Mikromehaničko modeliranje oštećenja u sinteriranom čeliku

Mlinarić, Matej

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:896913

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Matej Mlinarić

Zagreb, 2020.

Sveučilište u Zagrebu

Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Zdenko Tonković

Student:

Matej Mlinarić

Zagreb, 2020.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Velike zahvale mentoru prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću na povjerenju, brojnim korisnim savjetima, stručnom vođenju i pomoći tijekom izrade ovog diplomskog rada.

Zahvaljujem se doc. dr. sc. Tomislavu Lesičaru i prof. dr. sc. Tomislavu Jarku koji su također svojim znanjem i savjetima uvelike pomogli u izradi ovoga rada.

Nadalje se zahvaljujem dr. sc. Tamari Aleksandrov Fabijanić na ustupljenim rezultatima metalografskih analiza na kojima se temelji ovaj rad.

Hvala svim mojim prijateljima i kolegama uz koje je ovaj studij bio mnogo lakši.

Na kraju, veliko hvala mojim roditeljima i obitelji koji su mi bili velika podrška i pomoć od početka do kraja studiranja.

Matej Mlinarić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur. broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Matej Mlinarić** Mat. br.: 0035202928

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Mikromehaničko modeliranje oštećenja u sinteriranom čeliku**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Micromechanical modelling of damage in sintered steel**

Opis zadatka:

Upotreba materijala s naprednim svojstvima uz prihvatljive troškove proizvodnje je ključni detalj u razvoju modernih konstrukcija i strojnih dijelova. U sustavima prijenosa snage, upotreba tehnologije sinteriranih čelika pokazala je znatne prednosti u odnosu na klasičnu metalurgiju zbog relativno niskih cijena proizvodnje, ekološke prihvatljivosti, visokog udjela iskoristivosti sirovina i dobre redukcije buke u eksploataciji. Međutim, poroznost sinteriranih čelika uzrokuje pojavu koncentracija naprezanja, lokalizaciju deformacija i akumuliranje oštećenja u mikrostrukturi materijala što pospješuje popuštanje materijala. Za pouzdanu procjenu ponašanja materijala na makrorazini potrebno je stoga provesti modeliranje materijala na mikrorazini.

Na temelju rezultata metalografske analize u radu je potrebno provesti numeričku analizu oštećenja u sinteriranom čeliku Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3. Pritom je potrebno pojednostaviti geometriju mikrostrukture materijala te analizirati više različitih veličina reprezentativnih volumenskih elemenata (RVEa) materijala. Diskretizaciju na mikrorazini, kao i ispitnu epruvetu na makrorazini diskretizirati dvodimenzijskim konačnim elementima. Za provedbu analize na mikrorazini na rubove RVE-a dodijeliti rubne uvjete pomaka, odnosno periodične rubne uvjete. Za numeričke analize primijeniti program *Abaqus* koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Primjenjujući postojeće konstitutivne modele za oštećenje i elastoplastično ponašanje matrice materijala provesti višerazinsku mikro-makro analizu vlačnog testa. Numeričke rezultate simulacije usporediti s eksperimentalnim mjerenjima. Istražiti utjecaj veličine RVE-a, rubnih uvjeta na RVE-u i parametara materijala u konstitutivnim modelima na točnost numeričke simulacije.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Datum predaje rada:	Predviđeni datum obrane:
24. rujna 2020.	26. studenoga 2020.	30.11. – 4.12.2020.
Zadatak zadao:		Predsjednica Povjerenstva:
Prof. dr. sc. Zdenko Tonković		Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

SADRŽAJ I
POPIS SLIKA III
POPIS TABLICA VI
POPIS OZNAKA VII
SAŽETAK X
SUMMARY XI
1. UVOD 1
1.1. Metalurgija praha 1
1.2. Sinteriranje 2
1.3. Sinterirani čelici 3
2. KONSTITUTIVNI MATERIJALNI MODELI 7
2.1. Elastoplastični materijalni model 8
2.1.1. Linearno-elastično ponašanje materijala 8
2.1.2. Elastoplastično ponašanje materijala 10
2.2. Model oštećenja 20
2.2.1. Inicijacija oštećenja 21
2.2.2. Propagacija oštećenja 23
3. METODA KONAČNIH ELEMENATA 29
3.1. O metodi konačnih elemenata 29
3.2. Programski paket *Abaqus* 30
3.3. Jednadžba konačnog elementa za nelinearnu statičku analizu 30
3.4. Korišteni konačni elementi 36
4. VIŠERAZINSKO MODELIRANJE 39
4.1. Reprezentativni volumenski element 40
4.2. Računalna homogenizacija prvog reda 40
4.3. Direktna numerička simulacija 42
5. ODREĐIVANJE MINIMALNE VELIČINE RVE-A 43
5.1. Numerički modeli 44
5.2. Prikaz rezultata 47
6. VIŠERAZINSKA ANALIZA VLAČNOG TESTA 52
6.1. Analiza elastičnog područja 53
6.1.1. Makro analiza elastičnog područja 54

6.1.2. Mikro analiza elastičnog područja 55
6.2. Analiza elastoplastičnog područja 56
6.2.1. Makro analiza elastoplastičnog područja 57
6.2.2. Mikro analiza elastoplastičnog područja 59
6.3. Analiza elastoplastičnog područja s oštećenjem 61
6.3.1. Makro analiza elastoplastičnog područja s oštećenjem 61
6.3.2. Mikro analiza elastoplastičnog područja s oštećenjem 64
7. ZAKLJUČAK 66
LITERATURA 67

POPIS SLIKA

Slika 1.1 – Tijek proizvodnje sinteriranih dijelova [1] 2
Slika 1.2 – Tipični dijelovi od sinteriranog čelika [5] 3
Slika 1.3 – Utjecaj gustoće na mehanička svojstva [6] 4
Slika 1.4 – Utjecaj legirnih elemenata na vlačnu čvrstoću [6] 5
Slika 1.5 – Utjecaj udjela ugljika na modul elastičnosti (lijevo), granicu tečenja i vlačnu čvrstoću (sredina) te istezljivost (desno) kod sinteriranih čelika Astaloy Mo [7] 5
Slika 1.6 – Slika metalografije sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 6
Slika 2.1 – Konvencionalni dijagram razvlačenja [8] 7
Slika 2.2 – Von Misesova i Trescina ploha tečenja [13] 12
Slika 2.3 – Izotropno (lijevo) i kinematičko (desno) očvršćenje [13] 13
Slika 2.4 – Kruto-idealno plastični materijalni model 15
Slika 2.5 – Elastično-idealno plastični materijalni model 15
Slika 2.6 – Kruto linearno očvršćujući materijalni model 16
Slika 2.7 – Linearno očvršćenje 16
Slika 2.8 – Elastično-linearno očvršćujući materijalni model 17
Slika 2.9 – Ramberg-Osgoodov materijalni model 17
Slika 2.10 – Faze duktilnog oštećenja [19] 21
Slika 2.11 – Dijagram naprezanje-deformacija kod inicijacije i propagacije oštećenja [17] 23
Slika 2.12 – Poprečni presjek materijala s oštećenjem [20] 24
Slika 2.13 – Elastični odziv materijala s oštećenjem tijekom opterećenja i rasterećenja [20] 26
Slika 3.1 – Osnovni konačni elementi [17] 29
Slika 3.2 – Nelinearna veza između opterećenja i pomaka 32
Slika 3.3 – Newton-Raphsonova metoda 32
Slika 3.4 – CPE4 (lijevo) i CPE4R (desno) konačni elementi [17] 36
Slika 3.5 – Preslikavanje izvornog elementa u proizvoljni četverokut 37
Slika 4.1 – Višerazinsko (*multiscale*) modeliranje [23] 39
Slika 4.2 – Grafički prikaz odabira 2D RVE-a [26] 40
Slika 4.3 – Shema računalne homogenizacije prvog reda [22] 41
Slika 5.1 – Epruveta od sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na kojoj je izvršena metalografska analiza 43
Slika 5.2 – Dimenzije epruvete 43

Slika 5.3 – Slika metalografije uzorka (lijevo) i digitalizirana slika metalografije uzorka (desno) 44
Slika 5.4 – Korišteni RVE-ovi 45
Slika 5.5 – Položaj RVE-ova na uzorku mikrostrukture 45
Slika 5.6 – Numerički model horizontalnog (lijevo) i vertikalnog (desno) vlačnog testa RVE-ova 46
Slika 5.7 – Dijagram konvergencije ekvivalentnog von Misesovog naprezanja u središnjoj točki opterećene stranice za horizontalni vlačni test i RVE dimenzija 0,2×0,2 mm 47
Slika 5.8 – Polje pomaka [mm] (lijevo) i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja [MPa] (desno) za horizontalni (gore) i vertikalni (dolje) vlačni test i RVE dimenzija 0,2×0,2 mm .. 48
Slika 5.9 – Polje pomaka [mm] (lijevo) i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja [MPa] (desno) za horizontalni (gore) i vertikalni (dolje) vlačni test i RVE dimenzija 0,3×0,3 mm .. 48
Slika 5.10 – Polje pomaka [mm] (lijevo) i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja [MPa] (desno) za horizontalni (gore) i vertikalni (dolje) vlačni test i RVE dimenzija 0,4×0,4 mm .. 49
Slika 5.11 – Polje pomaka [mm] (lijevo) i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja [MPa] (desno) za horizontalni (gore) i vertikalni (dolje) vlačni test i RVE dimenzija 0,45×0,45 mm 49
Slika 5.12 – Dijagram normalno naprezanje-deformacija središnje točke opterećene stranice za horizontalni vlačni test RVE-ova 50
Slika 5.13 – Dijagram normalno naprezanje-deformacija središnje točke opterećene stranice za vertikalni vlačni test RVE-ova 50
Slika 5.14 – Dijagram normalno naprezanje-deformacija – presjek rezultata oba vlačna testa 51
Slika 6.1 – Dijagram naprezanje-deformacija sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7] 52
Slika 6.2 – Dijagram naprezanje-deformacija elastičnog područja sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7] 53
Slika 6.3 – Numerički model na makro razini 54
Slika 6.4 – Dijagram naprezanje-deformacija elastičnog područja dobiven analizom na makro razini 54
Slika 6.5 – Numerički model na mikro razini 55
Slika 6.6 – Dijagram naprezanje-deformacija elastičnog područja dobiven analizom na mikro razini 56

Slika 6.7 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7] 56
Slika 6.8 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja dobiven analizom na makro razini..... 57
Slika 6.9 – Utjecaj povećanja materijalnih parametara izotropnog očvršćenja na krivulju naprezanja na makro razini 58
Slika 6.10 – Utjecaj povećanja materijalnog parametra *b* na krivulju naprezanja na mikro razini 59
Slika 6.11 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja dobiven analizom na mikro razini 60
Slika 6.12 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja s oštećenjem, sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7] 61
Slika 6.13 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja s oštećenjem dobiven analizom na makro razini 62
Slika 6.14 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja s oštećenjem dobiven analizom na mikro razini..... 65
Slika 6.15 – Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije 65

POPIS TABLICA

Tablica 5.1 – Dimenzije i poroznost RVE-ova 45
Tablica 5.2 – Materijalna svojstva elastično-idealno plastičnog materijalnog modela..... 46
Tablica 6.1 – Materijalni parametri sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7] 52
Tablica 6.2 – Kalibracija modula elastičnosti na mikro razini..... 55
Tablica 6.3 – Elastoplastični materijalni parametri za makro analizu 57
Tablica 6.4 – Kalibracija granice tečenja na mikro razini..... 60
Tablica 6.5 – Kalibracija eksponenta α na makro razini..... 62
Tablica 6.6 – Parametri oštećenja za makro analizu na jednom konačnom elementu 63
Tablica 6.7 – Prikaz ovisnosti ekvivalentnog plastičnog pomaka o mreži konačnih elemenata 63

POPIS OZNAKA

Latinične oznake

Oznaka	*Jedinica*	*Opis*
a_i	-	nepoznati parametri interpolacijskih polinoma
$\mathbf{B}$	-	operator rubnih veličina
$\mathbf{D}, D_{ijkl}$	-	tenzor elastičnosti
$\mathbf{D}^{\mathrm{ep}}, D_{ijkl}^{\mathrm{ep}}$	-	elastoplastični tenzor krutosti
$\mathbf{D}_{\mathrm{e}}$	-	diferencijalni operator uvjeta ravnoteže
$\mathbf{D}_{\mathrm{k}}$	-	kinematički diferencijalni operator
D, d	-	varijabla oštećenja
E	$\mathrm{N/m^2}$	modul elastičnosti, Youngov modul
E_{s}	$\mathrm{N/m^2}$	sekantni modul elastičnosti
E_{t}	$\mathrm{N/m^2}$	tangentni modul elastičnosti
$\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$	-	vektor čvornih sila poradi vanjskog opterećenja
$\mathbf{F}_{\mathrm{i}}$	-	vektor unutarnjih čvornih sila
F	N	sila
f	-	funkcija tečenja, funkcija graničnog stanja
G	$\mathrm{N/m^2}$	modul smicanja
g	-	plastični potencijal
I_1, I_2, I_3	-	invarijante tenzora naprezanja
J_1, J_2, J_3	-	invarijante devijatora tenzora naprezanja
$\mathbf{K}$	-	globalna matrica krutosti
$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}$	-	globalna tangencijalna matrica krutosti
K	$\mathrm{N/m^2}$	modul plastičnosti
$\mathbf{k}_{\mathrm{e}}$	-	lokalna linearno elastična matrica krutosti
$\mathbf{k}_{\mathrm{eu}}$	-	lokalna elastična matrica krutosti
$\mathbf{k}_{\mathrm{T}}$	-	lokalna tangencijalna matrica krutosti
$\mathbf{k}_{\mathrm{u}}$	-	lokalna matrica početnih pomaka

$\mathbf{k}_\sigma$	-	lokalna matrica početnih naprezanja
L	m	karakteristična duljina elementa
$\mathbf{N}$	-	matrica funkcija oblika
$\mathbf{N}_s$	-	matrica rubnih funkcija oblika
p	N/m^2	hidrostatski tlak
$\mathbf{q}$	N/m^2	tenzor povratnog naprezanja
$\mathbf{q}$	-	vektor volumenskih sila
$\mathbf{q}_b$	-	vektor površinskog opterećenja
q	N/m^2	ekvivalentno von Misesovo naprezanje
$\mathbf{R}$	-	globalni vektor čvornih sila
$\mathbf{R}_e$	-	globalni vektor vanjskih sila
$\mathbf{R}_i$	-	globalni vektor unutarnjih sila
$\mathbf{R}_q$	-	operator površinskog opterećenja
$\mathbf{R}_u$	-	operator rubnih pomaka
R_m	N/m^2	vlačna čvrstoća
$\mathbf{r}_e$	-	lokalni vektor vanjskih sila
$\mathbf{r}_i$	-	lokalni vektor unutarnjih sila
$\mathbf{S}$	N/m^2	tenzor naprezanja
S	m^2	površina
S_{ij}	-	tenzor devijatora naprezanja
t	s	vrijeme
$\mathbf{u}$	-	vektor pomaka
$\mathbf{u}_b$	-	vektor rubnih pomaka
u, v, w	m	komponente pomaka u smjeru koordinatnih osi
$\mathbf{V}$	-	globalni vektor stupnjeva slobode
$\mathbf{v}$	-	lokalni vektor stupnjeva slobode
w_D	-	varijabla stanja
x, y, z	-	Kartezijeve koordinate
Y	-	izotropno očvršćenje

Grčke oznake

Oznaka	*Jedinica*	*Opis*
$\boldsymbol{\alpha}$	N/m^2	tenzor povratnog naprezanja
$\boldsymbol{\gamma}$	N/m^2	tenzor relativnog naprezanja
δ_{ij}	-	Kroneckerov simbol
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	-	tenzor deformacije
ε	-	duljinska deformacija
$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}}$	-	tenzor elastične deformacije
$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$	-	tenzor plastične deformacije
$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}$	-	brzina ekvivalentne plastične deformacije
η	-	troosnost naprezanja
κ	-	parametar očvršćenja
λ	-	faktor opterećenja
λ, μ	-	Laméove elastične konstante
$\mathrm{d}\lambda$	-	plastični multiplikator
$\mathrm{d}\mu$	-	faktor proporcionalnosti
ν	-	Poissonov faktor
ξ, η, ζ	-	bezdimenzijske prirodne koordinate
ρ	kg/m^3	gustoća
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	N/m^2	tenzor naprezanja
σ	N/m^2	normalno naprezanje
σ_{y}	N/m^2	granica tečenja
σ_{Y0}	N/m^2	početna granica tečenja
τ	N/m^2	tangencijalno naprezanje

SAŽETAK

U modernim konstrukcijama i sustavima prijenosa snage, upotreba materijala od sinteriranih čelika danas je sve češća i neizbježna. Međutim, mikrostruktura sinteriranih čelika je izrazito porozna, što dovodi do pojave koncentracija naprezanja, lokalizacija deformacija i akumuliranja oštećenja u samoj mikrostrukturi materijala. Iz tog razloga, za pouzdanu procjenu ponašanja materijala na makrorazini potrebno je provesti modeliranje materijala na mikrorazini.

U ovom radu, na temelju dobivenih rezultata metalografske analize, provedeno je mikromehaničko modeliranje oštećenja u sinteriranom čeliku Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3. Pri modeliranju mikrostrukture materijala, korišten je reprezentativni volumenski element (RVE). Za numeričke analize korišten je programski paket *Abaqus* koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Uz korištenje postojećih konstitutivnih modela za oštećenje i elastoplastično ponašanje, provedena je procedura određivanja materijalnih karakteristika metalne matrice sinteriranog čelika.

Rad je podijeljen na sedam poglavlja. U prvom poglavlju, dan je kratki uvod i opis metalurgije praha, procesa sinteriranja te prikaz osnovnih svojstava sinteriranih čelika. U drugom poglavlju dana je teorijska podloga konstitutivnih materijalnih modela za elastoplastičnost i oštećenje koji su korišteni u numeričkim analizama. Treće poglavlje bavi se detaljnom analizom numeričkog modela metodom konačnih elemenata uz prikaz korištenih konačnih elemenata. U četvrtom poglavlju opisana je metoda višerazinskog modeliranja koja se koristi prilikom istraživanja mikrostrukture heterogenih materijala, te je uveden i objašnjen pojam RVE-a. U petom poglavlju provedene su numeričke mikrostrukturne analize odabranih RVE-ova kako bi se odredila minimalna veličina RVE-a koji će se koristiti u višerazinskoj analizi. U šestom poglavlju provedena je višerazinska analiza vlačnog testa. Pojedinačno je analizirano elastično područje, elastoplastično područje i elastoplastično područje s oštećenjem, te je modeliranjem na makro i mikro razini proveden postupak određivanja materijalnih karakteristika metalne matrice sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3. U posljednjem, sedmom poglavlju, dan je zaključak cijeloga rada.

Ključne riječi: Abaqus, elastoplastičnost, metoda konačnih elemenata, mikromehaničko modeliranje, mikrostruktura, numerička analiza, oštećenje, reprezentativni volumenski element (RVE), sinterirani čelik, višerazinsko modeliranje

SUMMARY

Today, the use of sintered steel materials in modern structures and power transmission systems is more and more frequent, and also inevitable. However, the microstructure of sintered steel is extremely porous, which leads to the phenomena such as stress concentrations, strain localizations and damage accumulations in the material microstructure. For this reason, to reliably assess the material behavior at the macro scale, it is necessary to model materials at the micro scale.

In this thesis, by using the obtained results of the metallographic analysis, the micromechanical modelling of damage in sintered steel Astaloy Mo+0,2C of density 6,5 g/cm^3 was performed. In the microstructure modelling, the representative volume element (RVE) is used. The finite element method software *Abaqus* is used for numerical analyses. By using the existing constitutive damage and elastoplastic material models, the method for determining material characteristics of the sintered steel's metal matrix was performed.

The thesis is divided into seven chapters. In the first chapter, a brief introduction and description of powder metallurgy and sintering process is given, along with the basic properties of sintered steels. The second chapter presents the theoretical background of the constitutive material models for elastoplasticity and damage used in the numerical analyses. The third chapter deals with a detailed analysis of the numerical model based on the finite element method with a presentation of used finite elements. The fourth chapter describes the multiscale modelling used in the study of the heterogeneous material microstructure and explains the concept of RVE. In the fifth chapter, numerical microstructural analyses of selected RVEs were performed to determine the minimum size of RVE which will be used in the multiscale analysis. In the sixth chapter, the multiscale analysis of the tensile test was performed. The elastic region, elastoplastic region and elastoplastic region with damage were analyzed individually and the method for determining material characteristics of the metal matrix of sintered steel Astaloy Mo+0,2C of density 6,5 g/cm^3 was performed by modelling at the macro and micro scale. In the final, seventh chapter, the conclusion of the whole thesis is given.

Keywords: Abaqus, damage, elastoplasticity, finite element method, micromechanical modelling, microstructure, multiscale modelling, numerical analysis, representative volume element (RVE), sintered steel

1. UVOD

1.1. Metalurgija praha

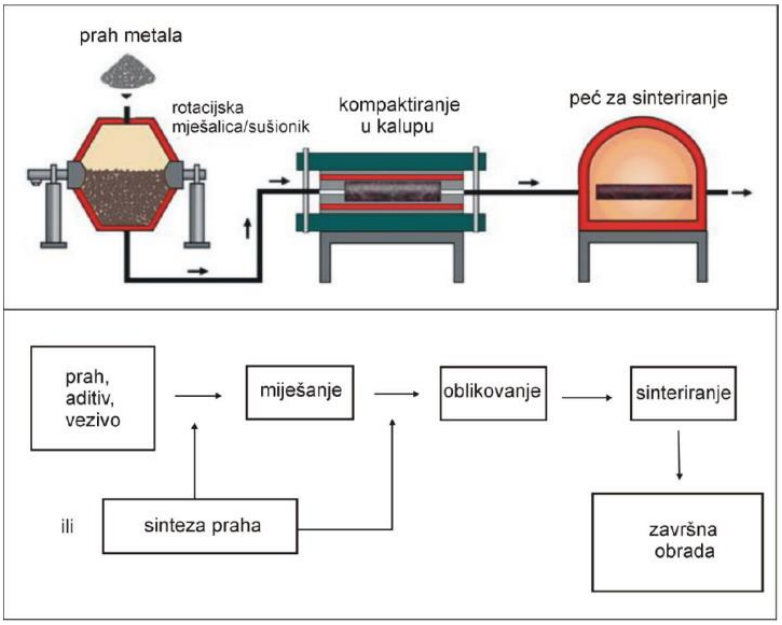
Konstantnim napretkom znanosti i tehnologije dolazi do sve veće upotrebe materijala s naprednim svojstvima uz prihvatljive troškove proizvodnje, što je ujedno i ključni detalj u razvoju modernih konstrukcija i strojnih dijelova uopće. Jedna od izuzetno važnih grana moderne industrije je metalurgija praha koja osigurava praktična rješenja problema vezanih za proizvodnju materijala s visokim talištem. U zadnje vrijeme ova je grana postala osnova za proizvodnju metala otpornih na visoke temperature kao i reznih alata ekstremno visoke tvrdoće. To je proces u kojem se čvrsti metal, legura ili keramika, u obliku čestica praha vrlo malog promjera, prevodi u inženjersku komponentu unaprijed određenog oblika i svojstava koja joj omogućuju upotrebu u većini slučajeva bez daljnje obrade.

Proizvodi dobiveni ovom tehnologijom imaju uglavnom jednaka, a ponekad i poboljšana svojstva od onih dobivenih tradicionalnim postupcima kao što su lijevanje, kovanje, skidanje strugotina i sl. Moguća je masovna proizvodnja dijelova u konačnom obliku te se postižu točnije dimenzije dijelova nego kod većine postupaka lijevanja. Mali su gubici materijala (oko 3%), a dijelovi dobiveni ovom tehnologijom posjeduju uniformnu sitnozrnu strukturu. Osim toga, automatizacijom procesa mogu se postići velike produktivnosti te je moguća izrada dijelova unaprijed zadane poroznosti. Jedan od glavnih nedostataka metalurgije praha je visoka cijena potrebne opreme i alata. Prahovi metala su također skupi te se javljaju specifične poteškoće u njihovu skladištenju (korozija, opasnost od požara…). Sama obrada uzrokuje promjene kod gustoće materijala, osobito kod dijelova složenih oblika.

Prah se definira kao fino usitnjene krute čestice. Inženjerski prahovi obuhvaćaju metale i keramike, a geometrijska svojstva su im dimenzije i razdioba čestica, oblik i unutarnja građa čestica te površina čestica. Osnovna tehnološka svojstva prahova su sposobnost tečenja, sabijanja i sinteriranja. Sposobnosti tečenja i sabijanja uvelike ovise o veličini i obliku čestica, a sabijanjem se dobivaju proizvodi veće gustoće i čvrstoće. Sposobnost sinteriranja je pokazatelj povećavanja čvrstoće veza između čestica praha, smanjenja poroznosti i povećanja gustoće proizvoda pri samom postupku sinteriranja. U metalurgiji praha pretežno se koriste prahovi željeza, čelici i aluminij, no koriste se i prahovi bakra i njegovih legura, super legura na bazi nikla i kobalta, vatrootporni metali kao što su molibden i volfram te neki karbidi metala. Tipični proizvodi metalurgije praha su zupčanici, lančanici, ležajevi, električni kontakti i sl. [1]-[3]

1.2. Sinteriranje

Jedan od osnovnih konvencionalnih postupaka metalurgije praha je sinteriranje. Sinteriranje se s praktičnog aspekta definira kao toplinska obrada praha ili kompaktnog komada na temperaturi nižoj od temperature taljenja glavnog konstituenta (obično $0{,}7T_t - 0{,}9T_t$) s ciljem povezivanja i poboljšavanja čvrstoće. Drugi naziv ovog postupka je srašćivanje, tj. spajanje čestica pri visokoj temperaturi. Kretanje atoma uzrokuje srašćivanje čestica. Što su čestice manje, imaju višu površinsku energiju te srašćuju brže. Čestice praha se povezuju zagrijavanjem na dovoljno visoku temperaturu, pri čemu dolazi do ubrzanih difuzijskih procesa između atoma čestica praha, njihovog međusobnog povezivanja te nastanka čvrstog komada. To je vrlo složen proces koji uključuje nekoliko mehanizama prijenosa materijala, tj. skupljanje, konsolidaciju, nastanak čvrste otopine te nastanak konačne mikrostrukture materijala. Na slici 1.1 prikazan je tijek proizvodnje sinteriranih dijelova. [1]



Slika 1.1 – Tijek proizvodnje sinteriranih dijelova [1]

Osnovni parametri procesa sinteriranja su [1]:

- **temperatura i vrijeme** – veća temperatura znači kraće vrijeme sinteriranja koje je potrebno za postizanje željenog stupnja povezanosti čestica praha;
- **geometrijska struktura čestica praha** – prahovi od finih čestica ili čestica s visokom unutarnjom poroznošću sinteriraju brže od prahova s velikim česticama;
- **sastav smjese praha** – komponente smjese prahova odabiru se s ciljem postizanja željenih fizikalnih svojstava i kontroliranja promjena dimenzija tijekom sinteriranja;

- **sastav zaštitne atmosfere u peći za sinteriranje** – zaštitna atmosfera štiti materijal koji se sinterira od oksidacije, smanjuje moguće prisutne zaostale okside te sprječava dekarbonizaciju materijala koji sadrže ugljik i obrnuto, sprječava karbonizaciju materijala koji ne sadrže ugljik.

1.3. Sinterirani čelici

Kako su u ovom radu numeričke analize provedene na sinteriranom čeliku, u nastavku ovog poglavlja dana su osnovna obilježja i karakteristike ovakve vrste materijala. Naime, u sustavima prijenosa snage, upotreba tehnologije sinteriranih čelika pokazala je znatne prednosti u odnosu na klasičnu metalurgiju zbog relativno niskih cijena proizvodnje, ekološke prihvatljivosti, visokog udjela iskoristivosti sirovina i dobre redukcije buke u eksploataciji. Iz tog razloga, modeliranje mikrostrukture ovakvih materijala kao i pouzdana procjena njihovog ponašanja su od iznimne važnosti za buduća istraživanja.

