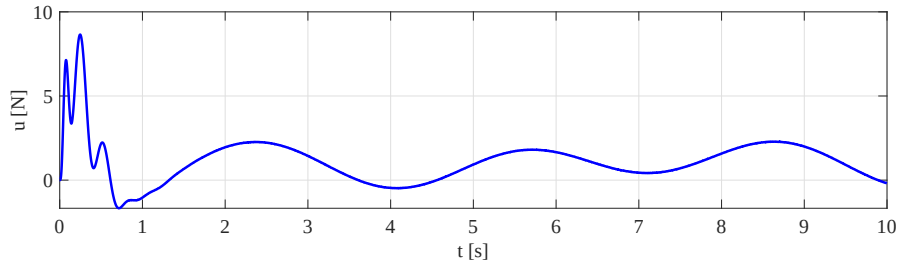


Slika 3.11: Odziv pozicije i estimirane brzine u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije s parametrima $a = 15, n = 15$



Slika 3.12: Odziv pozicije i estimirane brzine u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije s parametrima $a = 8, n = 8$

Upravljačka varijabla na početku simulacije ima skok koji je uzrokovan karakteristikom referentne trajektorije. Ukoliko bismo promijenili referentnu trajektoriju ili njene parametre mogao bi se dobiti povoljniji odziv upravljačke varijable, s manjim i blažim skokom na početku simulacije.



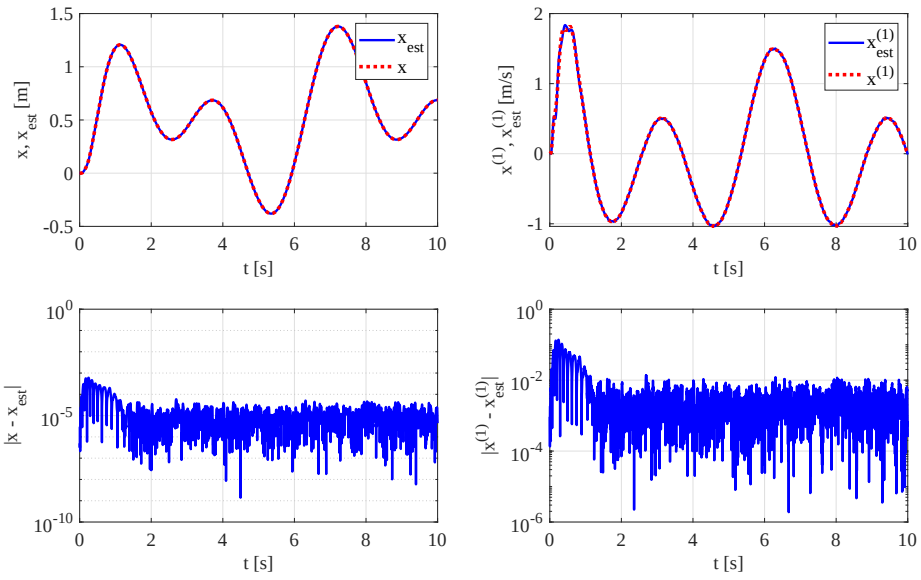
Slika 3.13: Upravljačka varijabla u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije i estimirane brzine, $a = 15, n = 15$

3.3.3. Upravljanje s estimiranim derivacijama referentnog signala uz estimiranu brzinu sustava i šum mjerenja pozicije

Realno upravljanje osim nepoznatih derivacija referentne trajektorije uključuje pojavu šuma unutar mjerene pozicije sustava. Niti jedan senzor ne daje idealne rezultate mjerenja, uvijek dolazi do pojave određenih šumova. Ova simulacija prikazuje utjecaj šuma na mjerenoj poziciji sustava. Ponovno se iskoristio Gauss-ov šum koji se dodao mjerenoj poziciji x u jednadžbi (3.25). Novi izraz upravljačke jednadžbe sa šumom mjerenja pozicije

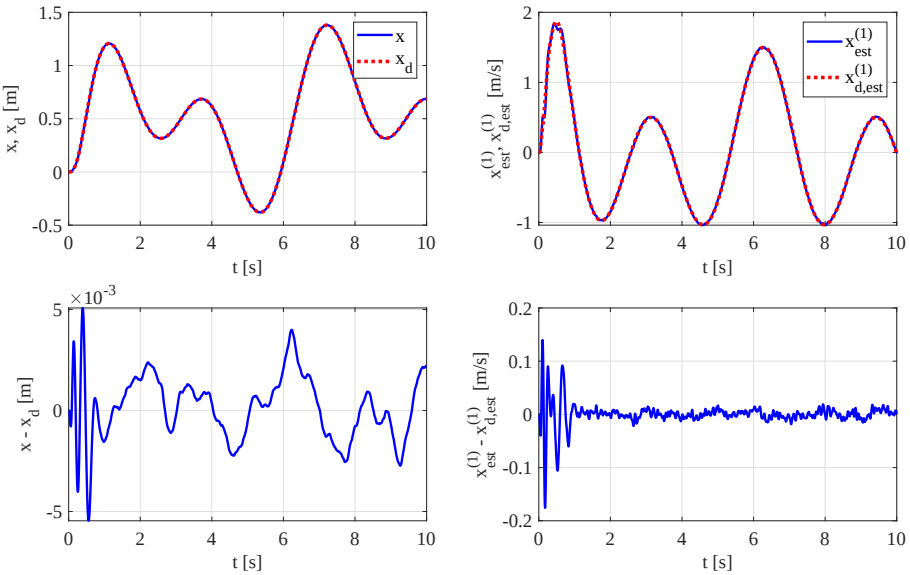
$$u = m\ddot{\hat{x}}_d + D\dot{\hat{x}}_d + Kx_d - K_p((x+\xi) - x_d) - K_d(\dot{\hat{x}} - \dot{\hat{x}}_d). \tag{3.30}$$

Dodani šum nije utjecao na red veličine pogreške pri estimaciji pozicije i brzine algebarskog estimatora što se primjećuje sa slike 3.14 gdje je prikazana usporedba estimiranih pozicija i brzina s mjerenima. Primjetna je pojava većih oscilacija u signalu pogreške što s obzirom na red veličine nema utjecaj na odziv sustava.



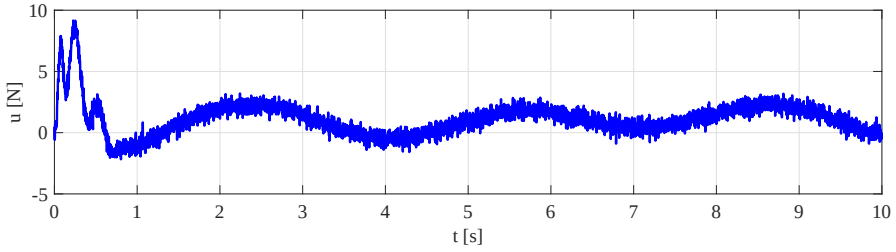
Slika 3.14: Usporedba poznate i estimirane vrijednosti $x, \dot{x}$ uz estimiranu referentnu trajektoriju i parametre $a = 15, n = 15$ te dodani šum mjerenja pozicije

Odziv sustava zadržava optimalno ponašanje pri slijeđenju referentnih trajektorija. Kao i na prethodnoj slici primjetan je utjecaj šuma mjerenja na pogrešku odziva sustava u obliku dodatnih oscilacija. Red veličine pogreške je u slučaju sa šumom isti kao i u slučaju bez šuma 3.11.



Slika 3.15: Odziv pozicije i estimirane brzine u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije s parametrima $a = 15, n = 15$ te dodanim šumom mjerenja pozicije

Na kraju je vidljiv prikaz upravljačke varijable gdje šum mjerenja pozicije uzrokuje pojavu oscilacija u signalu za vrijeme cijele simulacije. Iako ponašanje upravljačke varijable nije optimalno zbog velikog broja oscilacija, dobio se potpuno prihvatljiv odziv sustava.



Slika 3.16: Upravljačka varijabla u slučaju estimiranih vrijednosti referentne trajektorije i estimirane brzine uz dodani šum mjerenja pozicije, $a = 15, n = 15$

4 Estimacija poremećaja sustava drugog reda

U ovom poglavlju izvedeno je upravljanje s poremećajem na sustavu drugog reda. Upravljanje nije savršen proces, odnosno to je proces gdje dolazi do neočekivanih smetnji, a jedna od tih smetnji naziva se poremećaj. U ovom poglavlju prikazana je primjena estimatora za predviđanje i kompenzaciju tih poremećaja.

4.1. Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom algebarskog estimatora

Algebarski estimator i jednadžbe koje ga opisuju (2.3) i (2.4) iskoristit će se u ovom poglavlju za estimaciju pozicije, brzine te poremećaja prema [4]. Općeniti oblik nekog sustava drugog reda s poremećajem može se opisati s izrazom

$$m(x, \dot{x}, t)\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = b(x, \dot{x}, t)u(t) + d_{\text{ext}}(t), \tag{4.1}$$

gdje je $d_{\text{ext}}(t)$ nepoznati vanjski poremećaj, $f(x, \dot{x}, t)$ nepoznata dinamika sustava, $m(x, \dot{x}, t)$ nepoznata masa ili inercijska matrica sustava koja je definirana sa $0 < m(x, \dot{x}, t) \leq \bar{m}$. Donja granična funkcija $b(x, \dot{x}, t) \geq \bar{b} > 0$ je "koeficijent potiska" definiran karakteristikama aktuatora i propelera. Mijenjanjem koeficijenta potiska možemo simulirati greške aktuatora. Skraćeno, prethodnu jednadžbu možemo zapisati izrazom

$$\ddot{x} = \bar{k}u(t) + d(t), \tag{4.2}$$

gdje je $\bar{k} = \bar{b}/\bar{m}$ i $d(t)$ ukupni poremećaj koji se definira sa sljedećom jednadžbom

$$d(t) = \left(\frac{b(x, \dot{x}, t)}{m(x, \dot{x}, t)} - \bar{k}\right) u(t) + \frac{d_{\text{ext}}(t) - f(x, \dot{x}, t)}{m(x, \dot{x}, t)}. \tag{4.3}$$

Upravljački zakon opisan je s jednadžbom

$$u = \frac{1}{\bar{k}} \left(-\hat{d}(t) + \ddot{x}_d - K_p(x - x_d) - K_d(\dot{x} - \dot{x}_d) \right), \tag{4.4}$$

gdje je dinamika greške zatvorenog kruga opisana kao

$$\dddot{\tilde{x}} + K_d \ddot{\tilde{x}} + K_p \dot{\tilde{x}} = \dot{\tilde{d}}(t). \tag{4.5}$$

Kao što je ranije spomenuto brzine sustava nam nisu poznate, pa ih je potrebno estimirati. U ovom slučaju upravljanja će se uz estimiranu brzinu koristiti i estimirana pozicija pa će tako konačni oblik zakona upravljanja biti opisan s jednadžbom

$$u = \frac{1}{\bar{k}} \left(-\hat{d}(t) + \ddot{x}_d - K_p \left(\hat{x} - x_d \right) - K_d(\dot{\hat{x}} - \dot{x}_d) \right). \tag{4.6}$$

Pojedinačne članove vektora $\hat{\mathbf{y}}$ iz jednadžbe (2.5) možemo zapisati preko skalarnih produkata s jediničnim vektorom $\mathbf{e}$ kao što smo već pokazali u jednadžbama (3.19), (3.23) i (3.24), pa tako imamo

$$\hat{u}_e^{(0)}(t) = \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t), \tag{4.7}$$

$$\hat{u}_e^{(1)}(t) = \mathbf{e}_2^T \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{e}_2^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t), \tag{4.8}$$

$$\hat{u}_e^{(2)}(t) = \mathbf{e}_3^T \hat{\mathbf{y}}_(t) = \mathbf{e}_3^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z}(t). \tag{4.9}$$

Iz jednadžbe (4.2) možemo dobiti eksplicitni izraz za pogrešku

$$d(t) = \ddot{x} - \bar{k} u(t), \tag{4.10}$$

u kojem poznato ubrzanje $\ddot{x}$ zamjenim s estimiranim te uvrstimo pripadajući izraz algebarskog estimatora za to traženo ubrzanje i dobijemo jednadžbu

$$d(t) = \ddot{\hat{x}} - \bar{k} u(t) = \mathbf{e}_3^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z}_1(t) - \bar{k} u(t). \tag{4.11}$$

Gornji izraz se ne može direktno iskoristiti jer se dobije algebarska petlja upravljačke varijable, pa je potrebno postaviti još jedan estimator stanja za poremećaj

$$\dot{\mathbf{z}}_3(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}_3(t) + \mathbf{b}(\mathbf{e}_3^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z}_1(t) - \bar{k} u(t)), \qquad \mathbf{z}_0(0) = \mathbf{0}, \tag{4.12}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_3(t) = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z}_3(t), \tag{4.13}$$

gdje je $\mathbf{z}_3(t)$ vektor stanja estimatora poremećaja, $\hat{\mathbf{y}}_3$ vektor estimiranih vrijednosti poremećaja s oblikom $\hat{\mathbf{y}}_3(t) = [\hat{d}^{(0)}(t) \;\; \hat{d}^{(1)}(t) \;\; \cdots \;\; \hat{d}^{(n-1)}(t)]^T$. Istom logikom kojom se postavila jednadžba (4.7) postavlja se i izraz za estimaciju poremećaja

$$\hat{d}(t) = \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{y}}_3(t) = \mathbf{e}_1^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z}_3(t). \tag{4.14}$$

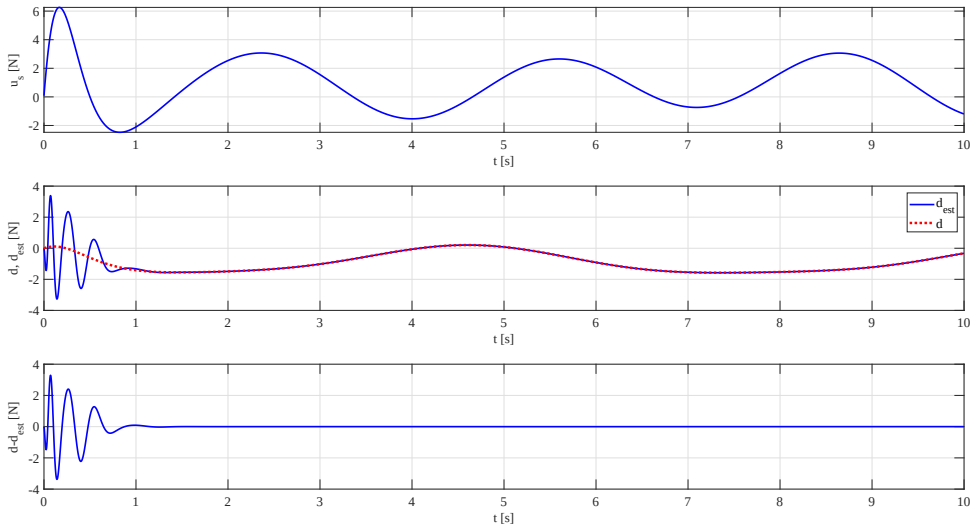
S navedenim jednadžbama i upravljačkim zakonom (4.6) može se provesti simulacija sustava.

