Numeričko modeliranje naprezanja uslijed udarnog opterećenja

Latinčić, Josip

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:837013

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Josip Latinčić

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing.
Dr. sc. Lana Virag, dipl. ing.

Student:

Josip Latinčić

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojim mentorima: dr.sc. Lani Virag i prof.dr.sc. Igoru Karšaju na njihovim savjetima i dostupnosti tijekom izrade ovog rada.

Također se zahvaljujem kolegama koji su mi na bilo koji način pomogli tijekom studiranja i prijateljima koje sam stekao tijekom studiranja na njihovoj potpori.

Najveće hvala upućujem svojoj obitelji: roditeljima, bratu i sestrama na njihovoj neprekidnoj podršci tijekom studiranja i u životu bez koje ne bih uspio doći do ove točke.

Josip Latinčić

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:

procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: **602 - 04 / 21 - 6 / 1**	
Ur.broj: **15 - 1703 - 21 -**	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Josip Latinčić** Mat. br.: 0035208776

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numeričko modeliranje naprezanja uslijed udarnog opterećenja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical analysis of stress due to impact load**

Opis zadatka:

Tijekom udara se naprezanja u konstrukciji mogu povećati i nekoliko desetaka puta, ovisno o brzini udara, masi udarnog tijela i geometriji konstrukcije. Upravo zbog toga proizvođači vozila moraju zadovoljiti određene norme pri udarnom opterećenju, kako bi se korisniku osigurala dovoljna sigurnost. Primjerice, za okvir i vilicu bicikla je međunarodnom normom predviđeno zadovoljavanje pet testova, od čega dva udarna (padajuća masa i padajući okvir) te tri ispitivanja na zamor.

Teorija udarnog opterećenja je vrlo kompleksna te postojeće analitičko rješenje zanemaruje niz složenih fizikalnih efekata poput širenja valova naprezanja, lokalne nelinearne raspodjele naprezanja oko plohe dodira dvaju tijela ili rasipanja mehaničke energije. Numeričke metode bi omogućile točniji proračun naprezanja uslijed udarnog opterećenja.

U okviru ovog rada potrebno je:

- numerički modelirati pad tereta na elastičnu gredu s različitih visina,
- usporediti numerička rješenja s poznatim pojednostavljenim analitičkim izrazom,
- ispitati utjecaj trenja i mase elastične grede na udarno naprezanje u gredi.

Sve analize je potrebno napraviti numerički korištenjem metode konačnih elemenata. Dodatne informacije i nacrti dostupni su prema potrebi.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. studenoga 2020.

Zadatak zadali:

Prof. dr. sc. Igor Karšaj / Dr. sc. Lana Virag

Datum predaje rada:

1. rok: 18 veljače 2021.

2. rok (izvanredni): 5. srpnja 2021.

3. rok: 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 22.2. – 26.2.2021.

2. rok (izvanredni): 9.7.2021.

3. rok: 27.9. – 1.10.2021.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

SADRŽAJ

SADRŽAJ I
POPIS SLIKA II
POPIS TABLICA III
POPIS OZNAKA IV
SAŽETAK VI
SUMMARY VII
1. UVOD 1
1.1. Problem udarnog opterećenja 1
1.2. Opis problema i postupka rješavanja 2
2. ANALITIČKI PRORAČUN NAPREZANJA I PROGIBA GREDE 3
2.1. Definiranje ulaznih podataka 3
2.2. Proračun statičkog naprezanja grede 4
2.3. Proračun statičkog progiba grede 6
2.4. Proračun dinamičkog naprezanja i progiba grede 7
3. OPIS PROGRAMA *ABAQUS* I MODULA *ABAQUS/EXPLICIT* 9
4. NUMERIČKO MODELIRANJE UDARA KRUTOG TIJELA NA GREDU 14
4.1. Definiranje parametara dinamičke analize 14
4.2. Zadavanje interakcije, rubnih uvjeta, mreže grede i udarnog tijela 15
4.3. Postupak analize rezultata 18
4.4. Ispitivanje konvergencije naprezanja i progiba 22
5. REZULTATI SIMULACIJA 28
5.1. Utjecaj visine pada na točnost analitičkog rješenja 28
5.2. Utjecaj trenja na točnost numeričkih rješenja 31
5.3. Utjecaj težine grede na točnost numeričkih rješenja 33
6. ZAKLJUČAK 36
LITERATURA 37
PRILOZI 38

POPIS SLIKA

Slika 1. Vrste testiranja pojedinih dijelova bicikla [2] 1
Slika 2. Geometrija grede i zadatak 2
Slika 3. Statički opterećena greda 4
Slika 4. Definiranje kontaktnih površina 16
Slika 5. Definiranje svojstava interakcije 16
Slika 6. Zadani rubni uvjeti 17
Slika 7. Mreže grede (1428 elemenata) i udarnog tijela (1000 elemenata) 17
Slika 8. Prikaz kontura naprezanja *S33* - visina 5 mm, mreža 1428 elemenata 18
Slika 9. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - visina 5 mm, mreža 1428 elemenata 19
Slika 10. Raspodjela naprezanja *S33* tijekom vremena 20
Slika 11. Raspodjela progiba sredine grede *U2* tijekom vremena 20
Slika 12. "Umjetna" energija deformacija sustava tijekom vremena 21
Slika 13. Unutarnja energija sustava tijekom vremena 21
Slika 14. Mreža s 4050 elemenata 23
Slika 15. Mreža s 9800 elemenata 23
Slika 16. Mreža s 14960 elemenata 24
Slika 17. Mreža s 21200 elemenata 24
Slika 18. Mreža s 38350 elemenata 25
Slika 19. Konvergencija naprezanja 26
Slika 20. Konvergencija progiba 26
Slika 21. Prikaz kontura naprezanja *S33* - visina 5 mm, mreža 14960 elemenata 27
Slika 22. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - visina 5 mm, mreža 14960 elemenata 27
Slika 23. Prikaz kontura naprezanja *S33* - visina 2 mm 29
Slika 24. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - visina 2 mm 29
Slika 25. Prikaz kontura naprezanja *S33* - visina 1 mm 30
Slika 26. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - visina 1 mm 30
Slika 27. Zadavanje trenja 32
Slika 28. Prikaz kontura naprezanja *S33* - slučaj s trenjem, visina 1 mm 32
Slika 29. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - slučaj s trenjem, visina 1 mm 33
Slika 30. Rubni uvjeti s vlastitom težinom grede 34
Slika 31. Prikaz kontura naprezanja *S33* - slučaj s težinom grede, visina 1 mm 34
Slika 32. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - slučaj s težinom grede, visina 1 mm 35

POPIS TABLICA

Tablica 1. Usporedba numeričkih i analitičkih rješenja za mrežu od 1428 elemenata 19
Tablica 2. Energije sustava u trenutku najvećeg naprezanja i progiba..... 22
Tablica 3. Vrijednosti maksimalnih naprezanja i progiba za različite mreže 25
Tablica 4. Usporedba analitički i numerički dobivenih naprezanja za sve visine..... 31
Tablica 5. Usporedba analitički i numerički dobivenih progiba za sve visine..... 31
Tablica 6. Usporedba numeričkih rješenja bez trenja i s trenjem 33
Tablica 7. Usporedba numeričkih rješenja s težinom grede i bez težine grede..... 35