Proizvodnja sinteriranih čelika razvila se nakon već gotovo potpuno razvijenih postupaka sinteriranja tvrdih metala, a danas su oni jedni od najvažnijih proizvoda metalurgije praha. Njihova svojstva znatno ovise o njihovom kemijskom sastavu, načinu proizvodnje, poroznosti i završnoj obradi. Ovisnost mehaničkih svojstava o poroznosti je najznačajnija za dinamička svojstva te je izraženija za istezanje pri lomu nego za vlačnu čvrstoću. Danas se masovno proizvode legure s bakrom, niklom i molibdenom kao legirnim elementima koji u metalurgiji praha pokazuju praktične prednosti u odnosu na one koji se koriste u konvencionalnoj tehnologiji čelika, kao što su krom, aluminij i mangan. Krom, aluminij i mangan imaju visoki afinitet prema kisiku pa dolazi do oksidacije. Dijelovi od sinteriranih čelika se pretežno koriste u autoindustriji, a neki od tipičnih dijelova prikazani su na slici 1.2. [1]-[4]

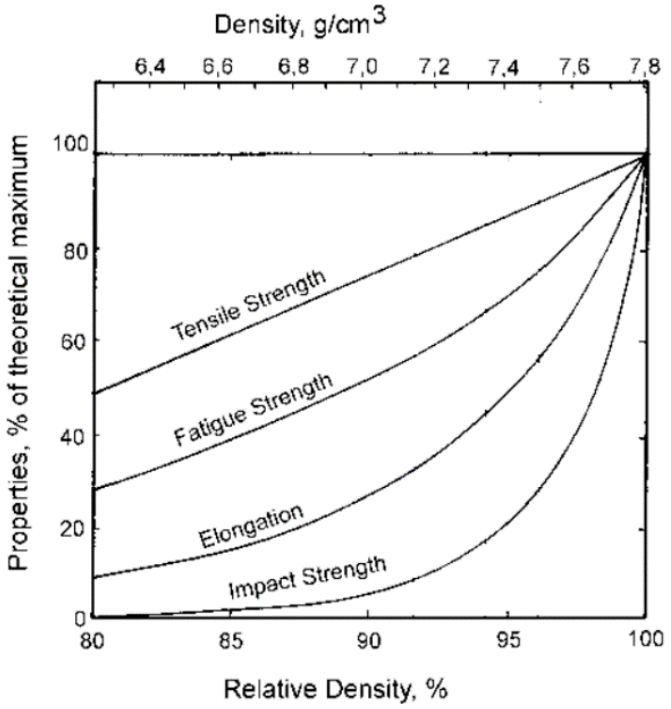


Slika 1.2 – Tipični dijelovi od sinteriranog čelika [5]

Općenito, postoji nekoliko načina kako dobiti željena svojstva čvrstoće kod sinteriranih materijala na bazi željeza. Najvažniji parametri su [6]:

- gustoća,
- uvjeti sinteriranja,
- legirni elementi,
- uvjeti toplinske obrade.

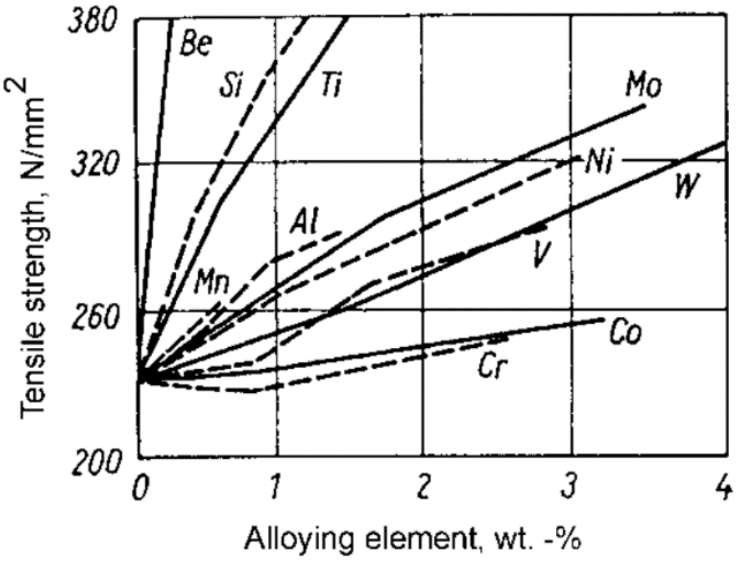
Gustoća i poroznost materijala su od iznimne važnosti i bitno utječu na mehanička svojstva. S povećanjem gustoće, vlačna čvrstoća i lomna žilavost rastu približno linearno, a istezljivost i udarna žilavost eksponencijalno, prema slici 1.3.



Slika 1.3 – Utjecaj gustoće na mehanička svojstva [6]

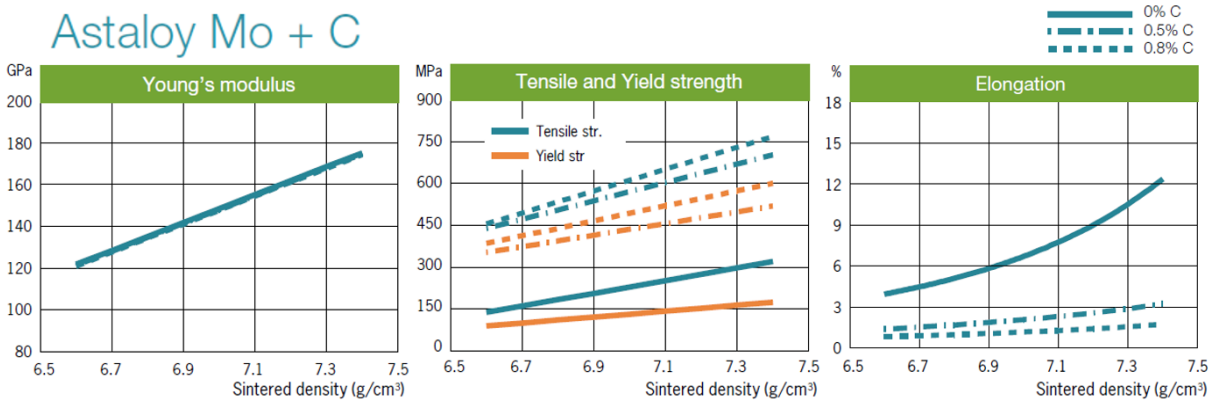
Uvjeti sinteriranja određuju brzinu i učinkovitost spajanja čestica praha te zaobljivanja pora, brzinu homogenizacije legirnih elemenata i njihovu osjetljivost na oksidaciju. U metalurgiji praha željeza, sinteriranje se obično provodi na temperaturama od 1120°C do 1150°C. Potrebno vrijeme iznosi 20 do 30 min, a daljnja obrada nije ekonomski isplativa budući da ne dolazi do bitnijih poboljšanja svojstava.

Legirni elementi otopljeni u osnovnom metalu dovode do stvaranja raznih mikrostruktura i povećavaju otpornost materijala na deformiranje, a utjecaj pojedinih legirnih elemenata na vlačnu čvrstoću materijala prikazan je na slici 1.4.



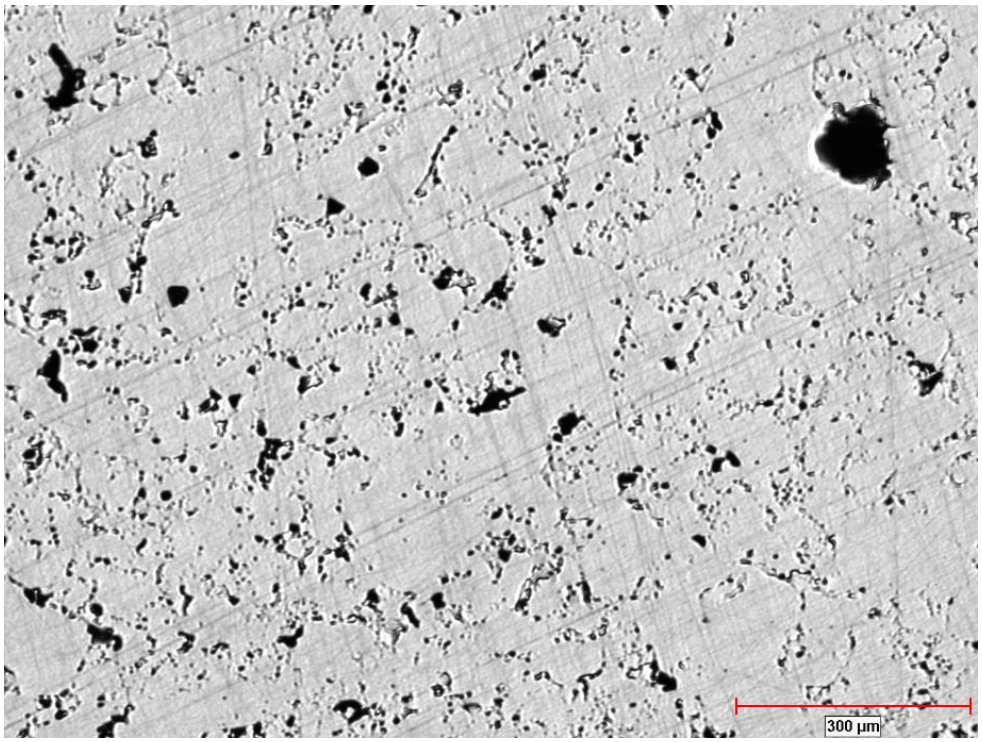
Slika 1.4 – Utjecaj legirnih elemenata na vlačnu čvrstoću [6]

U ovom je radu analiziran sinterirani čelik Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3. Astaloy Mo je oznaka za atomizirani željezni prah legiran s 1,5% molibdena. S dodacima ugljika od 0,2 do 0,8% ima izvrsnu kaljivost. Na slici 1.5 vidljiv je utjecaj udjela ugljika na modul elastičnosti, granicu tečenja, vlačnu čvrstoću i istezljivost. [6], [7]



Slika 1.5 – Utjecaj udjela ugljika na modul elastičnosti (lijevo), granicu tečenja i vlačnu čvrstoću (sredina) te istezljivost (desno) kod sinteriranih čelika Astaloy Mo [7]

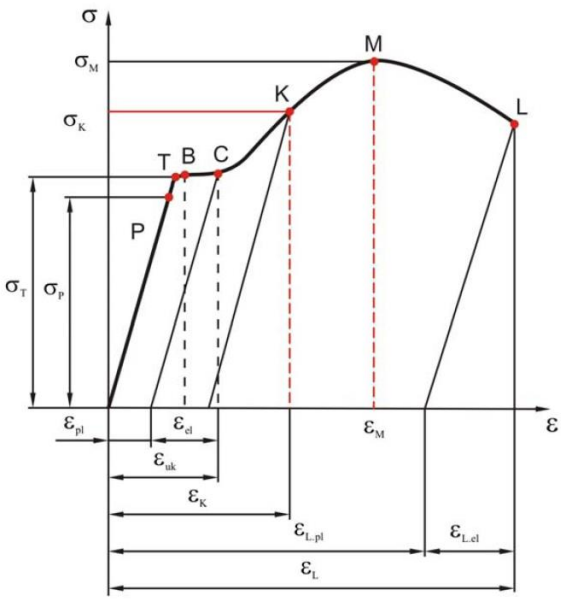
Kao što je ranije rečeno, bitnu ulogu kod mehaničkih svojstava ima i poroznost mikrostrukture materijala. Poroznost se definira kao omjer volumena pora (praznih prostora) prema bruto volumenu. Poroznost sinteriranih čelika uzrokuje pojavu koncentracija naprezanja, lokalizaciju deformacija i akumuliranje oštećenja u mikrostrukturi materijala što pospješuje popuštanje materijala. Na slici 1.6 prikazan je uzorak porozne mikrostrukture sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 dobiven metalografskom analizom.



Slika 1.6 – Slika metalografije sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3

2. KONSTITUTIVNI MATERIJALNI MODELI

Kod analize naprezanja i deformacija deformabilnih tijela, potrebno je poznavati konstitutivne jednadžbe materijala. Konstitutivne relacije definiraju odnos između naprezanja i deformacija. Većina podataka o mehaničkim svojstvima materijala, pa tako i odnos naprezanja i deformacija, određuje se jednostavnim vlačnim eksperimentom ispitne epruvete koji se provodi na kidalici. Na slici 2.1 prikazan je konvencionalni dijagram razvlačenja dobiven vlačnim testom.



Slika 2.1 – Konvencionalni dijagram razvlačenja [8]

Dio od ishodišta do točke P prikazuje linearno-elastično ponašanje materijala u kojem vrijedi poznati Hookeov zakon, $\sigma = E\varepsilon$, koji daje linearnu vezu između naprezanja i deformacija preko modula elastičnosti E. Što je veća vrijednost modula elastičnosti, za istu deformaciju ε je potrebno veće naprezanje σ pa je i Hookeov pravac strmiji. Svako naprezanje u ovom području izaziva samo elastičnu deformaciju koja je povratna, tj. nakon rasterećenja ona iščezava. Točka P predstavlja granicu proporcionalnosti, σ_P, do koje vrijedi linearni Hookeov zakon. Malo iznad granice proporcionalnosti nalazi se granica elastičnosti, σ_E (nije označeno na dijagramu), koja predstavlja najviše naprezanje do kojeg se materijal ponaša elastično. Rasterećenjem materijala u tom području, on se vraća u prvobitni oblik i veličinu.

Sljedeća točka na dijagramu je točka T, koja predstavlja granicu tečenja materijala, oznaka σ_T ili σ_y, kod koje se ispitna epruveta počinje produljivati bez povratka u prvobitni oblik. Tečenje obično karakteriziraju dvije vrijednosti, gornja i donja granica, pa tako dio na dijagramu od B

do C predstavlja plato plastičnog tečenja. Materijal ulazi u plastično područje i rasterećenjem epruvete dolazi do pojave prve trajne plastične deformacije, a ukupna deformacija je tada jednaka zbroju elastične i plastične deformacije.

Uzme li se za razmatranje točka K, rasterećenje slijedi pravac u kojem i dalje vrijedi Hookeov zakon, tj. pravac rasterećenja ima isti nagib kao i Hookeov pravac u linearno-elastičnom dijelu. Dio od C do M je područje očvršćenja materijala. Povećanjem sile opterećenja, raste naprezanje, a time i deformacija. Naprezanje kod maksimalne sile, tj. u točki M, naziva se vlačna čvrstoća, oznaka σ_{M} ili R_{m}. Bitno je napomenuti da to nije maksimalno naprezanje, već naprezanje pri maksimalnoj sili. Nakon točke M slijedi omekšanje materijala sve do točke L koja predstavlja naprezanje kod kojeg dolazi do loma epruvete i naziva se konačno ili lomno naprezanje, σ_{L}. [8]

2.1. Elastoplastični materijalni model

2.1.1. Linearno-elastično ponašanje materijala

Kako je ranije pokazano, linearno-elastično ponašanje opisano je Hookeovim zakonom. Veza između naprezanja i deformacija zapisuje se u obliku

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{\mathrm{e}}, \tag{2.1}$$

gdje D_{ijkl} predstavlja matricu elastičnosti opisanu tenzorom četvrtog reda, a naprezanje σ_{ij} i elastična deformacija $\varepsilon_{kl}^{\mathrm{e}}$ su tenzori drugog reda. Za izotropne materijale (materijali čija su svojstva jednaka u svim smjerovima), matrica elastičnosti je simetrična i čine ju dvije nezavisne konstante, tj. modul elastičnosti E i modul smicanja G. Veza između ovih dviju konstanti može se prikazati preko Poissonova faktora ν, prema jednadžbi

$$\frac{E}{G} = 2\left(1+\nu\right). \tag{2.2}$$

Matrica elastičnosti računa se prema jednadžbi

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right). \tag{2.3}$$

U relaciji (2.3) λ i μ su Laméove elastične konstante koje se računaju na sljedeći način,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$
$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{2.4}$$

a δ_{ij} je Kroneckerov simbol za koji vrijedi

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \tag{2.5}$$

Tenzor naprezanja se sastoji od normalnih i tangencijalnih naprezanja, a može se podijeliti na sferni i devijatorski dio kako slijedi

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + S_{ij}. \tag{2.6}$$

Prvi član u relaciji (2.6) predstavlja sferni dio koji kod izotropnih materijala utječe isključivo na promjenu volumena, tj. veličine tijela u deformiranju, a drugi član je devijatorski dio koji mijenja oblik tijela. Sferni dio tenzora naprezanja naziva se još i hidrostatski dio te se može zapisati na sljedeći način,

$$\sigma_{ij}^{0} = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = p. \tag{2.7}$$

Budući da kod plastičnih deformacija ne dolazi do promjene volumena, već samo do promjene oblika, razmatra se samo devijatorski dio, S_{ij}, za koji vrijedi

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}. \tag{2.8}$$

Pri rješavanju stvarnih problema, uvode se određene pretpostavke zasnovane na fizikalnim činjenicama i empirijskim dokazima. Veliki dio takvih problema može se svesti na matematički dvodimenzionalni oblik, pri čemu se razlikuju dva slučaja:

- stanje ravninske deformacije,
- stanje ravninskog naprezanja.

Kod ravninskog stanja deformacija, elastično tijelo ima jednake pomake točaka u međusobno paralelnim ravninama i ti pomaci su neovisni o koordinati okomitoj na te ravnine, dok je ravninsko stanje naprezanja opisano naprezanjima koja postoje u međusobno paralelnim ravninama i koja su neovisna o koordinati okomitoj na te ravnine. [9]

2.1.2. Elastoplastično ponašanje materijala

Za razliku od elastične deformacije koja je povratna, plastična deformacija je trajna i nepovratna. Za slučaj bez početne deformacije, ukupna deformacija jednaka je zbroju elastične i plastične,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}} + \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}, \tag{2.9}$$

pa se relacija (2.1) sada može zapisati kao

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\mathrm{p}}\right), \tag{2.10}$$

gdje je σ_{ij} Cauchyjev tenzor naprezanja, a ε_{ij} Green-Lagrangeov tenzor deformacija za koji vrijedi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right), \tag{2.11}$$

pri čemu je u_i vektor pomaka. Za slučaj malih deformacija, treći član u zagradi iščezava.

Pri jednoosnom stanju naprezanja, materijal ulazi u plastično područje onda kada se u njemu pojave naprezanja veća od granice tečenja, σ_{y}. Prema tome, uvjet, odnosno kriterij tečenja tada glasi $\sigma = \sigma_{\mathrm{y}}$. Međutim, u općem slučaju za višeosno stanje naprezanja uvjet tečenja je potrebno opisati skalarnom funkcijom tečenja koja ovisi o naprezanju σ_{ij}, plastičnoj deformaciji $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$ i povijesti plastične deformacije izraženu parametrom očvršćenja κ,

$$f = f\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}, \kappa\right) = 0. \tag{2.12}$$

Svako stanje naprezanja u nekoj čestici tijela određeno je jednom točkom u prostoru naprezanja. Jednadžba (2.12) predstavlja implicitnu jednadžbu zatvorene hiperplohe nazvanu ploha tečenja. Ukoliko se razmatrana točka nalazi unutar prostora kojeg omeđuje ploha tečenja, materijal je u

elastičnom području i vrijedi $f<0$. Ako se točka nalazi na samoj plohi tečenja, tada je materijal u plastičnom području pa vrijedi $f=0$. Slučaj $f>0$ bi značio da je točka izvan plohe tečenja, no takva nejednakost nije moguća budući da se stanje naprezanja ne može nalaziti izvan plohe tečenja.

S obzirom da se funkcija tečenja izvodi iz invarijanti tenzora naprezanja, sljedeće relacije prikazuju tri glavne invarijante tenzora naprezanja,

$$I_1=\sigma_{ii},\quad I_2=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij},\quad I_3=\frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{kl}\sigma_{li}. \tag{2.13}$$

Analogno slijede invarijante devijatora tenzora naprezanja,

$$J_1=S_{ii},\quad J_2=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij},\quad J_3=\frac{1}{2}S_{ik}S_{kl}S_{li}. \tag{2.14}$$

Kod izotropnih materijala funkcija tečenja ne ovisi o pravcima glavnih naprezanja, već samo o glavnim naprezanjima,

$$f\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right)=0. \tag{2.15}$$

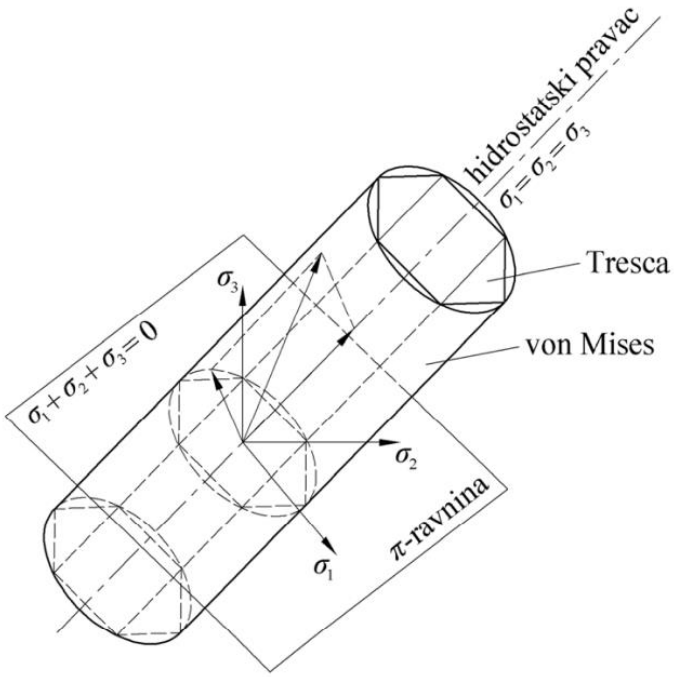
Eksperimentima je pokazano da tečenje materijala ne ovisi o hidrostatskom pritisku, tj. srednjem normalnom naprezanju σ_{ii}. To znači da je tečenje također neovisno i o prvoj invarijanti tenzora naprezanja. Kako se za plastične deformacije razmatra samo devijatorski dio tenzora naprezanja, slijedi da funkcija tečenja ovisi samo o drugoj i trećoj invarijanti devijatora tenzora naprezanja,

$$f\left(J_1,J_2\right)=0. \tag{2.16}$$

Funkcija tečenja prikazuje se u trodimenzijskom prostoru naprezanja u kojem su koordinatne osi zapravo glavna naprezanja, a pravac kojem su kutovi sa sve tri koordinatne osi jednaki naziva se hidrostatski pravac. U točkama tog pravca sva tri glavna naprezanja su jednaka. Ravnina okomita na taj pravac koja prolazi kroz ishodište naziva se π-ravnina, a opisana je jednadžbom

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0. \tag{2.17}$$

Ravnine paralelne toj ravnini nazivaju se devijatorske ravnine. Ploha tečenja siječe π-ravninu u krivulji nazvanoj krivulja tečenja. Srednje normalno naprezanje σ_{ii} u bilo kojoj točki π-ravnine jednako je nuli. Vektor stanja naprezanja koji polazi iz ishodišta moguće je rastaviti na sferni i devijatorski dio. Sferni dio čini komponenta vektora paralelna s hidrostatskim pravcem, a devijatorski dio komponenta okomita na pravac. Najčešće korišteni kriteriji tečenja materijala su von Misesov i Trescin kriterij tečenja, a njihove plohe tečenja prikazane su na slici 2.2. Vidljivo je da von Misesova ploha tečenja poprima oblik kružnog cilindra, a Trescina ploha oblik pravilne šesterostrane prizme. [10]-[16]



Slika 2.2 – Von Misesova i Trescina ploha tečenja [13]

Von Misesov kriterij tečenja pretpostavlja da tečenje materijala nastupa samo onda kada druga invarijanta tenzora naprezanja dosegne kritičnu vrijednost, a jednadžba se zapisuje kao

$$f\left(J_2\right)=J_2-k^2=0, \tag{2.18}$$

pri čemu je k materijalno svojstvo. S druge strane, prema Trescinom kriteriju, do tečenja materijala dolazi kada maksimalno posmično naprezanje dosegne kritičnu vrijednost, a zapisuje se u obliku

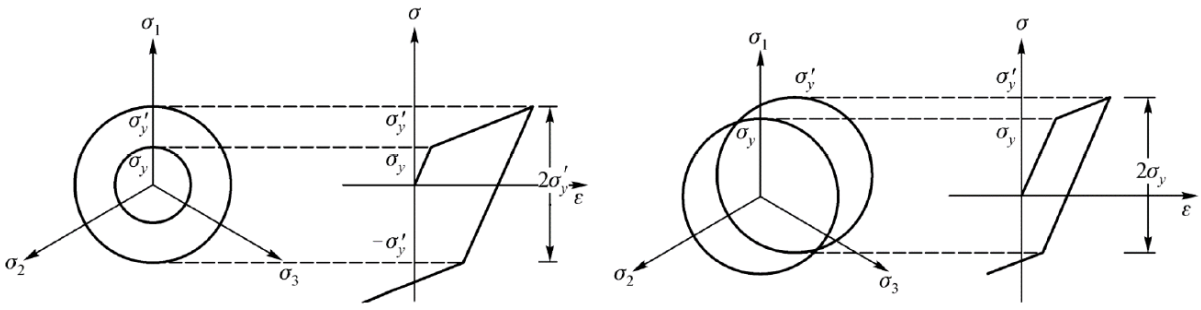
$$f\left(\tau_{\max}\right)=\tau_{\max}-k^2=0. \tag{2.19}$$

Sljedeći pojam koji je potrebno opisati je očvršćenje materijala. Naime, za neočvršćujući materijal krivulja tečenja ostaje konstantna tijekom deformiranja. Kako je ranije rečeno, stanje naprezanja se ne može nalaziti izvan plohe tečenja, tj. ne može vrijediti $f > 0$. Ovakvo ponašanje opisuje se zakonom očvršćenja. Kod očvršćujućeg materijala dolazi do promjene oblika i veličine plohe tečenja, odnosno oblik i veličina krivulje tečenja ovise o kompletnoj povijesti deformiranja. Najčešće se koriste dva modela očvršćenja, izotropno i kinematičko očvršćenje.

Izotropno očvršćenje se temelji na izotropnosti materijala i predstavlja jednoliko širenje plohe tečenja u svim smjerovima tako da središte plohe ostaje nepromijenjeno pri čemu ne dolazi do promjene granice tečenja s pojavom plastične deformacije.

Kod kinematičkog očvršćenja, početna ploha tečenja se prilikom procesa plastičnog deformiranja translatira kao kruto tijelo u prostoru naprezanja bez rotiranja i promjene veličine. Ovaj model razmatra tijelo kao neizotropni kontinuum i uzima u obzir Bauschingerov efekt koji predstavlja reduciranje granice tečenja u drugom ciklusu opterećivanja ako se opterećenju promijeni predznak.

U stvarnosti, proces očvršćenja se sastoji od kombinacije gore navedenih modela, pri čemu se ploha tečenja istovremeno širi i translatira u prostoru naprezanja kao kruto tijelo. Grafički prikaz izotropnog i kinematičkog očvršćenja prikazan je na slici 2.3.



Slika 2.3 – Izotropno (lijevo) i kinematičko (desno) očvršćenje [13]

Izotropno očvršćenje se preko von Misesovog kriterija tečenja može opisati izrazom

$$f\left(J_2\right) = J_2 - \left(k + Y\right)^2 = 0, \tag{2.20}$$

gdje Y predstavlja izotropno očvršćenje.

Za slučaj von Misesovog kriterija tečenja, kinematičko očvršćenje se opisuje izrazom

$$f\left(\mathbf{S}-\mathbf{q}\right)-k^2=0, \tag{2.21}$$

pri čemu $\mathbf{S}$ predstavlja tenzor naprezanja, a $\mathbf{q}$ je tenzor drugog reda koji se naziva tenzor povratnog naprezanja (*backstress*) i koji sadrži koordinate centra trenutne plohe tečenja. Neki od najčešće korištenih oblika kinematičkog očvršćenja su Pragerovo i Zieglerovo očvršćenje.

Osnova Pragerova kinematičkog očvršćenja je određivanje tenzora povratnog naprezanja $\mathbf{q}$, a najjednostavniji način je da se pretpostavi linearna veza između $\mathrm{d}\mathbf{q}$ i tenzora inkrementa plastične deformacije $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$, prema jednadžbi

$$\mathrm{d}\mathbf{q}=c\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \tag{2.22}$$

gdje je c konstanta materijala. Pragerovo očvršćenje se zapravo ne poklapa u potpunosti s definicijom kinematičkog očvršćenja jer se prilikom transformacije javlja i promjena veličine plohe tečenja.