4.2. Simulacija estimacije poremećaja sustava drugog reda primjenom algebarskog estimatora

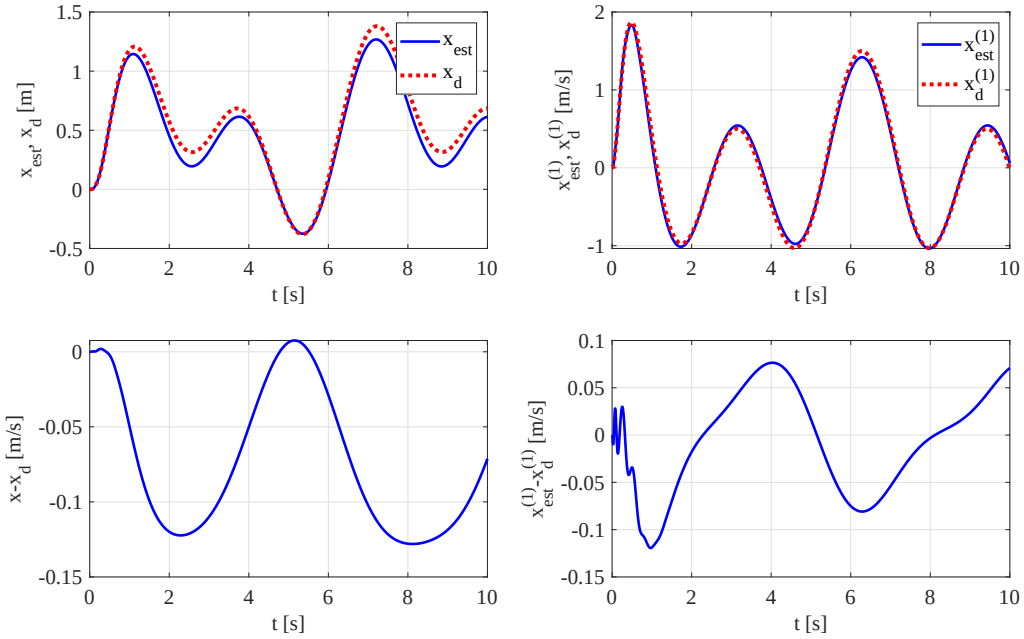
Svi parametri potrebni za simulaciju sustavu spomenuti su i poznati od ranije iz trećeg poglavlja, s jedinom iznimkom što je sad potrebno definirati vanjski poremećaj $d_{ext}(t)$, pa se odabire

$$d_{ext} = \sin(2t). \tag{4.15}$$

Slika 4.1 prikazuje rezultate dobivene estimiranjem poremećaja s algebarskim estimatorom stanja. Estimacija poremećaja daje solidne rezultate, a najveći problemi odnosno greške se pojavljuju u prvoj sekundi simulacije gdje estimator zbog svoje prirode ima nestabilno ponašanje. Odziv sustava bez kompenzacije poremećaja prikazan je slikom 4.2 gdje se jasno vidi odstupanje koje unosi poremećaj.



Slika 4.1: Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom algebarskog estimatora



Slika 4.2: Odziv sustava bez kompenzacije poremećaja

Upravljanje uz primjenu estimiranog poremećaja odnosno uz kompenzaciju poremećaja daje nestabilne rezultate pa se ti rezultati neće prikazati. S time se može zaključiti da

algebarski estimator možemo iskoristiti za estimaciju poremećaja, ali se taj poremećaj $\hat{d}(t)$ ne može iskoristiti u zatvorenom upravljačkom krugu jer uzrokuje nestabilnosti.

4.3. Estimacija i kompenzacija poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora

Nestabilno ponašanje algebarskog estimatora pri kompenzaciji poremećaja stvara potrebu za korištenjem drugačijeg estimatora koji je sposoban kompenzirati nastali poremećaj. U ovom slučaju odabire se robusni estimator poremećaja zasnovan na niskopropusnom filtriranju. Pojava poremećaja unutar dinamike drugog reda (4.2) stvara potrebu za korištenjem filtera trećeg reda. Dinamika drugog reda zapisana u kompleksnoj domeni ima oblik

$$d(s) = s^2 x(s) - \bar{k}u(s), \tag{4.16}$$

a filter trećeg reda

$$\hat{d}(s) = \frac{\lambda^3}{(s+\lambda)^3} d(s), \tag{4.17}$$

koji se koristi kako bi izbjegli direktnu transmisiju šuma mjerenja na estimaciju poremećaja $\hat{d}(s)$, gdje je λ proizvoljni parametar. Ako označimo

$$G(s) = \frac{1}{s+\lambda}, \tag{4.18}$$

imamo

$$\hat{d}(s) = \lambda^3 G(s)^3 d(s). \tag{4.19}$$

Uvrštavanjem (4.16) u (4.19) dobije se

$$\hat{d}(s) = \lambda^3 [s^2 G(s)^3 x(s) - \bar{k} G(s)^3 u(s)]. \tag{4.20}$$

Ako pomnožimo izraz (4.18) sa $s + \lambda$ dobije se

$$sG(s) = 1 - \lambda G(s). \tag{4.21}$$

Kvadriranje prethodnog izraza

$$s^2 G(s)^2 = [1 - \lambda G(s)]^2 = 1 - 2\lambda G(s) + \lambda^2 G(s)^2, \tag{4.22}$$

te daljnjim sređivanjem dobijemo

$$s^2G(s)^3 = G(s)[1 - \lambda G(s)]^2 = G(s) - 2\lambda G(s)^2 + \lambda^2 G(s)^3. \tag{4.23}$$

Prethodni izraz se može uvrstiti u jednadžbu (4.20)

$$\hat{d}(s) = \lambda^3[G(s)x(s) - 2\lambda G(s)^2 x(s) + G(s)^3(\lambda^2 x(s) - \bar{k}u(s))], \tag{4.24}$$

odnosno daljnjim sređivanjem prethodne jednadžbe dobijemo izraz u kojem uvodimo supstitucije

$$\hat{d}(s) = \lambda^3 \underbrace{G(s)\{x(s) + \underbrace{G(s)[-2\lambda x(s) + \underbrace{G(s)(\lambda^2 x(s) - \bar{k}u(s))}_{x_3(s)}]}_{x_2(s)}\}}_{x_1(s)}, \tag{4.25}$$

tako da imamo

$$\hat{d}(s) = \lambda^3 x_1(s). \tag{4.26}$$

Ako supstituirane varijable stanja $x_1(s), x_2(s), x_3(s)$ prebacimo u prostor stanja dobijemo izraze

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 + x_2 + x(t), \tag{4.27}$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda x_2 + x_3 - 2\lambda x(t), \tag{4.28}$$

$$\dot{x}_3 = -\lambda x_3 + \lambda^2 x(t) - \bar{k}u(t), \tag{4.29}$$

odnosno izraz 4.30

$$\hat{d}(t) = \lambda^3 x_1(t). \tag{4.30}$$

Matrična zapisa prethodni jednadžbi opisuje se s

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 x(t) + \mathbf{b}_2 u(t), \qquad \hat{d}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{4.31}$$

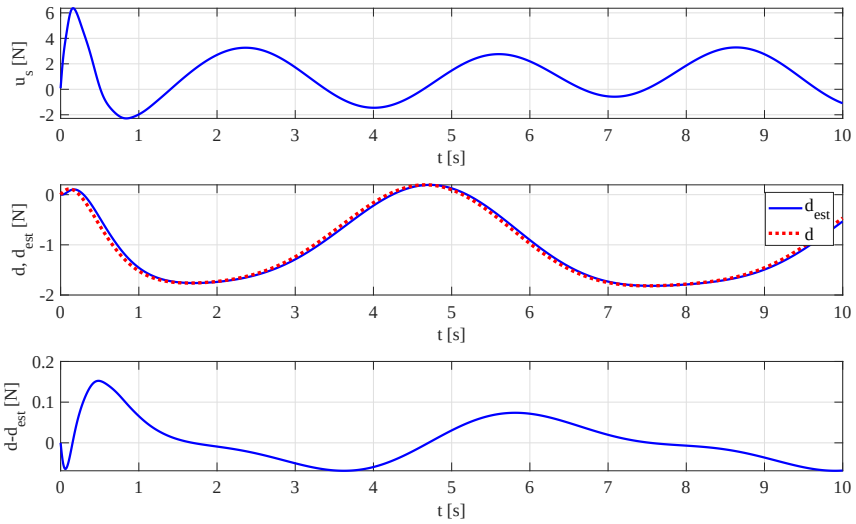
gdje

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Upravljački zakon opisan je identičnim izrazom kao jednadžba (4.6).

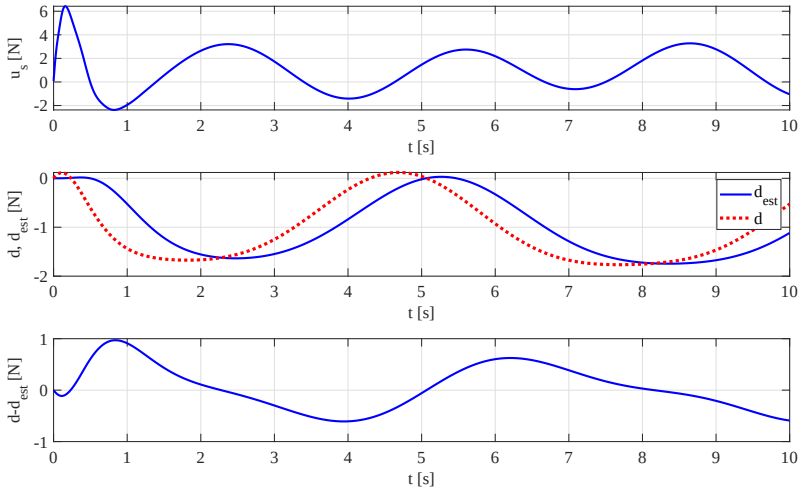
4.4. Simulacija estimacije i kompenzacije poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora

Svi parametri su poznati i zadržani od ranije osim novog parametra λ koji se pojavljuje kod robusnog estimatora. Primjenom robusnog estimatora za estimaciju poremećaja dobiveni su rezultati prikazani na slici 4.3 uz $\lambda = 50$. Odmah se može primijetiti osjetno lošiji rezultat estimiranja poremećaja odnosno greška estimacije u usporedbi s algebarskim estimatorom je znatno veća.



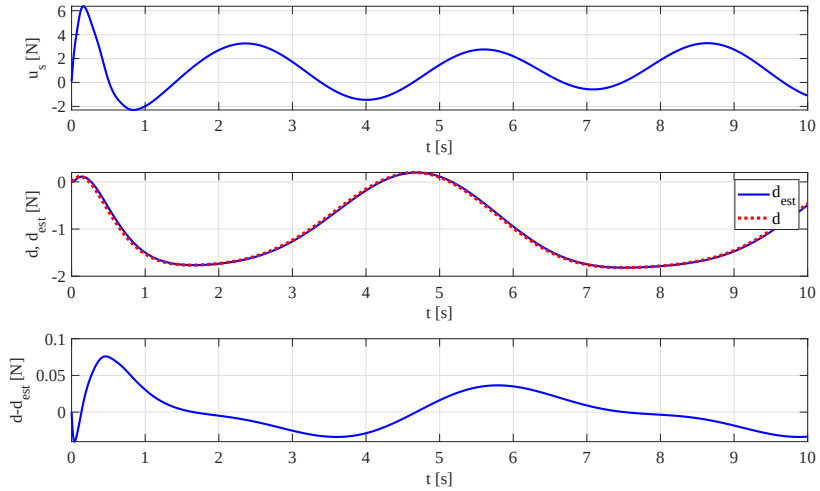
Slika 4.3: Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora, $\lambda = 50$

Ako smanjimo parametar robusnog estimatora dobit će se lošiji rezultati estimacije pa tako za $\lambda = 5$ dobijemo rezultate prikazane slikom 4.4, s koje se može vidjeti greška značajne veličine koja se ne bi mogla upotrijebiti za daljnje upravljanje.



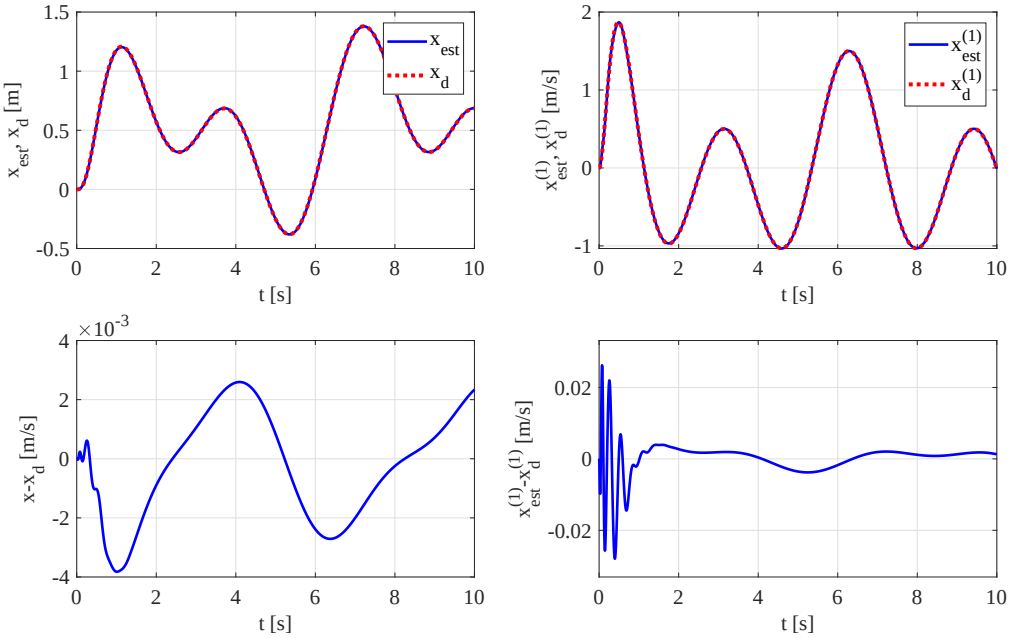
Slika 4.4: Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora, $\lambda = 5$

Povećanjem parametra $\lambda = 100$ dobivaju se osjetno bolji rezultati estimacije na trošak računskoga vremena. Daljnje povećanje parametra donijelo bi naravno i manju grešku estimacije, ali za upravljanje sustavom zadržat će se $\lambda = 100$ jer daje estimaciju poremećaja prihvatljive točnosti.



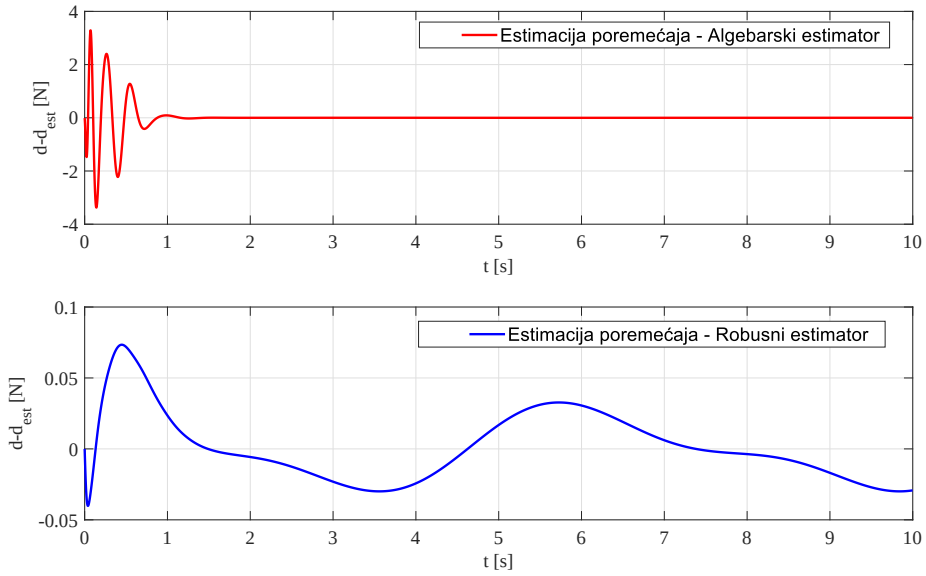
Slika 4.5: Estimacija poremećaja sustava drugog reda primjenom robusnog estimatora, $\lambda = 100$

Prednost ovog estimatora je što za razliku od algebarskog omogućuje kompenzaciju poremećaja uz zadržavanje stabilnosti sustava, što uz $\lambda = 100$ daje odziv sustava na slici 4.6, koji se može usporediti sa 4.2 gdje se vidi utjecaj kompenzacije poremećaja.