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
L	mm	duljina grede
a	mm	širina grede
b	mm	visina grede
ρ	kg/m^3	gustoća materijala grede
G_t	N	težina udarnog tijela
m_t	kg	masa udarnog tijela
g	m/s^2	ubrzanje sile teže
a_t	mm	duljina brida udarnog tijela
h	mm	visina udarnog tijela
$\sigma_{x,\mathrm{st}}$	N/mm^2	statičko naprezanje oko osi *x*
M_y	Nmm	moment oko osi *y*
I_y	mm^4	moment tromosti oko osi *y*
z	mm	udaljenost točke od središta presjeka po osi *z*
w_st	mm	statički progib
E	N/mm^2	Youngov modul elastičnosti
k_d	-	faktor udara
w_din	mm	dinamički progib
$\sigma_{x,\mathrm{din}}$	N/mm^2	dinamičko naprezanje oko osi *x*
$k_{\mathrm{d,1mm}}$	-	faktor udara pri visini 1 mm
$k_{\mathrm{d,2mm}}$	-	faktor udara pri visini 2 mm
$k_{\mathrm{d,5mm}}$	-	faktor udara pri visini 5 mm
$\sigma_{x,\mathrm{din,1mm}}$	N/mm^2	dinamičko naprezanje oko osi *x* pri visini 1 mm
$\sigma_{x,\mathrm{din,2mm}}$	N/mm^2	dinamičko naprezanje oko osi *x* pri visini 2 mm
$\sigma_{x,\mathrm{din,5mm}}$	N/mm^2	dinamičko naprezanje oko osi *x* pri visini 5 mm
$w_{\mathrm{din,1mm}}$	mm	dinamički progib pri visini 1 mm
$w_{\mathrm{din,2mm}}$	mm	dinamički progib pri visini 2 mm
$w_{\mathrm{din,5mm}}$	mm	dinamički progib pri visini 5 mm
t	s	vrijeme za analizu
$\mathbf{M}$	kg	matrica mase
$\ddot{\mathbf{u}}$	m/s^2	matrica ubrzanja
$\mathbf{P}$	N	matrica vanjskih sila
$\mathbf{I}$	N	matrica unutarnjih sila
$\dot{\mathbf{u}}\vert_{(t+\frac{\Delta t}{2})}$	m/s	matrica brzine na sredini trenutnog inkrementa
$\ddot{\mathbf{u}}\vert_{(t)}$	m/s^2	matrica ubrzanja na početku inkrementa
$\dot{\mathbf{u}}\vert_{(t-\frac{\Delta t}{2})}$	m/s	matrica brzine na sredini prethodnog elementa
$\Delta t\vert_{(t+\Delta t)}$	s	vrijeme na kraju inkrementa
$\Delta t\vert_{(t)}$	s	vrijeme na početku inkrementa

$\mathbf{u}\|_{(t+\Delta t)}$	m	matrica pomaka na kraju inkrementa
$\mathbf{u}\|_{(t)}$	m	matrica pomaka na početku inkrementa
$\widehat{\mathbf{K}}_j$	N	matrica efektivne krutosti za pojedinu iteraciju
$\ddot{\mathbf{u}}_j$	m/s^2	matrica ubrzanja za pojedinu iteraciju
$\mathbf{M}_j$	kg	matrica mase za pojedinu iteraciju
$\mathbf{I}_j$	N	matrica unutarnjih sila za pojedinu iteraciju
$\mathbf{P}_j$	N	matrica vanjskih sila za pojedinu iteraciju
$\mathbf{c}_j$	-	korekcija inkrementalnih pomaka za pojedinu iteraciju
$\Delta t_{\text{stabilno}}$	s	granica stabilnosti
ξ	-	faktor prigušenja
$\omega_{\max}$	1/s	najviša frekvencija u sustavu
L^e	m	duljina elementa
c_{d}	m/s	valna brzina materijala
E_{I}	J	unutarnja energija
E_{VD}	J	viskozna energija koja se rasipa
E_{FD}	J	energija trenja koja se rasipa
E_{KE}	J	kinetička energija
E_{W}	J	rad vanjskih opterećenja
E_{TOT}	J	totalna energija sustava

SAŽETAK

U ovom radu će se odrediti naprezanja i progibi elastične grede koja je zglobno oslonjena na svojim krajevima i udarno opterećena težinom tijela koje s određene visine pada na gredu na dva oslonca. Točka gdje udarno tijelo dolazi u kontakt s gredom se nalazi na polovici duljine grede. Naprezanja i progibi će se analitički odrediti u slučaju statičkog opterećenja, te će se dobivene vrijednosti iskoristiti za analitičko određivanje naprezanja i progiba pri udarnom opterećenju, odnosno pri ispuštanju padajućeg tijela s određene visine. Te vrijednosti će se izračunati za tri različite visine. Dobiveni rezultati će se usporediti s rezultatima dobivenim u programu *Abaqus* metodom konačnih elemenata. Naposljetku će se u *Abaqus*-u ispitati utjecaj trenja i vlastite težine grede na ranije dobivene rezultate.

Ključne riječi: udarno opterećenje, metoda konačnih elemenata, greda, naprezanje, progib, trenje

SUMMARY

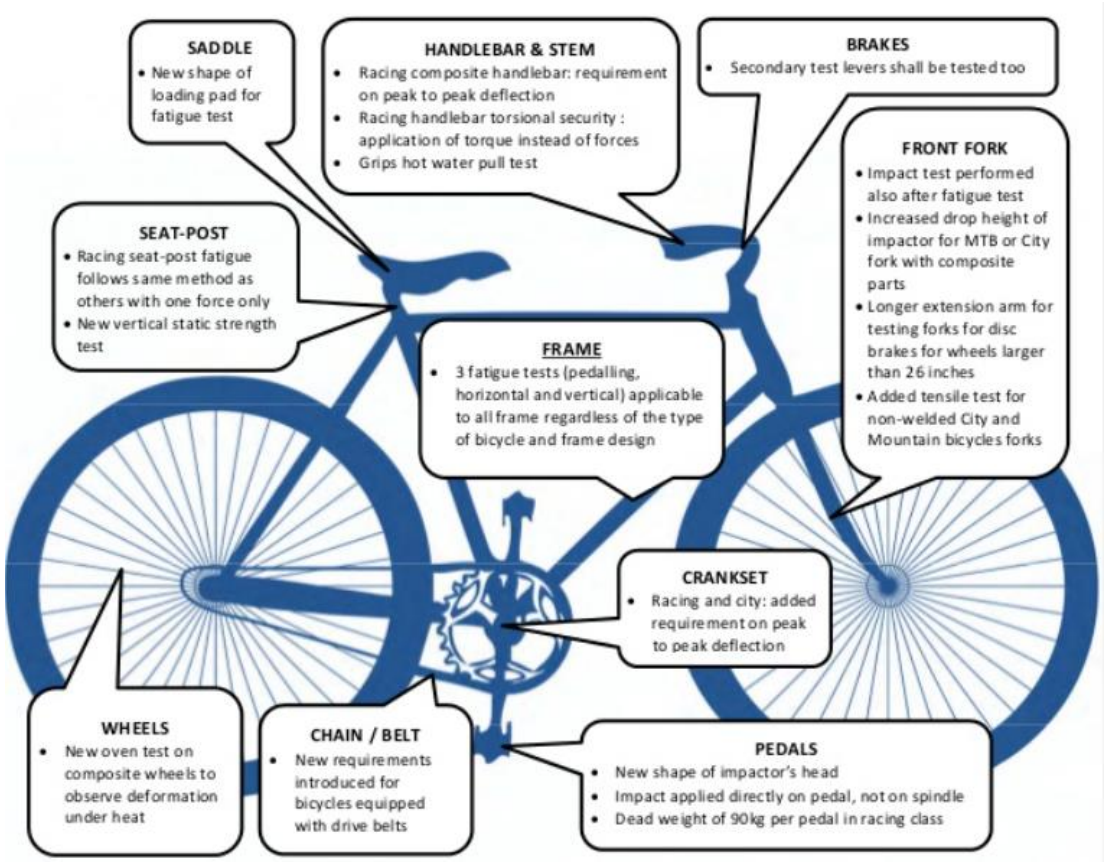
In this thesis, stresses and displacements of an elastic beam supported by joints on its ends caused by an impact due to free-falling body from a given height will be determined. The impact body comes into contact with the beam at its mid-point. Stresses and displacements will first be calculated analytically in the case of static load. These values will then be used in analytical determination of impact factor, stresses and displacements in the case of impact load, i.e. in the case of dropping the falling body from a given height. The mentioned values will be calculated for three different heights. Next, the obtained results will be compared with the results calculated by finite elements method in *Abaqus* program. Finally, the effect of friction and weight of beam itself on the previously obtained results will be numerically examined in *Abaqus*.