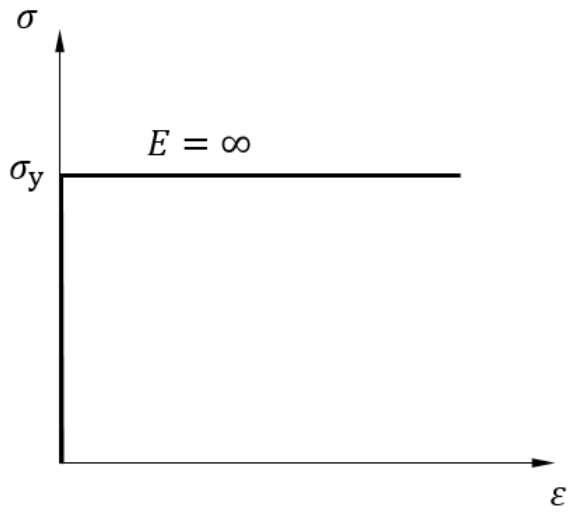
U svrhu boljeg opisivanja čistog kinematičkog očvršćenja, razvijeno je Zieglerovo očvršćenje koje je u principu modifikacija Pragerova očvršćenja. Uvodi se pretpostavka da se translacija odvija u smjeru relativnog naprezanja $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{S}-\mathbf{q}$ tako da vrijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{q}=\mathrm{d}\mu\left(\mathbf{S}-\mathbf{q}\right), \tag{2.23}$$

gdje je $\mathrm{d}\mu$ faktor proporcionalnosti ovisan o povijesti deformacije i o samom materijalu. Na ovaj se način ploha tečenja translatira, a da pri tome ne dolazi do promjene veličine i oblika kinematičkog očvršćenja. [12]

U svrhu olakšanja analitičke analize nelinearnog plastičnog područja u dijagramu razvlačenja, uvedena su pojednostavljenja, tj. idealizacije dijagrama. Idealizirani dijagrami zadržavaju sve bitne značajke stvarnih dijagrama, a zanemarive pojedinosti su ispuštene. U nastavku slijedi prikaz materijalnih modela koji su opisani idealiziranim dijagramima. [16]

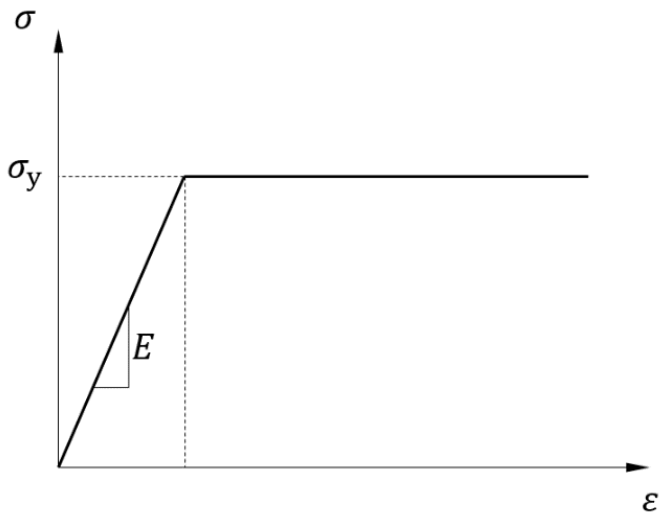
Pri obradi materijala deformiranjem pri čemu se zanemaruju elastične deformacije koristi se kruto-idealno plastični materijalni model prikazan na slici 2.4. Nelinearno plastično ponašanje opisano je konstantnim naprezanjem uslijed povećanja plastičnih deformacija.



Slika 2.4 – Kruto-idealno plastični materijalni model

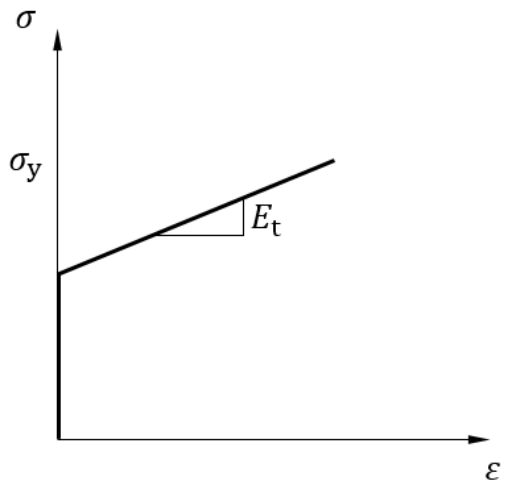
Elastično-idealno plastični materijalni model se primjenjuje pri proračunavanju konstrukcija načinjenih od materijala s izraženim platoom plastičnog tečenja. Za izotropno elastično-idealno plastične materijale, slika 2.5, kod kojih u tijeku plastičnog deformiranja ne dolazi do očvršćenja, funkcija tečenja ovisi samo o naprezanju,

$$f\left(\sigma_{ij}\right)=0\,. \tag{2.24}$$



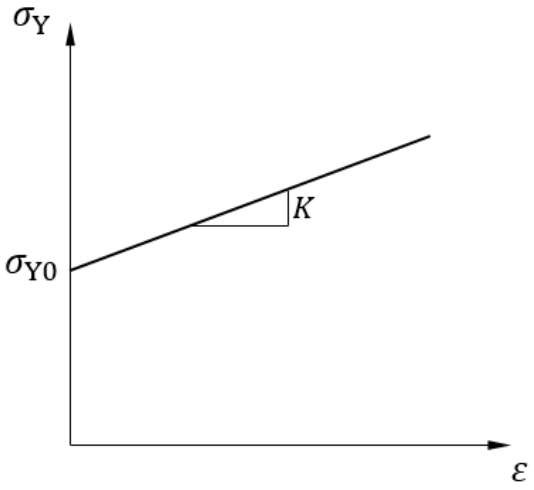
Slika 2.5 – Elastično-idealno plastični materijalni model

Kruto linearno očvršćujući materijalni model prikazan na slici 2.6 se koristi pri proračunu konstrukcija kod kojih se u obzir uzimaju samo područja plastičnih deformacija. Tangentni modul elastičnosti E_{t} predstavlja odnos naprezanja i plastičnih deformacija definiran kao linearna funkcija i manjeg je iznosa od modula elastičnosti E.



Slika 2.6 – Kruto linearno očvršćujući materijalni model

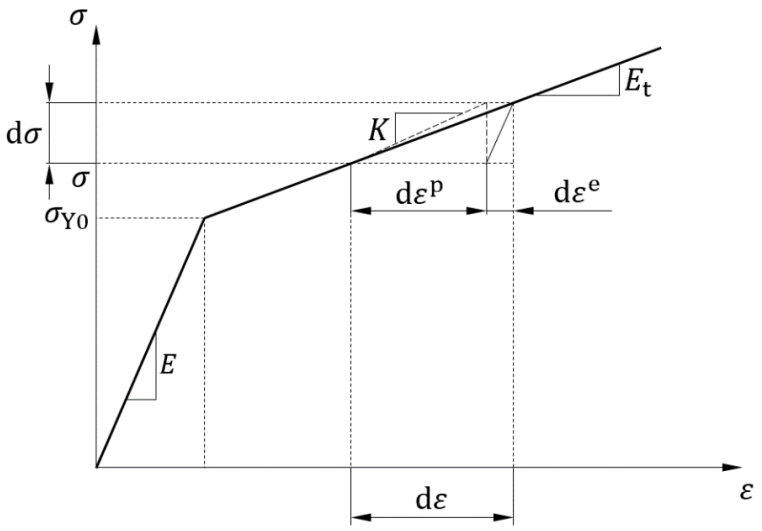
Elastično-linearno očvršćujući materijalni model se primjenjuje pri proračunu duktilnih materijala s neizraženom granicom tečenja u području malih deformacija. Na slici 2.7 prikazano je linearno očvršćenje pri čemu σ_{Y0} označava početnu granicu tečenja, a K je modul plastičnosti koji opisuje nagib.



Slika 2.7 – Linearno očvršćenje

Na slici 2.8 prikazan je dijagram ovisnosti naprezanja o ukupnoj deformaciji za elastično-linearno očvršćujući materijal. Veza između modula elastičnosti E, tangentnog modula E_t i modula plastičnosti K dana je izrazom

$$K = \frac{EE_t}{E - E_t}. \tag{2.25}$$

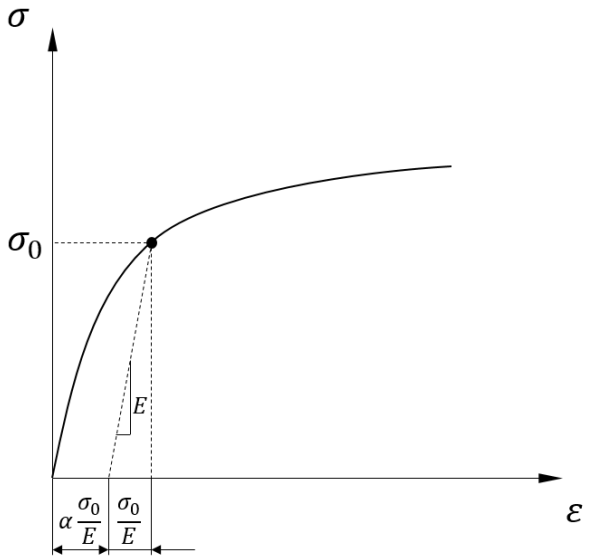


Slika 2.8 – Elastično-linearno očvršćujući materijalni model

Jedan od često korištenih materijalnih modela za opisivanje nelinearnog ponašanja materijala je Ramberg-Osgoodov materijalni model prikazan na slici 2.9. Ovaj je model prikladan za opisivanje materijala u kojem dolazi do procesa očvršćenja tijekom plastičnog deformiranja. Model pouzdano opisuje prijelaz iz područja elastičnih deformacija u područje plastičnih deformacija, a opisuje se izrazom

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{n-1}, \tag{2.26}$$

gdje je σ_0 granica tečenja, a α i n su parametri materijala.



Slika 2.9 – Ramberg-Osgoodov materijalni model

Inkrement plastične deformacije, u općem slučaju može se prikazati pomoću neasociranog zakona tečenja,

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{2.27}$$

gdje je $g = g\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}, \kappa\right)$ plastični potencijal, a $\mathrm{d}\lambda$ skalarni faktor proporcionalnosti (plastični multiplikator). Ukoliko je plastični potencijal jednak funkciji tečenja, dobiva se asocirani zakon tečenja koji glasi

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{2.28}$$

Da bi se naprezanje moglo izraziti preko ukupne deformacije, najprije je potrebno definirati elastoplastični tenzor krutosti koji za slučaj von Misesovog kriterija tečenja glasi

$$D_{ijkl}^{\mathrm{ep}} = D_{ijkl} - \frac{3G^2}{J_2\left(K + 3G\right)} S_{ij} S_{kl}. \tag{2.29}$$

Veza između inkrementa naprezanja i inkrementa ukupne deformacije sada glasi

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{\mathrm{ep}} \mathrm{d}\varepsilon_{kl}. \tag{2.30}$$

U nastavku poglavlja slijedi opis korištenog materijalnog modela s nelinearnim kombiniranim očvršćenjem implementiranog u programski paket *Abaqus*. Sam programski paket detaljnije je opisan u poglavlju 3.2, a sada će primarni naglasak biti na korištenom elastoplastičnom materijalnom modelu.

Ovaj materijalni model zapravo koristi kombinaciju nelinearnog kinematičkog i izotropnog očvršćenja, pri čemu kinematički dio opisuje translaciju plohe tečenja u prostoru naprezanja preko tenzora povratnog naprezanja (*backstress*), $\boldsymbol{\alpha}$, dok izotropni dio opisuje promjenu ekvivalentnog naprezanja koje definira veličinu plohe tečenja, σ^0, kao funkciju plastične deformacije. [17]

Kinematički dio je definiran kao aditivna kombinacija čistog kinematičkog očvršćenja opisanog linearnim Zieglerovim očvršćenjem i relaksacije, što dovodi do nelinearnosti. Moguće je koristiti više tenzora povratnog naprezanja, a zakon očvršćenja tada glasi

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k = C_k \frac{1}{\sigma^0}\left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}\right)\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} - \gamma_k \boldsymbol{\alpha}_k \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}, \tag{2.31}$$

gdje je $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}$ brzina ekvivalentne plastične deformacije, a C_k i γ_k su parametri materijala. Ukupni tenzor povratnog naprezanja računa se kao

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}_k, \tag{2.32}$$

pri čemu je N ukupni broj tenzora povratnih naprezanja. Zakon kinematičkog očvršćenja se može podijeliti na devijatorski i hidrostatski dio, a samo devijatorski dio ima utjecaja na ponašanje materijala. Kada parametri C_k i γ_k iznose 0, model se reducira na nelinearno očvršćujući materijalni model s izotropnim očvršćenjem.

Kako je već rečeno, izotropni dio definira promjenu veličine plohe tečenja, σ^0, kao funkciju ekvivalentne plastične deformacije $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}$. Moguće je tablično zadati odnos σ^0 i $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}$, ili koristiti eksponencijalnu vezu

$$\sigma^0 = \sigma|_0 + Q_\infty\left(1 - e^{-b\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}}\right), \tag{2.33}$$

gdje je $\sigma|_0$ naprezanje tečenja kad plastična deformacija poprima vrijednost 0, a Q_∞ i b su parametri materijala. Parametar Q_∞ predstavlja maksimalnu promjenu u veličini plohe tečenja, a parametar b definira brzinu promjene veličine plohe tečenja tijekom plastičnog deformiranja. Kada je ekvivalentno naprezanje koje definira veličinu plohe tečenja konstantno, $\sigma^0 = \sigma|_0$, model se reducira na nelinearno očvršćujući materijalni model s kinematičkim očvršćenjem.

Ovaj model pogodno je koristiti pri modeliranju neelastičnih deformacija kod metala opterećenih ciklički ili termički, što uzrokuje značajne neelastične deformacije, niskociklički zamor i u konačnici lom.

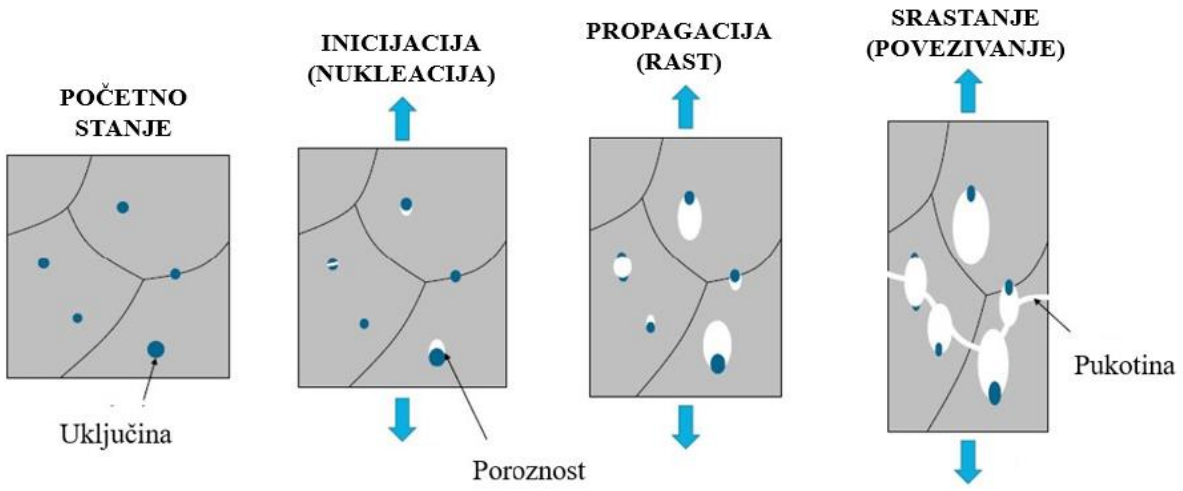
2.2. Model oštećenja

Naprezanje kod kojeg dolazi do potpunog loma ispitne epruvete naziva se lomno naprezanje ili lomna čvrstoća, a sama vrijednost dobiva se vlačnim ispitivanjem pri čemu se uzorak opterećuje sve do pojave loma. Do pojave loma dolazi zbog procesa akumuliranja oštećenja u materijalu.

Mehanika oštećenja je dio mehanike koji se bavi opisivanjem postupnog ili progresivnog smanjenja, odnosno degradacije mehaničkih svojstava materijala prije početka pojave makropukotina. U tu svrhu, uvedena ja varijabla koja povezuje gustoću materijala s mikrooštećenjima. Oštećenje se razmatra kao makroskopsko stanje varijabli koje utječe na makromehanička svojstva materijala, kao što je degradacija krutosti. Oštećenje u materijalu može biti predstavljeno u više oblika, kao što su specifične praznine i površinske pukotine, specifične pukotine i volumenske praznine te razmaci između pukotina i uključina. Postoji nekoliko glavnih tipova oštećenja, a to su duktilno, krhko, zamorno oštećenje te oštećenje pri puzanju materijala. [18] U ovom radu razmatran je model duktilnog oštećenja pa će se on analizirati u nastavku ovog poglavlja.

Prilikom duktilnog loma, dolazi do znatne plastične deformacije materijala prije gubitka mehaničkog integriteta. Pukotina raste sporo, a uz nju i velika plastična deformacija. S druge strane, zbog plastičnog deformiranja duktilnih materijala dolazi do usporavanja procesa loma. Osim toga, za deformiranje duktilnih materijala potrebna je veća količina energije u odnosu na krhke materijale.

Fenomen duktilnog oštećenja uključuje nekoliko faza. Uslijed deformiranja kristalne rešetke materijala koje je posljedica opterećenja konstrukcije, unutar materijala dolazi do pojave mikropukotina ili poroznosti, tj. inicijacije ili nukleacije. To je ujedno najsloženija, ali i najzanimljivija faza duktilnog oštećenja. Ukoliko je moguće spriječiti ovu fazu, daljnje razmatranje oštećenja nije potrebno budući da ne dolazi do daljnjih faza. Međutim, ako se materijal i dalje opterećuje, mikropukotine propagiraju, odnosno rastu, a to je ujedno i najuočljivija faza. Daljnjom propagacijom kada mikropukotine postignu određenu veličinu, dolazi do njihove međusobne interakcije, tj. do srastanja, odnosno povezivanja. Daljnje opterećenje materijala dovodi do konačnog loma. Grafički prikaz faza duktilnog oštećenja dan je na slici 2.10. [19]



Slika 2.10 – Faze duktilnog oštećenja [19]

U nastavku poglavlja slijedi teorijska podloga korištenog modela duktilnog oštećenja implementiranog u programski paket *Abaqus*.

2.2.1. Inicijacija oštećenja

Kriterij iniciranja duktilnog oštećenja je fenomenološki model za predviđanje nastanka oštećenja zbog inicijacije, propagacije i srastanja poroznosti [17]. Model pretpostavlja da je ekvivalentna plastična deformacija u trenutku iniciranja oštećenja, $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{pl}}$, funkcija troosnosti naprezanja, η, i brzine plastične deformacije, $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}$, tj. vrijedi

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{pl}} = \bar{\varepsilon}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{pl}}\left(\eta, \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}\right). \tag{2.34}$$

Troosnost naprezanja definirana je izrazom

$$\eta = -\frac{p}{q}. \tag{2.35}$$

gdje je p hidrostatski tlak, q ekvivalentno von Misesovo naprezanje, a oni se računaju kao

$$p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$
$$q = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]}. \tag{2.36}$$

U relacijama (2.36) σ_1, σ_2, i σ_3 predstavljaju glavna naprezanja. Tenzor naprezanja za slučaj jednoosnog vlačnog testa ima samo normalnu komponentu naprezanja u smjeru opterećenja i zapisuje se kao

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

pa iz jednadžbe (2.35) slijedi iznos troosnosti naprezanja koja je jednaka

$$\eta = -\frac{-\frac{\sigma_1}{3}}{\sigma_1} = \frac{1}{3}. \tag{2.38}$$

Troosnost naprezanja se mijenja u slučaju akumulacije plastične deformacije u sva tri smjera koordinatnih osi. Tijekom statičkog vlačnog testa najveće vrijednosti troosnosti naprezanja javit će se u kritičnom području ispitnog uzorka u kojem se ujedno razvijaju i najveće plastične deformacije.

Nadalje, oštećenje je inicirano kada je ispunjen uvjet

$$w_{\mathrm{D}} = \int \frac{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}}{\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{D}}\left(\eta, \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}\right)} = 1. \tag{2.39}$$

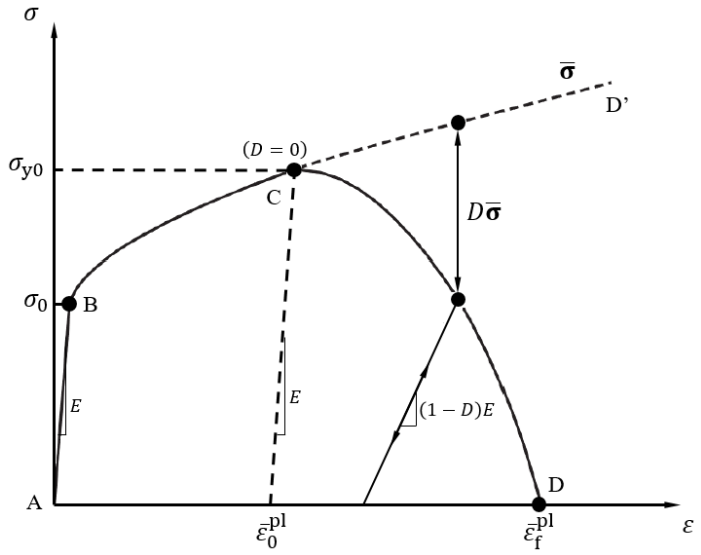
pri čemu je w_{D} varijabla stanja koja se monotono povećava s plastičnom deformacijom. U svakom inkrementu analize, njena promjena računa se kao

$$\Delta w_{\mathrm{D}} = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}}{\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}_{\mathrm{D}}\left(\eta, \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}\right)} \geq 0. \tag{2.40}$$

U programskom paketu *Abaqus* moguće je definirati više kriterija iniciranja oštećenja, a u tom se slučaju svaki kriterij analizira zasebno. Kriterij inicijacije duktilnog oštećenja moguće je koristiti s ranije opisanim von Misesovim kriterijem plastičnog tečenja, a samim time i s elastoplastičnim materijalnim modelom s nelinearnim kombiniranim očvršćenjem.

2.2.2. Propagacija oštećenja

Model propagacije oštećenja pretpostavlja da je oštećenje karakterizirano progresivnom degradacijom krutosti materijala, što dovodi do konačnog loma. Na slici 2.11 prikazan je dijagram naprezanja u ovisnosti o deformaciji kod duktilnih materijala prilikom iniciranja i propagacije oštećenja. Puna linija predstavlja odziv materijala s oštećenjem (dio A-D), a crtkana linija kad oštećenja nema (dio A-D'). Na dijagramu, σ_0 predstavlja granicu tečenja, a σ_{y0}. vlačnu čvrstoću materijala. U točki C dolazi do pojave plastične deformacije, $\bar{\varepsilon}_0^{\mathrm{pl}}$, kod koje dolazi do iniciranja oštećenja. Nakon točke C slijedi omekšanje materijala, odnosno degradacija krutosti sve do loma označenog točkom D, na kojoj je označena plastična deformacija kod koje nastupa lom, $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}$. Krivulja omekšanja materijala (dio C-D) ovisi o parametrima duktilnog oštećenja definiranim u poglavlju 2.2.1 (troosnost naprezanja, plastična deformacija, brzina plastične deformacije).



Slika 2.11 – Dijagram naprezanje-deformacija kod inicijacije i propagacije oštećenja [17]

Potrebno je opisati zakon propagacije oštećenja koji opisuje degradaciju krutosti materijala nakon postizanja odgovarajućeg kriterija inicijacije oštećenja. Ukoliko taj zakon nije određen, neće doći do degradacije krutosti. Za duktilne materijale, degradacija krutosti se može opisati skalarnom jednadžbom

$$d_{\mathrm{i}} \in N_{\mathrm{act}}\,, \tag{2.41}$$

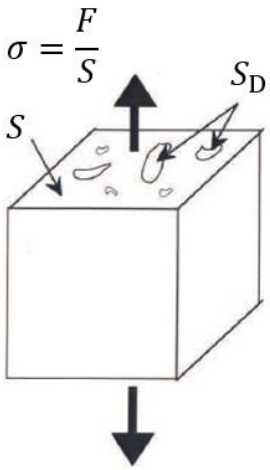
gdje je d_{i} individualna varijabla oštećenja, a N_{act} predstavlja skup aktivnih mehanizama loma.

Tenzor naprezanja u materijalu računa se kao

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\,\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{2.42}$$

gdje je D varijabla oštećenja, a $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ tenzor efektivnog naprezanja u trenutnom vremenskom inkrementu koji predstavlja naprezanja koja bi se pojavila u materijalu da nema oštećenja. Varijabla oštećenja D poprima vrijednosti od 0 do 1, s time da vrijednost 0 označava neoštećeni materijal, a vrijednost 1 potpuno oštećeni materijal. Jednadžba (2.42) je zapravo konstitutivna jednadžba materijala s oštećenjem. Ukoliko je zadano više kriterija inicijacije oštećenja, varijabla oštećenja D predstavlja kombinaciju svih pojedinačnih varijabli oštećenja definiranih za pojedini kriterij. Također, programski paket *Abaqus* omogućava kontrolu brisanja konačnih elemenata koji zbog akumulacije oštećenja gube sposobnost prenošenja opterećenja.

U svrhu boljeg razumijevanja jednadžbe (2.42), ista će biti objašnjena na problemu jednoosnog vlačnog testa. Naime, mjera amplitude oštećenja u nekoj ravnini dobiva se izračunavanjem površine presjeka svih defekata u toj ravnini. Na slici 2.12 prikazana je površina poprečnog presjeka materijala s oštećenjem. Efektivnom površinom uzorka podvrgnutog jednoosnom vlačnom testu naziva se razlika ukupne površine poprečnog presjeka S i površine svih defekata na tom presjeku, S_{D}, tj. njena je vrijednost $S - S_{\mathrm{D}}$. [20]



Slika 2.12 – Poprečni presjek materijala s oštećenjem [20]

Skalarna varijabla oštećenja D se računa kao

$$D = \frac{S_{\mathrm{D}}}{S}. \tag{2.43}$$

Za materijal s oštećenjem se umjesto standardnog naprezanja $\sigma = F / S$, uvodi pojam efektivnog naprezanja $\bar{\sigma}$ za koje vrijedi

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{S - S_{\mathrm{D}}} = \frac{F}{S\left(1 - \frac{S_{\mathrm{D}}}{S}\right)} = \frac{\sigma}{1 - D}. \tag{2.44}$$

Za 1D probleme, efektivno naprezanje se računa pomoću Hookeovog zakona, tj. veza s elastičnom deformacijom tada glasi

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon, \tag{2.45}$$

gdje je E modul elastičnosti neoštećenog materijala. Uvrštavanjem jednadžbe (2.45) u (2.44) slijedi konstitutivna jednadžba

$$\sigma = (1 - D) E\varepsilon. \tag{2.46}$$

Zakon propagacije oštećenja za 1D probleme definiran je odnosom varijable oštećenja D i nametnutog opterećenja, tj. vrijedi

$$D = g(\varepsilon). \tag{2.47}$$

Funkcija $g(\varepsilon)$ se određuje iz rezultata vlačnog testa. Bitno je napomenuti da relacija (2.47) vrijedi samo u režimu monotonog opterećivanja. Prilikom rasterećenja i ponovnog opterećenja uzorka, varijabla oštećenja zadržava svoju maksimalnu vrijednost postignutu u fazi inicijalnog opterećenja. U svrhu jedinstvenog opisivanja različitih režima opterećenja, uvodi se varijabla κ koja predstavlja maksimalno naprezanje koje se postiže prije trenutka t, tj. $\kappa(t) = \max \varepsilon(\tau)$ za $\tau \leq t$. Relacija (2.47) se sada može zapisati kao

$$D = g(\kappa) \tag{2.48}$$

i ona vrijedi za bilo koji režim opterećivanja.