Slika 4.6: Odziv sustava s kompenzacijom poremećaja primjenom robusnog estimatora, $\lambda = 100$

Ponašanje sustava je stabilno te je greška u prihvatljivim razmjerima što kod pozicije tako i kod brzine sustava. Slika 4.7 prikazuje usporedbu grešku robusnog i grešku algebarskog estimatora gdje se grafički može vidjeti razlika u točnosti, odnosno greška robusnog estimatora se ne stabilizira s vremenom, a algebarski estimator unatoč većim početnim greškama ubrzo se stabilizira i grešku svodi prema nuli. Unatoč lošijoj estimaciji zaključuje se da robusni estimator omogućuje prihvatljivo upravljanje koje se dodatno može poboljšati povećanje parametra λ ili prilagodbom referentne trajektorije.



Slika 4.7: Usporedba pogreške između robusnog estimatora i algebarskog estimatora poremećaja

5 Dinamički model kvadkoptera

5.1. Uvod

Kvadkopter je multirotor koji se sastoji od četiri propelera odnosno rotora uz pomoć kojih može uzlijetati i slijetati okomito na površinu. Svaki rotor je upravljan kao zasebna jedinica, gdje se dva rotora vrte u smjeru kazaljke na satu, a druga dva u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Kontroliranje brzine svakog pojedinačnog rotora ostvaruje se željeno kretanje. Kvadkopter se osim u broju rotora razlikuje od standardnog helikoptera po fiksnim rotorima, dok helikopter ima mogućnost zakretanja rotora oko kućišta mehanizma što mu omogućava kretanje u željenom smjeru. Do razvoja kvadkoptera je došlo iz ideje boljeg iskorištenja vertikalnog potiska gdje svaki od četiri rotora sudjeluje u stvaranju sile za razliku od helikoptera gdje jedan glavni rotor stvara potisak, a drugi sekundarni rotor samo poništava rotaciju glavnog rotora i predstavlja gubitak performansi u pogledu vertikalnog potiska. Daljnjim razvojem kvadkoptera i prateće tehnologije shvatilo se da je efikasnije i jednostavnije napraviti bespilotnu letjelicu čije prednosti su manja, laganija i praktičnija struktura. S manjim dimenzijama i masama došlo je do smanjenja troška izrade, te je kvadkopter postao zanimljiva alternativa tradicionalnom helikopteru. Interes za ovim tipom letjelica i dan danas raste, a paralelni razvoj novih vrsta senzora traži i razvoj bolji algoritama koji mogu upravljati letjelicom. Male dimenzije kvadkoptera kao jedan od prednosti su ujedno i veliki nedostatak sa stanovišta upravljanja zbog utjecaja određenih vremenskih neprilika odnosno poremećaja. Vremenske neprilike se moraju kao i ostali razni šumovi na senzorima eliminirati kako bih upravljanje letjelicom bilo s odgovarajućom točnosti. Ova vrsta poremećaja je jedan od razloga zašto je potreba za razvojem estimatora porasla, odnosno želja je da se uz

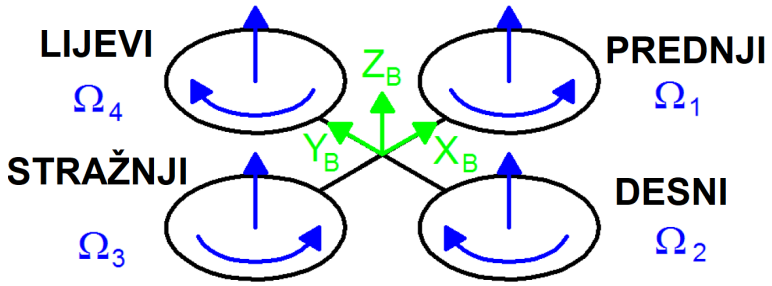
pomoć matematičkih algoritama ograniči njihov utjecaj. [5]



Slika 5.1: Primjer modernog kvadrotora [6]

5.2. Osnovni koncept

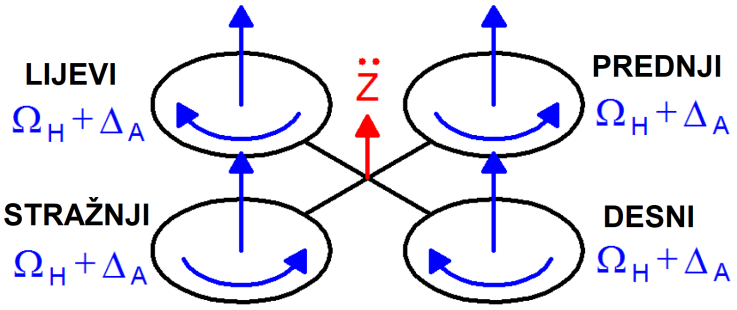
Pretpostavke i izvodi prikazani u ovom poglavlju i ostalim poglavljima u ovoj cjelini temeljeni su na [7]. Kvadkopter je letjelica s četiri rotora povezana u križnu konfiguraciju koja iako lagana i tanka pokazuje robusnost zbog svoje veze s motorima. Veza između propelera i motora ostvarena je preko reduktora, a sve osi rotacije propelera su fiksne i paralelne. Kako bi kvadkopter imao mogućnost polijetanja propeleri moraju imati nagib na lopaticama. Sve navedeno dovodi do zaključka da će se kvadkopter promatrati kao kruto tijelo gdje se mijenjaju samo brzine propelera. Također u ovom dijelu promatrat će se samo križna struktura s propelerima kako bi se objasnilo kretanje letjelice. Prednji i stražnji propeleri se rotiraju suprotno od kazaljke na satu, a lijevi i desni se rotiraju u smjeru kazaljke na satu, i upravo ova konfiguracija omogućuje eliminaciju sporednog rotora kojeg imaju helikopteri. Slika 5.2 prikazuje pojednostavljenu shemu letjelice u stanju lebdenja.



Slika 5.2: Shema kvadkoptera u stanju lebdenja [7]

Crna boja predstavlja konstrukciju letjelice, plava pokazuje smjerove kutnih brzina, a zelenom bojom vidimo koordinatni sustav vezan za tijelo letjelice. Također plavom bojom je označen i smjer brzina propelera. Brzine propelera uvijek imaju isti smjer, odnosno uvijek su okrenute prema gore jer bi bilo zbunjujuće prikazati različite smjerove brzina kada bi se držali pravila desne ruke. Sve brzine vrtnje na slici 5.2 su istog iznos, odnosno jednake su brzini lebdenja Ω_H koja neutralizira akceleraciju uzrokovanu gravitacijom što omogućava letjelici da ostane na istom položaju.
Kvadkopter ima šest stupnjeva slobode gibanja, a samo četiri propelera, pa nema mogućnost postizanja željenih točaka za svaki stup slobode gibanja, te je kao takav podaktuiran i nelinearan sustav. Prednost strukture ove letjelice leži u tome što je lagano odabrati četiri kontrolne varijable za provedbu upravljanja, odabiru se četiri pokreta koja omogućuju helikopteru da dostigne određenu visinu i orijentaciju. Da bi upravljanje bilo moguće moraju vrijediti neke pretpostavke: kvadkopter je kruto tijelo sa stanovišta mehanike, njegova struktura je simetrična i zanemaruju se učinak tla pri uzdizanju.

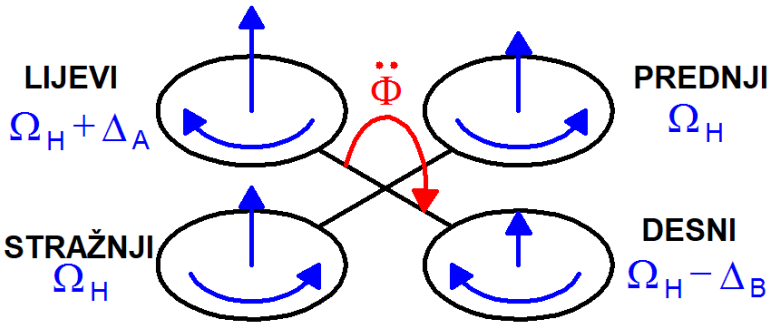
- Uzdizanje ili spuštanje (U_1)
  Omogućuje uzdizanje i spuštanje letjelice povećanjem ili smanjenjem brzine svih propelera koji uzrokuju pojavu vertikalne sile. Ako je letjelica u horizontalnom položaju tada se vertikalni smjer inercijskog koordinatnog sustava i smjer od sustava vezanog za tijelo letjelice podudaraju. U suprotnom nastali potisak stvara akceleraciju u vertikalnom i horizontalnom inercijskom sustavu. Slika 5.3 prikazuje pokret uzdizanja



Slika 5.3: Pokret uzdizanja ili spuštanja [7]

Plavom bojom su označene brzine propelere gdje je brzina svakog propelera u ovom slučaju jednaka $\Omega_H + \Delta_A$. Δ_A je pozitivna varijabla koji predstavlja povećanje konstante Ω_H. Varijabla Δ_A ne može biti prevelika jer bi uzrokovala da model dođe do zasićenja ili bi došlo do utjecaja velikih nelinearnih sila.

- Valjanje (U_2)
  Valjanje se postiže povećanjem (ili smanjenjem) brzine lijevog propelera uz smanjenje (ili povećanje) brzine desnog propelera. To dovodi do momenta oko x_B osi što uzrokuje rotaciju kvadkoptera. Sveukupni potisak je i dalje isti kao i kod lebdenja pa zbog toga dolazi samo do promjene ubrzanja valjanja. Slika 5.4 prikazuje pokret valjanja. Pozitivne varijable Δ_A i Δ_B su odabrane kako bi osigurale da

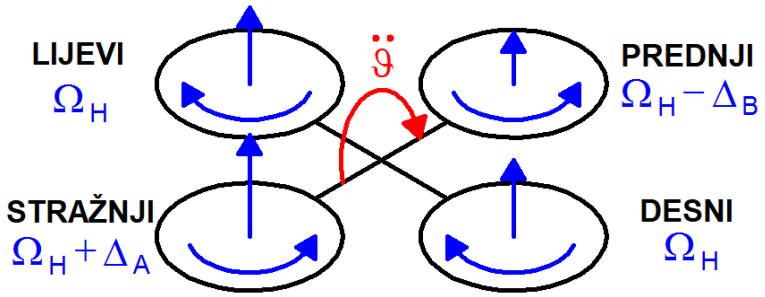


Slika 5.4: Pokret valjanja [7]

vertikalni potisak ostane ne promijenjen. Pokusima se može dokazati da je pri malim vrijednostima varijabla Δ_A približno jednaka varijabli Δ_B odnosno $\Delta_A \approx \Delta_B$. Kao što je i ranije spomenuto kod uzdizanja i spuštanja varijabla Δ_A ne smije biti

prevelika iz već navedenih razloga.

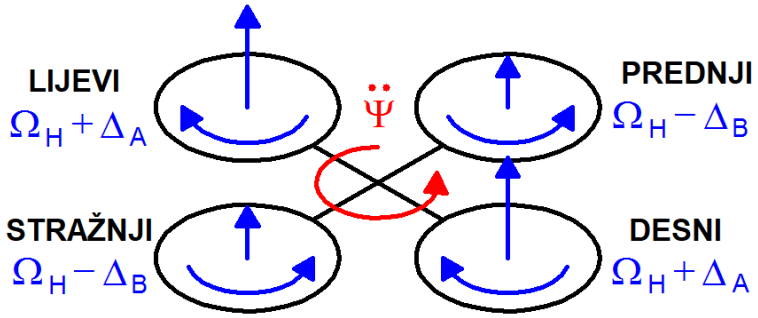
- Poniranje (U_3)
  Naredba poniranja je slična valjanja te se ostvaraju povećanjem (ili smanjenjem) brzine stražnjeg propelera uz smanjenje (ili povećanje) brzine prednjeg propelera. To dovodi do momenta oko y_B osi što uzrokuje rotaciju kvadkoptera. Sveukupni potisak je i dalje isti kao i kod lebdjenja pa zbog toga dolazi samo do promjene ubrzanja poniranja. Slika 5.5 prikazuje pokret poniranja.



Slika 5.5: Pokret poniranja [7]

Kao i u prethodnom primjeru varijable Δ_A i Δ_B su odabrane kako bi osigurale da vertikalni potisak ostane nepromijenjen, a također varijable ne mogu biti prevelike. Približna jednakost vrijedi kao i kod valjanja $\Delta_A \approx \Delta_B$.

- Skretanje (U_4)
  Skretanje se postiže povećanjem (ili smanjenjem) brzine prednjeg i zadnjeg propelera u para zajedno sa smanjenjem (ili povećanjem) brzine lijevog i desnog propelera u paru. Ova naredba dovodi do nastajanja momenta oko osi z_B što uzrokuje rotaciju letjelice. Lijevi i desni propeler se vrte u smjeru kazaljke na satu, dok se prednji i stražnji propeler vrte u suprotnom smjeru i upravo takva rotacija propelera omogućuje naredbu skretanja. Kada se postigne neravnotežno stanje momenata letjelica se rotira oko z_B. Ukupni potisak ostaje isti kao i kod lebdenja i zbog toga ova naredba dovodi do skretanja što je prikazano na slici 5.6.



Slika 5.6: Pokret skretanja [7]

Kao i u prethodna dva slučaja pozitivne varijable Δ_A i Δ_B su odabrane kako bi osigurale da vertikalni potisak ostane ne promijenjen, a ujedno varijable ne smiju biti prevelike. Približna jednakost $\Delta_A \approx \Delta_B$ je zadržana i u ovom slučaju za male vrijednosti Δ_A

5.3. Kinematika

Kinematika je grana mehanike koja se bavi gibanjem tijela ili sustava tijela bez utjecaja sila i momenata koji djeluju na tijelo. Kako bi opisali gibanje tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja potrebno je definirati dva koordinatna sustava [8].