Key words: impact load, finite elements method, beam, stress, displacement, friction

1. UVOD

1.1. Problem udarnog opterećenja

Današnji proizvodi imaju visoke zahtjeve na trajnost i pouzdanost. Kako bi se osiguralo da proizvodi mogu ispuniti te zahtjeve, prije izlaska na tržište prolaze kroz različita rigorozna testiranja. Jedno od tih testiranja jest eksperimentalno testiranje na udarna i zamorna opterećenja. Primjerice, za okvir i vilicu bicikla postoji norma koja opisuje cjelokupni postupak testiranja (ISO 4210-6:2015(en)) [1]. U toj normi je u poglavljima 4.1 i 4.2 opisano standardno eksperimentalno testiranje udarnog opterećenja okvira bicikla. Slikom 1 je prikazano koje sve zahtjeve prema normi moraju zadovoljiti svaki pojedini dijelovi bicikla.



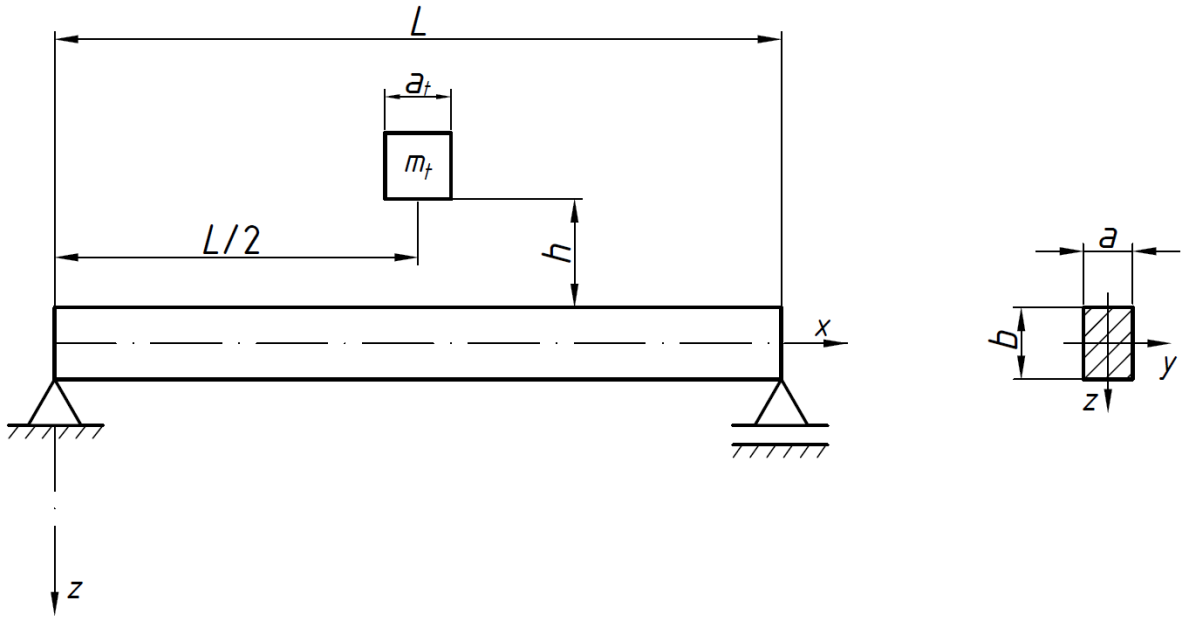
Slika 1. Vrste testiranja pojedinih dijelova bicikla [2]

Svako testiranje zahtijeva financijske i vremenske resurse za njegovo provođenje. Korištenjem numeričkih postupaka mogu se znatno smanjiti cijena eksperimenta, potrošnja materijala i vrijeme potrebno za proizvodnju uzorka i eksperimenta.

Obzirom na to da je testiranje okvira bicikla kompleksan problem, prvo se na jednostavnijem problemu mora razviti metodologija i numerički postupak prije nego što se pristupi kompleksnijim problemima.

1.2. Opis problema i postupka rješavanja

Problem koji će se u ovom radu analizirati je prilično čest primjer iz područja mehanike. Riječ je o zglobno oslonjenoj elastičnoj gredi prikazanoj na slici 2. Jedan od oslonaca je nepomični oslonac, a drugi je slobodan i dopušta pomak u smjeru grede. Odabrana greda je duljine *L* i pravokutnog presjeka dimenzija širine *a* i visine *b*.



Slika 2. Geometrija grede i zadatak

Greda je udarno opterećena težinom tijela mase m_t koje se na gredu ispušta s visine *h*. To će tijelo doći u kontakt s gredom na polovici njene duljine, to jest na duljini *L*/2.

Očekuje se da će najveća naprezanja i progibi biti na mjestu udara, ali je to potrebno i potvrditi proračunom. Za dobivanje naprezanja i progiba pri udaru padajućeg tijela na gredu analitičkom metodom potrebno je prvo izračunati vrijednosti naprezanja i progiba pri statičkom opterećenju, a potom pronaći faktor udara s kojim je potrebno množiti statičke vrijednosti kako bi se dobile dinamičke vrijednosti. Dobivene vrijednosti će se zatim provjeriti u programu *Abaqus*, te će se usporediti rješenja i izvući zaključci.

2. ANALITIČKI PRORAČUN NAPREZANJA I PROGIBA GREDE

2.1. Definiranje ulaznih podataka

Podatke o dimenzijama grede i udarnom tijelu potrebno je proizvoljno odrediti. U skladu sa slikom 2 odabrane su sljedeće vrijednosti za gredu:

$$L = 1000 \text{ mm}, \tag{2.1}$$

$$a = 50 \text{ mm}, \tag{2.2}$$

$$b = 100 \text{ mm}, \tag{2.3}$$

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3. \tag{2.4}$$

Gustoća grede je odabrana za materijal običnog konstrukcijskog čelika.