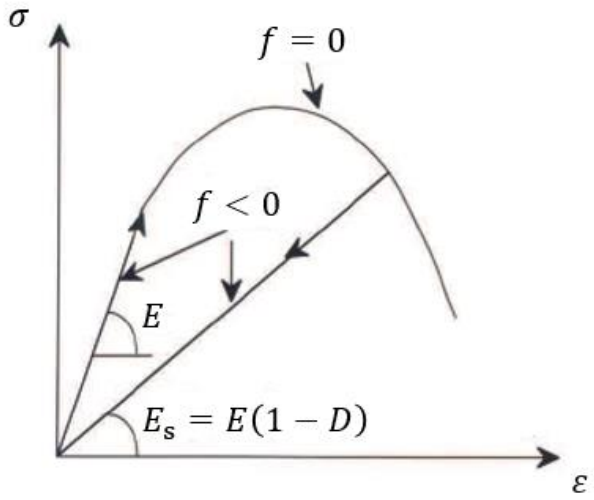
Na slici 2.13 prikazan je elastični odziv materijala s oštećenjem tijekom opterećenja i rasterećenja. Umjesto razmatranja spomenute funkcije $g(\varepsilon)$, obično se uvodi funkcija graničnog stanja $f(\varepsilon, \kappa)$, a zapisuje se kao

$$f\left(\varepsilon,\kappa\right)=\varepsilon-\kappa\,. \tag{2.49}$$

Jednadžba (2.49) se određuje pomoću Kuhn-Tuckerovih uvjeta

$$f\le 0\,,\quad \dot{\kappa}\ge 0\,,\quad \dot{\kappa}f=0\,. \tag{2.50}$$

Uvjet $f\le 0$ znači da deformacija ε nikada ne može imati veću vrijednost od varijable κ, a uvjet $\dot{\kappa}\ge 0$ znači da povećanje varijable κ nije moguće. Osim toga, drugi uvjet ukazuje da se κ može povećavati samo ako je trenutna vrijednost deformacije ε jednaka varijabli κ.



Slika 2.13 – Elastični odziv materijala s oštećenjem tijekom opterećenja i rasterećenja [20]

Nadalje, na slici 2.13, E_{s} označava tzv. sekantni modul elastičnosti i on je jednak

$$E_{\mathrm{s}}=\left(1-D\right)E\,. \tag{2.51}$$

Sekantni modul elastičnosti predstavlja vezu između naprezanja i deformacije materijala s oštećenjem, tj. vrijedi

$$\sigma=E_{\mathrm{s}}\varepsilon=\left(1-D\right)E\varepsilon\,. \tag{2.52}$$

Iz jednadžbe (2.52) slijedi izraz za varijablu oštećenja D koja je sada jednaka

$$D=1-\frac{E_{\mathrm{s}}}{E}\,. \tag{2.53}$$

Nadalje, u programskom paketu *Abaqus*, vrijednost ekvivalentne plastične deformacije $\bar{\varepsilon}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}$, prikazane na slici 2.11, ovisi o karakterističnoj duljini konačnog elementa i ona se ne može koristiti kao parametar materijala kod određivanja individualne varijable oštećenja d_{i}. [17] Iz tog razloga, zakon propagacije oštećenja se može zadati preko ekvivalentnog plastičnog pomaka, $\bar{u}^{\mathrm{pl}}$, ili preko disipacije energije loma, G_{f}. Disipacija energije loma se računa kao

$$G_{\mathrm{f}} = \int_{\bar{\varepsilon}_0^{\mathrm{pl}}}^{\bar{\varepsilon}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}} L\sigma_{\mathrm{y}} \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} = \int_{0}^{\bar{u}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}} \sigma_{\mathrm{y}} \mathrm{d}\bar{u}^{\mathrm{pl}} \,, \tag{2.54}$$

gdje je L karakteristična duljina elementa. Karakteristična duljina ovisi o geometriji i formulaciji konačnog elementa. Za elemente prvog reda ona je jednaka poprečnoj duljini elementa, a za elemente drugog reda polovici poprečne duljine elementa.

Kada je postignut kriterij iniciranja oštećenja, efektivni plastični pomak se definira preko zakona propagacije

$$\dot{\bar{u}}^{\mathrm{pl}} = L\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} \,. \tag{2.55}$$

Propagacija varijable oštećenja definirana preko plastičnog pomaka se može definirati tablično ili u linearnom, odnosno eksponencijalnom obliku. U linearnom obliku povećanje varijable oštećenja se računa kao

$$\dot{d} = \frac{L\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}}{\bar{u}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}} = \frac{\dot{\bar{u}}^{\mathrm{pl}}}{\bar{u}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}} \,. \tag{2.56}$$

Na ovaj je način osigurano da do potpune degradacije krutosti ($d = 1$) dolazi kada efektivni plastični pomak iznosi $\bar{u}^{\mathrm{pl}} = \bar{u}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}$. U eksponencijalnom obliku je potrebno zadati eksponent α, a varijabla oštećenja se tada računa kao

$$d = \frac{1 - e^{-\alpha\left(\bar{u}^{\mathrm{pl}} / \bar{u}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}\right)}}{1 - e^{-\alpha}} \,. \tag{2.57}$$

Zakon propagacije oštećenja preko disipacije energije loma se također može zadati u linearnom i eksponencijalnom obliku. Kada je postignut kriterij inicijacije oštećenja, u linearnom obliku vrijedi jednadžba (2.56), a ekvivalentni plastični pomak kod loma se računa kao

$$\bar{u}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}} = \frac{2G_{\mathrm{f}}}{\sigma_{\mathrm{y0}}}, \tag{2.58}$$

gdje je σ_{y0} naprezanje tečenja u trenutku loma. S druge strane, u eksponencijalnom obliku, varijabla oštećenja se računa kao

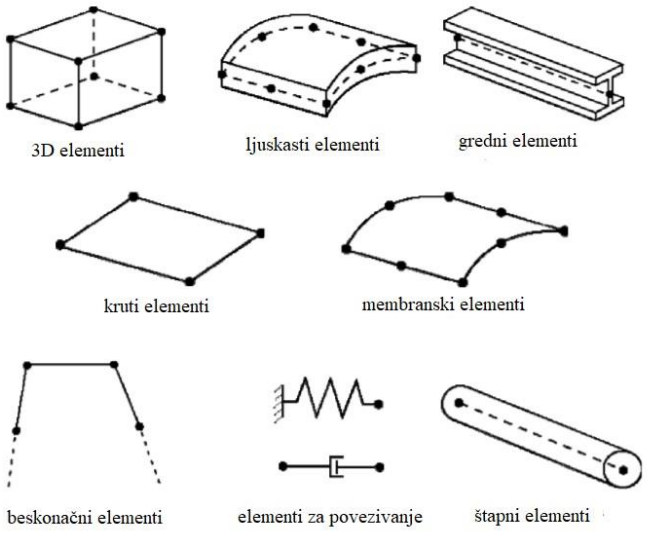
$$d = 1 - \exp\left(-\int_0^{\bar{u}^{\mathrm{pl}}} \frac{\bar{\sigma}_{\mathrm{y}} \mathrm{d}\bar{u}^{\mathrm{pl}}}{G_{\mathrm{f}}} \right). \tag{2.59}$$

3. METODA KONAČNIH ELEMENATA

3.1. O metodi konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda za rješavanje problema rubnih vrijednosti temeljena na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode dijeli se na konačan broj potpodručja koja se nazivaju konačni elementi. Elementi su međusobno povezani u točkama na konturi koje se nazivaju čvorovi. Stanje u svakom elementu, kao što je npr. polje pomaka, deformacije, naprezanja, temperature i ostalih veličina u problemu polja, opisuje se pomoću interpolacijskih funkcija. Izvodi se sustav algebarskih jednadžbi čije su nepoznanice čvorne veličine, a nakon toga odgovarajućim postupcima formira se globalni sustav jednadžbi za cijeli diskretizirani model, u kojem su nepoznanice čvorne vrijednosti svih elemenata diskretiziranog područja. Ukoliko su konačni elementi pravilno formulirani, s povećanjem ukupnog broja elemenata, odnosno stupnjeva slobode, raste i točnost rješenja. S obzirom da je riječ o numeričkoj metodi, važno je napomenuti da su sva rješenja približna i da se samo uz pravilan odabir proračunskog modela i pravilne formulacije konačnih elemenata moguće približiti realnom i točnom rješenju. [21]

Ovisno o obliku i nepoznatim parametrima u čvorovima, postoje različiti tipovi konačnih elemenata. Veći broj nepoznanica zahtijeva i složeniju interpolacijsku funkciju u području elementa. Stupnjevi slobode elementa su nepoznati parametri u čvorovima koji u metodi pomaka mehanike deformabilnih tijela opisuju pomake i derivacije pomaka. Osnovni konačni elementi implementirani u programski paket *Abaqus* prikazani su na slici 3.1.



Slika 3.1 – Osnovni konačni elementi [17]

3.2. Programski paket *Abaqus*

Iako je do sada već nekoliko puta bio spomenut, programski paket *Abaqus* koji je korišten u ovom diplomskom radu, nije bio detaljnije obrađen. *Abaqus* je komercijalni programski paket koji se temelji na metodi konačnih elemenata. To je jedan od najpoznatijih programskih paketa za numeričku analizu konstrukcija pomoću kojeg se mogu rješavati različiti problemi, od najjednostavnijih linearnih do složenih nelinearnih problema. Moguće je rješavanje statičkih i dinamičkih problema te modeliranje većine materijala koji se koriste u strojarstvu.

Programski paket *Abaqus* se sastoji od komponenata [17]:

- *Abaqus/Standard* – služi za analizu opće namjene linearnih i nelinearnih problema, kao što su statički i termički problemi; korišten je u ovom diplomskom radu.
- *Abaqus/Explicit* – služi za rješavanje nelinearnih i tranzijentnih dinamičkih problema pomoću eksplicitne metode vremenske integracije.
- *Abaqus/CFD* – služi za rješavanje problema iz područja računalne dinamike fluida kao i spregnutih proračuna iz mehanike fluida, termičke i strukturne analize.
- *Abaqus/Electromagnetic* – služi za rješavanje problema iz područja elektromagnetizma.

Zbog velikog broja podataka kojima operira, program je podijeljen na tri cjeline: predprocesor, procesor i postprocesor. U predprocesoru je potrebno opisati proračunski model, dok se u procesoru vrši rješavanje problema matematičkog modeliranja. Grafički prikaz i obrada rezultata se dobivaju i vrše u postprocesoru.

3.3. Jednadžba konačnog elementa za nelinearnu statičku analizu

Linearna statička analiza provodi se uz sljedeće pretpostavke [10]:

- mali pomaci – ravnoteža se razmatra na nedeformiranom obliku, opterećenje ne mijenja smjer;
- ponašanje materijala je linearno-elastično;
- eventualne nehomogenosti i anizotropija u materijalu nisu funkcija opterećenja;
- linearna veza između deformacija i pomaka.

Ako se jedan od gore navedenih uvjeta naruši, radi se o nelinearnom ponašanju, a razlikuju se:

- **geometrijska nelinearnost** – veliki pomaci, velike deformacije – ravnoteža se razmatra na deformiranom obliku;

- **materijalna nelinearnost** – ponašanje materijala je nelinearno (nelinearna elastičnost, elastoplastičnost, plastičnost, viskoelastičnost, viskoplastičnost, puzanje);
- **nelinearnost rubnih uvjeta** – kontaktni problemi.

Globalna jednadžba konačnih elemenata proračunskog modela za linearnu analizu glasi

$$\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{R}, \tag{3.1}$$

gdje je $\mathbf{K}$ globalna linearna matrica krutosti, $\mathbf{V}$ je globalni vektor čvornih stupnjeva slobode, a $\mathbf{R}$ globalni vektor čvornih sila.

U nelinearnoj analizi ne postoji linearna eksplicitna veza između krutosti i opterećenja te ne vrijedi zakon superpozicije. Globalna jednadžba konačnih elemenata proračunskog modela za nelinearnu analizu glasi

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{V},\mathbf{R}\right)\mathbf{V} = \mathbf{R}. \tag{3.2}$$

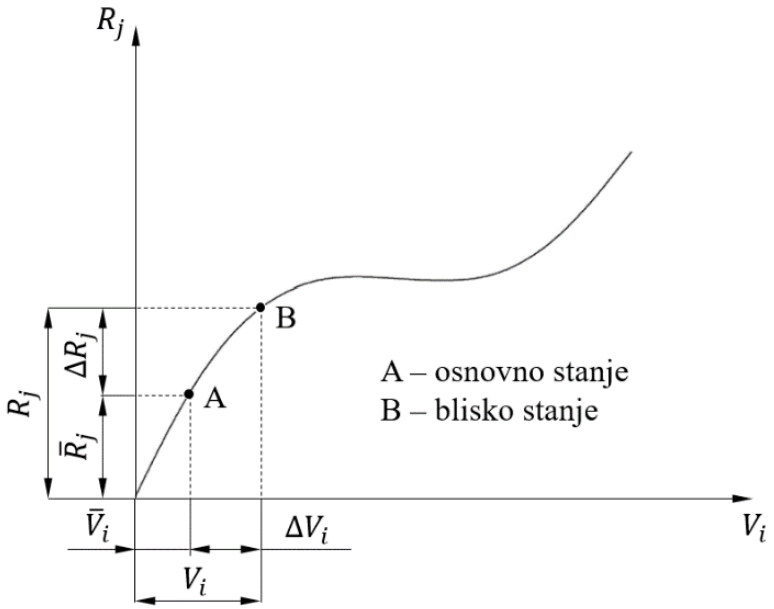
Iz jednadžbe (3.2) vidljivo je da krutost ovisi o trenutnom stanju pomaka i opterećenja. Potrebno je dakle, opisati takav nelinearni odziv konstrukcije pristupanjem inkrementalno-iterativnim metodama koje su moguće uz linearizaciju jednadžbe (3.2). Pritom se iz osnovnog ravnotežnog stanja traži ravnoteža bliskog (susjednog) stanja koje je definirano prirastom opterećenja ili pomaka. Blisko stanje se u definiranom inkrementu postiže iterativnim postupcima, a u sljedećem inkrementu ono postaje novo osnovno stanje.

Linearizacijom jednadžbe (3.2) slijedi jednadžba krutosti

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\left(\bar{\mathbf{V}}\right)\Delta\mathbf{V} = \mathbf{R}_{\mathrm{e}} - \mathbf{R}_{\mathrm{i}}\left(\bar{\mathbf{V}}\right), \tag{3.3}$$

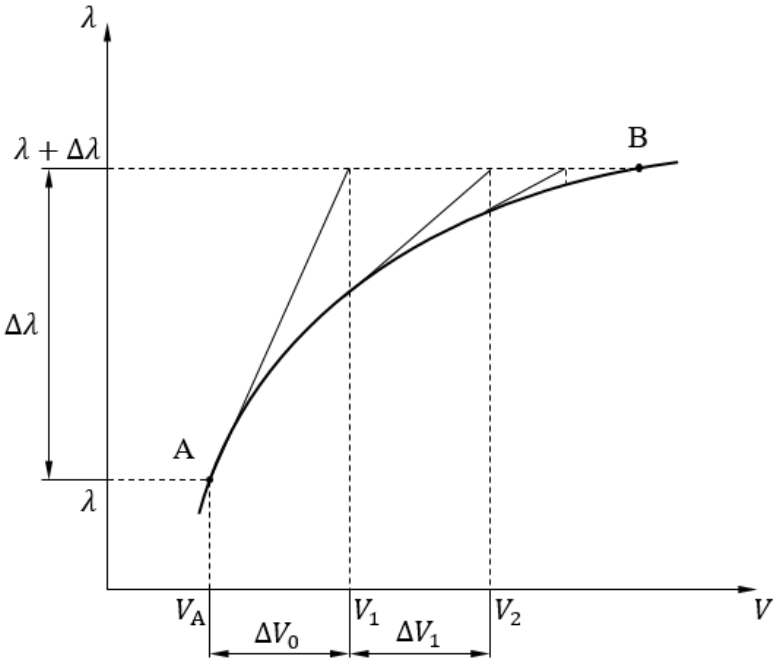
gdje je $\mathbf{K}_{\mathrm{T}}$ globalna tangencijalna matrica krutosti, $\bar{\mathbf{V}}$ globalni vektor stupnjeva slobode osnovnog ravnotežnog stanja koje je poznato, $\Delta\mathbf{V}$ odgovarajuća promjena, tj. inkrement vektora stupnjeva slobode, a $\mathbf{R}_{\mathrm{e}}$ i $\mathbf{R}_{\mathrm{i}}$ globalni vektori vanjskih, odnosno unutarnjih sila. Ravnoteža je postignuta kada je desna strana prethodne jednadžbe jednaka nuli, odnosno kada su unutarnje sile jednake vanjskom opterećenju, ili kada je vektor inkrementalnih pomaka jednak nuli.

Grafički prikaz nelinearne veze opterećenja i pomaka, uz prikaz osnovnog i bliskog stanja s pripadnim vektorima pomaka i opterećenja prikazan je na slici 3.2.



Slika 3.2 – Nelinearna veza između opterećenja i pomaka

Jedna od najčešće korištenih inkrementalno-iterativnih metoda u praksi je Newton-Raphsonova metoda. Ova se metoda koristi kod traženja ravnoteže sila pri rješavanju nelinearnih problema. Iterativni postupak pronalaženja ravnoteže bliskog stanja započinje postavljanjem tangente na krivulju ovisnosti opterećenja i pomaka u nekom odabranom ravnotežnom stanju. U svakom iteracijskom koraku računa se nova tangentna matrica krutosti. Grafički prikaz ove metode prikazan je na slici 3.3. Oznaka $\Delta\lambda$ predstavlja inkrement opterećenja.



Slika 3.3 – Newton-Raphsonova metoda

Postupak rješavanja nelinearne numeričke analize konstrukcija počinje od globalnog proračunskog modela. Pomoću jednadžbe (3.3) dobiva se inkrement globalnih pomaka $\Delta\mathbf{V}$. Globalni pomaci se potom transformiraju u lokalne stupnjeve slobode, tj. lokalne pomake pomoću kojih se dalje računa inkrement deformacije $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. U točkama integracije svakog konačnog elementa provodi se integracija inkrementa deformacije kako bi se dobio inkrement naprezanja, $\Delta\boldsymbol{\sigma}$,

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\varepsilon}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{D}^{\mathrm{ep}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{3.4}$$

Integriranje konstitutivne jednadžbe (3.4) moguće je pomoću neke od metoda numeričke integracije. Postoje implicitne i eksplicitne metode numeričke integracije. Najčešće se koristi implicitna metoda, tj. Eulerova unatražna metoda koja se temelji na algoritmu povratnog projiciranja (*return mapping*). Sastoji se od elastičnog prediktora i plastičnog korektora. Elastični prediktor predstavlja pokusno (*Trial*) stanje u kojem se ispituje da li se u odgovarajućoj točki integracije model nalazi u elastičnom ili plastičnom području. Drugim riječima, provodi se kontrola uvjeta tečenja. Ako je uvjet tečenja veći od nule, znači da je model u plastičnom području i potreban je plastični korektor. Plastični korektor se sastoji od iterativnog postupka kojim se provodi povrat pokusnog naprezanja na plohu tečenja. Nakon izračuna inkrementa naprezanja, $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, moguće je na razini konačnog elementa odrediti ukupno naprezanje $\boldsymbol{\sigma}$ iz kojeg se potom dobiva elastoplastični tenzor krutosti $\mathbf{D}^{\mathrm{ep}}$ i ažurira jednadžba (3.4). Ovime završava jedna iteracija proračuna.

Osnovne relacije nelinearne statičke analize:

$$\begin{aligned}
&\textit{Uvjet ravnoteže:} && \left[\mathbf{D}_{\mathrm{eL}} + \mathbf{D}_{\mathrm{eN}}\left(\mathbf{u}\right)\right] = -\mathbf{q}\,,\\
&\textit{Konstitutivne relacije:} && \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,,\\
&\textit{Kinematičke relacije:} && \boldsymbol{\varepsilon} = \left[\mathbf{D}_{\mathrm{kL}} + \frac{1}{2}\mathbf{D}_{\mathrm{kN}}\left(\mathbf{u}\right)\right]\mathbf{u}\,,\\
&\textit{Rubni uvjeti sila:} && \mathbf{q}_{\mathrm{b}} = \left[\mathbf{R}_{\mathrm{qL}} + \mathbf{R}_{\mathrm{qN}}\left(\mathbf{u}\right)\right]\boldsymbol{\sigma}\,,\\
&\textit{Rubni uvjeti pomaka:} && \mathbf{u}_{\mathrm{b}} = \mathbf{R}_{\mathrm{u}}\mathbf{u}\,.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

U relacijama (3.5), indeksi L i N predstavljaju linearni, odnosno nelinearni dio operatora, $\mathbf{D}$ predstavlja matricu elastičnosti, $\mathbf{D}_\mathrm{e}$ diferencijalni operator uvjeta ravnoteže, $\mathbf{D}_\mathrm{k}$ kinematički diferencijalni operator, $\mathbf{q}$ vektor volumenskih sila, $\mathbf{q}_\mathrm{b}$ vektor površinskog opterećenja, $\mathbf{R}_\mathrm{q}$ operator površinskog opterećenja, $\mathbf{R}_\mathrm{u}$ operator rubnih pomaka, $\mathbf{u}$ vektor pomaka, $\mathbf{u}_\mathrm{b}$ vektor rubnih pomaka, $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenzor deformacija, a $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor naprezanja. Za vektor pomaka $\mathbf{u}$ vrijedi relacija $\mathbf{u}=\mathbf{N}\mathbf{v}$, pri čemu je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika, a $\mathbf{v}$ je vektor čvornih pomaka.

Da bi se prikazali ostali izrazi jednadžbe konačnog elementa za nelinearnu analizu, najprije je potrebno globalnu jednadžbu (3.3) zapisati u lokalnim koordinatama elementa, kako slijedi

$$\mathbf{k}_\mathrm{T}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)\Delta\mathbf{v}=\mathbf{r}_\mathrm{e}-\mathbf{r}_\mathrm{i}\left(\bar{\mathbf{v}}\right). \tag{3.6}$$

Za slučaj geometrijski nelinearne elastične analize, lokalna tangencijalna matrica krutosti jednaka je

$$\mathbf{k}_\mathrm{T}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)=\mathbf{k}_\mathrm{eu}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)+\mathbf{k}_\sigma\left(\bar{\mathbf{v}}\right). \tag{3.7}$$

U jednadžbi (3.7) $\mathbf{k}_\mathrm{eu}$ predstavlja lokalnu elastičnu matricu krutosti koja je jednaka

$$\mathbf{k}_\mathrm{eu}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)=\mathbf{k}_\mathrm{e}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)+\mathbf{k}_\mathrm{u}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)=\mathbf{k}_\mathrm{e}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)+\mathbf{k}_\mathrm{uL}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)+\mathbf{k}_\mathrm{uN}\left(\bar{\mathbf{v}}\right), \tag{3.8}$$

pri čemu vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_\mathrm{e}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)&=\int_V \mathbf{B}_\mathrm{L}^T\mathbf{D}\mathbf{B}_\mathrm{L}\,\mathrm{d}V,\\
\mathbf{k}_\mathrm{uL}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)&=\int_V\left[\mathbf{B}_\mathrm{L}^T\mathbf{D}\mathbf{B}_\mathrm{N}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)+\mathbf{B}_\mathrm{N}^T\left(\bar{\mathbf{v}}\right)\mathbf{D}\mathbf{B}_\mathrm{L}\right]\mathrm{d}V,\\
\mathbf{k}_\mathrm{uN}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)&=\int_V \mathbf{B}_\mathrm{N}^T\left(\bar{\mathbf{v}}\right)\mathbf{D}\mathbf{B}_\mathrm{N}\left(\bar{\mathbf{v}}\right)\mathrm{d}V.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Matrica $\mathbf{k}_\mathrm{eu}$ se dakle, može rastaviti na linearni elastični dio $\mathbf{k}_\mathrm{e}$ i dio koji predstavlja matricu početnih pomaka $\mathbf{k}_\mathrm{u}$. Matrica $\mathbf{k}_\mathrm{u}$ se dalje može podijeliti na dio $\mathbf{k}_\mathrm{uL}$ koji linearno ovisi o pomaku $\bar{\mathbf{v}}$ i dio $\mathbf{k}_\mathrm{uN}$ čija je veza s $\bar{\mathbf{v}}$ nelinearna.

U relacijama (3.9) $\mathbf{B}_{\mathrm{L}}$ i $\mathbf{B}_{\mathrm{N}}$ predstavljaju linearni, odnosno nelinearni operator rubnih veličina koji se računaju kao

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\mathrm{L}} &= \mathbf{D}_{\mathrm{kL}}\mathbf{N}\,,\\ \mathbf{B}_{\mathrm{N}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right) &= \mathbf{D}_{\mathrm{kN}}\left(\mathbf{N}\overline{\mathbf{v}}\right)\mathbf{N}\,.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Matrica $\mathbf{k}_{\sigma}$ iz jednadžbe (3.7) predstavlja matricu početnih naprezanja te se i ona može rastaviti na linearni i nelinearni dio, kako slijedi

$$\mathbf{k}_{\sigma}\left(\overline{\mathbf{v}}\right) = \mathbf{k}_{\sigma\mathrm{L}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right) + \mathbf{k}_{\sigma\mathrm{N}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right). \tag{3.11}$$

Međutim, linearna i nelinearna matrica početnih naprezanja se ne mogu izraziti eksplicitno u općem obliku, već se one dobivaju na sljedeći način

$$\begin{aligned}&\int_V \mathbf{B}_{\mathrm{N}}^T\left(\Delta\mathbf{v}\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}V = \int_V \mathbf{B}_{\mathrm{N}}^T\left(\Delta\mathbf{v}\right)\mathbf{D}\left(\mathbf{B}_{\mathrm{L}} + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\mathrm{N}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right)\right)\mathrm{d}V\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{k}_{\sigma}\Delta\mathbf{v}\,,\\ &\int_V \mathbf{B}_{\mathrm{N}}^T\left(\Delta\mathbf{v}\right)\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathrm{L}}\mathrm{d}V\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{k}_{\sigma\mathrm{L}}\Delta\mathbf{v}\,,\\ &\frac{1}{2}\int_V \mathbf{B}_{\mathrm{N}}^T\left(\Delta\mathbf{v}\right)\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathrm{N}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right)\mathrm{d}V\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{k}_{\sigma\mathrm{N}}\Delta\mathbf{v}\,.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Kada se na razini konačnog elementa računa tangencijalna matrica krutosti, određuje se razlika vanjskih i unutarnjih sila. Za geometrijski nelinearnu elastičnu analizu one se računaju kao

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} &= \int_V \mathbf{N}^T\left(\overline{\mathbf{q}} + \Delta\mathbf{q}\right)\mathrm{d}V + \int_{S_q} \mathbf{N}_{\mathrm{s}}^T\left(\overline{\mathbf{q}}_{\mathrm{b}} + \Delta\mathbf{q}_{\mathrm{b}}\right)\mathrm{d}S\,,\\ \mathbf{F}_{\mathrm{i}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right) &= \int_V \left(\mathbf{B}_{\mathrm{L}} + \mathbf{B}_{\mathrm{N}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right)\right)^T\overline{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}V = \int_V \left(\mathbf{B}_{\mathrm{L}} + \mathbf{B}_{\mathrm{N}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right)\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{B}_{\mathrm{L}} + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{\mathrm{N}}\left(\overline{\mathbf{v}}\right)\right)\mathrm{d}V\overline{\mathbf{v}}\,.\end{aligned} \tag{3.13}$$

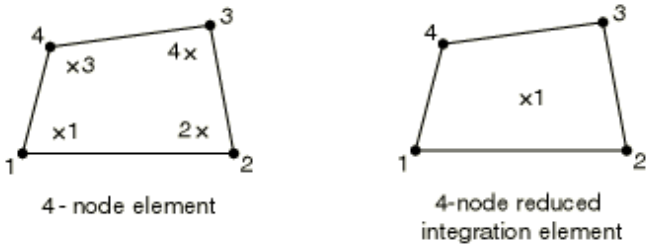
U izrazima (3.13) $\mathbf{q}$ i $\mathbf{q}_{\mathrm{b}}$ su volumno i površinsko opterećenje, a $\mathbf{N}_{\mathrm{s}}$ je matrica rubnih funkcija oblika. Za slučaj bez početnih deformacija, konstitutivna jednadžba glasi

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,. \tag{3.14}$$

Pri razmatranju plastičnog ponašanja materijala, matricu elastičnosti **D** zamijenio bi elastoplastični tenzor krutosti $\mathbf{D}^{ep}$. Prelaskom iz lokalnog u globalni koordinatni sustav izvodi se nova jednadžba krutosti te cijeli postupak ulazi u sljedeću iteraciju.