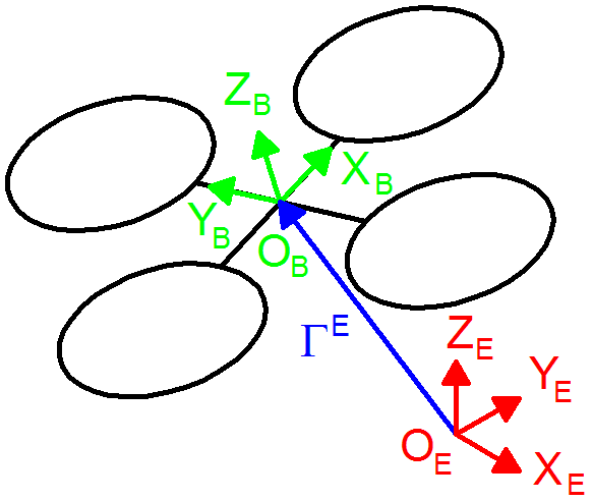
- Zemljin koordinatni sustav
- Koordinatni sustav vezan uz tijelo letjelice

Zemljin koordinatni sustav (o_E, x_E, y_E, z_E) se podudara s inercijskim desnokretnim sustavom. x_E os je usmjerena prema sjeveru, y_E prema zapadu, z_E prema gore u odnosu na zemlju te o_E predstavlja ishodište sustava. Ovaj koordinatni sustav se koristi za definiranje linearne $\mathbf{\Gamma}^E$ i kutne pozicije $\mathbf{\Theta}^E$ kvadrotora. Koordinatni sustav na tijelu letjelice (o_B, x_B, y_B, z_B) gdje x_B gleda prema prednjoj strani, y_B prema lijevoj strani letjelice, z_B prema gore i o_B predstavlja ishodište sustava. o_B se podudara sa središtem križne konstrukcije kvadrotora, a koordinatni sustav je također desnokretni. U ovom sustavu se definiraju linearna brzina $\mathbf{V}^B$, kutna brzina $\boldsymbol{\omega}^B$, sile $\mathbf{F}^B$ i moment $\boldsymbol{\tau}^B$. Linearna pozicija $\mathbf{\Gamma}^E$ letjelice određena je koordinatama vektora između ishodišta koordinatnog sustava na tijelu i Zemljinog koordinatnog sustava s obzirom na koordinatni

sustav Zemlje prema jednadžbi

$$\mathbf{\Gamma}^E = [X \quad Y \quad Z]^T. \tag{5.1}$$

čija se relacija može vidjeti sa slike 5.7.



Slika 5.7: Koordinatni sustav kvadkoptera [7]

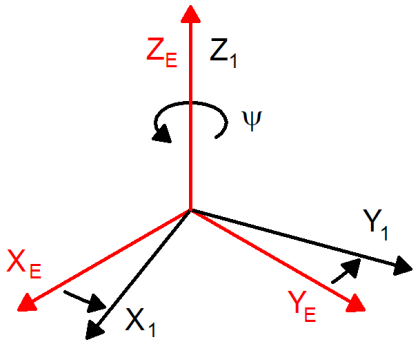
Kutna pozicija $\mathbf{\Theta}^E$ letjelice je definirana orijentacijom sustava na tijelu u odnosu na Zemljin koordinatni sustav. Opisana je sa tri rotacije oko glavnih osi što dovodi Zemljin sustav u sustav vezan na tijelo. Za ovaj izraz korišten je set Euler-ovih kutove redom kako je prikazano valjanje, poniranje i skretanje

$$\mathbf{\Theta}^E = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T. \tag{5.2}$$

Rotacijska matrica $\mathbf{R}_\Theta$ se dobiva množenjem triju osnovnih matrica idućim redoslijedom

- Rotacija kuta ψ (skretanje) oko osi z_E opisana je matricom $\mathbf{R}(\psi, z)$.

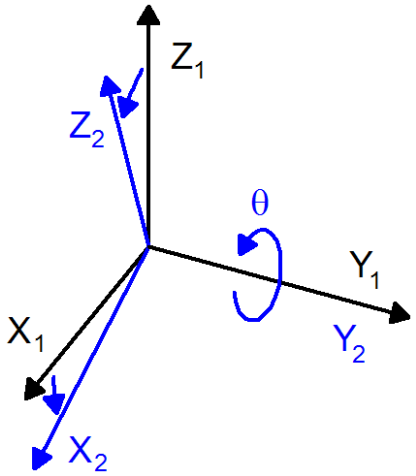
$$\mathbf{R}(\psi, z) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$



Slika 5.8: Rotacija kuta ψ oko osi z_E [7]

- Rotacija kuta θ (poniranje) oko osi y_1 opisana je matricom $\mathbf{R}(\theta, y)$.

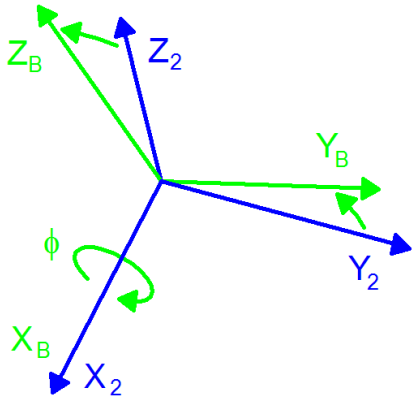
$$\mathbf{R}(\theta, y) = \begin{bmatrix} c_\theta & o & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$



Slika 5.9: Rotacija kuta θ oko osi y_1 [7]

- Rotacija kuta ϕ (valjanje) oko osi x_2 opisana je matricom $\mathbf{R}(\phi, x)$.

$$\mathbf{R}(\phi, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$



Slika 5.10: Rotacija kuta ϕ oko osi x_2 [7]

U iznad navedenim jednadžbama koristila se notacija koja će se koristiti i kroz ostatak rada $c_\eta = \cos(\eta)$, $s_\eta = \sin(\eta)$ i $t_\eta = \tan(\eta)$. Umnožak prethodnih jednadžbi daje konačni oblik rotacijske matrice $\mathbf{R}_\Theta$

$$\mathbf{R}_\Theta = \mathbf{R}(\psi, z)\ \mathbf{R}(\theta, y)\ \mathbf{R}(\phi, x) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\phi + c_\psi s_\theta s_\phi & s_\psi s_\phi + c_\psi s_\theta c_\phi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\phi + s_\psi s_\theta s_\phi & -c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Kao što je i ranije navedeno linearna $\mathbf{V}^B$ i kutna $\boldsymbol{\omega}^B$ su izražene u koordinatnom sustavu na tijelu letjelice. Definirane su kao

$$\mathbf{V}^B = [u \quad v \quad w]^T, \quad (5.7)$$

i

$$\boldsymbol{\omega}^B = [p \quad q \quad r]^T. \quad (5.8)$$

Moguće je kombinirati te dvije brzine kako bi dobili definiciju tijela u prostoru, pa tako definiramo dva vektora, generalizirana pozicija $\boldsymbol{\xi}$ i generalizirana brzina $\boldsymbol{\nu}$

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\Gamma}^E \quad \boldsymbol{\Theta}^E]^T = [X \quad Y \quad Z \quad \phi \quad \theta \quad \psi]^T, \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{V}^B \quad \boldsymbol{\omega}^B]^T = [u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r]^T. \quad (5.10)$$

Odnos između brzina $\mathbf{V}^B$ sustava vezanog uz tijelo i brzina $\mathbf{V}^E$ povezuje se preko matrice rotacije $\mathbf{R}_\Theta$ jednadžbom

$$\mathbf{V}^E = \dot{\boldsymbol{\Gamma}}^{\boldsymbol{E}} = \mathbf{R}_\Theta \mathbf{V}^B. \quad (5.11)$$

Kutne brzine u Zemljinom koordinatnom sustavu $\dot{\mathbf{\Theta}}^E$ se također mogu povezati sa kutnim brzinama na tijelu letjelice $\boldsymbol{\omega}^B$

$$\boldsymbol{\omega}^B = \mathbf{T}_\Theta^{-1}\dot{\mathbf{\Theta}}^E, \tag{5.12}$$

$$\dot{\mathbf{\Theta}}^E = \mathbf{T}_\Theta\boldsymbol{\omega}^B, \tag{5.13}$$

gdje se matrica transformacija $\mathbf{T}_\Theta$ izrazi prebacivanjem $\dot{\mathbf{\Theta}}^E$ u sustav vezan na tijelo preko sljedećih jednadžbi (5.14), (5.15), (5.16)

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\phi, x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\phi, x)^{-1}\mathbf{R}(\theta, y)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\Theta^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{T}_\Theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

$$\mathbf{T}_\Theta = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Jednadžbe (5.11) i (5.13) je moguće prikazati jednom jednakošću, koja dovodi u odnos derivacije općenite pozicije u koordinatnom sustavu Zemlje $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ i općenite brzine u koordinatnom sustavu tijela $\boldsymbol{\nu}$. Transformaciju omogućuje općenita matrica $\mathbf{J}_\Theta$ gdje zapis $\mathbf{0}_3 \times 3$ predstavlja pod-matricu nul-matrice dimenzija 3×3. Ova transformacija se dobiva preko

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}_\Theta\boldsymbol{\nu} \tag{5.17}$$

$$\mathbf{J}_\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Theta & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{T}_\Theta \end{bmatrix}. \tag{5.18}$$

5.4. Dinamika

Dinamika je grana mehanika koja proučava djelovanje sila i momenata na gibanje tijela ili sustava. Postoji određeni broj metoda s kojima se može opisati kruto tijelo sa šest stupnjeva slobode, a u ovom radu su korištene Newton-Eulerove jednadžbe.

Jednadžbe gibanja su postavljene za sustav vezan uz tijelo jer:

- inercijska matrica je vremenski invarijantna
- jednadžbe se pojednostavljuju ako se radi o simetričnom tijelu
- mjerenje u realnom vremenu se lako prebacuje u koordinatni sustav tijela (kvadkoptera)
- upravljačke sile su u većini slučajeva dane u koordinatnom sustavu kvadkoptera.

Odluka da se jednadžbe gibanja vežu uz koordinatni sustav tijela povećava složenost odnosa akceleracija, ali pojednostavljuje oblik sila, gdje imamo dvije pretpostavke

- pretpostavljamo da se ishodište o_B podudara s centrom mase kvadkoptera, a ako to ne bi bio slučaj jednadžbe gibanja bi postale komplicirane
- druga pretpostavka govori da se osi koordinatnog sustava tijela kvadkoptera podudaraju s inercijskim koordinatnim sustavom. Uz ovu pretpostavku inercijska matrica je dijagonalna $\mathbf{I}$ što naravno dovodi do jednostavnijih jednadžbi.

Prvi Eulerov postulat i drugi Newtonov zakon daju derivacije linearnih komponenata gibanja opisane jednadžbama

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{\Gamma}}^E &= \mathbf{F}^E \\ m\dot{\widehat{\mathbf{R}_\Theta \mathbf{V}^B}} &= \mathbf{R}_\Theta \mathbf{F}^B \\ m(\mathbf{R}_\Theta \dot{\mathbf{V}}^B + \dot{\mathbf{R}}_\Theta \mathbf{V}^B) &= \mathbf{R}_\Theta \mathbf{F}^B \\ m\mathbf{R}_\Theta(\dot{\mathbf{V}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{V}^B) &= \mathbf{R}_\Theta \mathbf{F}^B \\ m(\dot{\mathbf{V}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{V}^B) &= \mathbf{F}^B, \end{aligned} \tag{5.19}$$

gdje je m masa kvadrotora, $\ddot{\mathbf{\Gamma}}^E$ linearna akceleracija u koordinatnom sustavom zemlje, $\mathbf{F}^E$ vektor sila, $\dot{\mathbf{V}}^B$ vektor linearnih ubrzanja u sustavu tijela letjelice i $\dot{\mathbf{R}}_\Theta$ derivacija matrice rotacija.
Sljedeća jednadžba opisuje kutne komponente gibanja tijela po drugom Euler-ovom

postulatu i drugom Newtonovom zakonu.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\ \ddot{\boldsymbol{\Theta}}^{\mathbf{E}} &= \boldsymbol{\tau}^E \\ \mathbf{I}\ \mathbf{T}_\Theta\ \widehat{\dot{\boldsymbol{\omega}}}^B &= \mathbf{T}_\Theta\ \boldsymbol{\tau}^B \\ &\vdots \\ \mathbf{I}\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I}\ \boldsymbol{\omega}^B) &= \mathbf{T}_\Theta\ \boldsymbol{\tau}^B \end{aligned} \tag{5.20}$$

U jednadžbi (5.20) $\mathbf{I}$ je inercijska matrica tijela u koordinatnom sustavu vezanom uz tijelo, $\ddot{\boldsymbol{\Theta}}^E$ je vektor kutnih ubrzanja u sustavu vezanom uz Zemlju, $\boldsymbol{\omega}^B$ vektor kutnog ubrzanja u sustavu vezanom za Zemlju, te $\boldsymbol{\tau}^E$ vektor momenata kvadrotora. Povezivanjem jednadžbi (5.19) i (5.20) opisuje se gibanje tijela sa šest stupnjeva slobode. Matrični zapis tih jednadžbi ima sljedeći oblik

$$\begin{bmatrix} m\ \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}^B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^B \times (m\ \mathbf{V}^B) \\ \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I}\ \boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^B \\ \boldsymbol{\tau}^B \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

U jednadžbi (5.21) $\mathbf{I}_{3\times3}$ je jedinična matrica dimenzija tri s tri. Također može se primijetiti da je prva matrica u jednadžbi dijagonalna i konstantna. Ova jednadžba je općenita te vrijedi za sva kruta tijela na koja se mogu primijeniti ranije navedene pretpostavke. Zadnji vektor sadrži u ovom izvodu i u ovom slučaju informacije vezane uz kvadrotor i njegovu dinamiku.

5.5. Newton-Eulerov model

Sada kada imamo set jednadžbi koje opisuju dinamiku i kinematiku možemo opisati dinamiku gibanja kvadkoptera. Pa tako imamo generalizirani vektor sila

$$\boldsymbol{\Lambda} = [\mathbf{F}^B \quad \boldsymbol{\tau}^B]^T = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T, \tag{5.22}$$

što nam omogućuje da jednadžbu (5.21) zapišemo kao

$$\mathbf{M}_B\ \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\Lambda}, \tag{5.23}$$

gdje je $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ generalizirani vektor ubrzanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera. $\mathbf{M}_B$ je inercijska matrica sustava, a $\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})$ je Coriolisova centripetalna matrica u odnosu

na koordinatni sustav kvadrotora. Inercijska matrica ima oblik

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

Iz jednadžbe (5.24) se može primijetiti da je matrica $\mathbf{M}_B$ dijagonalna i konstantna. Jednadžba (5.25) je Coriolis-ova centripetalna matrica

$$\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & -m\mathbf{S}_o(\mathbf{V}^B) \\ \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{S}_o(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & -mv \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & mv & -mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ}r & -I_{YY}q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ZZ}r & 0 & I_{XX}p \\ 0 & 0 & 0 & I_{YY}q & -I_{XX}p & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.25}$$

U prethodnoj jednadžbi korišten je $\mathbf{S}_o$ anti-simetrični operator, a za neki trodimenzijski vektor anti-simetrična matrica $\mathbf{k}(\mathbf{S}_o(\mathbf{k})$ se definira sljedećom jednadžbom

$$\mathbf{S}_o(\mathbf{k}) = -\mathbf{S}_o^T(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_1 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}. \tag{5.26}$$