Za proračun je bitna i masa udarnog tijela. Odabrana masa m_t je 1000 kg, a dimenzije moraju biti manje od dimenzije grede. Zato je za dužinu brida kocke odabrana dužina a_t=50 mm, a gustoća materijala je odabrana tako da zadani volumen ima odabranu masu, bez obzira na to što ne odgovara nijednom realnom materijalu.

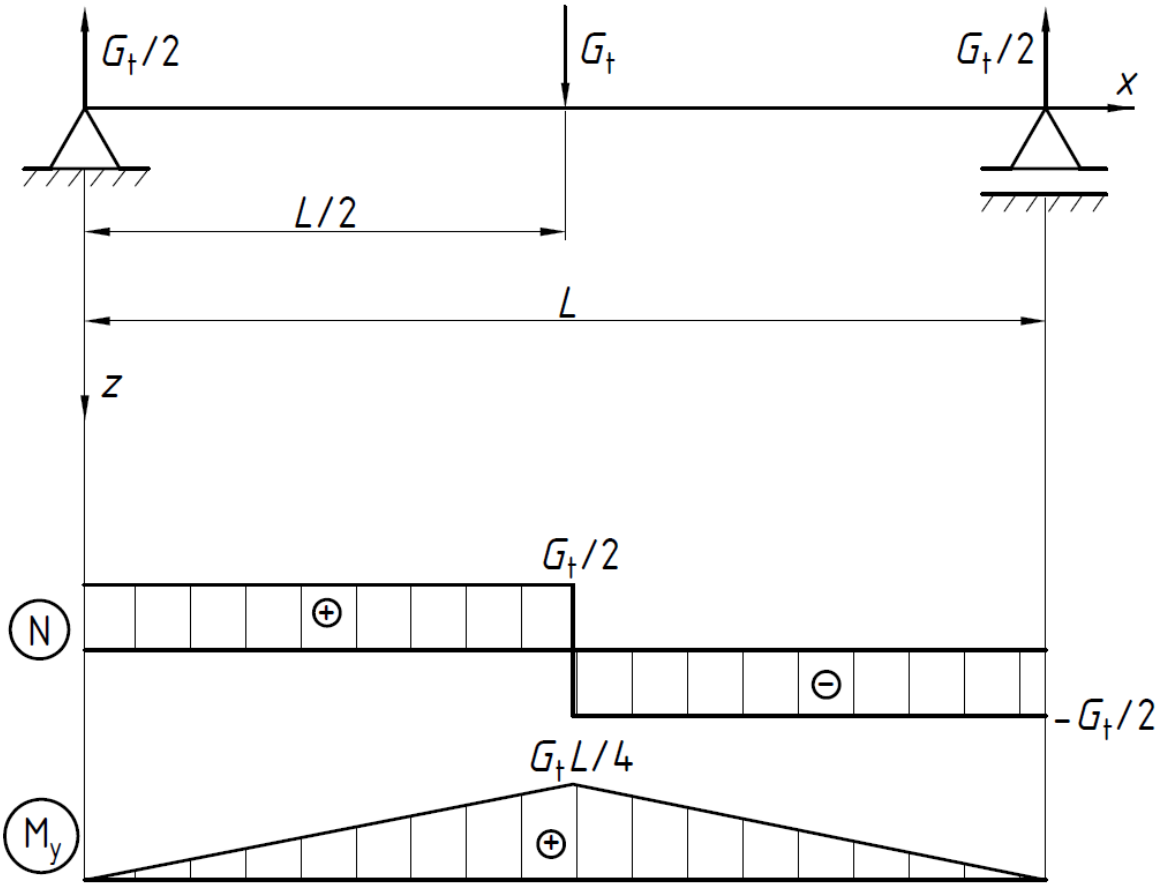
Poznavajući masu udarnog tijela, primjenom 2. Newtonova zakona može se izračunati njegova težina:

$$G_t = m_t g = 1000 \cdot 9.81 = 9810 \text{ N}. \tag{2.5}$$

Dobivena vrijednost u jednadžbi 2.5 će se koristiti kao opterećenje grede u daljnjim proračunima. Također, prema slici 2 potrebno je odrediti još i vrijednosti visine *h*. U ovom slučaju se odabiru vrijednosti *h*=1, 2 i 5 mm. Nakon što smo odredili i izračunali sve potrebne podatke, potrebno je provesti proračune statičkih naprezanja i progiba, a zatim i dinamičkih naprezanja i progiba za sve tri odabrane visine.

2.2. Proračun statičkog naprezanja grede

Pri računanju statičkog naprezanja grede promatramo pojednostavljen analitički prikaz koji je prikazan na slici 3. U njemu težina udarnog tijela statički djeluje u jednoj točki točno na sredini grede.



Slika 3. Statički opterećena greda

Postavljanjem jednadžbi ravnoteže sila u smjeru osi *z* i jednadžbi ravnoteže momenata oko bilo kojeg oslonca dolazimo do podatka da su sile u osloncima međusobno jednake, suprotnog smjera od težine G_t i iznose $G_t/2$. Iz toga se može zaključiti kako se maksimalni moment oko osi *y* nalazi na mjestu djelovanja sile i iznosi $G_tL/4$, kao što je vidljivo iz dijagrama na slici 3.

Do formule za izračun statičkog naprezanja oko osi *x* dolazi se preko geometrijskih razmatranja, Hookeovog zakona i jednadžbi ravnoteže. Konačna formula za statičko naprezanje oko osi *x* je sljedeća:

$$\sigma_{x,\mathrm{st}} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \,, \tag{2.6}$$

gdje M_y predstavlja moment oko osi *y*, I_y predstavlja moment tromosti oko osi *y*, a *z* predstavlja udaljenost željene točke od središta presjeka po osi *z*.

Budući da nas zanima maksimalno naprezanje gledat ćemo maksimalnu moguću veličinu z, te se iz bokocrta slike 2 može vidjeti da će maksimalni *z* biti jednak polovici vrijednosti veličine *b*. Također, ranije je pokazano da je maksimalni moment oko osi *y* jednak četvrtini umnoška težine udarnog tijela i duljine grede. Veličina I_y je svojstvo presjeka, i može se izračunati ako se poznaju veličine *a* i *b*:

$$z = \pm\frac{b}{2} = 50 \text{ mm} \,, \tag{2.7}$$

$$M_y = \frac{G_\mathrm{t} L}{4} = \frac{9810 \cdot 1000}{4} = 2452500 \text{ Nmm} \,, \tag{2.8}$$

$$I_y = \frac{ab^3}{12} = \frac{50 \cdot 100^3}{12} = 4166666{,}67 \text{ mm}^3 \,. \tag{2.9}$$

Uvrštavanjem vrijednosti iz jednadžbi (2.7), (2.8) i (2.9) u jednadžbu (2.6) dobit ćemo željenu vrijednost statičkog naprezanja grede:

$$\sigma_{x,\mathrm{st}} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \pm\frac{2452500}{4166666{,}67} \cdot 50 = \pm 29{,}43 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \,. \tag{2.10}$$