3.4. Korišteni konačni elementi

U ovom su radu korišteni 2D linearni četverokutni konačni elementi za opisivanje ravninskog stanja deformacija koji imaju 4 čvora u vrhovima s po 2 stupnja slobode (horizontalni i vertikalni pomaci). U programskom paketu *Abaqus* ovi se elementi mogu pronaći pod nazivom CPE4. Numerička integracija je potpuna što znači da se integriranje provodi na 4 točke unutar elementa. Za modele s oštećenjem je u svrhu brže analize korišten isti tip elemenata, ali s reduciranom integracijom, pod nazivom CPE4R. Kod reducirane integracije, integracija se provodi na 1 točki unutar elementa, umjesto na 4. Korišteni konačni elementi prikazani su na slici 3.4.



Slika 3.4 – CPE4 (lijevo) i CPE4R (desno) konačni elementi [17]

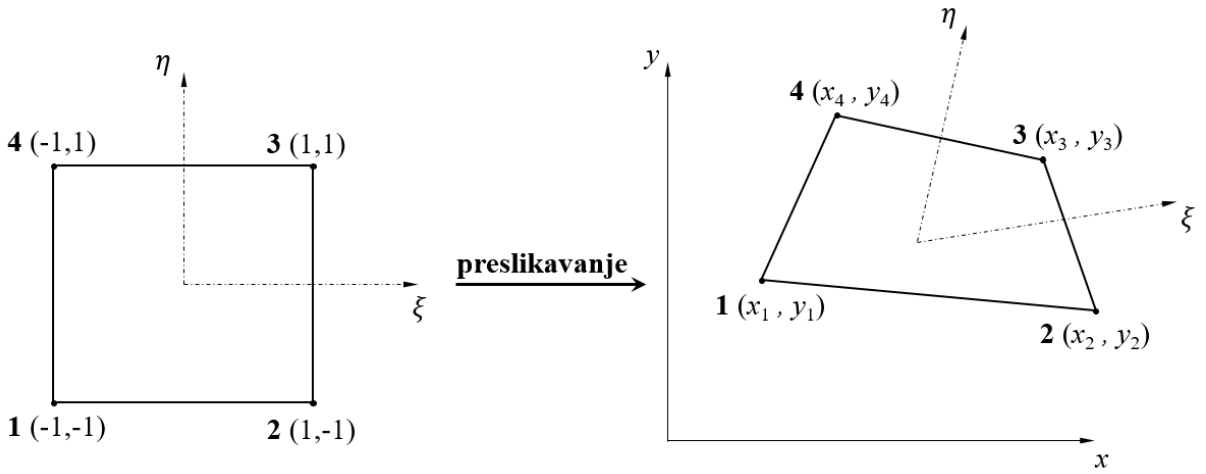
Ovi elementi spadaju u skupinu izoparametarskih konačnih elemenata koji mogu opisati površine zakrivljenog oblika. Naime, kvadrat čiji su vrhovi opisani s jediničnim koordinatama najčešće se naziva izvorni ili referentni element, a njegovim preslikavanjem u Kartezijevu globalnom koordinatnom sustavu moguće je dobiti proizvoljni četverokut, prema slici 3.5. Jedinične koordinate izvornog elementa prikazane su u prirodnim bezdimenzijskim koordinatama, ξ, η. [21]

Vektor stupnjeva slobode glasi

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} u_i & v_i \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3,4, \tag{3.15}$$

pri čemu su u_i i v_i pomaci u *i*-tom čvoru.



Slika 3.5 – Preslikavanje izvornog elementa u proizvoljni četverokut

Polje pomaka opisano je nepotpunim polinomom drugog stupnja

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy\,,$$
$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy\,, \tag{3.16}$$

gdje su u i v komponente pomaka u pravcu globalnih Kartezijevih koordinatnih osi, a a_1 do a_8 su nepoznati parametri koji se određuju iz rubnih uvjeta. Prikazana raspodjela pomaka zadovoljava sve potrebne kriterije za monotonu konvergenciju rješenja [21]:

- interpolacijske funkcije mogu opisivati pomake krutog tijela,
- mogućnost opisivanja polja konstantnih deformacija,
- zadovoljavanje svih potrebnih uvjeta kompatibilnosti duž rubova elementa.

Polje pomaka u prirodnim koordinatama analogno je relaciji (3.16), uz promjenu Kartezijevih koordinata u prirodne. Relacije koje povezuju prirodne i globalne Kartezijeve koordinate dane su izrazima

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, x_i\,,$$
$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, y_i\,, \tag{3.17}$$

gdje su x_i i y_i Kartezijeve koordinate *i*-tog čvora, a $N_i(\xi,\eta)$ funkcije preslikavanja koje su ujedno i funkcije oblika, a računaju se kao

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta). \tag{3.18}$$

Polje pomaka sada se može zapisati na isti način, tj.

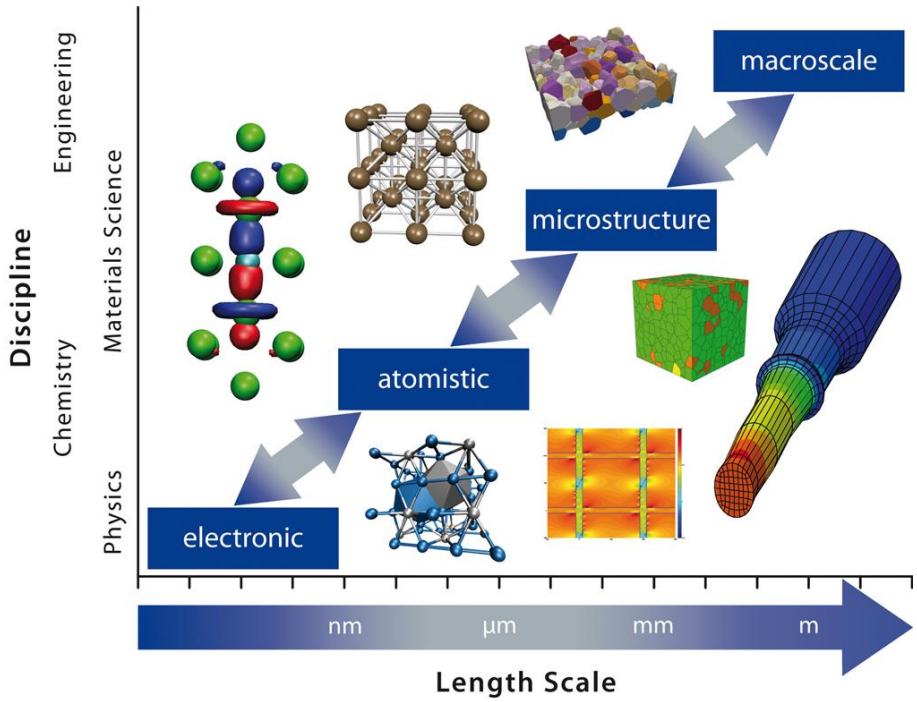
$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)u_i, \\ v &= \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)v_i, \end{aligned} \tag{3.19}$$

Polje pomaka zapisano preko funkcija oblika i stupnjeva slobode glasi

$$\mathbf{u}=\mathbf{N}\mathbf{v}. \tag{3.20}$$

4. VIŠERAZINSKO MODELIRANJE

Primjena novih materijala i tehnologija zahtijeva nove i napredne metode numeričkog modeliranja i analize konstrukcija te opisivanja ponašanja materijala. U zadnjih nekoliko godina, posebna pažnja se posvećuje istraživanju mikrostrukture materijala i njezinog utjecaja na mehaničko ponašanje. Kako je većina materijala po svojoj prirodi heterogena, za pouzdanu procjenu njihovog ponašanja koriste se različite matematičke tehnike osrednjavanja, odnosno homogenizacije. Međutim, ove su metode ograničene na jednostavne mikroskopske geometrije, linearno-elastično ponašanje materijala i male deformacije. Kako bi se dobila bolja rješenja, razvijene su metode modeliranja na više razina (*multiscale modelling*), slika 4.1. Razine ovih metoda su međusobno ovisne, što znači da se dobivena rješenja s jedne razine prenose na drugu, i upravo je to jedno od ključnih obilježja višerazinske analize. [22]

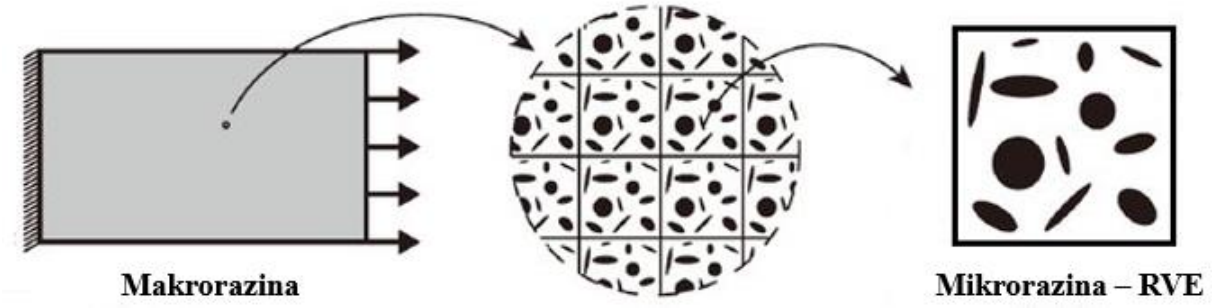


Slika 4.1 – Višerazinsko (*multiscale*) modeliranje [23]

Kako je prikazano na slici 4.1, u tehničkim znanostima najčešće se razmatraju mikro i makrorazina. Za procjenu ponašanja materijala na makrorazini, potrebno je uzeti u obzir utjecaj mikrostrukture materijala. Dobiveni rezultati simulacije na mikrorazini, tj. homogenizirani rezultati dobiveni analizom reprezentativnih volumenskih uzoraka mikrostrukture poznate geometrije i mehaničkih svojstava konstituenata, služe kao ulaz u model na makrorazini. Za rješavanje problema na mikrorazini najčešće se primjenjuje metoda konačnih elemenata.

4.1. Reprezentativni volumenski element

Reprezentativni volumenski element (RVE) predstavlja najmanji dio mikrostrukture materijala koji sadrži sve osnovne informacije koje su potrebne za opisivanje ponašanja materijala. Određivanje minimalne potrebne veličine RVE-a jedan je od prvih koraka u višerazinskoj mikro-makro analizi. Kod određivanja veličine RVE-a, potrebno je ispuniti uvjet da on bude statistički reprezentativan uzorak mikrostrukture, što je posebno pogodno za materijale s pravilnijom mikrostrukturom. Također, RVE treba biti što manji, ali opet dovoljne veličine da obuhvati sva potrebna makroskopska svojstva, a da istovremeno ne inducira neželjena svojstva, poput anizotropije. Na slici 4.2 dan je grafički prikaz odabira 2D RVE-a. [24], [25]



Slika 4.2 – Grafički prikaz odabira 2D RVE-a [26]

4.2. Računalna homogenizacija prvog reda

Na temelju ovisnosti varijabli mikro i makrorazine, razlikuju se metode homogenizacije prvog i drugog reda. Računalna homogenizacija prvog reda je jedna od višerazinskih numeričkih metoda za analizu heterogenih materijala i procjenu njihovog ponašanja. Prednost ove metode je što ne pretpostavlja nikakve konstitutivne relacije na makrorazini pa nema niti ograničenja na materijalne modele i male deformacije. Matematički model se temelji na osrednjavanju tenzora makrodeformacije ili makrogradijenta deformiranja i virtualnog rada po volumenu RVE-a. Polje pomaka na mikrorazini se sastoji od dva dijela. Jedan je dio ovisan o makrodeformaciji, a drugi neovisan o makrorazini i on predstavlja mikrofluktacije, tj. doprinos mikrorazine polju pomaka. Kako bi se zadovoljila jednakost volumenskog presjeka mikro i makrodeformacije, polje mikrofluktacije mora zadovoljiti dodatnu integralnu relaciju. Na ovaj se način osigurava da mikrofluktacije nemaju utjecaja na makrovarijable. Upravo je jednakost volumenskog presjeka mikro i makrodeformacija osnova za definiranje rubnih uvjeta koji se koriste na RVE-u, uz dodatno zadovoljavanje integralnog uvjeta mikrofluktacija. Ova se

metoda uklapa u lokalne teorije standardne mehanike kontinuuma, što znači da apsolutna veličina mikrokonstituenta nema utjecaja na dobivene rezultate. [25], [27]

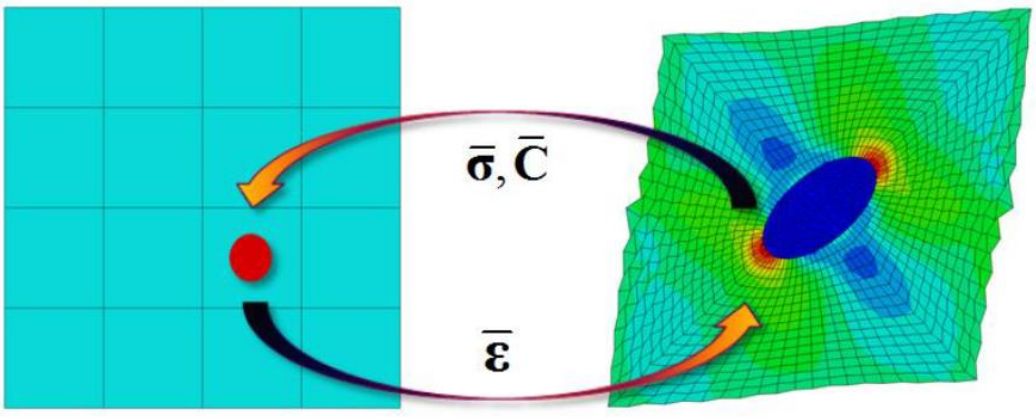
Neki od glavnih nedostataka ove metode su nemogućnost opisivanja složenijih slučajeva opterećenja i utjecaja okoline na ponašanje neke točke u razmatranom kontinuumu zbog čega je kasnije razvijena računalna homogenizacija drugog reda temeljena na nelokalnoj teoriji standardne mehanike kontinuuma. Međutim, unatoč ovim nedostacima, računalna homogenizacija prvog reda se i dalje često koristi u istraživanjima.

U računalnoj homogenizaciji prvog reda najčešće se primjenjuju sljedeći rubni uvjeti:

- rubni uvjeti linearnih pomaka,
- periodični pomaci i antiperiodično površinsko opterećenje,
- rubni uvjeti površinskog opterećenja.

Jasno je da rezultati analize ovise o korištenim rubnim uvjetima. U [22] je navedeno da najveću točnost daju rubni uvjeti periodičnih pomaka i antiperiodičnog površinskog opterećenja, budući da je kod rubnih uvjeta linearnih pomaka ponašanja RVE-a previše kruto, dok je ono za rubni uvjet površinskog opterećenja previše podatljivo. Periodičnost pomaka znači da su pomaci jednog brida analogni pomacima brida na suprotnoj strani RVE-a, gledano zrcaljeno.

Za provedbu analize na mikrorazini kao ulazni parametar s makrorazine potrebno je na čvorove RVE-a dodijeliti tenzor deformacije $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ koji se zatim primjenom rubnih uvjeta transformira u pomake rubnih čvorova. Matrica tangentne krutosti $\bar{\mathbf{C}}$ na makrorazini također nije poznata i ona se dobiva iz analize RVE-a koja se provodi u svakoj točki integracije na mikrorazini. Osim toga, s mikrorazine se na makrorazinu također prenosi i tenzor naprezanja $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ uprosječen po volumenu RVE-a. Shema ovog postupka prikazana je na slici 4.3.



Slika 4.3 – Shema računalne homogenizacije prvog reda [22]

4.3. Direktna numerička simulacija

Direktna numerička simulacija (DNS) kod analize heterogenih materijala podrazumijeva izrazito detaljnu numeričku analizu bez potrebe za složenim postupcima homogenizacije na više skala ili definiranjem RVE-ova. Drugim riječima, postupci modeliranja i analize se provode bez ikakvih pojednostavljenja ili homogenizacije mikrostrukture. Modeli se diskretiziraju 2D i 3D konačnim elementima, a ukupni broj stupnjeva slobode doseže iznimno velike vrijednosti. Upravo je razvoj računala omogućio izraziti napredak DNS metode i rješavanje kompleksnih problema u puno kraćem vremenu. Moguće je korištenje naprednih mehaničkih modela te uz računalnu sposobnost obrade velike količine podataka steći uvid u mehaničko ponašanje heterogenih materijala na makrorazini.

Numerička analiza se može podijeliti na dvije razine: makroskopsku i mikroskopsku. Makroskopski pristup razmatra heterogeni materijal kao kontinuum s homogeniziranim svojstvima materijala temeljen na izotropnim konstitutivnim jednadžbama. Na ovaj se način globalno ponašanje mikrostrukture predviđa u uprosječenom smislu. Međutim, ovim pristupom nije moguće opisati lokalno ponašanje.

S druge strane, mikroskopski pristup pretpostavlja da je heterogeni materijal kombinacija različitih izotropnih ili anizotropnih materijala pri čemu je potrebno modelirati svaki pojedini konstituent. Ovim pristupom dobivaju se detaljne informacije o ponašanju konstituenata i njihovoj interakciji. Jedan od najčešće korištenih mikroskopskih pristupa je korištenje jediničnih ćelija i RVE-ova, no valja naglasiti da je ovaj pristup zapravo još jedna od metoda homogenizacije budući da pretpostavlja identično stanje u periodičnoj raspodjeli ćelija. Metoda jedinične ćelije smanjuje veličinu problema na jednu jediničnu ćeliju pomoću rubnih uvjeta periodičnosti. Mikroskopski pristup se koristi za razumijevanje ponašanja heterogenih materijala i predviđanje loma iz razloga što lom nastaje na mikroskopskoj, a nastavlja se na makroskopskoj razini. [28]

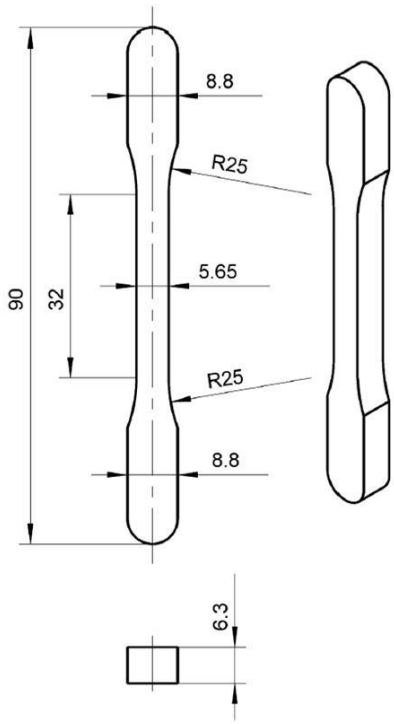
5. ODREĐIVANJE MINIMALNE VELIČINE RVE-A

U ovom poglavlju napravljene su mikrostrukturne analize RVE-ova kako bi se odredila minimalna potrebna veličina RVE-a. Budući da su konstituenti u mikrostrukturi raspoređeni nasumično, bitno je napomenuti da su sva rješenja približna i da nikada nije moguće odrediti egzaktnu vrijednost neke fizikalne veličine, svojstva i sl., pa je analize potrebno provesti na nekoliko nasumično odabranih uzoraka i dobivene rezultate obraditi statistički.

Metalografska analiza provedena je na epruveti od sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 prikazanoj na slici 5.1. Uzorak mikrostrukture uzet je s površine prihvata, a dimenzije epruvete dane su na slici 5.2. Analize su provedene u Laboratoriju za ispitivanje mehaničkih svojstava FSB-a na uređaju koji je novo nabavljen iz sredstava Uspostavnog istraživačkog projekta HRZZ-a, a kojeg je voditeljica dr. sc. Tamara Aleksandrov Fabijanić.



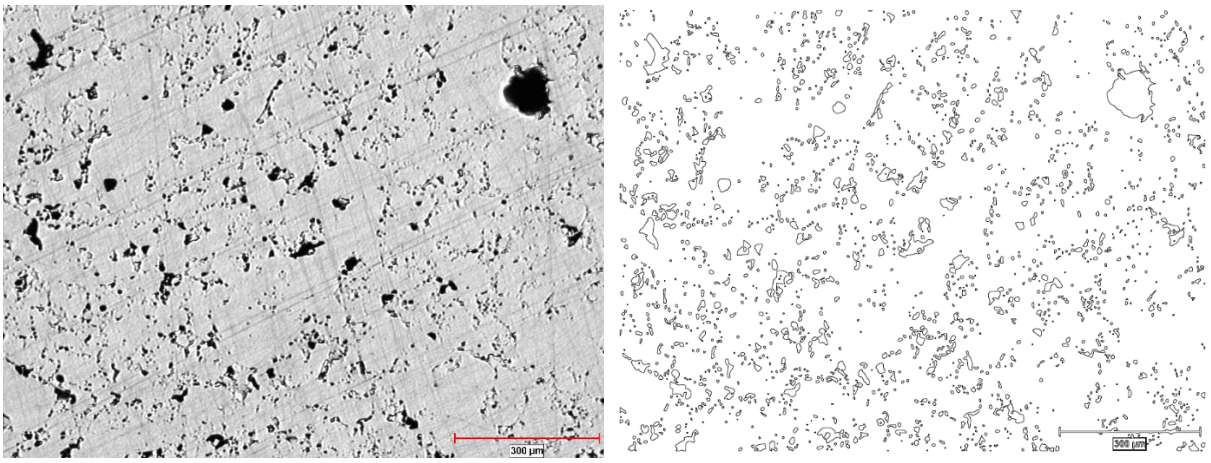
Slika 5.1 – Epruveta od sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na kojoj je izvršena metalografska analiza



Slika 5.2 – Dimenzije epruvete

5.1. Numerički modeli

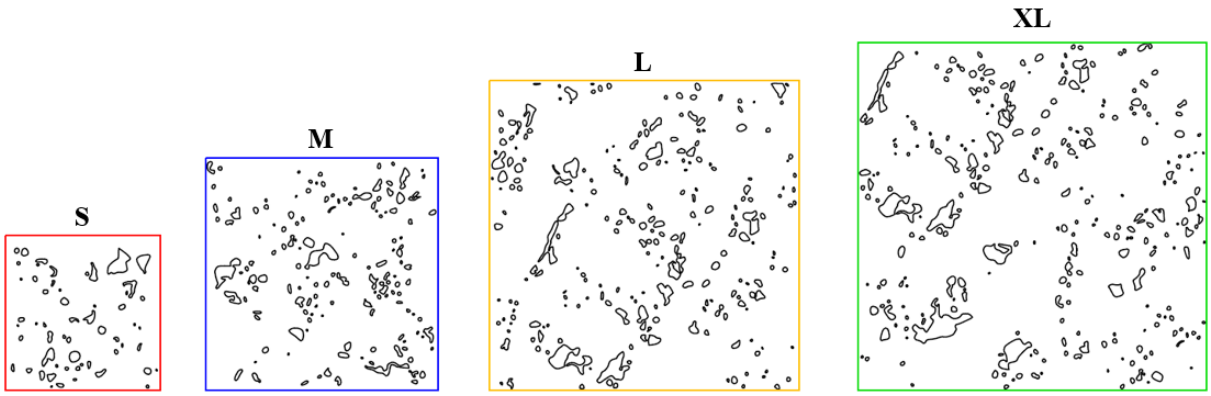
Na slici 5.3 lijevo, prikazana je slika mikrostrukture uzorka dobivena metalografskom analizom, povećana 50 puta, koja je zatim digitalnom obradom prebačena u vektorski format opisan linijama višeg reda, slika 5.3 desno, koji je potom moguće uvesti u softvere za pregled i uređivanje (*AutoCAD*), a zatim i u alate za numeričku analizu (*Abaqus*).



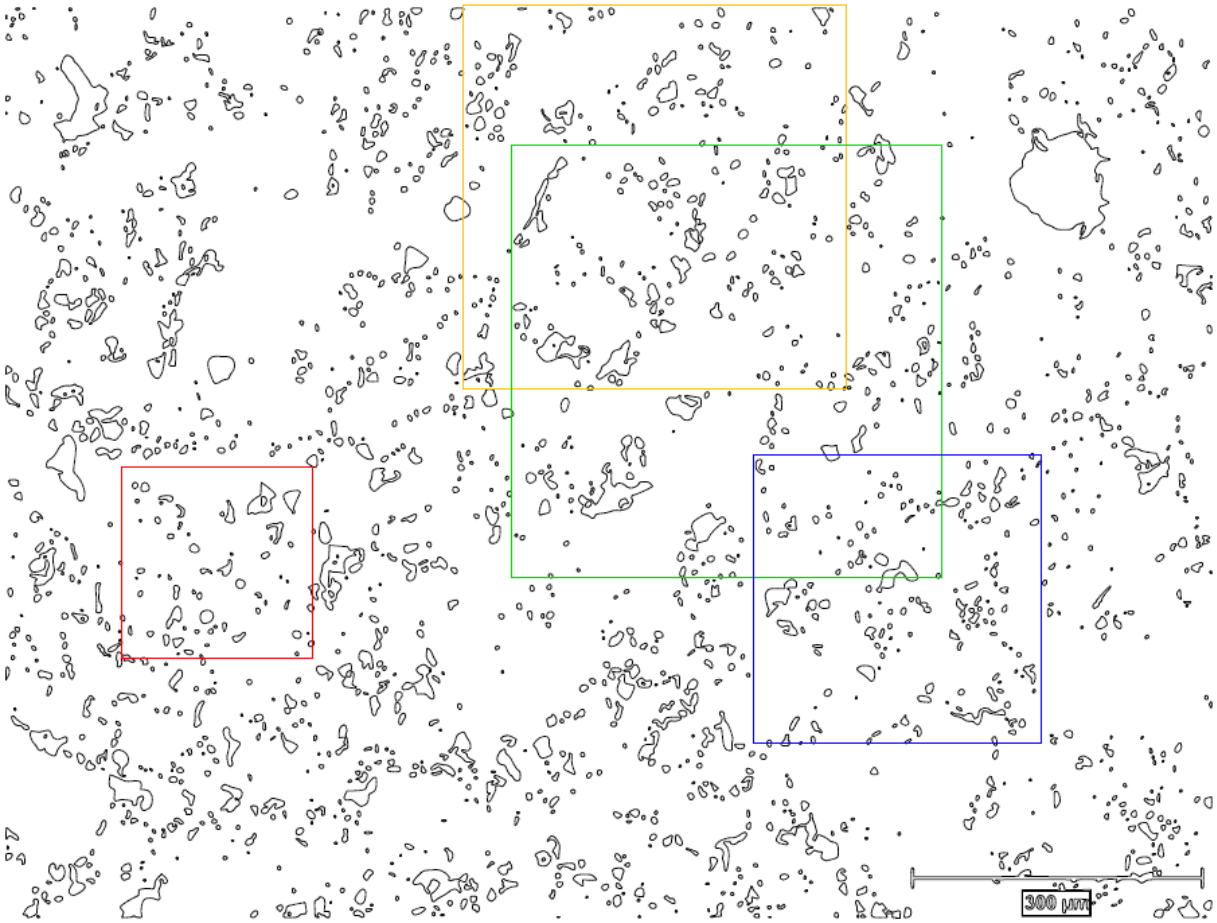
Slika 5.3 – Slika metalografije uzorka (lijevo) i digitalizirana slika metalografije uzorka (desno)

Gledajući omjer zadane gustoće sinteriranog čelika koja iznosi 6,5 g/cm^3 i standardnog konstrukcijskog čelika čija je prosječna gustoća 7,85 g/cm^3, slijedi da bi poroznost razmatranog sinteriranog čelika trebala iznositi oko 17,2%. Međutim, poroznost dobivenog uzorka mikrostrukture sa slike 5.3 iznosi 6,4%. Razlog toga je što su razmatrani uzorci mikrostrukture uzeti s površine prihvata, a ne sredine epruvete.