Općenita jednadžba (5.23) vrijedi za sva kruta tijela koja zadovoljavaju pretpostavke. Vektor $\boldsymbol{\Lambda}$ se može podijeliti na tri komponente na temelju prirode kvadkoptera. Prvi doprinos čini gravitacijski vektor $\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi})$ koji se dobije zbog akceleracije g. Odmah se može shvatiti da gravitacijski vektor utječe samo na linearne jednadžbe jer je to sila, a ne moment. $\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi})$ se dobije sljedećom transformacijom

$$\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G^B \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Theta^{-1}\mathbf{F}_G^E \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Theta^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgs_\theta \\ -mgc_\theta s_\phi \\ -mgc_\theta s_\phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.27}$$

gdje je $\mathbf{F}_G^B$ vektor gravitacijske sile u sustavu tijela, $\mathbf{F}_G^E$ vektor gravitacijske sile u sustavu vezanom na Zemlju, i $\mathbf{0}_{3\times1}$ vertikalni nul vektor.
Drugi doprinos obuhvaća utjecaj žiroskopskoga efekta koji se pojavljuje utjecajem rotacije propelera. Vrtnja dva propelera u suprotnu stranu od drugog para propelera omogućuje pojavu neravnoteže kada algebarska suma brzina vrtnje propelera nije jednaka nuli, gdje također varijable valjanja i prevrtanja nisu jednake nuli. Na osnovu toga dolazi do pojave žiroskopskoga momenta prema jednadžbi

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\Omega} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times1} \\ -\sum_{k=1}^{-4} J_{TP} \left(\boldsymbol{\omega}^B \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) (-1)^k \Omega_k \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times1} \\ J_{TP} \begin{bmatrix} -q \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \Omega \end{bmatrix} = J_{TP} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & -q & q & -q \\ -p & p & -p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega},\end{aligned} \tag{5.28}$$

gdje $\mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})$ predstavlja matricu žiroskopskih propelera, a J_{TP} je ukupni rotacijski moment inercije oko osi propelera. Primijetimo da je žiroskopski efekt vezan samo uz jednadžbe kuta. Jednadžba (5.29) predstavlja vektor brzina propelera koji je korišten u (5.28)

$$\Omega = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \end{bmatrix}, \tag{5.29}$$

gdje je Ω_1 brzina prednjeg, Ω_2 brzina desnog, Ω_3 brzina stražnjeg i Ω_4 brzina lijevog propelera.
I na kraju treći doprinos uzima u obzir sile i momente koji su nastali upravljanjem odnosno gibanje letjelice. S aerodinamičnog gledišta slijedi da su sile i momenti proporcionalni kvadratnoj brzini propelera pa se zato matrica gibanja $\mathbf{E}_B$ množi sa $\boldsymbol{\Omega}^2$ da se

dobije vektor gibanja $\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\Omega})$

$$\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{E}_B\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{bmatrix}, \tag{5.30}$$

gdje je l udaljenost između centra kvadrotora i centra propelera, b faktor potiska i d faktor otpora. Veza između komponenti U_1, U_2, U_3, U_4 i brzina propelera dolazi iz aerodinamičnih zakona. Izraz za moment generiran komponentom U_4 je pojednostavljen ignoriranjem komponente $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$, pa s toga sva gibanja imaju slične izraze s kojima je jednostavnije upravljati. Matrica $\mathbf{E}_B$ ima oblik

$$\mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Uzimajući u obzir ova tri navedena doprinosa i općenitu jednadžbu (5.23) opisuje se dinamika kvadrotora

$$\mathbf{M}_B\dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_B\boldsymbol{\Omega}^2, \tag{5.32}$$

gdje se može izraziti $\dot{\boldsymbol{\nu}}$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{M}_B^{-1}(-\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_B\boldsymbol{\Omega}^2). \tag{5.33}$$

Ne matrična forma jednadžbe (5.33) se može zapisat kao sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \dot{u} = (vr - wq) + gs_\theta, \\ \dot{v} = (wp - ur) - gc_\theta s_\phi, \\ \dot{w} = (uq - vp) - gc_\theta s_\phi + \dfrac{U_1}{m}, \\ \dot{p} = \dfrac{I_{YY} - I_{ZZ}}{I_{XX}} qr - \dfrac{J_{TP}}{I_{XX}} q\Omega + \dfrac{U_2}{I_{XX}}, \\ \dot{q} = \dfrac{I_{ZZ} - I_{XX}}{I_{YY}} pr + \dfrac{J_{TP}}{I_{YY}} p\Omega + \dfrac{U_3}{I_{YY}}, \\ \dot{r} = \dfrac{I_{XX} - I_{YY}}{I_{ZZ}} pq + \dfrac{U_4}{I_{ZZ}}, \end{cases} \tag{5.34}$$

gdje su brzine propelera opisane kao

$$\begin{cases} U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \\ U_2 = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2), \\ U_3 = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2), \\ U_4 = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2), \\ \Omega = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4. \end{cases} \tag{5.35}$$

Prethodni sustav jednadžbi (5.34) se odnosi na koordinatni sustav vezan uz tijelo, a za slučaj kvadkoptera korisno je izraziti dinamiku sustava kao kombinaciju linearnih jednadžbi u sustavu vezanom uz Zemlju, te kutnih jednadžbi vezanih uz sustav na tijelu. Ovaj hibridni koordinatni sustav se koristi jer je njime jednostavnije izraziti dinamiku sustava s kojom se može vršiti upravljanje. Generalizirani vektor brzina u hibridnom sustavu ima oblik

$$\boldsymbol{\zeta} = [\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^E \quad \boldsymbol{\omega}^B]^T = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z} \quad p \quad q \quad r]^T. \tag{5.36}$$

Matrični izraz ima sljedeći oblik

$$\mathbf{M}_H \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{G}_H + \mathbf{O}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_H(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\Omega}^2, \tag{5.37}$$

gdje je $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ vektor generaliziranih ubrzanja kvadrotora u hibridnom koordinatnom sustavu. Inercijska matrica sustava u hibridnom koordinatnom sustavu $\mathbf{M}_H$ je jednaka matrici iz

sustava vezanog uz tijelo letjelice pa tako prema jednadžbi (5.24) vrijedi

$$\mathbf{M}_H = \mathbf{M}_B \tag{5.38}$$

Coriolisova centripetalna matrica $\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta})$ nije ista u hibridnom sustavu i u sustavu vezanom uz tijelo već se definira sljedećom jednadžbom

$$\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{S}_o(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ}\ r & -I_{YY}\ q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ZZ}\ r & 0 & I_{XX}\ p \\ 0 & 0 & 0 & I_{YY}\ q & -I_{XX}\ p & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.39}$$

a gravitacijski vektor je definiran jednadžbom (5.40) gdje se može primijetiti da utječe na sve tri linearne jednadžbe, a ne samo na treću kao ranije.

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G^E \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\ g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.40}$$

Vrtnjom propelera uzrokovan žiroskopski efekt ne mijenja se jer on ima utjecaj samo na kutne jednadžbe koordinatnog sustava kvadkoptera, a matrica gibanja $\mathbf{E}_H$ se razlikuje u hibridnom koordinatnom sustavu jer komponenta U_1 utječe na sv.e tri linearne jednadžbe rotacijske matrice $\mathbf{R}_\Theta$. Umnožak matrice gibanja i kvadratnoga vektora brzina opisan je jednadžbom (5.41)

$$\mathbf{E}_H(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Theta & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{E}_B\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} (s_\psi s_\phi + c_\psi s_\theta c_\phi)U_1 \\ (-c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi)U_1 \\ (c_\theta c_\phi)U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}. \tag{5.41}$$

Iz jednadžbe (5.37) možemo izraziti generalizirani vektor ubrzanja u hibridnom koordinatnom sustavu $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$ iz kojeg izraza možemo dobiti set jednadžbi u ne matričnoj formi, pa tako imamo jednadžbe (5.42) i (5.43)

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M}_H^{-1}(-\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{G}_H + \mathbf{O}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_H(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\Omega}^2), \tag{5.42}$$

$$\begin{cases} \ddot{X} = (\sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi))\dfrac{U_1}{m}, \\ \ddot{Y} = (-\cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi))\dfrac{U_1}{m}, \\ \ddot{Z} = -g + (\cos(\phi)\cos(\theta))\dfrac{U_1}{m}, \\ \dot{p} = \dfrac{I_{YY} - I_{ZZ}}{I_{XX}}qr - \dfrac{J_{TP}}{I_{XX}}q\Omega + \dfrac{U_2}{I_{XX}}, \\ \dot{q} = \dfrac{I_{ZZ} - I_{XX}}{I_{YY}}pr + \dfrac{J_{TP}}{I_{YY}}p\Omega + \dfrac{U_3}{I_{YY}}, \\ \dot{r} = \dfrac{I_{XX} - I_{YY}}{I_{ZZ}}pq + \dfrac{U_4}{I_{ZZ}}. \end{cases} \tag{5.43}$$

Sile i momenti dinamičkog modela dobivaju se kao projekcije sila potisaka propelera preko odgovarajuće alokacijske matrice [9, 10].

5.6. Linearizacija modela

Za linearizaciju modela kvadrotora jednadžbe iz (5.43) će se prikazati na sljedeći način [11]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (\cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\psi)\sin(\phi))U_1, \\ m\ddot{y} &= (\sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\psi)\sin(\phi))U_1, \\ m\ddot{z} &= -mg + \cos(\phi)\cos(\theta)U_1, \\ I_{XX}\ddot{\phi} &= (I_{YY} - I_{ZZ})\dot{\theta}\dot{\psi} + U_2, \\ I_{YY}\ddot{\theta} &= (I_{ZZ} - I_{XX})\dot{\phi}\dot{\psi} + U_3, \\ I_{ZZ}\ddot{\psi} &= (I_{XX} - I_{YY})\dot{\phi}\dot{\theta} + U_4, \end{aligned} \tag{5.44}$$

Sa daljnjim izrazima se provodi linearizacija modela kako bi se omogućila primjena linearnog regulatora, pa tako uz pretpostavku malih kuteva vrijedi

$$\begin{aligned} \cos(w) &\sim 1 \\ \sin(w) &\sim w \end{aligned} \tag{5.45}$$

Ukoliko izraz (5.45) primijenimo u jednadžbi (5.44) dobije se

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (\theta + \psi\phi)U_1, \\ m\ddot{y} &= (\psi\theta + \phi)U_1, \\ m\ddot{z} &= -mg + u_1, \\ I_{XX}\ddot{\phi} &= (I_{YY} - I_{ZZ})\dot{\theta}\dot{\psi} + U_2, \\ I_{YY}\ddot{\theta} &= (I_{ZZ} - I_{XX})\dot{\phi}\dot{\psi} + U_3, \\ I_{ZZ}\ddot{\psi} &= (I_{XX} - I_{YY})\dot{\phi}\dot{\theta} + U_4. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Ako zanemarimo kvadratične članove malih kutova i brzina prethodni sustav jednadžbi se reducira na

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \theta U_1, \\ m\ddot{y} &= \phi U_1, \\ m\ddot{z} &= -mg + U_1, \\ I_{XX}\ddot{\phi} &= U_2, \\ I_{YY}\ddot{\theta} &= U_3, \\ I_{ZZ}\ddot{\psi} &= U_4. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Sada je potrebno eliminirati konstantni član $-mg$ iz jednadžbe $m\ddot{z} = -mg + U_1$, a to se postiže primjenom unaprijedne kompenzacije

$$U_1 = mg + \tilde{U}_1, \tag{5.48}$$

pa se dobiva

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\theta - \theta\tilde{U}_1, \\ m\ddot{y} &= -mg\phi - \phi\tilde{U}_1, \\ m\ddot{z} &= \tilde{U}_1, \end{aligned} \tag{5.49}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \theta\tilde{U}_1 &\simeq 0 \\ \phi\tilde{U}_1 &\simeq 0. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Ako primijenimo sve navedene pretpostavke konačni oblik lineariziranog modela je prikazan u jednadžbi (5.51).

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= g\theta, \\
\ddot{y} &= -g\phi, \\
\ddot{z} &= \frac{1}{m}\tilde{U}_1, \\
\ddot{\phi} &= \frac{1}{I_{XX}}U_2, \\
\ddot{\theta} &= \frac{1}{I_{YY}}U_3, \\
\ddot{\psi} &= \frac{1}{I_{ZZ}}U_4.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

6 Upravljanje letjelicom

6.1. Sinteza linearnog regulatora uz primjenu algebarskog estimatora

Na osnovu provedene linearizacije modela kvadrotora sada se može provesti sinteza linearnog regulatora. Potrebno je definirati četiri podsustava u kojima se javljaju upravljačke varijable. Prvi podsustav definiran je jednadžbom

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}\tilde{U}_1, \tag{6.1}$$

podsustav 2

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{ZZ}}U_4, \tag{6.2}$$

podsustav 3

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g\theta, \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_{YY}}U_3, \end{aligned} \tag{6.3}$$

te podsustav 4

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -g\phi, \\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{I_{XX}}U_2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Rješavanjem podsustava 1 započinje se jednadžbom

$$\tilde{U}_1 = m(\ddot{z}_d - K_D\dot{\tilde{z}} - K_P\tilde{z}), \tag{6.5}$$

za koju vrijedi jednadžba greške

$$\dddot{\tilde{z}} + K_D\ddot{\tilde{z}} + K_P\dot{\tilde{z}} = 0 \tag{6.6}$$

gdje vrijedi

$$\begin{aligned} K_D &> 0, \\ K_P &> 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Konačni oblik upravljačke varijable U_1 opisan je sljedećom jednadžbom

$$U_1 = mg + m(\ddot{z}_d - K_D(\dot{z} - \dot{z}_d) - K_P(z - z_d)). \tag{6.8}$$

Upravljačku varijablu U_4 dobivamo na identičan način kao varijablu U_1 pa je tako jednaka

$$U_4 = I_{ZZ}(\ddot{\psi}_d - K_D\dot{\tilde{\psi}} - K_P\tilde{\psi}), \tag{6.9}$$

odakle slijedi

$$U_4 = I_{ZZ}(\ddot{\psi}_d - K_D(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) - K_P(\psi - \psi_d)). \tag{6.10}$$

Podsustav 3 se rješava deriviranje prve jednadžbe u (6.3) i uvrštavanjem u drugu gdje se dobije

$$x^{(4)} = \frac{1}{I_{YY}}U_3. \tag{6.11}$$

Uzimajući u obzir regulacijska odstupanja upravljačka varijabla U_3 ima oblik

$$U_3 = \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3\dddot{\tilde{x}} - K_2\ddot{\tilde{x}} - K_1\dot{\tilde{x}} - K_0\tilde{x}), \tag{6.12}$$

gdje je pripadajuća jednadžba greške

$$\tilde{x}_d^{(4)} + K_3\dddot{\tilde{x}} + K_2\ddot{\tilde{x}} + K_1\dot{\tilde{x}} + K_0\tilde{x} = 0. \tag{6.13}$$

Konačno upravljačka varijabla U_3 ima oblik

$$U_3 = \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3(g\dot{\theta} - \dddot{x}_d) - K_2(g\theta - \ddot{x}_d) - K_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - K_0(x - x_d)). \tag{6.14}$$

Sličnim postupkom se dobije i podsustav 4, gdje se derivira prva jednadžba iz (6.4) i uvrsti u drugu, pa se dobije

$$y^{(4)} = -\frac{g}{I_{XX}}U_2. \tag{6.15}$$

Jednadžba podsustava 4 sa regulacijskim odstupanjem opisana je kako slijedi

$$U_2 = -\frac{I_{XX}}{g}(y_d^{(4)} - K_3(-g\dot{\phi} - \dddot{y}_d) - K_2(-g\phi - \ddot{y}_d) - K_1(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_0(y - y_d)), \tag{6.16}$$

gdje je jednadžba greške oblika

$$\tilde{y}^{(4)} + K_3\dddot{\tilde{y}} + K_2\ddot{\tilde{y}} + K_1\dot{\tilde{y}} + K_0\tilde{y} = 0. \tag{6.17}$$