2.3. Proračun statičkog progiba grede

Kao i do statičkog naprezanja, do statičkog progiba možemo doći metodama nauke o čvrstoći, odnosno integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije koja se može riješiti budući da su poznati rubni uvjeti [3]. Također, do statičkog progiba moguće je doći primjenom 2. Castiglianovog teorema, koji glasi da ako je tijelo linearno elastično, derivacija energije deformiranosti tijela po poopćenoj sili jednaka je odgovarajućem poopćenom pomaku [4]. Koji god od ta dva pristupa se odabere, formula za slučaj prikazan slikom 2 je ista i iznosi:

$$w_{\mathrm{st}} = \frac{G_{\mathrm{t}} L^3}{48 E I_y}\,. \tag{2.11}$$

U gornjoj jednadžbi od ranije su poznate sve vrijednosti osim E, koji predstavlja Youngov modul elastičnosti i za obični konstrukcijski čelik iznosi:

$$E = 210000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,. \tag{2.12}$$

Uvrštavanjem vrijednosti iz jednadžbi (2.1), (2.5), (2.9) i (2.12) u jednadžbu (2.11) dobit ćemo željenu vrijednost statičkog progiba grede:

$$w_{\mathrm{st}} = \frac{G_{\mathrm{t}} L^3}{48 E I_y} = \frac{9810 \cdot 1000^3}{48 \cdot 210000 \cdot 4166666{,}67} = 0{,}23357\ \mathrm{mm}\,. \tag{2.13}$$

2.4. Proračun dinamičkog naprezanja i progiba grede

Kada udarno tijelo mase m_t udari u gredu, na mjestu udara udarno tijelo djeluje udarnom silom koja uzrokuje deformiranje grede. Ta udarna sila u vrlo kratkom vremenu naraste od nule do svoje maksimalne vrijednosti, a zatim opet padne na nulu jednom kada dodir dvaju tijela prestane. S porastom deformiranja grede raste njena energija deformiranosti kao i njena kinetička energija. Istovremeno se smanjuje kinetička i potencijalna energija udarnog tijela. Na kraju procesa, kada je progib najveći, tj. jednak dinamičkom progibu, greda i udarno tijelo miruju pa se sva kinetička i potencijalna energija udarnog tijela pretvorila pretvorila u potencijalnu energiju deformiranosti elastičnog tijela. Pođemo li od izjednačavanja energija grede i udarnog tijela i nastavimo s jednadžbama kao prema [4], dolazimo do faktora udara k_d koji predstavlja omjer između dinamičkog i statičkog progiba, kao i omjer između dinamičkog i statičkog naprezanja:

$$k_\mathrm{d} = \frac{w_\mathrm{din}}{w_\mathrm{st}} = \frac{\sigma_{x,\mathrm{din}}}{\sigma_{x,\mathrm{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_\mathrm{st}}}. \tag{2.14}$$

Obzirom na to da imamo tri zadane visine (1, 2 i 5 mm) bit će potrebno izračunati tri vrijednosti faktora udara. Uvrštavanjem vrijednosti pripadajućih visina i statičkog progiba dobiju se sljedeće vrijednosti:

$$k_\mathrm{d,1mm} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0.23357}} = 4{,}0924\,, \tag{2.15}$$

$$k_\mathrm{d,2mm} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0.23357}} = 5{,}2574\,, \tag{2.16}$$

$$k_\mathrm{d,5mm} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5}{0.23357}} = 7{,}6192\,. \tag{2.17}$$

Nakon što su određeni faktori udara lako se mogu izračunati dinamička naprezanja za sva tri slučaja:

$$\sigma_{x,\mathrm{din,1mm}} = k_{\mathrm{d,1mm}} \cdot \sigma_{x,\mathrm{st}} = 4{,}0924 \cdot 29{,}43 = 120{,}439\ \mathrm{N/mm^2}\ , \tag{2.18}$$

$$\sigma_{x,\mathrm{din,2mm}} = k_{\mathrm{d,2mm}} \cdot \sigma_{x,\mathrm{st}} = 5{,}2574 \cdot 29{,}43 = 154{,}725\ \mathrm{N/mm^2}\ , \tag{2.19}$$

$$\sigma_{x,\mathrm{din,5mm}} = k_{\mathrm{d,5mm}} \cdot \sigma_{x,\mathrm{st}} = 4{,}0924 \cdot 29{,}43 = 224{,}233\ \mathrm{N/mm^2}\ . \tag{2.20}$$

Na isti način za sva tri slučaja se mogu izračunati dinamički progibi:

$$w_{\mathrm{din,1mm}} = k_{\mathrm{d,1mm}} \cdot w_{\mathrm{st}} = 4{,}0924 \cdot 0{,}23357 = 0{,}9559\ \mathrm{mm}\ , \tag{2.21}$$

$$w_{\mathrm{din,2mm}} = k_{\mathrm{d,2mm}} \cdot w_{\mathrm{st}} = 5{,}2574 \cdot 0{,}23357 = 1{,}228\ \mathrm{mm}\ , \tag{2.22}$$

$$w_{\mathrm{din,5mm}} = k_{\mathrm{d,5mm}} \cdot w_{\mathrm{st}} = 4{,}0924 \cdot 0{,}23357 = 1{,}7796\ \mathrm{mm}\ . \tag{2.23}$$

3. OPIS PROGRAMA *ABAQUS* I MODULA *ABAQUS/EXPLICIT*

Abaqus je softver koji se koristi za rješavanje različitih strojarskih problema putem metode konačnih elemenata. Sadrži nekoliko glavnih modula za rješavanje različitih vrsta problema: *Abaqus/Standard* za rješavanje općenitih problema koji koristi implicitnu integraciju, *Abaqus/Explicit* za rješavanje nelinearnih sustava s mnogo kompleksnih kontakata koji koristi eksplicitnu integraciju, *Abaqus/CFD* za rješavanje problema računalne dinamike fluida te *Abaqus/Electromagnetic* za rješavanje elektromagnetskih problema. Od navedenih modula, u ovom radu će se koristiti *Abaqus/Explicit* te će se on podrobnije opisati, kao i razlika između implicitne i eksplicitne integracije.

Abaqus/Explicit je prilagođen rješavanju dinamičnih problema, problema s kompleksnim kontaktima i nelinearnim kvazistatičkim problemima. Koristi se eksplicitnom integracijom, što znači da se pomoću kinematskih uvjeta na jednom vremenskom inkrementu izračunaju kinematski uvjeti na sljedećem vremenskom inkrementu. Na početku inkrementa program rješava potrebni uvjet za dinamičku ravnotežu, koji glasi da matrica mase **M** množena s čvornim akceleracijama **ü** daje čvorne sile (koje su razlika između vanjskih sila **P** i unutarnjih sila **I**) prema izrazu:

$$\mathbf{M\ddot{u}} = \mathbf{P} - \mathbf{I}\,. \tag{3.1}$$

Budući da je u ovakvoj proceduri matrica mase dijagonalna, ne treba se tražiti inverz matrice. Akceleracije čvorova su u potpunosti određene njihovom masom i silom koja djeluje na njih, što znači da se mogu lako izračunati. Akceleracije se integriraju kroz vrijeme putem pravila središnjih razlika, koje daje promjenu brzine s pretpostavkom da je akceleracija konstantna. Ta promjena brzine se pridodaje brzini iz sredine prethodnog inkrementa kako bi se dobila brzina na sredini trenutnog inkrementa:

$$\dot{\mathbf{u}}\big|_{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \dot{\mathbf{u}}\big|_{(t-\frac{\Delta t}{2})} + \frac{\Delta t|_{(t+\Delta t)} + \Delta t|_{(t)}}{2}\,\ddot{\mathbf{u}}\big|_{(t)}\,. \tag{3.2}$$

Integriranjem brzine po vremenu se dobije promjena pomaka, te se ta promjena pridoda pomaku na početku inkrementa kako bi se dobio pomak na kraju inkrementa:

$$\mathbf{u}|_{(t+\Delta t)} = \mathbf{u}|_{(t)} + \Delta t|_{(t+\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}|_{(t+\frac{\Delta t}{2})} . \tag{3.3}$$

Kako bi ovakva metoda dala zadovoljavajuće točne rezultate, broj inkremenata mora biti velik (nekoliko desetaka tisuća), međutim zbog činjenice da se ne treba tražiti inverz matrice analiza je izuzetno brza.