U ovom radu definirane su 4 različite veličine RVE-ova u svrhu provjere konvergencije rješenja. Na ovaj je način vidljiv i utjecaj veličine RVE-a na konačno rješenje. Svaki RVE je kvadratnog oblika. Na slici 5.4 prikazani su korišteni RVE-ovi dimenzija 0,2×0,2 mm (veličina S, crveno), 0,3×0,3 mm (veličina M, plavo), 0,4×0,4 mm (veličina L, žuto), 0,45×0,45 mm (veličina XL, zeleno), a na slici 5.5 prikazan je njihov položaj na uzorku mikrostrukture. RVE-ovi su definirani na način da udio poroznosti pojedinog RVE-a ne odstupa više od inženjerskih 5% od ukupne poroznosti mikrostrukture dobivenog uzorka koja iznosi 6,4%. Također, svaki RVE u potpunosti obuhvaća pore, tj. nema presjecanja pora po rubu RVE-a. U tablici 5.1 dan je prikaz dimenzija i poroznosti pojedinog RVE-a.



Slika 5.4 – Korišteni RVE-ovi



Slika 5.5 – Položaj RVE-ova na uzorku mikrostrukture

Tablica 5.1 – Dimenzije i poroznost RVE-ova

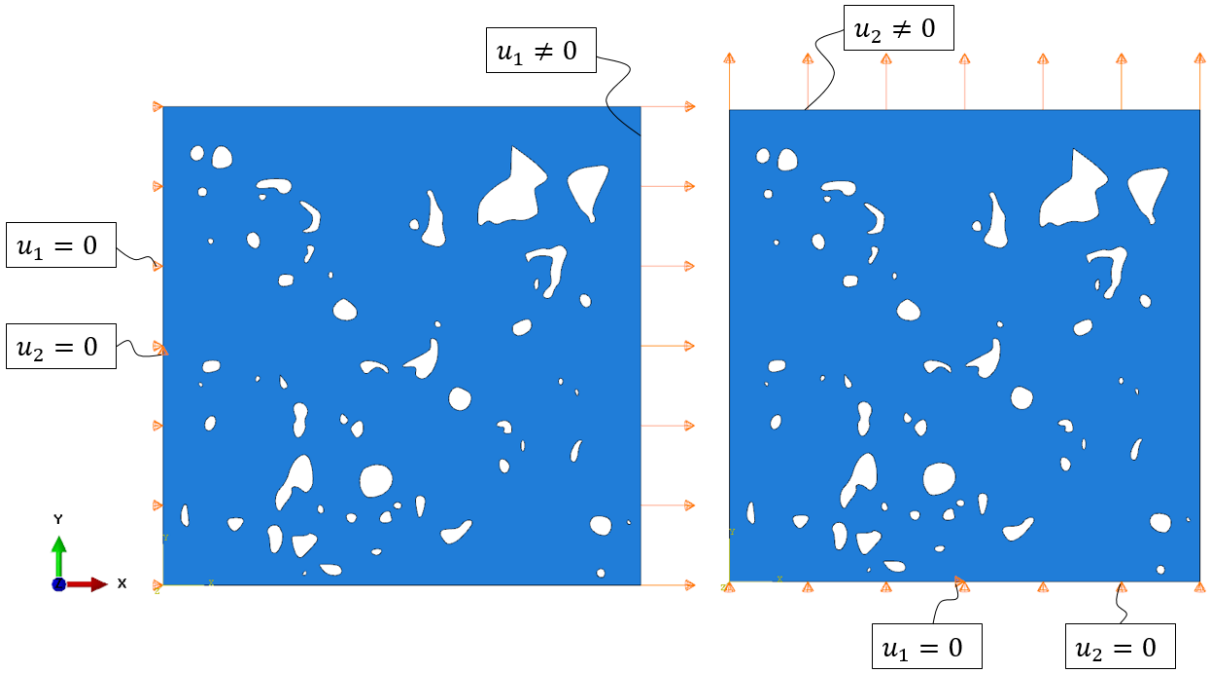
	S	**M**	**L**	**XL**
Dimenzije [mm]	0,2×0,2	0,3×0,3	0,4×0,4	0,45×0,45
Poroznost [%]	6,61	6,26	6,33	6,70

Za određivanje veličine RVE-ova korišten je elastično-idealno plastični materijalni model prikazan ranije na slici 2.5, a materijalna svojstva dana su u tablici 5.2.

Tablica 5.2 – Materijalna svojstva elastično-idealno plastičnog materijalnog modela

Modul elastičnosti, E [GPa]	200
Poissonov faktor, ν	0,288
Granica tečenja, σ_y [MPa]	240

Napravljene su simulacije horizontalnog i vertikalnog vlačnog testa pojedinog RVE-a. Na lijevoj stranici RVE-a za horizontalni, odnosno donjoj stranici za vertikalni test, zadani su rubni uvjeti pomaka, tako da je onemogućen pomak u smjeru opterećenja, a istovremeno je u središnjoj točki onemogućen pomak u smjeru okomitom na opterećenje. Opterećenje je zadano pomakom iznosa 0,5% ukupne duljine stranice RVE-a. Numerički model sa svim rubnim uvjetima prikazan je na slici 5.6.

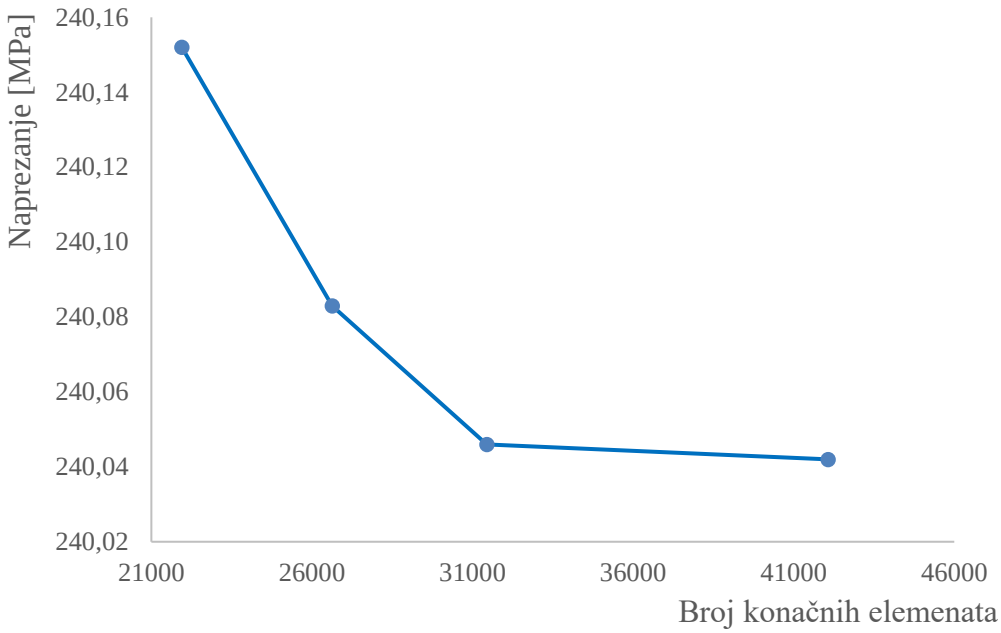


Slika 5.6 – Numerički model horizontalnog (lijevo) i vertikalnog (desno) vlačnog testa RVE-ova

RVE-ovi su diskretizirani CPE4 konačnim elementima opisanim u poglavlju 3.4. U svrhu provjere kvalitete mreže i prikaza konvergencije rješenja, generirane su 4 različite mreže konačnih elemenata, a dijagram konvergencije ekvivalentnog von Misesovog naprezanja u središnjoj točki opterećene stranice za horizontalni vlačni test i RVE dimenzija 0,2×0,2 mm prikazan je na slici 5.7. Na ovaj je način dobivena potrebna veličina konačnih elemenata kojima su potom diskretizirani i ostali RVE-ovi.

Ukupni broj konačnih elemenata za pojedini RVE:

- RVE 0,2×0,2 mm → 42064;
- RVE 0,3×0,3 mm → 99807;
- RVE 0,4×0,4 mm → 161975;
- RVE 0,45×0,45 mm → 220149.

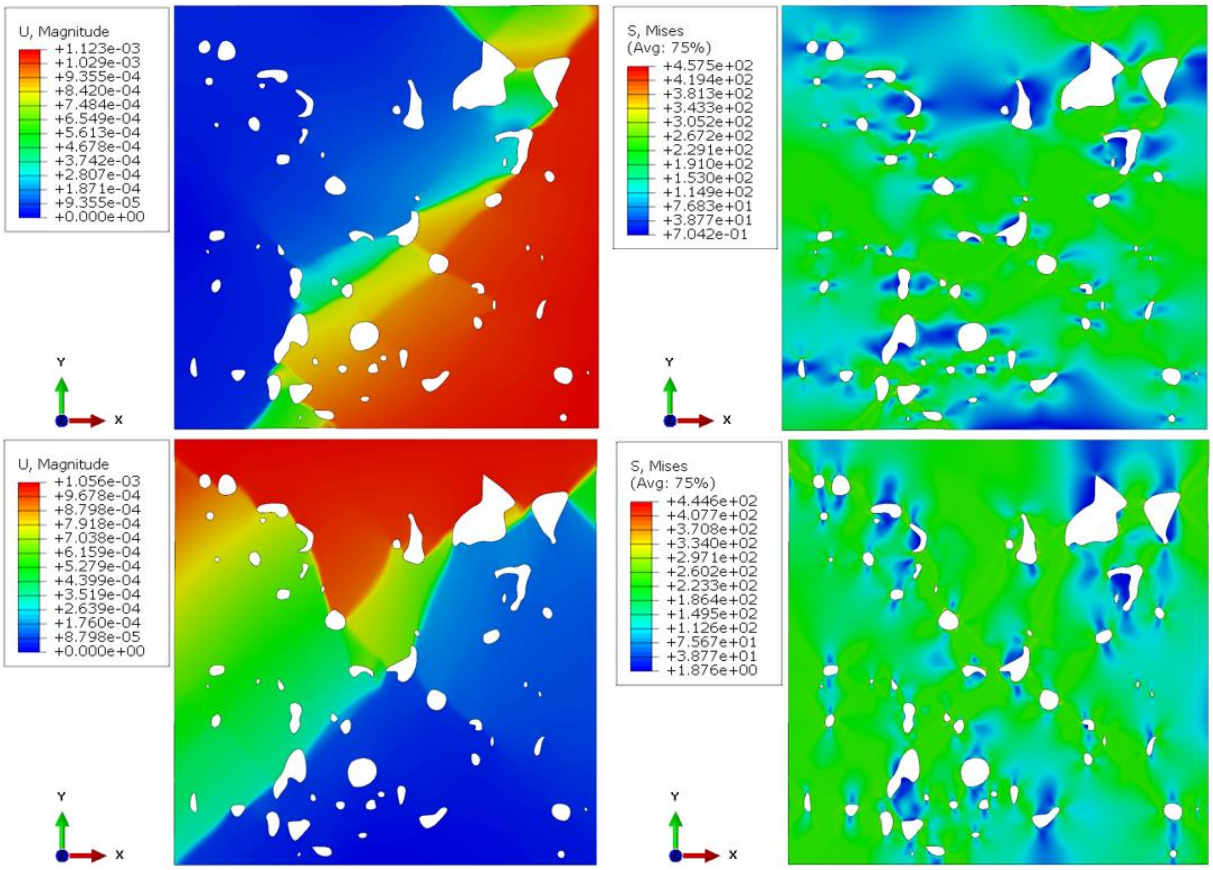


Slika 5.7 – Dijagram konvergencije ekvivalentnog von Misesovog naprezanja u središnjoj točki opterećene stranice za horizontalni vlačni test i RVE dimenzija 0,2×0,2 mm

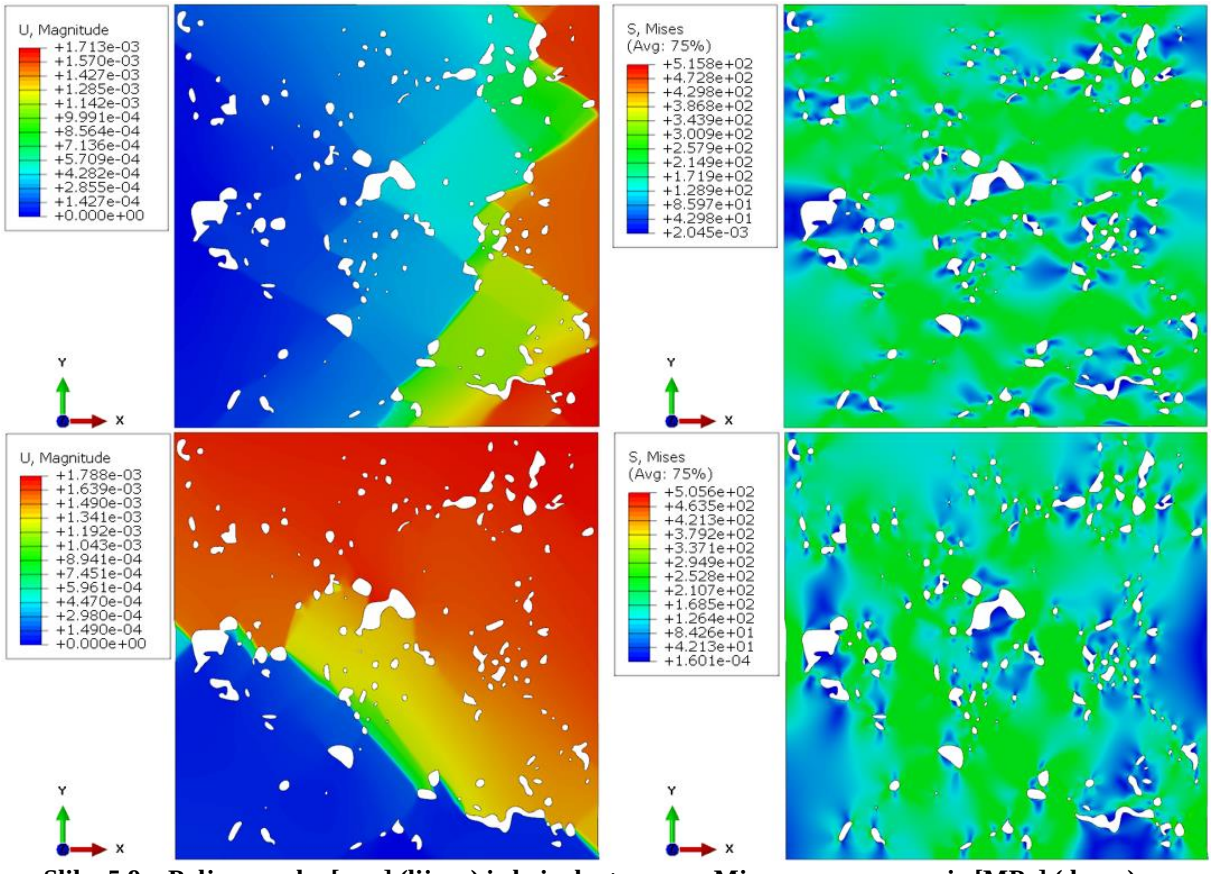
5.2. Prikaz rezultata

U nastavku ovog poglavlja slijedi prikaz dobivenih rezultata i zaključak. Dan je grafički prikaz rezultata za horizontalni i vertikalni vlačni test, a na kraju su dobivene vrijednosti iz oba testa uprosječene.

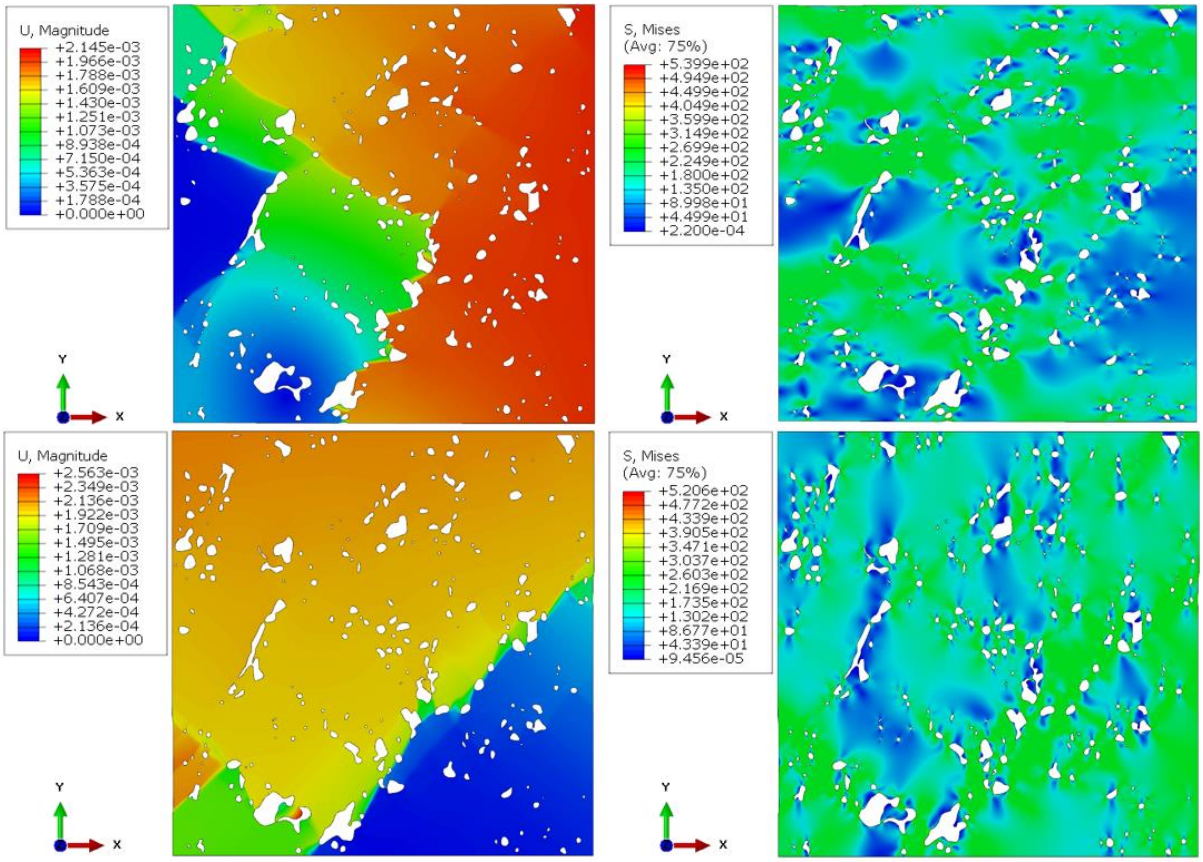
Na slikama 5.8-5.11 , usporedno je prikazano polje pomaka i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja za svaki RVE i za oba vlačna testa. Gornji dio slika prikazuje rezultate za horizontalni vlačni test, a donji za vertikalni test. Na lijevoj strani prikazano je polje pomaka, a na desnoj naprezanja. Dobivene vrijednosti pomaka dane su u milimetrima [mm], a naprezanja u megapaskalima [MPa].



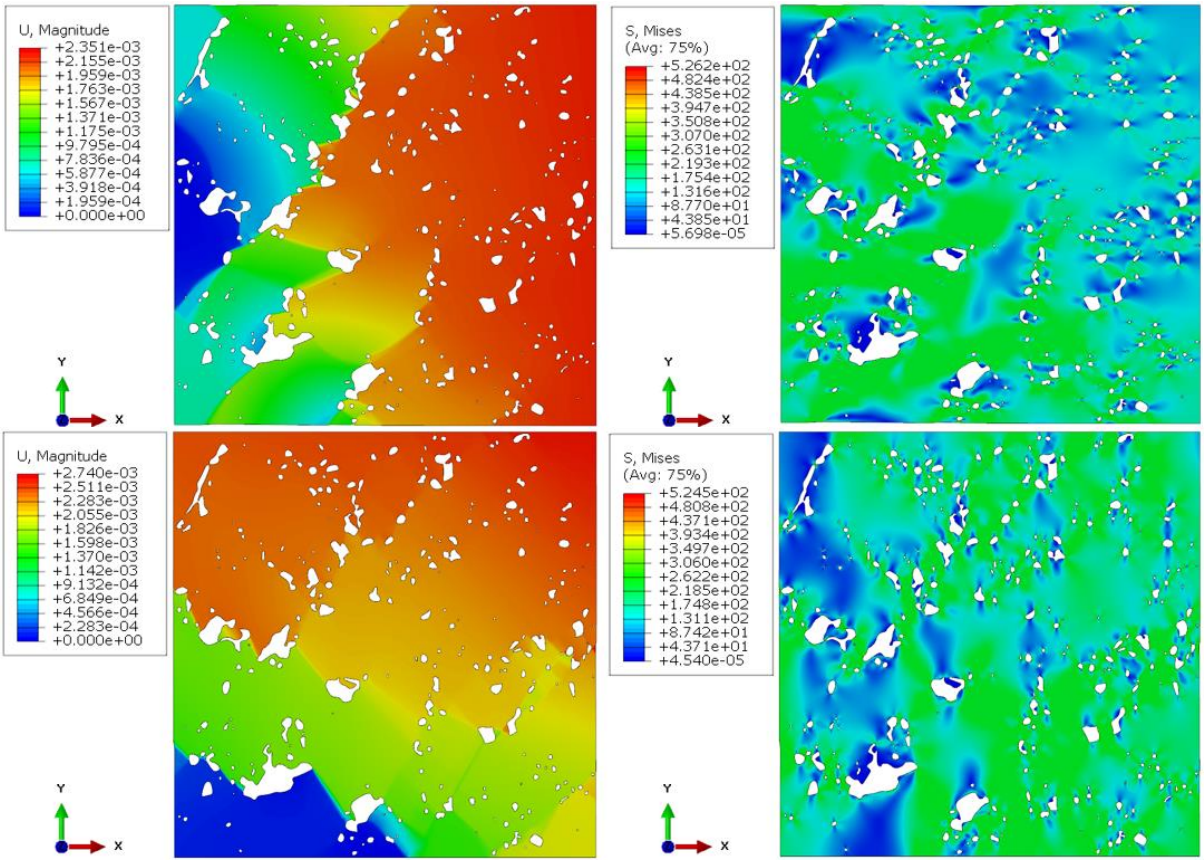
Slika 5.8 – Polje pomaka [mm] (lijevo) i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja [MPa] (desno) za horizontalni (gore) i vertikalni (dolje) vlačni test i RVE dimenzija 0,2×0,2 mm



Slika 5.9 – Polje pomaka [mm] (lijevo) i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja [MPa] (desno) za horizontalni (gore) i vertikalni (dolje) vlačni test i RVE dimenzija 0,3×0,3 mm

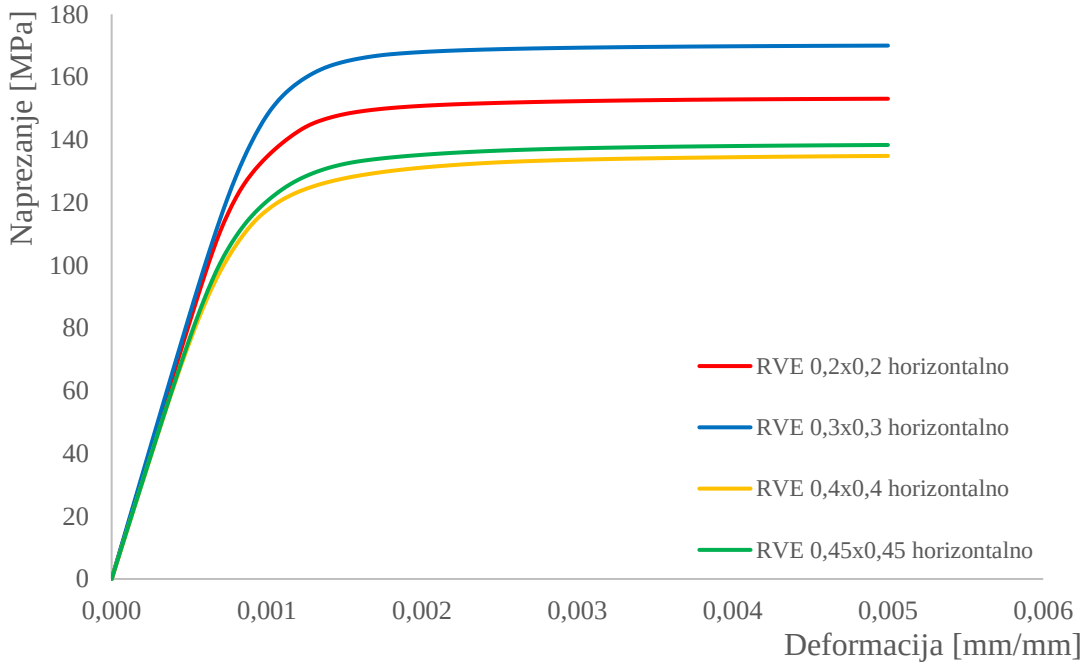


Slika 5.10 – Polje pomaka [mm] (lijevo) i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja [MPa] (desno) za horizontalni (gore) i vertikalni (dolje) vlačni test i RVE dimenzija 0,4×0,4 mm

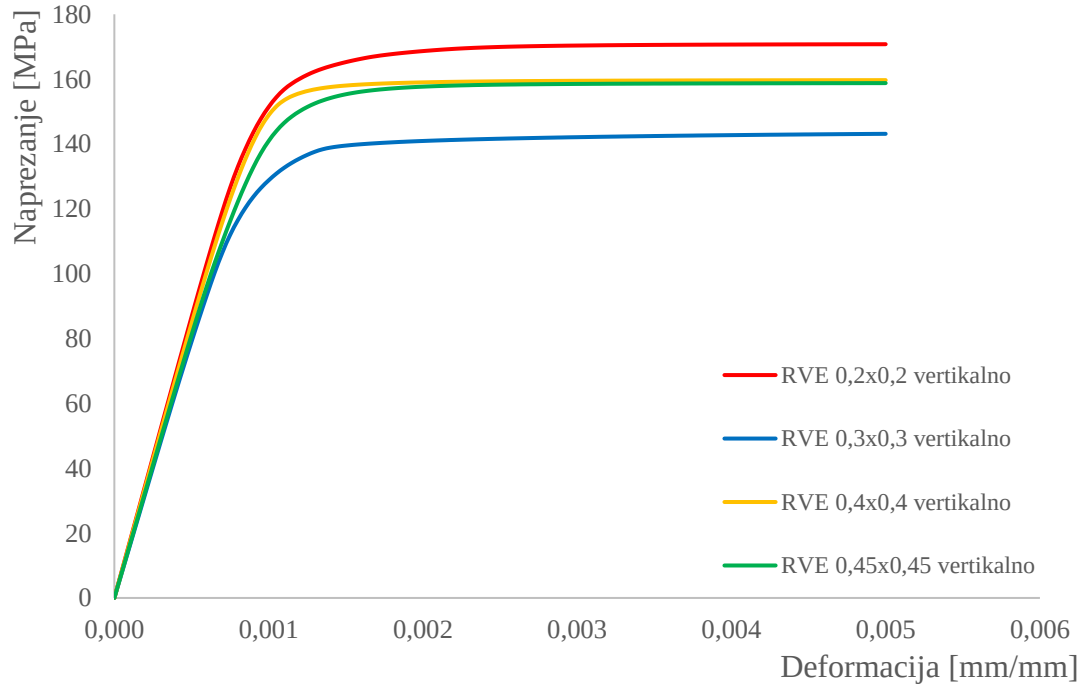


Slika 5.11 – Polje pomaka [mm] (lijevo) i ekvivalentnog von Misesovog naprezanja [MPa] (desno) za horizontalni (gore) i vertikalni (dolje) vlačni test i RVE dimenzija 0,45×0,45 mm

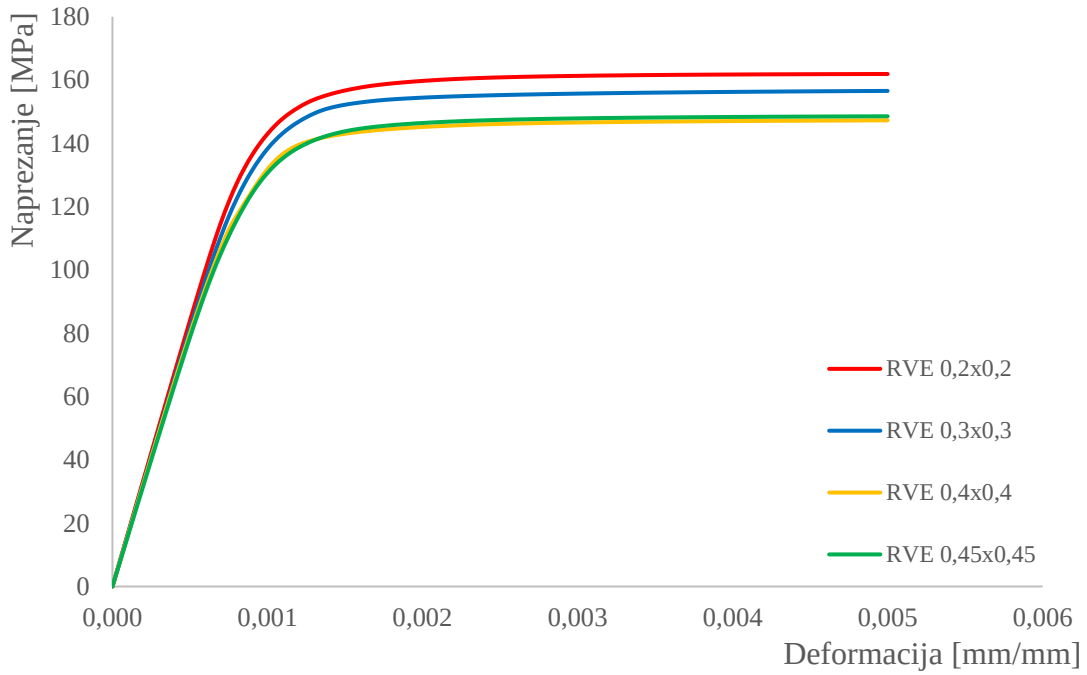
Slike 5.12 i 5.13 prikazuju dijagram normalno naprezanje-deformacija središnje točke opterećene stranice pojedinog RVE-a za horizontalni, odnosno vertikalni vlačni test. Na slici 5.14 prikazan je presjek rezultata, tj. uprosječene vrijednosti RVE-ova za oba vlačna testa.