6.2. Simulacijski rezultati upravljanja kvadkopterom primjenom algebarskog estimatora

Za analizu sustava kvadkoptera kao i kod MDS sustava potrebno je koristiti određene parametre. Početna stanja poznatih parametara i njihovi iznosi su $m = 1$, $I_x = 0.62, I_y = 0.62, I_z = 1.24, g = 9.81, K_d = 9, K_p = 6, K_0 = 180, K_1 = 201, K_2 = 83$ i $K_3 = 15$, također svi početni uvjeti varijabli stanja su nula. Parametri filtera su $a = 15$ i $n = 15$. Potrebne su i referentne trajektorije koje su zadane jednadžbama kako slijedi

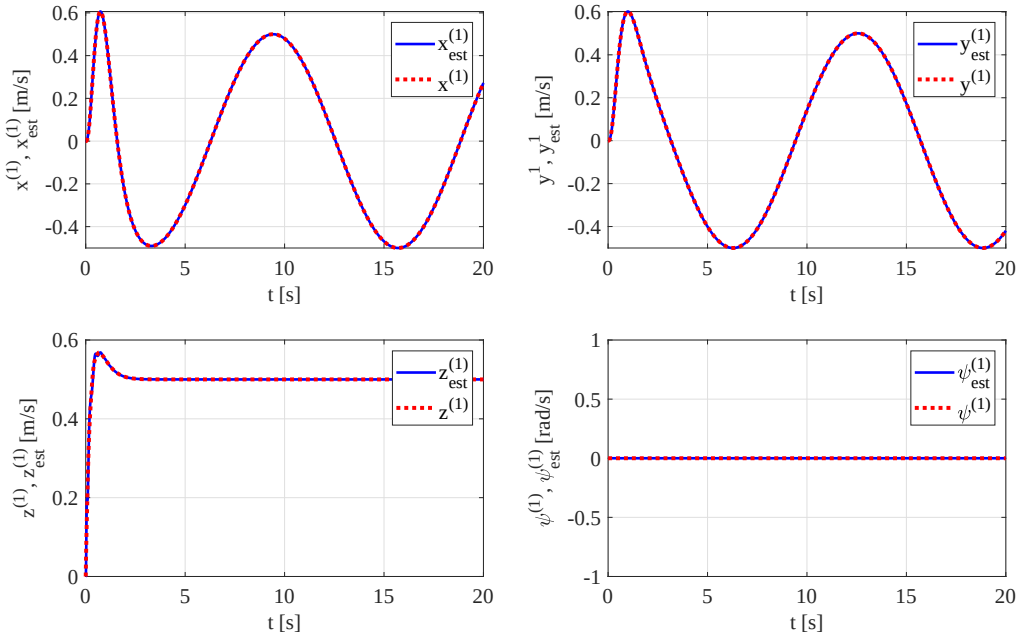
$$\begin{aligned} x_d(t) &= \cos(0.5t), \\ y_d(t) &= \sin(0.5t), \\ z_d(t) &= 0.5t, \\ \psi_d &= 0. \end{aligned} \tag{6.18}$$

6.2.1. Estimirane brzine sustava i poznate derivacije referentnog signala

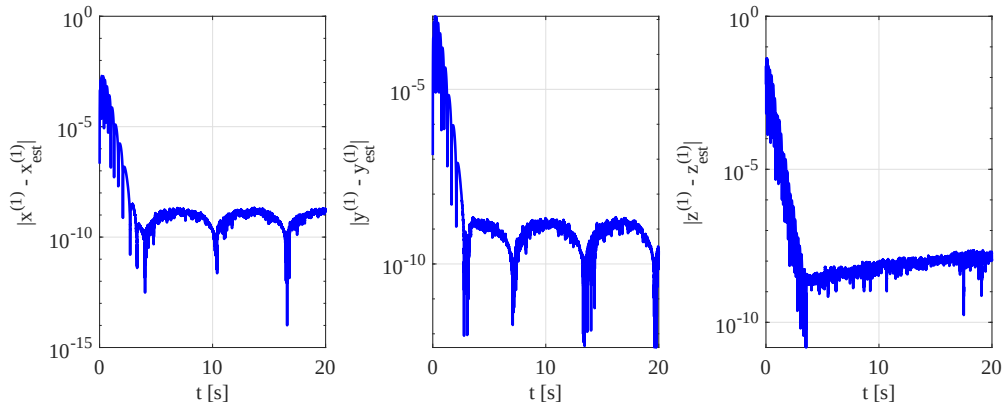
Kako se u ovom slučaju upravljanja koristi algebarski estimator tako se u jednadžbama upravljanja mjerene derivacije pozicija zamjenjuju sa estimiranima. Sustav upravljačkih jednadžbi sa estimiranim vrijednostima derivacije pozicija ima oblik

$$\begin{aligned} U_1 &= mg + m(\ddot{z}_d - K_D(\hat{z}^{(1)} - \dot{z}_d) - K_P(z - z_d)), \\ U_2 &= -\frac{I_{XX}}{g}(y_d^{(4)} - K_3(-g\hat{\phi}^{(1)} - \dddot{y}_d) - K_2(-g\phi - \ddot{y}_d) - K_1(\hat{y}^{(1)} - \dot{y}_d) - K_0(y - y_d)), \\ U_3 &= \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3(g\hat{\theta}^{(1)} - \dddot{x}_d) - K_2(g\theta - \ddot{x}_d) - K_1(\hat{x}^{(1)} - \dot{x}_d) - K_0(x - x_d)), \\ U_4 &= I_{ZZ}(\ddot{\psi}_d - K_D(\hat{\psi}^{(1)} - \dot{\psi}_d) - K_P(\psi - \psi_d)). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Slika 6.1 pokazuje usporedbu estimirane i mjerene vrijednosti brzina dok se sa slike 6.2 može vidjeti red veličine te pogreške estimiranja. Algebarski filter je uspješno i sa izvrsnom točnosti odradio estimaciju brzina kod kvadkoptera kao što je odrađena i kod MDS sustava te nema potrebe za dodatnim promjenama parametara filtera.

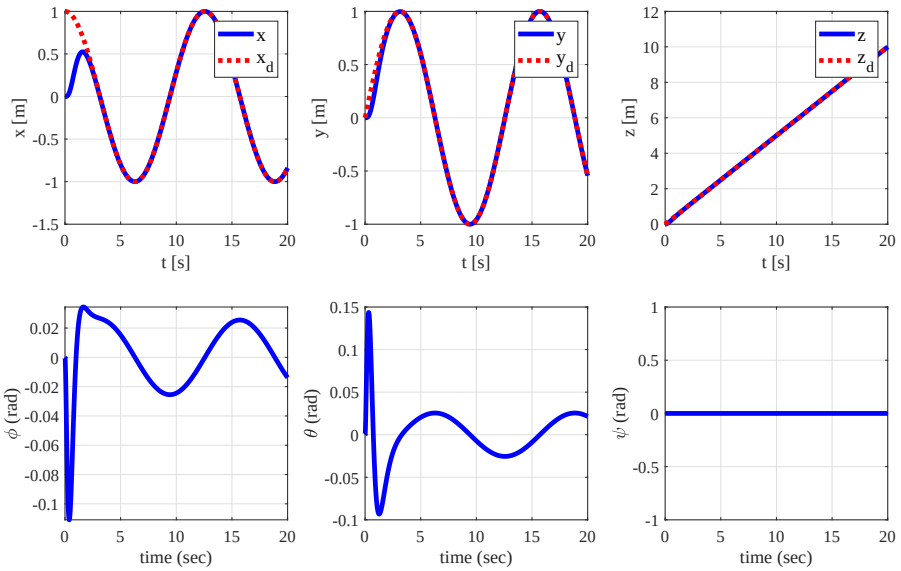


Slika 6.1: Usporedba mjerenih i estimiranih brzina kvadkoptera

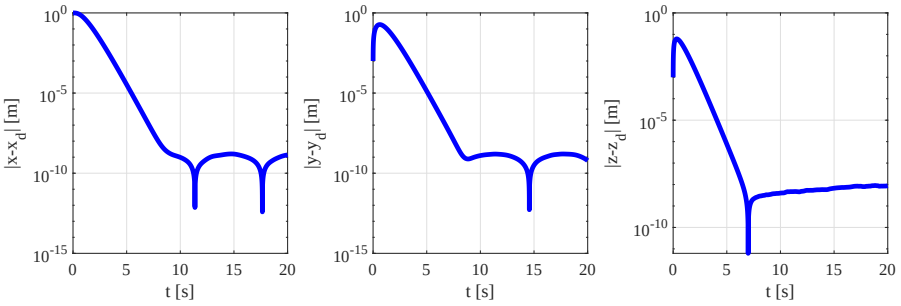


Slika 6.2: Greška estimiranja brzina drona

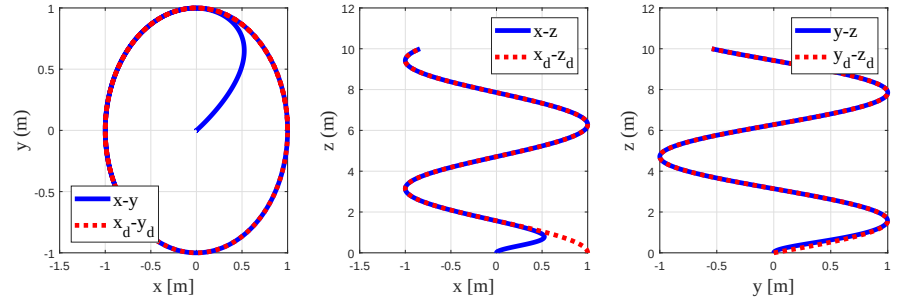
Slika 6.3 i 6.4 daju rezultate praćenja referentne trajektorije primjenom estimiranih derivacija pozicije. Primjećujemo da sustav letjelice prihvatljivo odrađuje zadatak praćenja pa i u slučaju kada imamo razliku u početnoj poziciji drona i referentne trajektorije što se vidi na poziciji x. Sa slike 6.5 vidljiv je i pogled slijeđenja trajektorija u ravninama $x-y, x-z$ i $y-z$, te kao ranije primjećuje se prihvatljivo slijeđenje.



Slika 6.3: Slijeđenje referentnih pozicija drona upravljanjem s estimiranim brzinama

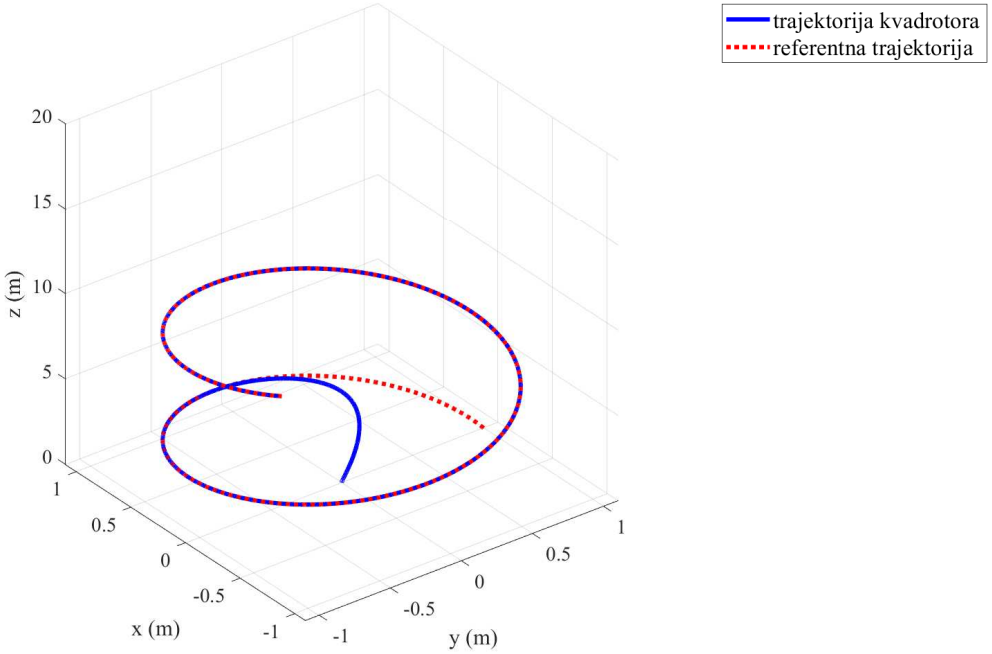


Slika 6.4: Greška slijeđenja upravljanja s estimiranim brzinama



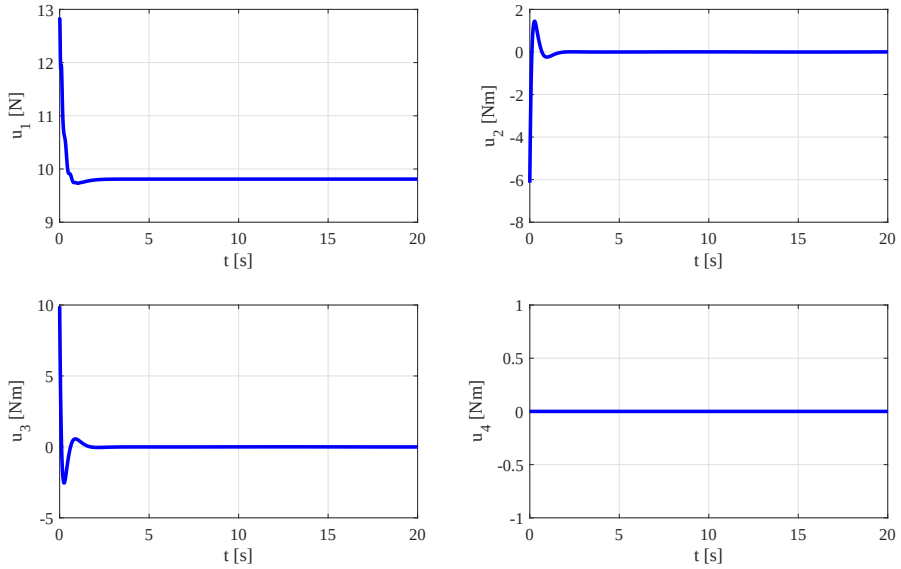
Slika 6.5: Prikaz slijeđenje referentnih pozicija drona u ravninama

Trajektorija se može prikazati i u zanimljivom 3D pogledu što je prikazano slikom 6.6 gdje dobivamo drugačiju percepciju rezultata. Također i sa ovim pogledom na situaciju upravljanja donosi se isti zaključak kao i ranije a to je da estimator odrađuje izvrsno upravljanje.



Slika 6.6: 3D trajektorije

Na kraju bitno je uočiti skok koji se događa u upravljačkim varijablama što se može vidjeti sa slike 6.7. Skok je uzrokovan zadanim referentnim trajektorijama koje uzrokuju vrijednost trajektorija različite od nule u trenutku $t = 0$. Ovaj problem će se posebno istaknuti u sljedećem poglavlju kada se primjene estimirane vrijednosti referentne trajektorije.