Abaqus/Standard polazi od istih uvjeta ravnoteže kao i *Abaqus/Explicit* (jednadžba (3.1)). Glavna razlika je u načinu na koji se računaju akceleracije. Kod implicitne integracije je potrebno tražiti inverz matrice, što zahtijeva puno više vremena. *Abaqus/Standard* se koristi automatskom inkrementacijom baziranoj na Newtonovoj iterativnoj metodi. Ta metoda teži zadovoljiti dinamičku ravnotežu na kraju inkrementa i izračunati pomake u isto vrijeme. Vremenski inkrement je puno veći, i za nelinearne probleme potrebno je puno iteracija kako bi se dobilo rješenje unutar zadanih tolerancija. Svaka Newtonova iteracija traži grešku $\mathbf{c}_j$, to jest korekciju inkrementalnih pomaka:

$$\widehat{\mathbf{K}}_j \mathbf{c}_j = \mathbf{P}_j - \mathbf{I}_j - \mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{u}}_j . \tag{3.4}$$

Svaka iteracija zahtijeva traženje inverza matrice. Sve to rezultira puno većim potrebnim vremenom za izračun nego kod *Abaqus/Explicit*-a, stoga se *Abaqus/Standard* ne koristi za nelinearne probleme. [5]

Također je potrebno razmotriti efekt granice stabilnosti, odnosno maksimalne moguće veličine vremenskog inkrementa s kojom su rezultati još uvijek dovoljno točni. Generalno nije moguće odrediti točnu granicu stabilnosti, pa se zbog toga koriste konzervativne procjene. Granica stabilnosti ima velik učinak na točnost i pouzdanost, stoga je pri njenom određivanju potrebna konzistentnost i konzervativnost.

Granica stabilnosti se definira najvišom frekvencijom u sustavu $\omega_{\max}$. Bez prigušenja definirana je na sljedeći način:

$$\Delta t_{\text{stabilno}} = \frac{2}{\omega_{\max}}, \tag{3.5}$$

a s prigušenjem je definirana na sljedeći način:

$$\Delta t_{\text{stabilno}} = \frac{2}{\omega_{\max}}\left(\sqrt{1+\xi^2}-\xi\right), \tag{3.6}$$

gdje je ξ faktor prigušenja kod najviše frekvencije. *Abaqus/Explicit* uvodi faktor prigušenja kako bi kontrolirao oscilacije pri visokim frekvencijama. Prigušenje uvijek smanjuje granicu stabilnosti.

Stvarna najviša frekvencija u sustavu je određena različitim faktorima s kompleksnim međuodnosima, što ju čini teškom za izračun. Zbog toga se koristi jednostavna i konzervativna procjena. Umjesto promatranja globalnog modela, posebno se procjenjuje najviša frekvencija svakog elementa u modelu, koja je uvijek povezana s načinom dilatacije. Najviša frekvencija elementa uvijek je veća od najviše frekvencije cjelokupnog modela. Uzimajući sve navedeno u obzir, granica stabilnosti se može redefinirati koristeći duljinu elementa L^e i valnu brzinu materijala c_{d}:

$$\Delta t_{\text{stabilno}} = \frac{L^e}{c_{\text{d}}}. \tag{3.7}$$

Za većinu elemenata jednadžba (3.7) je tek procjena stvarne granice stabilnosti jer nije jasno kako bi duljina elementa trebala biti određena. Zato se kao aproksimacija može uzeti duljina najkraćeg elementa. Generalno, što je duljina elementa manja, to je i granica stabilnosti manja.

S druge strane, valna brzina je svojstvo materijala. Za linearno elastičan materijal s Poissonovim faktorom jednakim nuli valna brzina se računa na sljedeći način:

$$c_d = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{3.8}$$

gdje E predstavlja Youngov modul elastičnosti, a ρ gustoću. Što je materijal krući, valna brzina je veća, a to rezultira manjom granicom stabilnosti. S druge strane, što je veća gustoća, valna brzina je manja, što rezultira većom granicom stabilnosti.

Uzevši u obzir sve navedeno, granica stabilnosti se može shvatiti kao vrijeme puta dilatacijskog vala po udaljenosti definiranoj karakterističnom duljinom elementa. Poznajemo li dimenzije najmanjeg elementa i valnu brzinu materijala, možemo procijeniti granicu stabilnosti.

U nelinearnim problemima najviša frekvencija modela će se konstantno mijenjati, a samim tim i granica stabilnosti. *Abaqus/Explicit* ima dva načina za kontroliranje vremenske inkrementacije: automatska vremenska inkrementacija (*Automatic time incrementation*), gdje programski kod uzima u obzir promjene u granici stabilnosti, i korisnički definirana (*Fixed time incrementation*), gdje korisnik sam zadaje vremenski inkrement. Vremenska inkrementacija se također može kontrolirati skaliranjem mase (*Mass scaling*). U slučaju da u nekim lokaliziranim područjima modela zbog kompleksnih diskretizacija postoje loše oblikovani elementi koji kontroliraju granicu stabilnosti, skaliranjem njihove mase može se povećati granica stabilnosti, dok utjecaj na ostatak modela ostaje zanemariv.

Vrsta materijala utječe na granicu stabilnosti. U linearnom materijalu valna brzina je konstantna, i promjene u granici stabilnosti mogu proizaći jedino iz promjena dimenzija najmanjeg elementa tijekom analize. Ako je materijal nelinearan, kao npr. plastično područje ponašanja metala, dolaskom u plastično područje mijenja mu se krutost, tako da valna brzina nije konstantna. To znači da se istovremeno mora kontrolirati utjecaj i valne brzine i dimenzija najmanjeg elementa na granicu stabilnosti.