Slika 5.12 – Dijagram normalno naprezanje-deformacija središnje točke opterećene stranice za horizontalni vlačni test RVE-ova



Slika 5.13 – Dijagram normalno naprezanje-deformacija središnje točke opterećene stranice za vertikalni vlačni test RVE-ova



Slika 5.14 – Dijagram normalno naprezanje-deformacija – presjek rezultata oba vlačna testa

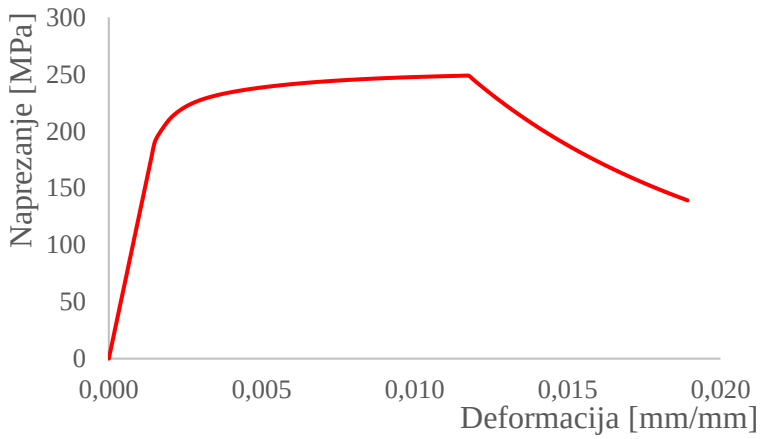
Iz dijagrama prikazanog na slici 5.14, može se uočiti da se RVE-ovi manjih dimenzija ponašaju kruće od onih većih dimenzija, tj. s povećanjem dimenzija RVE-a, krutost pada. Osim toga, vidljivo da se rješenja za RVE-ove dimenzija 0,4×0,4 mm i 0,45×0,45 mm praktički preklapaju (odstupanje 1,09%), dok RVE-ovi manjih dimenzija odstupaju od tog rješenja. Prema tome, može se zaključiti da minimalna potrebna veličina RVE-a iznosi 0,4×0,4 mm. Dakle, RVE dimenzija 0,4×0,4 mm predstavlja statistički reprezentativni uzorak cjelokupne mikrostrukture materijala pa će se on koristiti u daljnjim analizama.

6. VIŠERAZINSKA ANALIZA VLAČNOG TESTA

U ovom poglavlju napravljena je višerazinska analiza vlačnog testa sinteriranog čelika oznake Astaloy Mo+0,2C i gustoće 6,5 g/cm^3. Cilj ovog poglavlja je postupkom mikromehaničkog modeliranja i korištenjem RVE-a minimalne veličine određenog u 5. poglavlju, dobiti dijagram naprezanje-deformacija koji odgovara eksperimentalnim rezultatima, odnosno odrediti materijalne karakteristike metalne matrice sinteriranog čelika. Međutim, zbog pandemije izazvane koronavirusom, tijekom izrade ovog diplomskog rada, eksperimentalni rezultati nisu bili dostupni, tj. nije provedeno eksperimentalno vlačno ispitivanje epruvete prikazane ranije na slici 5.1. Iz tog razloga, kao referentne vrijednosti korišteni su podaci iz literature [7]. Naime, s dijagrama prikazanih na slici 1.5, moguće je interpolacijom dobiti približne vrijednosti modula elastičnosti, granice tečenja, vlačne čvrstoće i istezljivosti, sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3. Za Poissonov faktor ν uzeta je standardna vrijednost 0,3, a svi relevantni materijalni parametri prikazani su u tablici 6.1. Na temelju tih podataka kreiran je dijagram naprezanje-deformacija koji služi kao referenca prilikom kalibracije materijalnih parametara metalne matrice na mikro razini, odnosno na RVE-u, a prikazan je na slici 6.1.

Tablica 6.1 – Materijalni parametri sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7]

Modul elastičnosti, E [GPa]	115
Poissonov faktor, ν	0,3
Granica tečenja, σ_y [MPa]	180
Vlačna čvrstoća, R_m [MPa]	250
Istezljivost [%]	2,5

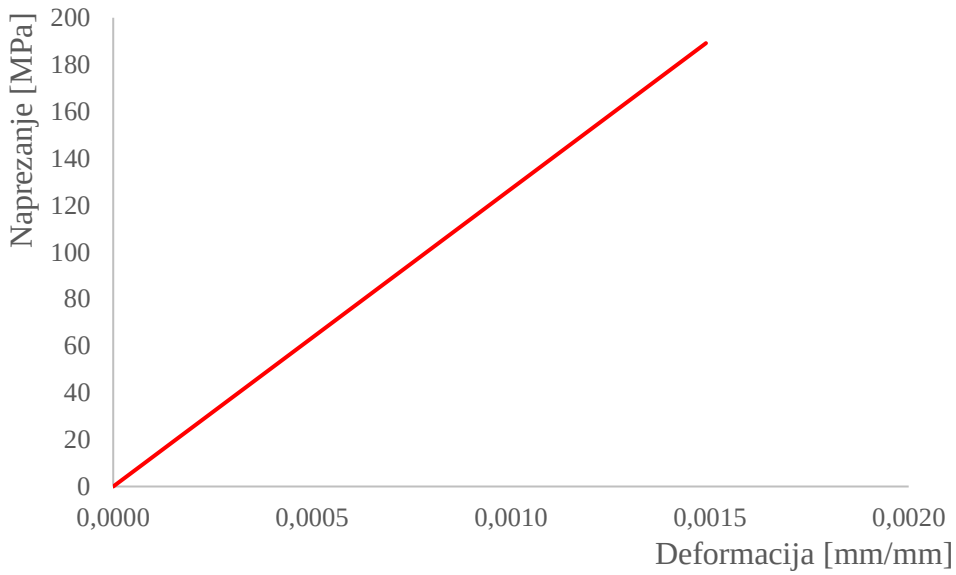


Slika 6.1 – Dijagram naprezanje-deformacija sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7]

Da bi se na mikro razini kalibracijom materijalnih parametara pogodio dijagram sa slike 6.1., najprije je potrebno na makro razini i jednom konačnom elementu pogoditi isti dijagram, a zatim dobiveni parametri s makro razine koriste kao ulaz za modele na mikro razini. Na makro razini je u principu napravljena verifikacija materijalnih modela koji su kasnije korišteni i na mikro razini. Prema tome, sukladno dijagramu sa slike 6.1, ovo je poglavlje podijeljeno na tri dijela pri čemu je u svakom dijelu napravljena najprije makro analiza, a zatim i numerička analiza na mikro razini. U prvom dijelu napravljena je numerička analiza elastičnog područja gdje je cilj na mikro razini dobiti približni iznos modula elastičnosti metalne matrice sinteriranog čelika. U drugom dijelu, napravljena je numerička analiza elastoplastičnog područja, pri čemu je korišteni elastoplastični materijalni model najprije verificiran na makro razini i na jednom konačnom elementu. Pritom su na mikro razini za definiranje elastičnih parametara korišteni ranije dobiveni parametri elastične analize na mikro razini, a nakon toga kreće proces kalibracije materijalnih parametara za elastoplastično područje, nakon čega je dobiven iznos granice tečenja metalne matrice sinteriranog čelika. U trećem je dijelu na analogan način napravljena numerička analiza elastoplastičnog područja s oštećenjem gdje je cilj dobiti parametre oštećenja metalne matrice sinteriranog čelika.

6.1. Analiza elastičnog područja

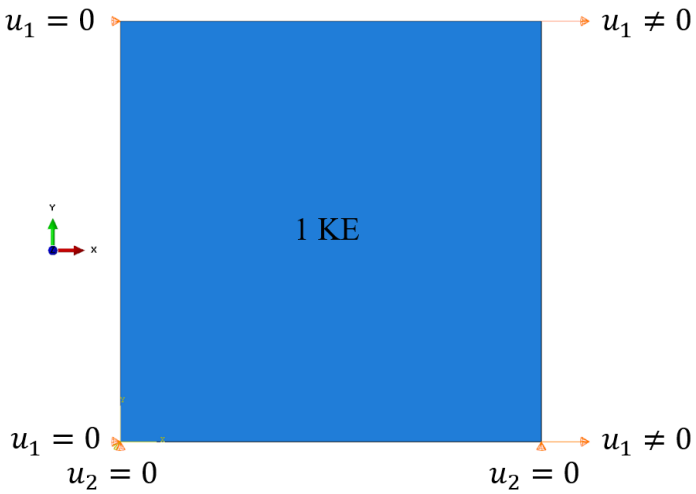
Na slici 6.2 prikazan je elastični dio dijagrama sa slike 6.1, koji je potrebno dobiti najprije na makro, a zatim i na mikro razini.



Slika 6.2 – Dijagram naprezanje-deformacija elastičnog područja sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7]

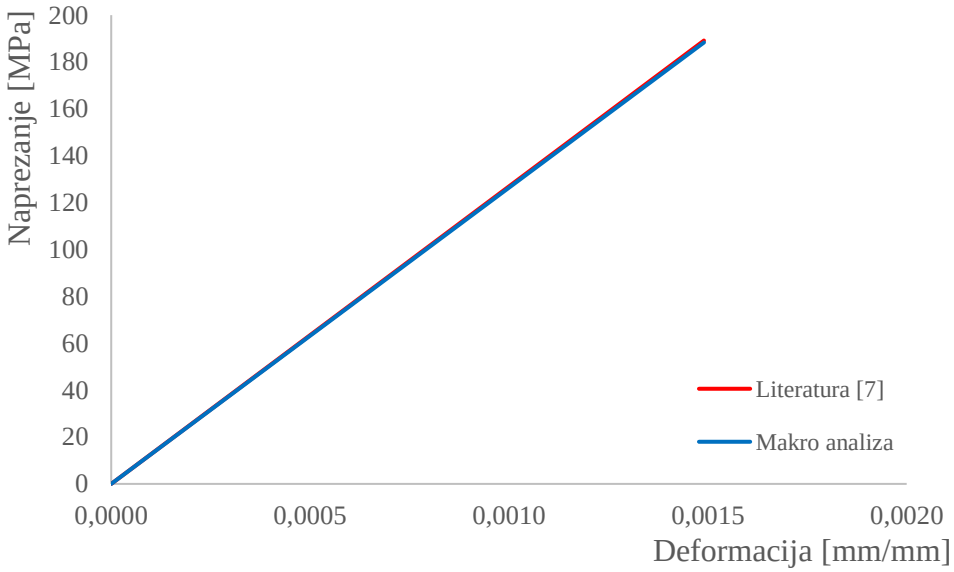
6.1.1. Makro analiza elastičnog područja

Kao što je rečeno, u općenitom slučaju, na makro razini analiziran je jedan konačni element (karakterističnih dimenzija 1×1) koji predstavlja homogenizirani materijal na makro razini podvrgnut vlačnom testu. Numerički model diskretiziran s jednim konačnim elementom i rubnim uvjetima prikazan je na slici 6.3.



Slika 6.3 – Numerički model na makro razini

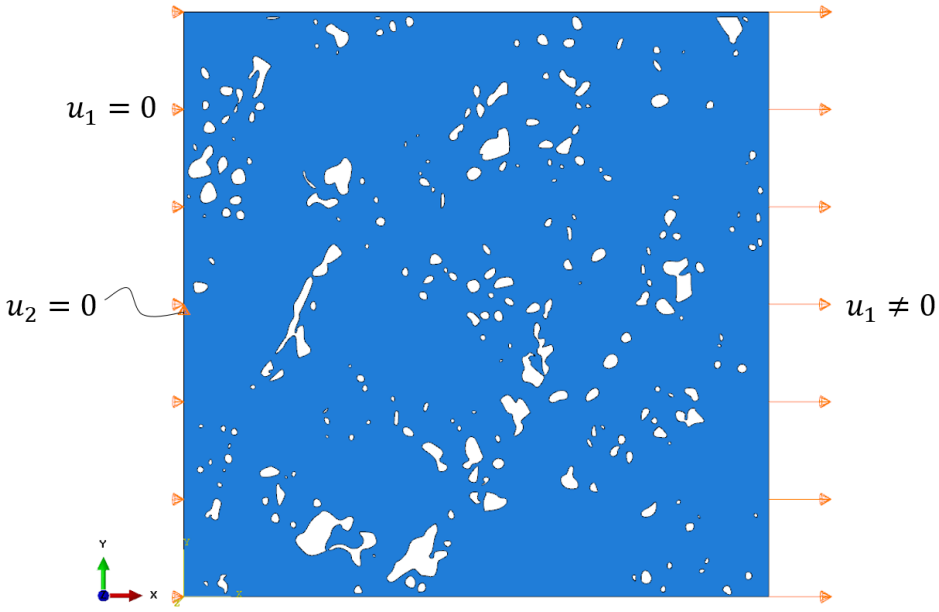
U makro analizi elastičnog područja, zadana su elastična svojstva iz tablice 6.1, tj. zadani su modul elastičnosti i Poissonov faktor, a rezultati su prikazani na slici 6.4. Vidljivo je da se rezultati iz literature [7] i numeričke analize preklapaju (odstupanje 0,43%) i s ovim je podacima moguće pristupiti mikro analizi.



Slika 6.4 – Dijagram naprezanje-deformacija elastičnog područja dobiven analizom na makro razini

6.1.2. Mikro analiza elastičnog područja

Najprije valja naglasiti da su sve mikro analize provedene za slučaj horizontalnog vlačnog testa, pri čemu je numerički model RVE-a analogan onome sa slike 5.6 lijevo, no u svrhu lakšeg praćenja, model je prikazan još jednom na slici 6.5.

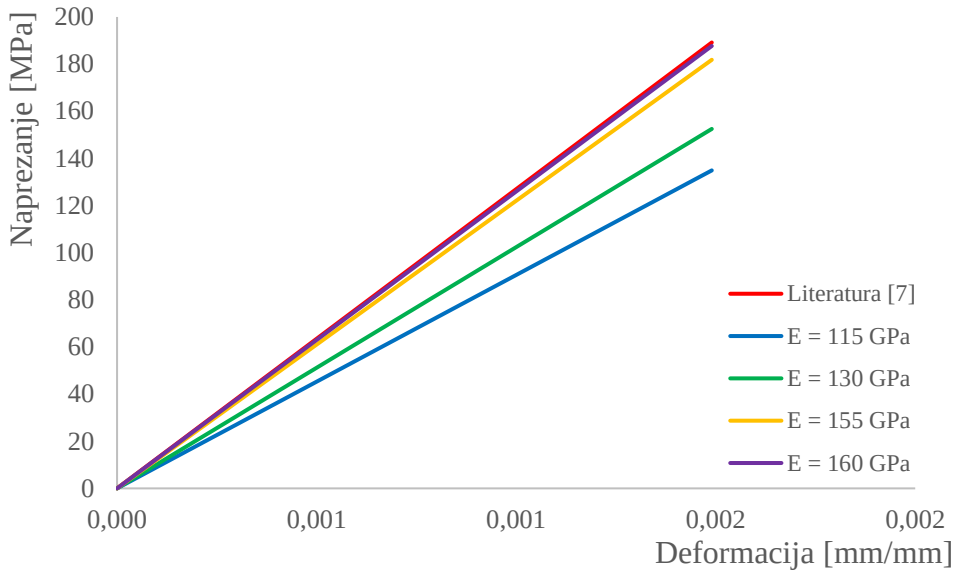


Slika 6.5 – Numerički model na mikro razini

Općenito, u mikro analizi koja se provodi na RVE-u, kao ulazni parametri materijala koriste se parametri dobiveni iz makro analize, a zatim se iterativnim postupkom i kalibracijom materijalnih parametara pokušava pogoditi dijagram sa slike 6.1. U elastičnoj analizi, potrebno je kalibrirati samo modul elastičnosti, a iterativni postupak prikazan je u tablici 6.2, gdje treći stupac označava odstupanje dobivenog dijagrama naprezanje-deformacija za zadani modul elastičnosti, od dijagrama sa slike 6.2. Na slici 6.6 postupak kalibracije prikazan je grafički na dijagramu naprezanja u ovisnosti o deformaciji.

Tablica 6.2 – Kalibracija modula elastičnosti na mikro razini

Iteracija	**Modul elastičnosti,** E [GPa]	**Odstupanje** [%]
0	115	28,68
1	130	19,38
2	155	3,88
3	160	0,78

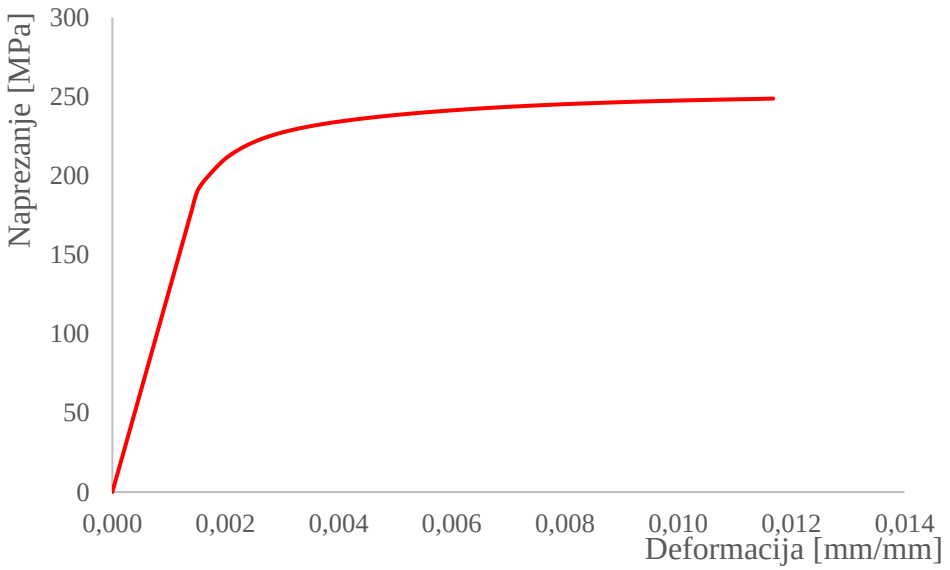


Slika 6.6 – Dijagram naprezanje-deformacija elastičnog područja dobiven analizom na mikro razini

Vidljivo je da već u trećoj iteraciji gdje je zadan modul elastičnosti 160 GPa, odstupanje iznosi 0,78%, pa se može zaključiti da je to iznos modula elastičnosti metalne matrice razmatranog sinteriranog čelika, te će se taj podatak koristiti u sljedećim analizama na mikro razini.

6.2. Analiza elastoplastičnog područja

Slika 6.7 prikazuje elastoplastični dio dijagrama sa slike 6.1, koji je potrebno reproducirati na makro i mikro razini.



Slika 6.7 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7]

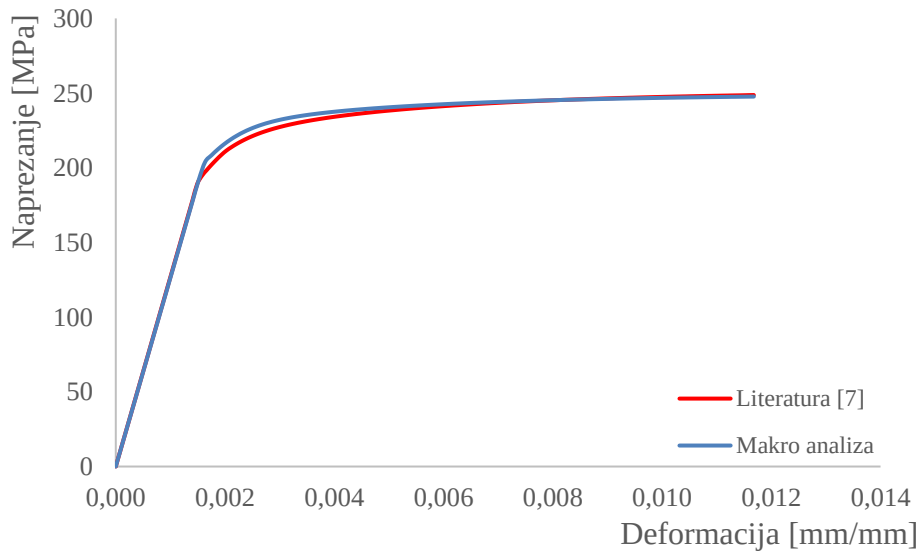
6.2.1. Makro analiza elastoplastičnog područja

Za elastoplastičnu analizu korišten je elastoplastični materijalni model s nelinearnim kombiniranim očvršćenjem opisan ranije na kraju poglavlja 2.1, s time da je razmatran samo utjecaj parametara nelinearnog izotropnog očvršćenja, budući da se materijal nije opterećivao ciklički, već monotono. Uz podatke iz tablice 6.1, na makro razini je potrebno definirati parametre korištenog elastoplastičnog materijalnog modela, odnosno potrebno je zadati granicu tečenja i parametre očvršćenja. Korišteni parametri prikazani su u tablici 6.3.

Tablica 6.3 – Elastoplastični materijalni parametri za makro analizu

<table>
<tr><th colspan="2">ELASTIČNI PARAMETRI</th><th colspan="4">PLASTIČNI PARAMETRI</th></tr>
<tr><td>Modul elastičnosti, E [GPa]</td><td>115</td><td colspan="3">Granica tečenja, σ_y [MPa]</td><td>180</td></tr>
<tr><td>Poissonov faktor, ν</td><td>0,3</td><td colspan="2">Kinematičko očvršćenje</td><td colspan="2">Izotropno očvršćenje</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>C_1</td><td>4000</td><td rowspan="2">Q_∞</td><td rowspan="2">25</td></tr>
<tr><td>γ_1</td><td>261</td></tr>
<tr><td>C_2</td><td>40000</td><td rowspan="2">b</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>γ_2</td><td>2113,5</td></tr>
</table>

Na slici 6.8 je prikazan dobiveni dijagram naprezanje-deformacija za makro analizu. Vidljivo je preklapanje rezultata iz literature [7] s rezultatima makro analize (odstupanje 1,89%), što znači da će ovi parametri služiti kao ulaz u analizu na mikro razini, odnosno na RVE-u.



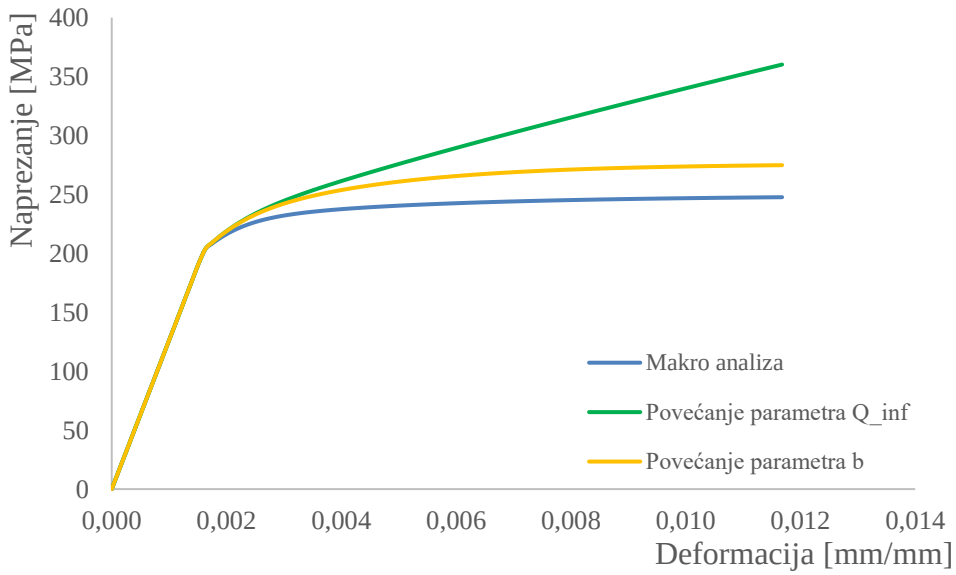
Slika 6.8 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja dobiven analizom na makro razini

S obzirom da je rečeno da će se razmatrati samo parametri nelinearnog izotropnog očvršćenja, dok će se parametri nelinearnog kinematičkog očvršćenja držati konstantnima budući se materijal nije opterećivao ciklički, prije ulaska u analizu na mikro razini valja proučiti utjecaj parametara nelinearnog izotropnog očvršćenja na krivulju naprezanja na makro razini.

Na dijagramu na slici 6.9 vidljiv je utjecaj povećanja pojedinog parametra (povećanje 100 puta), odnosno parametara Q_∞ i b, čija je veza ranije prikazana jednadžbom (2.33), no valja prikazati spomenutu jednadžbu još jednom,

$$\sigma^0 = \sigma|_0 + Q_\infty \left(1 - e^{-b\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}}}\right). \tag{6.1}$$

Kako je već rečeno, parametar Q_∞ predstavlja maksimalnu promjenu u veličini plohe tečenja, a parametar b definira brzinu promjene veličine plohe tečenja tijekom plastičnog deformiranja. Na slici 6.9 se može uočiti da povećanjem parametra Q_∞ dolazi do povećanja nagiba krivulje, odnosno izraženiji je proces očvršćenja, dok povećanjem parametra b, dolazi do pomaka cijele krivulje prema gore.