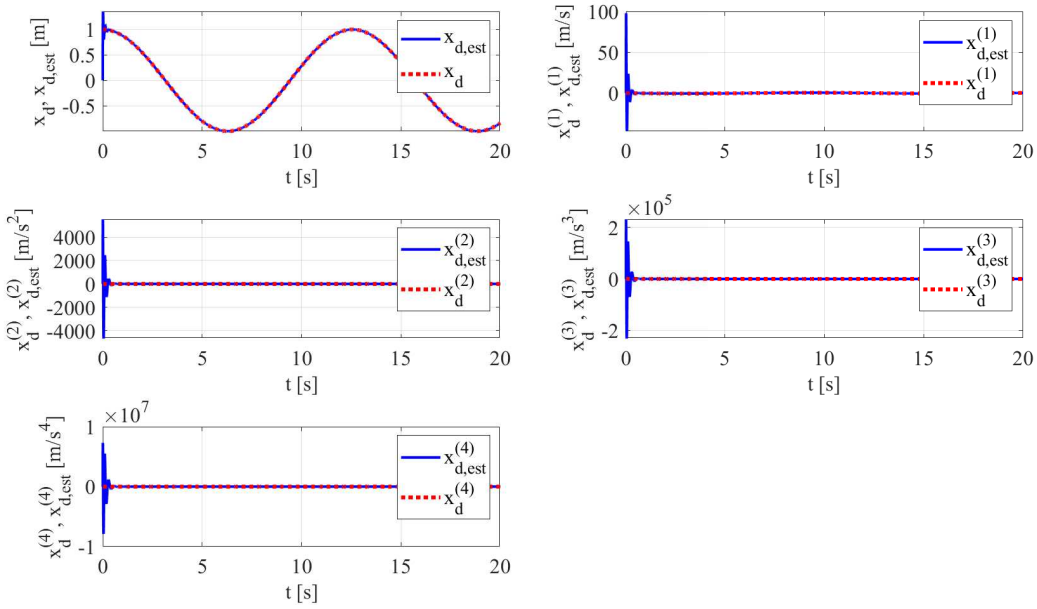
Slika 6.7: Upravljačke varijable letjelice uz poznate referentne trajektorije i estimirane brzine

6.2.2. Estimirane brzine sustava i derivacije referentnih trajektorija

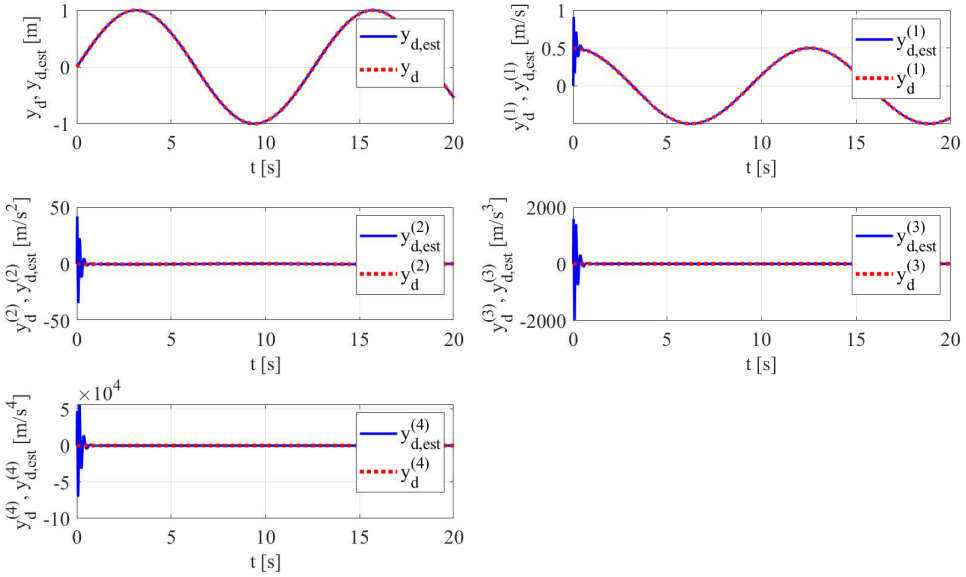
U ovom slučaju se pri upravljanju kvadkopterom osim estimiranih derivacija pozicije koriste i estimirane derivacije referentnih trajektorija gdje je potrebno estimirati i treću derivaciju pozicija. U radu [12] derivacije pozicije kvadkoptera estimirane su primjenom estimatora s kliznim stanjima (engl. sliding-mode estimators). Međutim, zbog diskontinuiranosti navedenog estimatora dolazi do visokofrekvencijskih oscilacija (engl. chattering) varijabli estimatora koje se reflektiraju na oscilacije upravljačkih varijabli. Upravljačke varijable za ovaj slučaj opisane su jednadžbama

$$
\begin{aligned}
U_1 &= mg + m(\hat{z}_d^{(2)} - K_D(\hat{z}^{(1)} - \hat{z}_d^{(1)}) - K_P(z - z_d)),\\
U_2 &= -\frac{I_{XX}}{g}(\hat{y}_d^{(4)} - K_3(-g\hat{\phi}^{(1)} - \hat{y}_d^{(3)}) - K_2(-g\phi - \hat{y}_d^{(2)}) - K_1(\hat{y}^{(1)} - \hat{y}_d^{(1)}) - K_0(y - y_d)),\\
U_3 &= \frac{I_{YY}}{g}(\hat{x}_d^{(4)} - K_3(g\hat{\theta}^{(1)} - \hat{x}_d^{(3)}) - K_2(g\theta - \hat{x}_d^{(2)}) - K_1(\hat{x}^{(1)} - \hat{x}_d^{(1)}) - K_0(x - x_d)),\\
U_4 &= I_{ZZ}(\hat{\psi}_d^{(2)} - K_D(\hat{\psi}^{(1)} - \hat{\psi}_d^{(1)}) - K_P(\psi - \psi_d)).
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

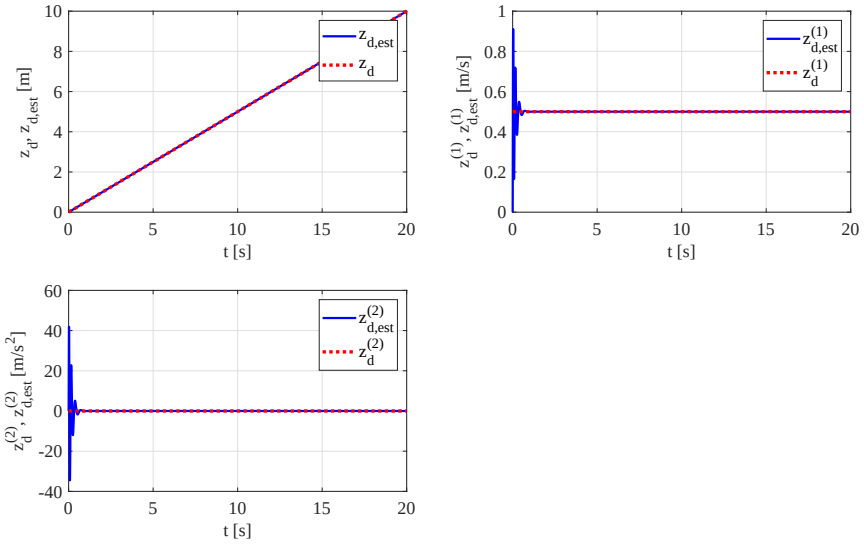
Ukoliko se pogleda usporedba referentnih trajektorija onih poznatih i estimiranih mogu se odmah uočiti nepovoljni signali na početku simulacije naročito izraženi sa povećanjem reda derivacije. Pa tako primjećujemo visoke oscilacije na početku simulacije koje se povećavaju zajedno s povećanjem reda derivacije kod referentne trajektorije x_d na slici 6.8. Istu stvar primjećujemo u y_d sa slike 6.9 pa tako i kod referentne trajektorije z_d prikazano na slici 6.10. Promatrajući ove usporedbe odmah se može predvidjeti da upravljanje kvadkopterom u ovom stanju neće biti optimalno.



Slika 6.8: Usporedba poznate referentne trajektorije letjelice x_d i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{x}_d$

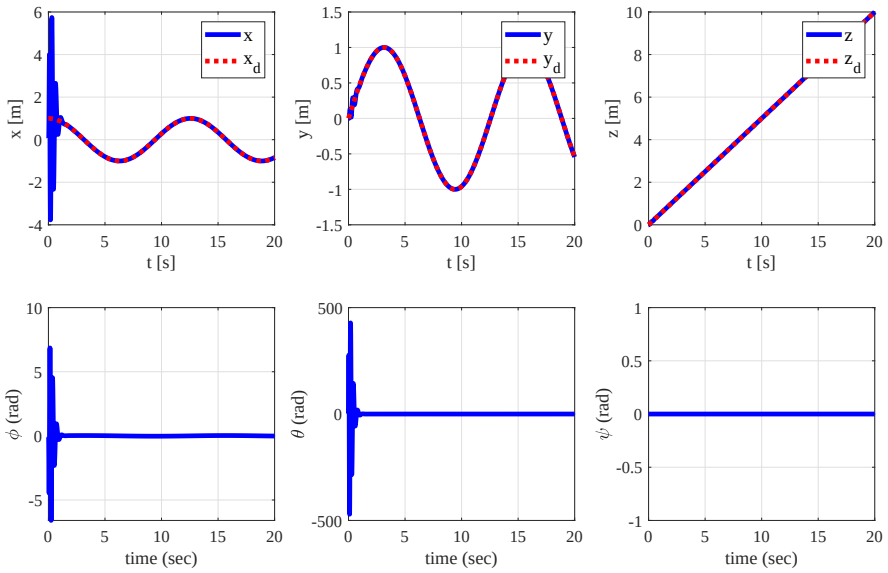


Slika 6.9: Usporedba poznate referentne trajektorije letjelice y_d i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{y}_d$

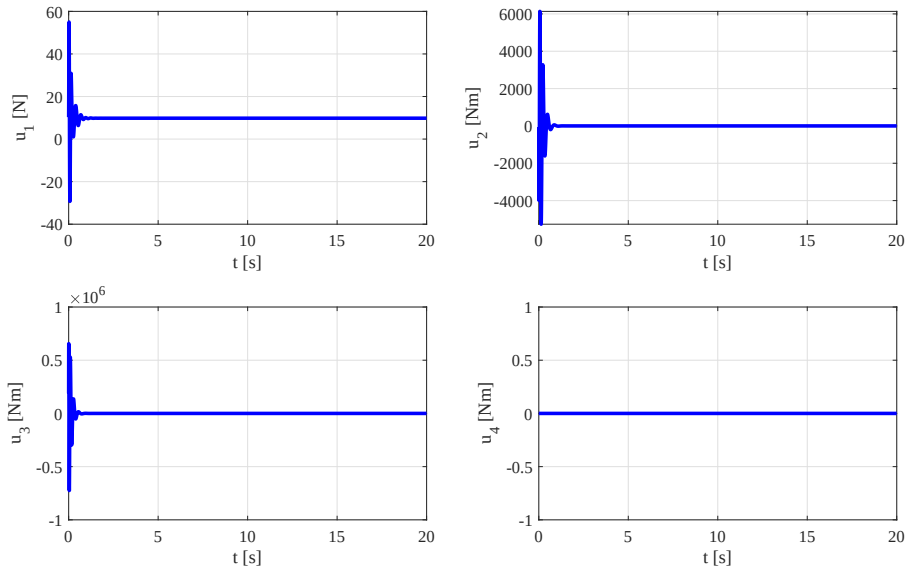


Slika 6.10: Usporedba poznate referentne trajektorije letjelice z_d i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{z}_d$

Ukoliko pogledamo slijeđenje referentnih trajektorija sa slike 6.11 primjećuje se problem na početku simulacije, odnosno dolazi do naglog rasta na početku simulacije kod slijeđenja x_d. Prema tome i upravljačke varijable vidljive sa slike 6.12 imaju nepoželjno ponašanje, odnosno vrijednosti upravljačkih varijabli su nerealno visoke.



Slika 6.11: Odziv sustava letjelice upravljanjem s estimiranim brzinama i referentnim trajektorijama



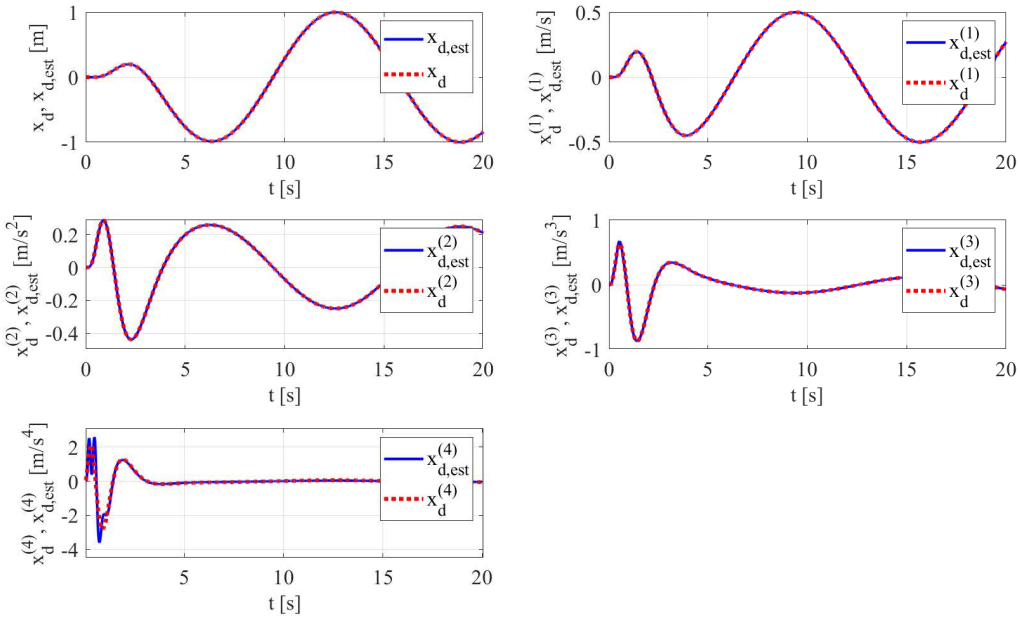
Slika 6.12: Upravljačke varijable u slučaju estimiranih derivacija referentnih trajektorija

U ovom trenutku bilo bi besmisleno prikazati ostale rezultate simulacije jer se stanje upravljačke varijable na početku ne može prihvatiti, već je potrebno potražiti rješenje nastalog problema. Tranzijentne oscilacije koje se pojavljuju na početku simulacije kvadkoptera uzrokovane su referentnim trajektorijama i njihovim vrijednostima u trenutku $t = 0$ koje su različite od nule. To se može spriječiti na dva načina, prvi gdje bi se uvela saturacijska funkcija koja bi postavila gornje i donje limite na amplitudu signala odnosno estimacije bi se ograničile s maksimalnom i minimalnom vrijednosti. Drugo, a ujedno i prikladnije rješenje bi bilo dodjela funkcije referentnoj trajektoriji koja bi se pobrinula da referentna funkcija u trenutku $t = 0$ bude jednaka nuli. Pa će se s obzirom na drugu ideju odabrati novi oblik referentne trajektorije x_d,y_d i z_d.