Na granicu stabilnosti također utječe struktura mreže (*Mesh*). Obzirom da je granica stabilnosti proporcionalna dimenziji najmanjeg elementa, preporuča se da elementi budu što veći, međutim za kompliciranе analize to često nije moguće. Zbog toga mreža mora biti što je moguće uniformnija, zato što samo jedan maleni ili loše oblikovan element može drastično smanjiti granicu stabilnosti. [6]

U *Abaqus/Explicit*-u važno je razmotriti i energetsku ravnotežu kako bismo bili sigurni da analiza daje prikladne rezultate. Energetska ravnoteža je opisana sljedećom jednadžbom:

$$E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{VD}} + E_{\mathrm{FD}} + E_{\mathrm{KE}} - E_{\mathrm{W}} = E_{\mathrm{TOT}} = \mathrm{konst.}, \tag{3.9}$$

gdje E_{I} predstavlja unutarnju energiju, E_{VD} viskoznu energiju koja se rasipa, E_{FD} energiju trenja koja se rasipa, E_{KE} kinetičku energiju, a E_{W} rad vanjskih opterećenja. Suma tih komponenata jednaka je E_{TOT}, odnosno totalnoj energiji sustava koja je konstantna. Nadalje, unutarnja energija E_{I} u sebi se sastoji od elastične, neelastične i "umjetne" energije deformacija. Jedan od indikatora mogućih problema je upravo velik udio "umjetne" energije deformacija u unutarnjoj energiji. Udio "umjetne" energije deformacija u unutarnjoj energiji zato ne bi smio prelaziti 1-2%. [7]

4. NUMERIČKO MODELIRANJE UDARA KRUTOG TIJELA NA GREDU

U ovom poglavlju će se obraditi postupak modeliranja slučaja s visinom 5 mm u *Abaqus*-u gdje će se posebna pozornost obratiti na module značajne za zadavanje dinamičkog opterećenja.

4.1. Definiranje parametara dinamičke analize

Vrsta numeričke analize i pripadni parametri u *Abaqus*-u se zadaju u modulu *Step*. Za razliku od statičkih analiza, kod dinamičkih analiza je potrebno definirati vrijeme za koje će *Abaqus* provoditi analizu. Vrijeme analize mora biti dovoljno veliko da analiza obuhvati dodir udarnog tijela i grede i točku u vremenu u kojoj je naprezanje grede najveće, a s druge strane mora biti dovoljno maleno kako bi analiza mogla što brže biti provedena. Zbog toga se mora procijeniti potrebno vrijeme za analizu. Vrijeme potrebno da teret pušten iz stanja mirovanja dodirne gredu se može izračunati za slobodni pad kao:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{4.1}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za visinu h od 5 mm, i poznavanjem gravitacijske konstante g možemo doći do sljedeće vrijednosti vremena t:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{9810}} = 0{,}03193 \text{ s}. \tag{4.2}$$

Treba paziti na to da dobiveno vrijeme predstavlja točku u kojoj dolazi do dodira udarnog tijela i grede. U tom trenutku su naprezanja i pomaci grede i dalje jednaki nuli. Nakon toga je potrebno još određeno vrijeme kako bi se kinetička energija udarnog tijela pretvorila u potencijalnu energiju, i zbog toga je potrebno uzeti veće vrijeme za analizu od izračunatog. Za analizu će se zbog toga uzeti vrijeme t=0,045 sekundi.

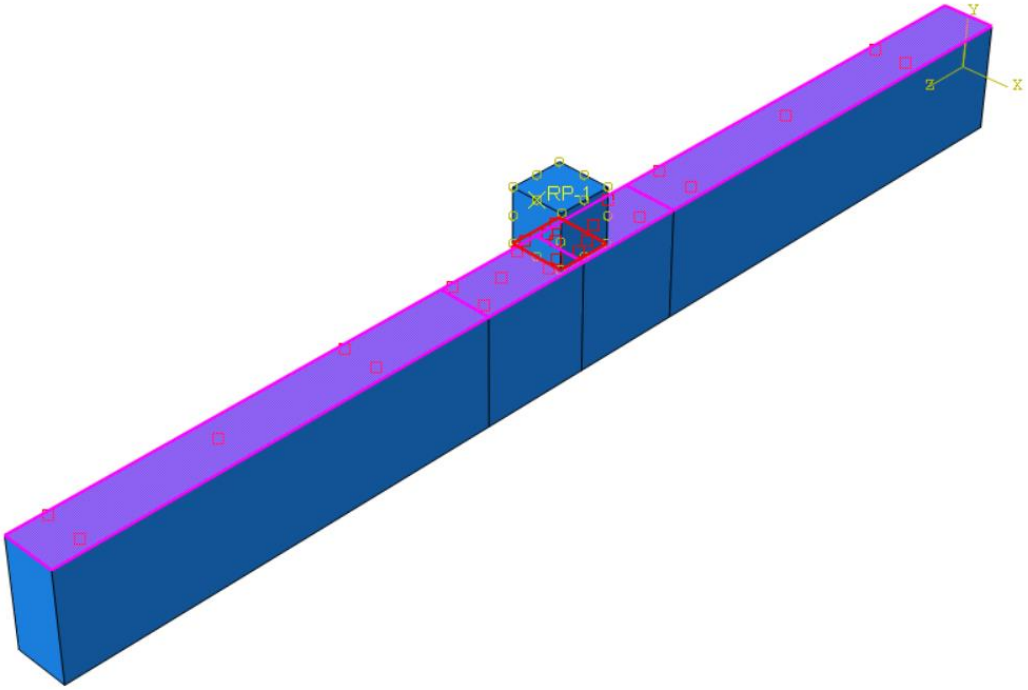
Kako bi se osiguralo da je odabrano vrijeme dovoljno veliko, potrebno je proučiti promjenu maksimalnog naprezanja u gredi tijekom vremena. Ako je primjetan silazni trend apsolutne vrijednosti naprezanja, odnosno ako je vidljiv ekstrem, odabrano vrijeme simulacije je zadovoljavajuće. U suprotnom je potrebno zadati veće vrijeme analize.

Također je potrebno definirati tip inkrementacije. U ovom slučaju uzima se automatska inkrementacija (*Automatic*) te se za metodu procjene stabilnog inkrementa odabire opcija *Element-by-element*. Prema [6], razlika između dvije dostupne metode (*Element-by-element* i *Global*) je ta da je opcija *Element-by-element* konzervativnija u procjeni granice stabilnosti.

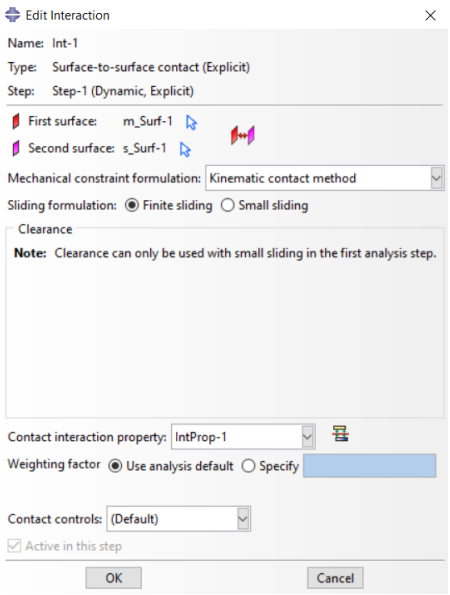
Broj vremenskih inkremenata tijekom simulacije je izrazito velik, oko 100000 inkremenata, međutim rezultati se ne zapisuju za svaki inkrement. Predefinirani broj "*frame*"-ova, odnosno vremenskih koraka za koje *Abaqus* prikazuje rezultate je 20. S tako malim brojem koraka, prikazano maksimalno naprezanje ili progib ne moraju odgovarati stvarnom ekstremu. Zato je potrebno povećati broj vremenskih koraka za koje će se moći promatrati rezultati. Iterativnim postupkom je određeno da je potrebno minimalno 300 "*frame*"-ova kako bi ekstremno naprezanje bilo zahvaćeno.