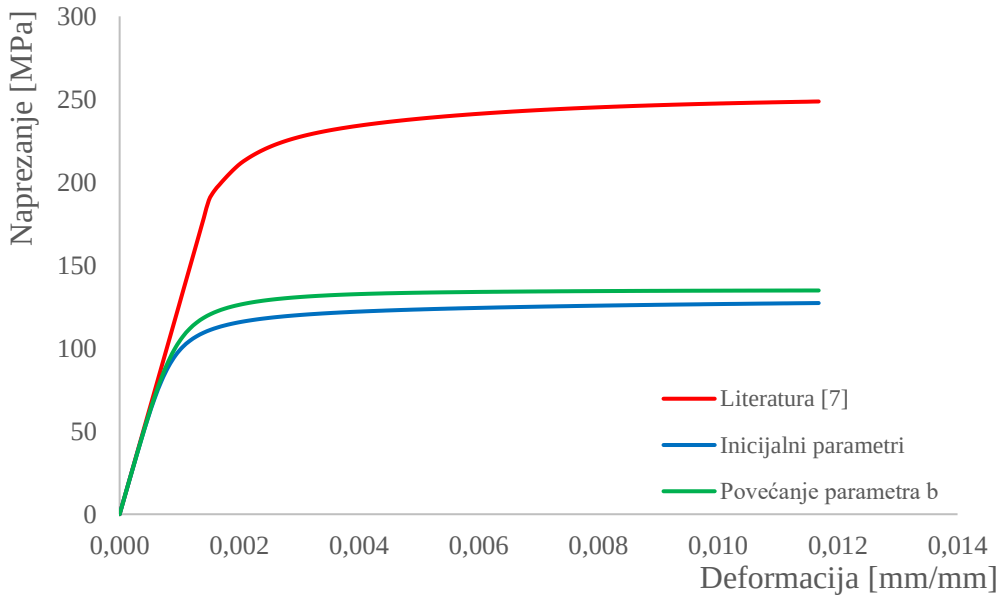
Slika 6.9 – Utjecaj povećanja materijalnih parametara izotropnog očvršćenja na krivulju naprezanja na makro razini

6.2.2. Mikro analiza elastoplastičnog područja

Ulazni parametri za elastoplastičnu analizu na mikro razini su elastični parametri dobiveni na mikro razini i plastični parametri korišteni u elastoplastičnoj analizi na makro razini. Dakle, inicijalni ulazni parametri su analogni onima u tablici 6.3, uz jedinu promjenu modula elastičnosti koji sada iznosi 160 GPa. U mikro analizi potrebno je provesti kalibraciju granice tečenja i materijalnih konstanti nelinearnog izotropnog očvršćenja.

Međutim, s obzirom na provedenu analizu utjecaja parametara izotropnog očvršćenja na makro razini (slika 6.9), odlučeno je da će se na mikro razini od konstanti za nelinearno izotropno očvršćenje kalibrirati samo parametar b , tako da je najprije provjeren njegov utjecaj na krivulju naprezanja na mikro razini.

Na slici 6.10 prikazan je utjecaj povećanja parametra b na krivulju naprezanja na mikro razini. Dana je usporedba krivulje naprezanja elastoplastičnog područja na temelju podataka iz literature [7], one dobivene korištenjem inicijalnih parametara i uz promjenu samo parametra b za 1000 puta, te je vidljivo da čak i tako velika promjena ovog parametra nema značajan utjecaj na krivulju naprezanja na mikro razini. Na temelju toga, odlučeno je da će se na mikro razini vršiti samo kalibracija granice tečenja, a ne i parametara nelinearnog izotropnog očvršćenja.

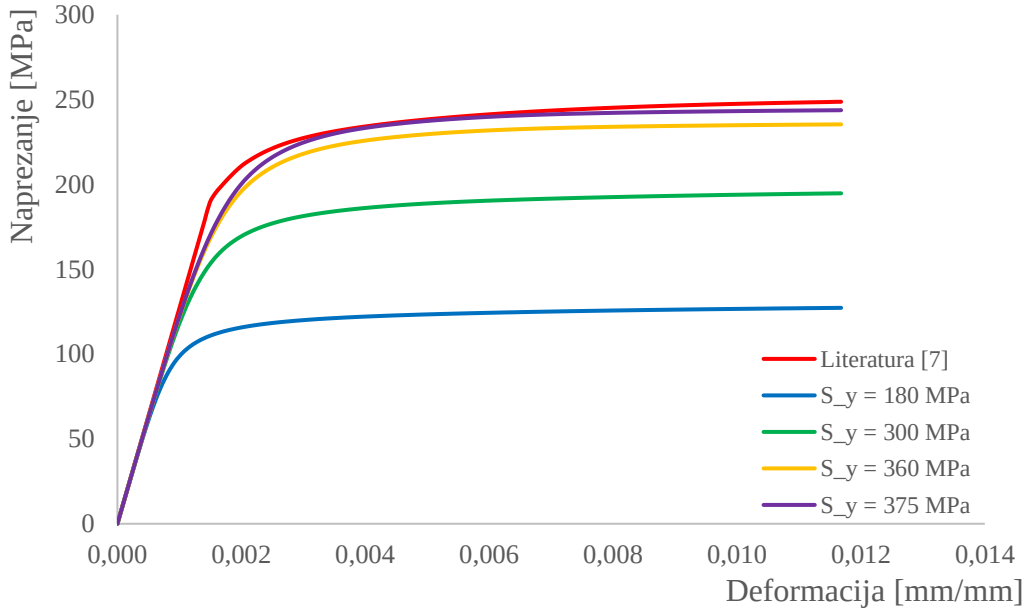


Slika 6.10 – Utjecaj povećanja materijalnog parametra *b* na krivulju naprezanja na mikro razini

U tablici 6.4 prikazan je iterativni postupak kalibracije granice tečenja te odstupanje dobivenog dijagrama naprezanje-deformacija za zadanu granicu tečenja, od dijagrama sa slike 6.7, a na slici 6.11, isto je prikazano grafički. U trećoj iteraciji dobiveno je odstupanje 2,01%, pa slijedi da granica tečenja metalne matrice sinteriranog čelika iznosi 375 MPa.

Tablica 6.4 – Kalibracija granice tečenja na mikro razini

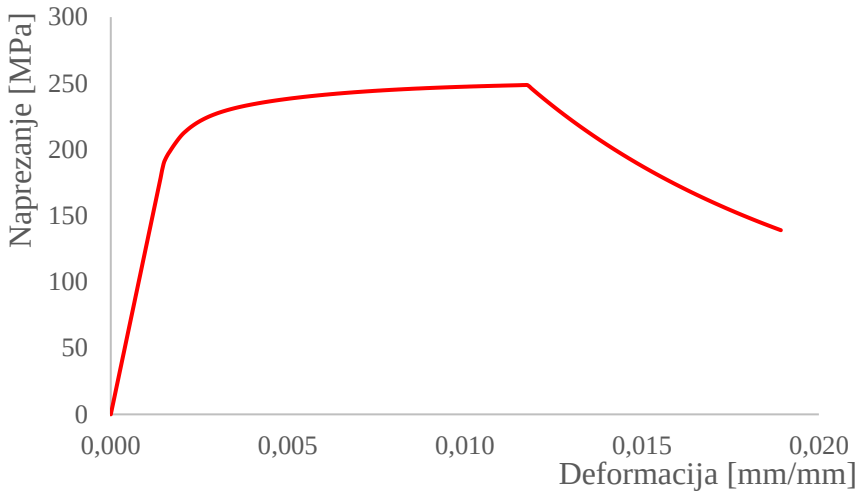
Iteracija	**Granica tečenja,** σ_y [MPa]	**Odstupanje** [%]
0	180	48,84
1	300	21,70
2	360	5,36
3	375	2,01



Slika 6.11 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja dobiven analizom na mikro razini

6.3. Analiza elastoplastičnog područja s oštećenjem

Iako je u ovom poglavlju cilj na makro i mikro razini pogoditi dijagram prikazan ranije na slici 6.1, u svrhu konzistentnosti rada i jednostavnijeg praćenja isti je ponovno prikazan na slici 6.12.



Slika 6.12 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja s oštećenjem, sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3 na temelju podataka iz literature [7]

6.3.1. Makro analiza elastoplastičnog područja s oštećenjem

U makro analizi elastoplastičnog područja s oštećenjem ulazni parametri za opisivanje elastoplastičnosti su analogni parametrima iz tablice 6.3. Potrebno je, međutim, odrediti parametre oštećenja. U tu svrhu, korišten je model duktilnog oštećenja opisan u poglavlju 2.2.

Naime, kako je ranije opisano u poglavlju 2.2.1., za inicijaciju oštećenja potrebno je definirati ekvivalentnu plastičnu deformaciju kod koje dolazi do iniciranja oštećenja, $\bar{\varepsilon}_0^{\mathrm{pl}}$ (slika 2.11), troosnost naprezanja, η, te brzinu ekvivalentne plastične deformacije, $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}$. Iz dijagrama na slici 6.12, moguće je očitati vrijednost ekvivalentne plastične deformacije kod koje dolazi do iniciranja oštećenja, $\bar{\varepsilon}_0^{\mathrm{pl}}$. Ona se u ovom slučaju očitava za vrijednost kod vlačne čvrstoće, a iznosi 0,01168 mm/mm. Kako je ranije pokazano jednadžbom (2.38), za slučaj jednoosnog vlačnog testa, troosnost naprezanja iznosi $\eta = 1/3$. U provedenim analizama za brzinu ekvivalentne plastične deformacije, $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}$, uzeta je vrijednost $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} = 0$.

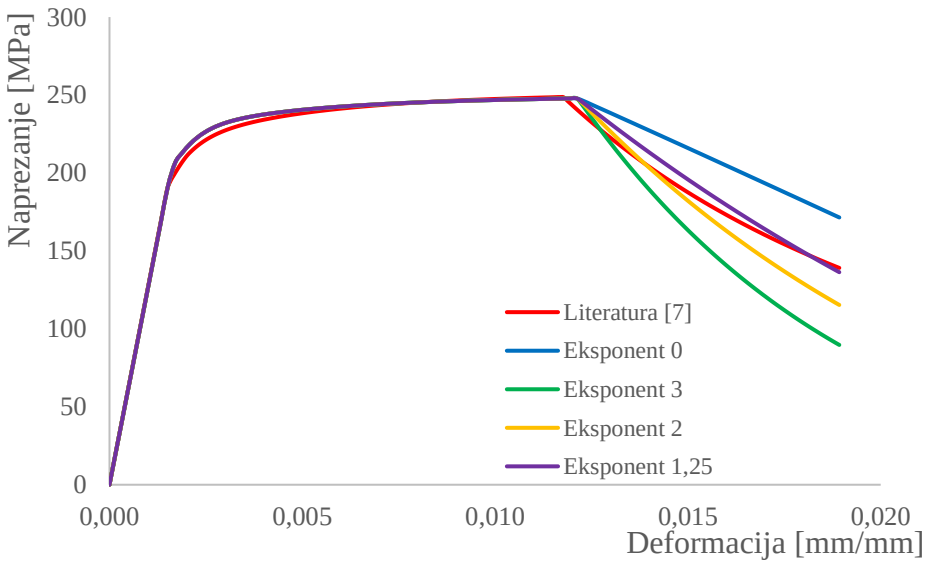
Nadalje, što se tiče modeliranja propagacije oštećenja, iz dijagrama sa slike 6.12, vidljivo je da se propagacija oštećenja može definirati u eksponencijalnom obliku prema jednadžbi (2.57), pri čemu je potrebno definirati ekvivalentni plastični pomak kod loma, $\bar{u}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}$, te eksponent α.

Ekvivalentni plastični pomak kod loma se određuje na temelju jednadžbe (2.55), tj. jednak je umnošku karakteristične duljine konačnog elementa i plastične deformacije kod loma, odnosno istezljivosti materijala, koja je poznata iz literature [7] i prikazana u tablici 6.1 (iznosi 2,5%). Kako je na makro razini korišten numerički model koji je diskretiziran s jednim konačnim elementom, karakteristična duljina elementa iznosi $L = 1$, pa ekvivalentni plastični pomak kod loma u ovom slučaju poprima vrijednost $\bar{u}_f^{pl} = 0,025$ mm.

S obzirom da su poznati svi parametri osim eksponenta α, na makro razini je potrebno provesti kalibraciju eksponenta α kako bi se pogodila krivulja iz dijagrama sa slike 6.12. U tablici 6.5 dan je prikaz iterativnog postupka kalibracije eksponenta α te odstupanje krivulje naprezanja u području oštećenja za zadani eksponent α, od krivulje prikazane na slici 6.12, a na slici 6.13, rezultati su prikazani grafički. Može se uočiti da za vrijednost eksponenta 1,25, dolazi do odstupanja od samo 1,97%. Na ovaj su način definirani svi parametri za modeliranje oštećenja na makro razini i jednom konačnom elementu, a radi bolje preglednosti, isti su prikazani u tablici 6.6.

Tablica 6.5 – Kalibracija eksponenta α na makro razini

Iteracija	**Eksponent,** α	**Odstupanje** [%]
0	0	23,29
1	3	35,51
2	2	17,08
3	1,25	1,97



Slika 6.13 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja s oštećenjem dobiven analizom na makro razini

Tablica 6.6 – Parametri oštećenja za makro analizu na jednom konačnom elementu

Inicijacija oštećenja	Ekvivalentna plastična deformacije kod koje dolazi do iniciranja oštećenja, $\bar{\varepsilon}_0^{\mathrm{pl}}$ [mm/mm]	0,01168
	Troosnost naprezanja, η	0,33
Propagacija oštećenja	Ekvivalentni plastični pomak kod loma, $\bar{u}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{pl}}$ [mm]	0,025
	Eksponent, α	1,25

Kako bi se dokazalo da je spomenuti način definiranja vrijednosti ekvivalentnog plastičnog pomaka ispravan, tj. da se dokaže ovisnost parametra propagacije oštećenja o korištenoj mreži konačnih elemenata, napravljene su dodatne makro analize pri čemu je model na makro razini diskretiziran s više konačnih elemenata, a dimenzije modela su takve da odgovaraju veličini RVE-a, odnosno dimenzije korištenog kvadrata sa slike 6.3 sada iznose 0,4×0,4 mm. Napravljena je diskretizacija najprije s jednim konačnim elementom dimenzija 0,4×0,4 mm, zatim s četiri konačna elementa dimenzija 0,2×0,2 mm, i na kraju 160000 konačnih elemenata dimenzija 0,001×0,001 mm, što odgovara veličini elemenata korištenih na mikro razini. Kao što je rečeno, vrijednost ekvivalentnog plastičnog pomaka kod loma se definira množenjem karakteristične duljine elementa s vrijednosti plastične deformacije kod loma, koja odgovara istezljivosti materijala i koja je ovdje poznata. U tablici 6.7 prikazana je spomenuta ovisnost vrijednosti ekvivalentnog plastičnog pomaka o mreži konačnih elemenata te odstupanje od rezultata dobivenih makro analizom na jednom konačnom elementu dimenzija 1×1 mm. Vidljivo je da se dobivena rješenja gotovo u potpunosti preklapaju, odnosno da odstupanja praktički niti nema, a time je dokazan prethodno objašnjeni postupak definiranja vrijednosti ekvivalentnog plastičnog pomaka kod loma.

Tablica 6.7 – Prikaz ovisnosti ekvivalentnog plastičnog pomaka o mreži konačnih elemenata

Broj konačnih elemenata	**Karakteristična duljina elementa** [mm]	**Ekvivalentni plastični pomak kod loma** [mm]	**Odstupanje** [%]
1	1	0,01	$3{,}4 \cdot 10^{-6}$
4	0,2	0,005	$4{,}7 \cdot 10^{-6}$
160000	0,001	0,000025	0,75

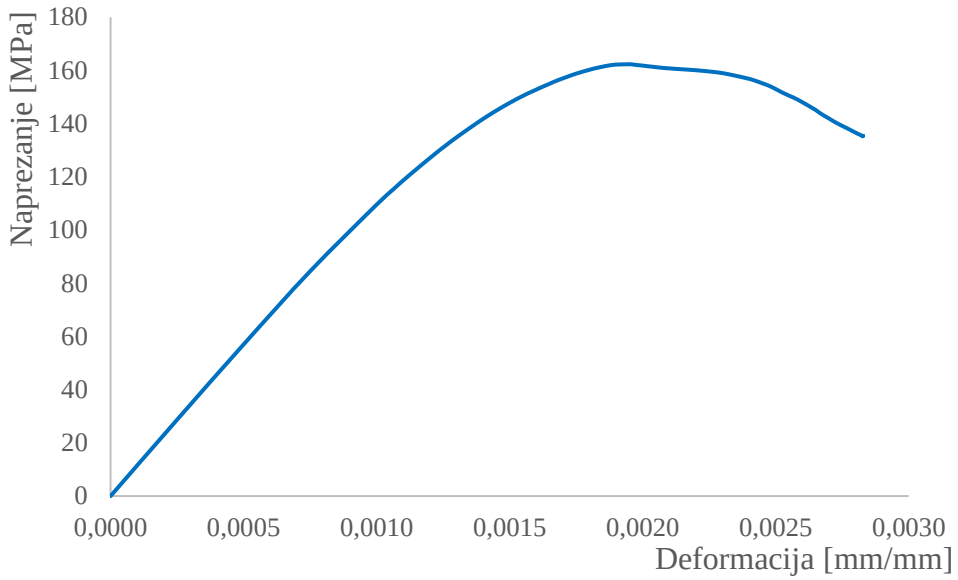
6.3.2. Mikro analiza elastoplastičnog područja s oštećenjem

Naime, zbog iznimne kompleksnosti problema te izražene materijalne i geometrijske nelinearnosti, numerička simulacija analize oštećenja na mikro razini je poprilično zahtjevna i dugotrajna. Iz tog razloga, na mikro razini nije proveden kompletni postupak kalibracije materijalnih parametara za oštećenje, već je cilj ovog poglavlja dati samo kvalitativni prikaz krivulje naprezanja elastoplastičnog područja s oštećenjem na mikro razini.

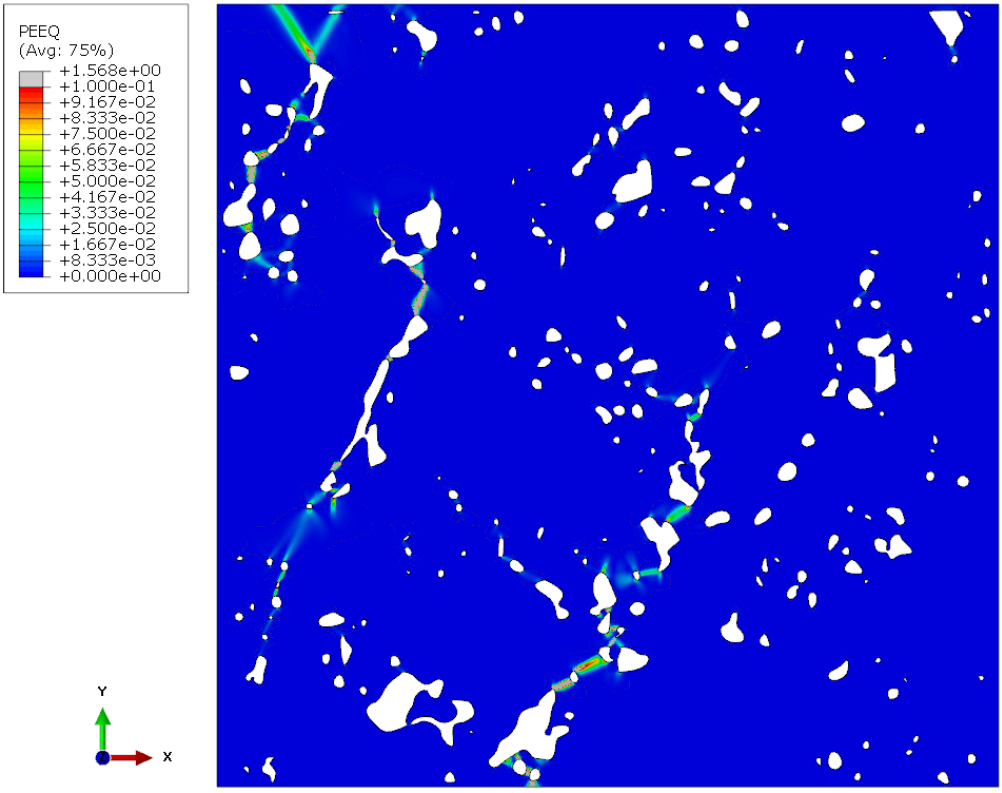
Za mikro analizu, kao ulazni parametri za opisivanje elastoplastičnosti matrice materijala korišteni su podaci analogni onima iz tablice 6.3, uz naravno promjenu modula elastičnosti na 160 GPa i granice tečenja na 375 MPa, što odgovara vrijednostima dobivenim elastičnom, odnosno elastoplastičnom analizom na mikro razini. Inicijalni ulazni parametri za oštećenje bi bili jednaki onima dobivenim na makro razini, s time da bi u mikro analizi bilo potrebno kalibrirati sve korištene parametre za oštećenje. Kao što je rečeno, postupak kalibracije nije proveden i iz tog se razloga u ovom radu mikro analizi odmah pristupilo definiranjem parametara oštećenja većih od onih dobivenih na makro razini. Definirana je ekvivalentna plastična deformacija kod koje dolazi do iniciranja oštećenja iznosa 20% te istezljivost od 25%, odnosno ekvivalentni plastični pomak kod loma ovisan o karakterističnoj duljini konačnog elementa ($L = 0,001$ mm) je definiran iznosom 0,00025 mm. Model je diskretiziran CPS4 konačnim elementima za opisivanje ravninskog stanja naprezanja, a njihova je formulacija jednaka CPE4 elementima opisanim u poglavlju 3.4.

Sa slike 6.5, može se uočiti da zbog velikog broja pora koje su nasumično raspoređene i nepravilnog su oblika, dolazi do pojava koncentracija naprezanja na mnogim mjestima u mikrostrukturi, što dovodi do problema kod konvergencije rješenja prilikom numeričke analize. Također, kako je mreža izrazito gusta, a konačni elementi jako mali, ovdje je osim materijalne nelinearnosti potrebno razmatrati i geometrijsku nelinearnost te u obzir uzeti i nelinearne efekte velikih deformacija. Kako bi se izbjegli problemi s konvergencijom rješenja, potrebno je koristiti nesimetrični *solver* zbog nesimetričnosti matrice krutosti. Osim toga, potrebno je definirati automatsku stabilizaciju numeričke analize preko faktora prigušenja kojeg nije jednostavno odrediti budući da ovisi o veličini mreže i ponašanju materijala, a ovdje je korištena automatski zadana vrijednost.

Na slici 6.14 prikazan je dobiveni dijagram naprezanje-deformacija za gore definirane parametre na mikro razini, a na slici 6.15 prikazana je dobivena raspodjela ekvivalentne plastične deformacije.



Slika 6.14 – Dijagram naprezanje-deformacija elastoplastičnog područja s oštećenjem dobiven analizom na mikro razini



Slika 6.15 – Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije

Iako nije provedena kompletna mikro analiza oštećenja, za analizirani dio dobiveni su očekivani rezultati. Vidljiv je utjecaj pora na razvoj ekvivalentne plastične deformacije i za očekivati je da bi daljnja analiza dovela do formiranja mikro pukotine i razdvajanja materijala na mjestima lokalizacije ekvivalentne plastične deformacije.

7. ZAKLJUČAK

U ovom diplomskom radu provedeno je mikromehaničko modeliranje oštećenja u sinteriranom čeliku Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm^3. Na temelju dobivenih rezultata metalografske analize, najprije su napravljene mikrostrukturne numeričke analize kojima je utvrđena minimalna potrebna veličina RVE-a koji je potom korišten u višerazinskoj analizi. Cilj višerazinske analize vlačnog testa, odnosno analiza na makro i mikro razini, bio je provesti postupak određivanja karakteristika metalne matrice zadanog sinteriranog čelika. Budući da tijekom izrade diplomskog rada eksperimentalni podaci nisu bili dostupni, kao referenca su uzeti podaci iz literature [7]. Provedene su analize elastičnog i elastoplastičnog područja te elastoplastičnog područja s oštećenjem.

Naime, prilikom određivanja minimalne veličine RVE-a, vidljivo je da odabrane veličine RVE-ova imaju značajan utjecaj na konačno rješenje. Iz tog je razloga određivanje minimalne veličine RVE-a inicijalan, ali ujedno i veoma bitan korak, za pouzdanu procjenu ponašanja materijala na makro razini. U ovom je radu pokazano da RVE dimenzija 0,4×0,4 mm predstavlja statistički reprezentativni uzorak mikrostrukture analiziranog materijala i da je njega potrebno koristiti u daljnjim analizama. Da bi se dobili još bolji i točniji rezultati, trebalo bi napraviti kompletnu statističku analizu mikrostrukture, odnosno razmatrati veći broj nasumično odabranih RVE-ova, uz zadovoljavanje zadanog postotka poroznosti, a potom dobivene rezultate obraditi statistički.

Nadalje, provedbom višerazinske analize dobiven je modul elastičnosti metalne matrice sinteriranog čelika koji iznosi oko 160 GPa te granica tečenja približnog iznosa 375 MPa. Što se tiče analize elastoplastičnog područja s oštećenjem, vidljivo je koliko velik utjecaj nelinearno ponašanje materijala ima na postavku numeričke simulacije kao i na samu provedbu, odnosno trajanje iste. Usprkos svim ograničenjima, dobiveni su očekivani rezultati kojima je prikazano na kojim bi mjestima došlo do loma materijala ukoliko bi se provela kompletna analiza. Sljedeći korak za dobivanje konkretnijih rezultata mikro analize elastoplastičnog područja s oštećenjem bio bi nekom od naprednijih metoda numeričke analize i uz korištenje jače računalne konfiguracije, najprije dobiti traženi izgled krivulje naprezanja, a potom prikazanom metodom kalibracije odrediti parametre oštećenja metalne matrice analiziranog sinteriranog čelika. S obzirom da je u višerazinskoj analizi provedena numerička analiza samo horizontalnog vlačnog testa, za bolju procjenu svih relevantnih parametara metalne matrice, valjalo bi provesti analogni postupak za slučaj vertikalnog vlačnog testa, a dobivene rezultate potom uprosječiti.

LITERATURA

[1] Lj. Slokar, *Metalurgija praha i sinter materijali*, Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, Sisak, 2015.

[2] Kolumbić Z., Tomac N., *Materijali – podloge za diskusiju*, Sveučilište u Rijeci, Filozofski fakultet, Odsjek za politehniku, Rijeka 2005.

[3] Cukor G., *Proizvodne tehnologije*, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet [Online]

[4] R. Budim, *Hladno izostatsko prešanje aluminijskog praha*, Završni rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2017.

[5] https://www.ames-sintering.com/sintered-structural-components/

[6] Höganäs, *Sintered Iron-Based Materials*, [Online]

[7] Höganäs, *Iron and steel powders for sintered components – Höganäs Handbook for Sintered Components*, 2017.

[8] Pustaić D., Cukor I., *Teorija plastičnosti i viskoelastičnosti*, Sažetak predavanja, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2009.

[9] Jecić S., Semenski D., *Jednadžbe teorije elastičnosti*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2011.

[10] Sorić J., *Nelinearna numerička analiza konstrukcija*, predavanja

[11] Alfirević I., *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma*, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb 2003.

[12] Karšaj I., *Numeričko modeliranje procesa deformiranja uz pretpostavku velikih deformacija*, Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2006.

[13] Franin B., *Numeričko modeliranje zaostalih naprezanja pri zavarivanju*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2016.

[14] Seleš K., *Numerička simulacija procesa zavarivanja u velikim konstrukcijama*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2016.

[15] Obradović A., *Dizajn i proračun mehaničkog čepa za čepljenje cijevi parogeneratora*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2016.

[16] Zaplatić A., *Razvoj mehaničkog i optičkog eksperimentalnog postava za ispitivanje tankih limova opterećenih na smicanje*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2019.

[17] *Abaqus/CAE 6.14-1 Documentation*

[18] Lovrenić-Jugović M., *Numeričko i eksperimentalno modeliranje procesa deformiranja kortikalnoga koštanoga tkiva*, Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2012.

[19] Leljak D., *Numerička analiza evolucije duktilnog oštećenja vlačno opterećenog čelika visoke čvrstoće HARDOX 450*, Završni rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2020.

[20] Kondo D., Welemane H., Cormery F., *Basic concepts and models in continuum damage mechanics*, Open Archive Touluse Archive Ouverte, Touluse 2007.

[21] Sorić J., *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb 2004.

[22] Lesičar T., Tonković Z., Sorić J., *Mikromehaničko modeliranje procesa deformiranja*, Četvrti susret Hrvatskog društva za mehaniku, Slavonski Brod 2011.

[23] http://www.icams.de/content/research/

[24] Lesičar T., *Multiscale Modeling of Heterogeneous Materials Using Second-Order Homogenization*, Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2015.

[25] Jurčević A., *Mikromehaničko modeliranje vlačnog testa nodularnog lijeva*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2018.

[26] Xia L., Breitkopf P., *A POD-based reduction approach for multiscale nonlinear structural design*, ICCM2014, Cambridge 2014.

[27] Lesičar T., Tonković Z., Sorić J., *Višerazinsko modeliranje heterogenih materijala*, Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku, Donja Stubica 2013.

[28] Tomić Z., *Numerical Modelling of Deformation Processes of Porous Connector Housing*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2019.