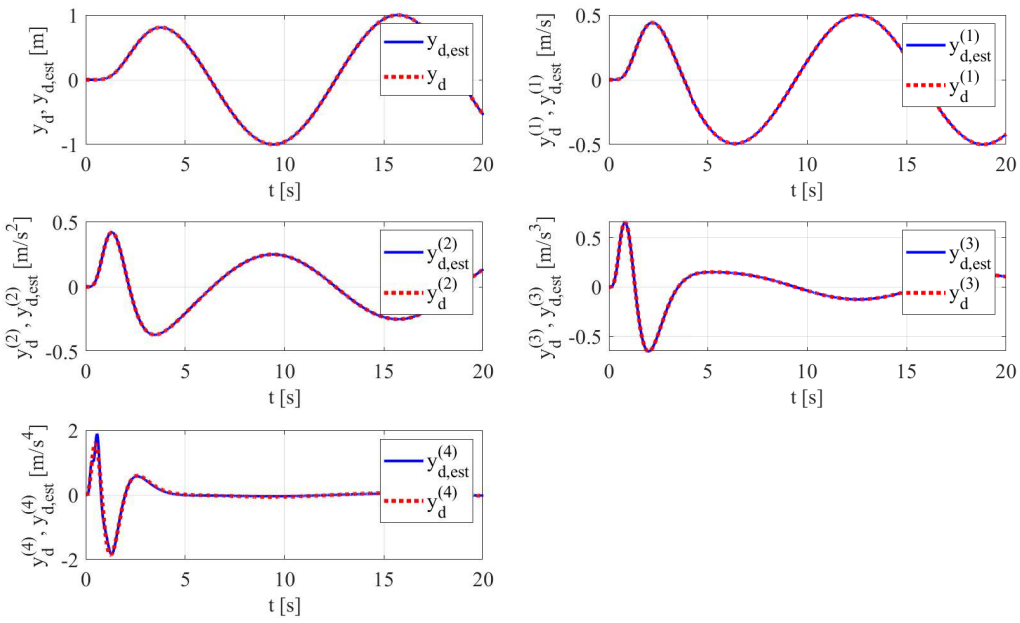
$$\begin{aligned} \overline{x}_d &= (1 - e^{-\kappa t})^{\delta} x_d(t), \\ \overline{y}_d &= (1 - e^{-\kappa t})^{\delta} y_d(t), \\ \overline{z}_d &= (1 - e^{-\kappa t})^{\delta} z_d(t), \end{aligned} \tag{6.21}$$

gdje je δ faktor koji određuje točnost i brzinu slijeđenja, a κ slobodni parametar pri estimaciji derivacija. Povećanje faktora δ slijeđenje sustava bi trebalo biti stabilnije i točnije. Primjenom novoizabranih trajektorija dobiveni su sljedeći rezultati. Slika 6.13 i 6.14 prikazuju usporedbu estimiranih i poznatih derivacija referentnih trajektorija gdje

su korištene $\overline{x}_d$, $\overline{y}_d$ i $\overline{z}_d$.



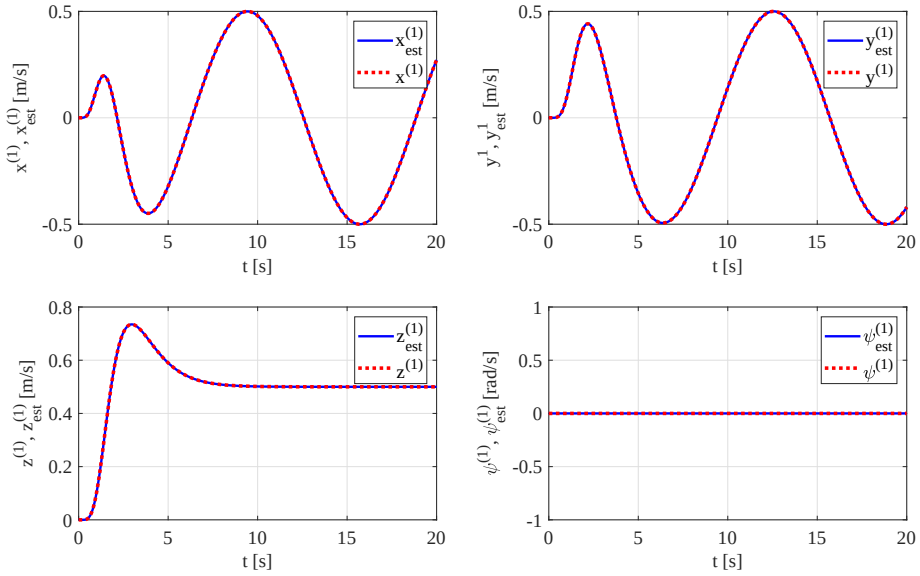
Slika 6.13: Usporedba poznate referentne trajektorije $\overline{x}_d$ i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{\overline{x}}_d$



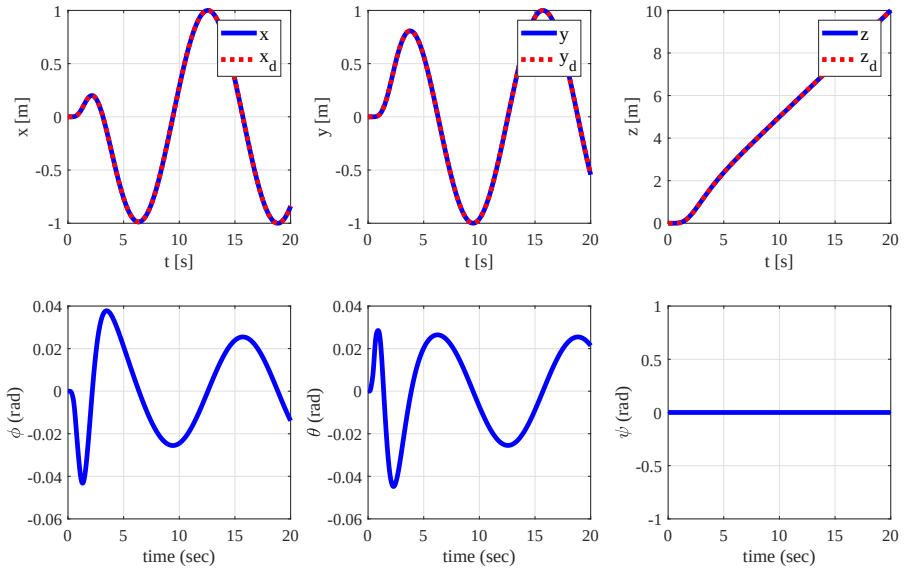
Slika 6.14: Usporedba poznate referentne trajektorije $\overline{y}_d$ i njenih estimiranih vrijednosti $\hat{\overline{y}}_d$

S rezultata se odmah može primijetiti optimalno praćenje estimirane trajektorije bez inicijalnih skokova. Prebacivanje estimiranoga signala s obzirom na mjereni se može primijetiti u četvrtoj derivaciji signala, ali i dalje unutar prihvatljivog raspona. Sada se slobodno može zaključiti da će i upravljanje biti puno bolje od prethodnog slučaja. Ako usporedimo poznate derivacije pozicije sa estimiranima dobije se rezultat prikazan slikom 6.15. Odmah se može uočiti optimalno ponašanje estimatora bez nepravilnosti u radu.

Kako su estimirane brzine i estimirane derivacije referentnih trajektorija zadovoljavajuće točnosti može se odmah ustanoviti da će slijeđenje sustava također biti na višoj razini točnosti. Slijeđenje referentne trajektorije uz korištenje novih estimiranih trajektorija daje rezultate sa slike 6.16

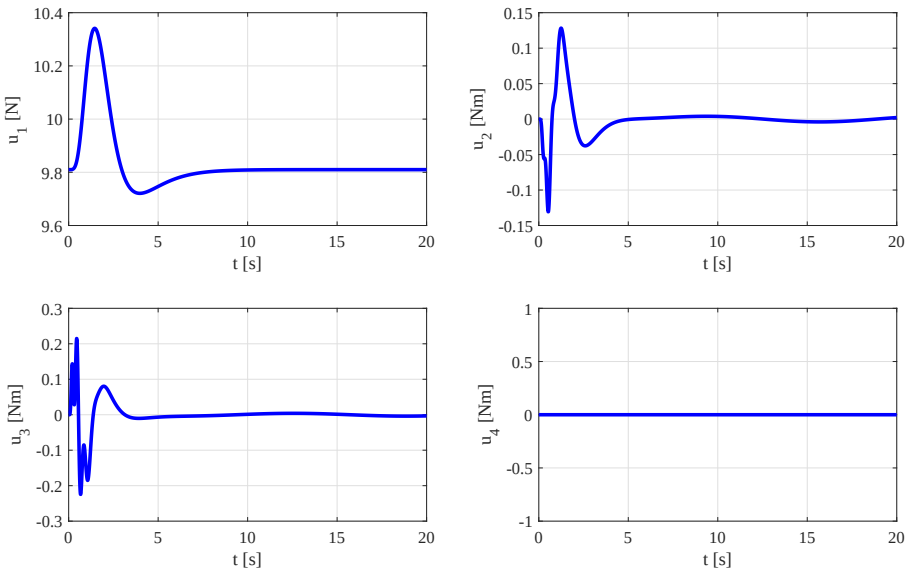


Slika 6.15: Usporedba poznate derivacije pozicija i estimiranih vrijednosti derivacija pozicije uz $\overline{x}_d, \overline{y}_d, \overline{z}_d$



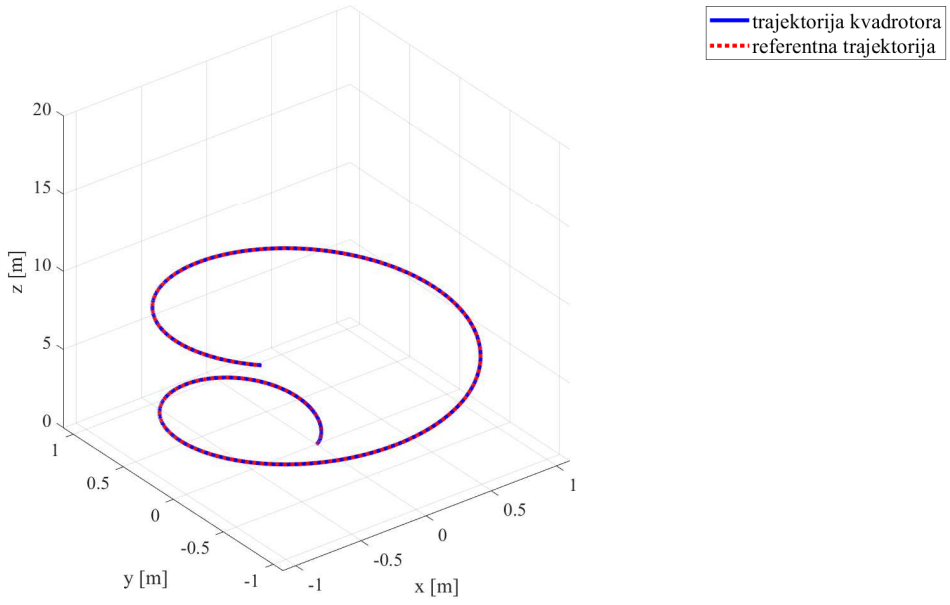
Slika 6.16: Slijeđenje referentnih trajektorija $\overline{x}_d$, $\overline{y}_d$ i $\overline{z}_d$ s estimiranim brzinama i referentnim trajektorijama

Upravljačke varijable dobivene upravljanjem ovog slučaja prikazane su ispod.



Slika 6.17: Upravljačke varijable u slučaju estimiranih derivacija referentnih trajektorija primjenom $\overline{x}_d$, $\overline{y}_d$ i $\overline{z}_d$

Signal upravljačkih varijabli sa slike 6.17 ima prihvatljive vrijednosti na početku simulacije odnosno skokovi su neusporedivo manji od slučaja 6.12 kada su se koristile početne referentne trajektorije x_d, y_d i z_d. Ukoliko još pogledamo zgodni 3D prikaz 6.18 uočavamo stvarno optimalno ponašanje sustava.



Slika 6.18: 3D prikaz slijeđenje referentne trajektorije uz korištenje $\hat{\overline{x}}_d$,$\hat{\overline{y}}_d$ i $\hat{\overline{z}}_d$

7 Zaključak

Kroz ovaj rad obrađen je algebarski estimator stanja i njegova primjena za estimaciju derivacija pozicija sustava drugog reda te sustava letjelice. Također estimirane su i referentne trajektorije za oba sustava. Izvedene su jednadžbe koje opisuju oba sustava te pripadni upravljački zakoni. Estimacijom brzina i korištenjem tih brzina unutar upravljačkih zakona dobili smo zadovoljavajuće rezultate za oba sustava. Sustav drugog reda imao je optimalno ponašanje i u slučaju kada su se primijenile estimirane derivacije referentnog signala, dok je kod letjelice prilikom primjene estimiranih derivacija signala dolazi do visokoamplitudnih tranzijentnih oscilacija. Tranzijentne oscilacije na početku simulacije uzrokovane su prirodom estimatora odnosno početnim referentnim trajektorijama koje su se kasnije ublažile primjenom posebne funkcije s kojom se množi referentna trajektorija. Ovim pristup došlo se do osjetno boljih rezultata koji su prihvatljivi u ovom slučaju upravljanja. S danim rezultati zaključilo se kako algebarski estimator stanja ima iznimne mogućnosti da uz minimalnu pogrešku odradi estimaciju signala, te da se taj isti estimirani signal upotrijebi u zatvorenom upravljačkom krugu bez gubitka stabilnosti. Pokušao se estimirati poremećaj na sustavu drugog reda s algebarskim estimator koji je osigurao odlične estimirane vrijednosti, ali njihova daljnja primjena nije bila moguća. Estimirani poremećaj se nije moguće uključiti u zatvoreni upravljački krug jer je uzrokovao velike nestabilnosti sustava, pa se za kompenzaciju poremećaja morao iskoristiti robusni estimator. Robusni estimator iako lošijih estimacijskih mogućnosti omogućuje prihvatljivo upravljanje uz kompenzaciju poremećaja sa zadržavanjem stabilnosti sustava.

Literatura

[1] Josip Kasać, Dubravko Majetić, and Danko Brezak. An algebraic approach to on-line signal denoising and derivatives estimation. *Journal of the Franklin Institute*, 355(15):7799 – 7825, 2018.

[2] Josip Kasać, Denis Kotarski, and Petar Piljek. Frequency-shifting-based algebraic approach to stable on-line parameter identification and state estimation of multi-rotor uav. *Asian Journal of Control*, 21(4):1619–1629, 2019.

[3] Josip Kasać. *Vođenje tehničkih sustava, materijali za predavanje i vježbe*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2007.

[4] Y. Huang and W. Xue. Active disturbance rejection control: Methodology and theoretical analysis. *ISA Transactions*, 53(4):963–976, 2014.

[5] Quadcopter. `https://en.wikipedia.org/wiki/Quadcopter`. Dostupno: 10.11.2019.

[6] Quadcopter camera drone in flight. `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/Quadcopter_camera_drone_in_flight.jpg`. Dostupno: 11.10.2019.

[7] Tommaso Bresciani. *Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter*. Department of Automatic Control Lund University, October 2008.

[8] T. Perez. *Ship Motion Control: Course Kepping and Roll Stabilisation using Rudder and Fins*. Springer-Verlag, 2005.

[9] Denis Kotarski, Petar Piljek, Hrvoje Brezak, and Josip Kasać. Chattering free tracking control of a fully actuated multirotor with passively tilted rotors. *Transactions of FAMENA*, 42(1):1–14, 2018.

[10] Denis Kotarski, Petar Piljek, Hrvoje Brezak, and Josip Kasać. Design of a fully actuated passively tilted multirotor uav with decoupling control system. In *2017 8th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE)*, pages 385–390, Prague, Chech Republic, 2017.

[11] Dubravko Majetić, Josip Kasać, and Danko Brezak. *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja - Viševarijabilni sustavi*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.

[12] Josip Kasać, Stojan Stevanović, Tihomir Žilić, and Josip Stepanić. Robust output tracking control of a quadrotor in the presence of external disturbances. *Transactions of Famena*, 37(4):29–42, 2013.

A Prilog

1. CD-R disk