4.2. Zadavanje interakcije, rubnih uvjeta, mreže grede i udarnog tijela

S obzirom da se model sastoji od dva tijela, potrebno je definirati interakciju između njih u modulu *Interaction*. Prvo je potrebno definirati udarno tijelo kao kruto tijelo. Također, nakon udara tijela je potrebno onemogućiti prodiranje udarnog tijela u deformabilnu gredu. To se zadaje definiranjem kontakta. Prilikom definiranja kontakta je potrebno definirati površine koje su u kontaktu. Ovdje je bitno naglasiti da je kruto tijelo "*master*" površina, a gornja površina grede "*slave*" površina. Prema [8], čvorovi na "*slave*" površini ne mogu prodrijeti u segmente koji čine "*master*" površinu. Također, prema [9] *Abaqus* će u situaciji dodira površina krutog i deformabilnog tijela automatski učiniti površinu krutog tijela "*master*" površinom, a površinu deformabilnog tijela "*slave*" površinom. Kontaktne površine su prikazane slikom 4, a definiranje svojstava interakcije slikom 5.

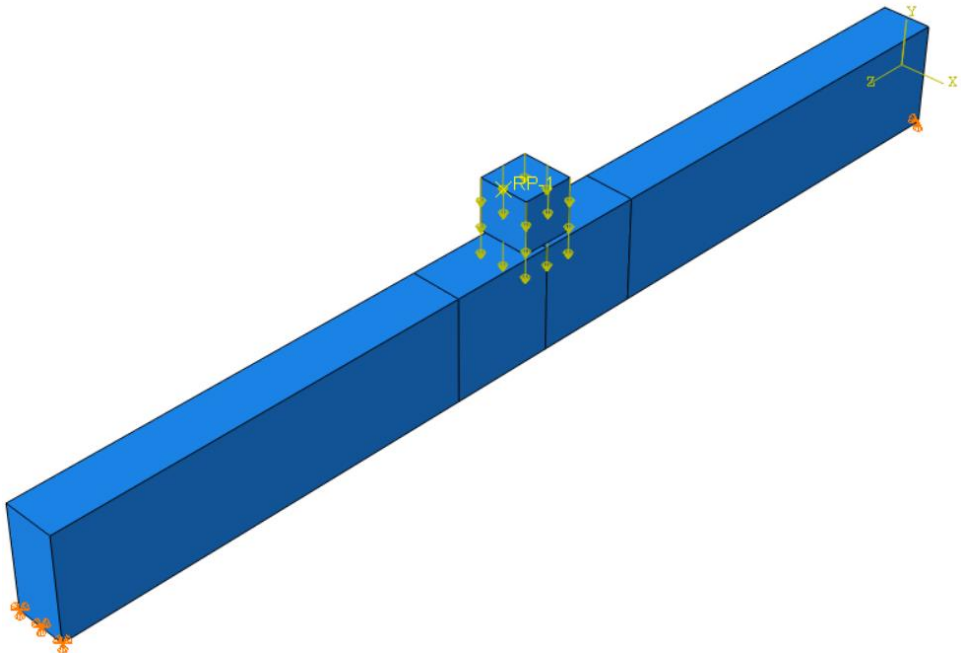


Slika 4. Definiranje kontaktnih površina



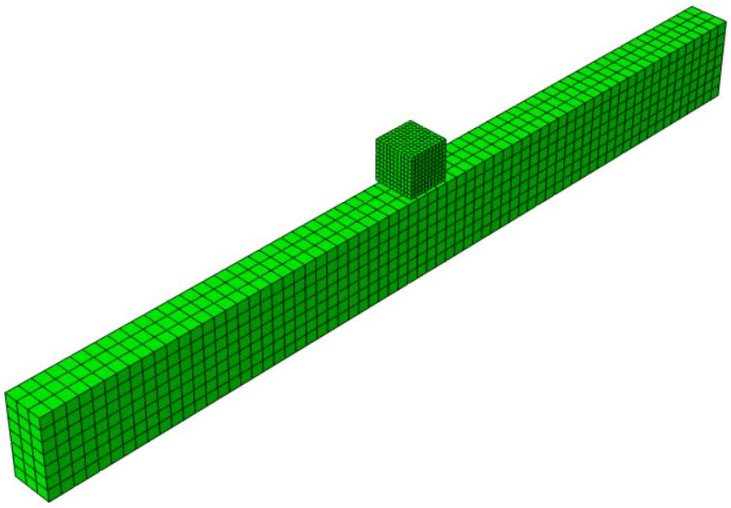
Slika 5. Definiranje svojstava interakcije

Nakon toga je potrebno zadati rubne uvjete u modulu *Load*, odnosno gravitacijsku silu koja djeluje na udarno tijelo, kao i nepomični i slobodni oslonac grede. Rubni uvjeti su prikazani slikom 6.



Slika 6. Zadani rubni uvjeti

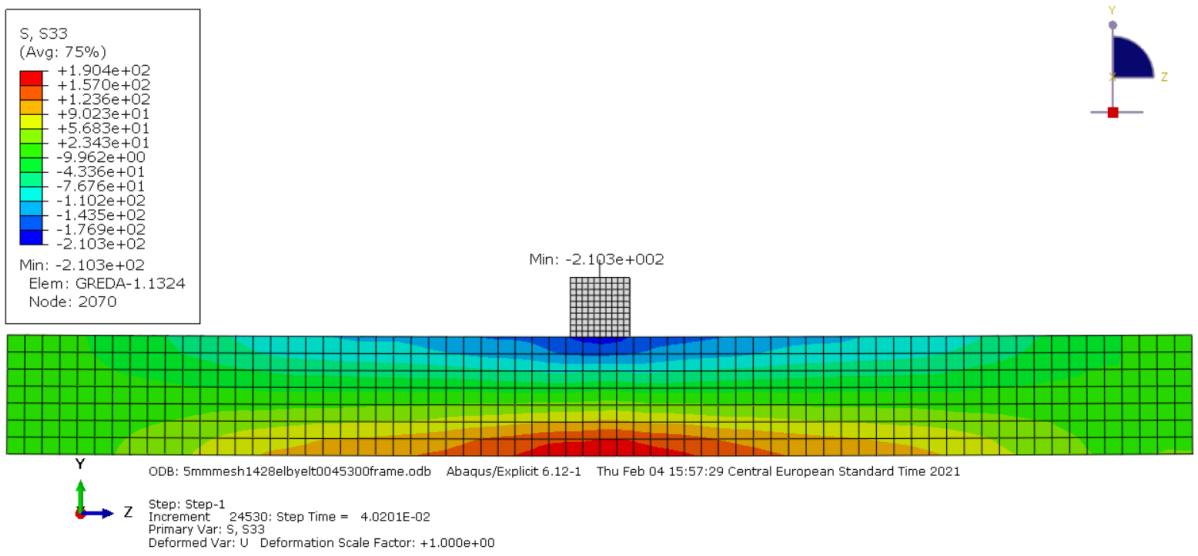
Nakon toga je u modulu *Mesh* potrebno definirati mreže grede i udarnog tijela. Prve stvorene mreže su prikazane na slici 7.



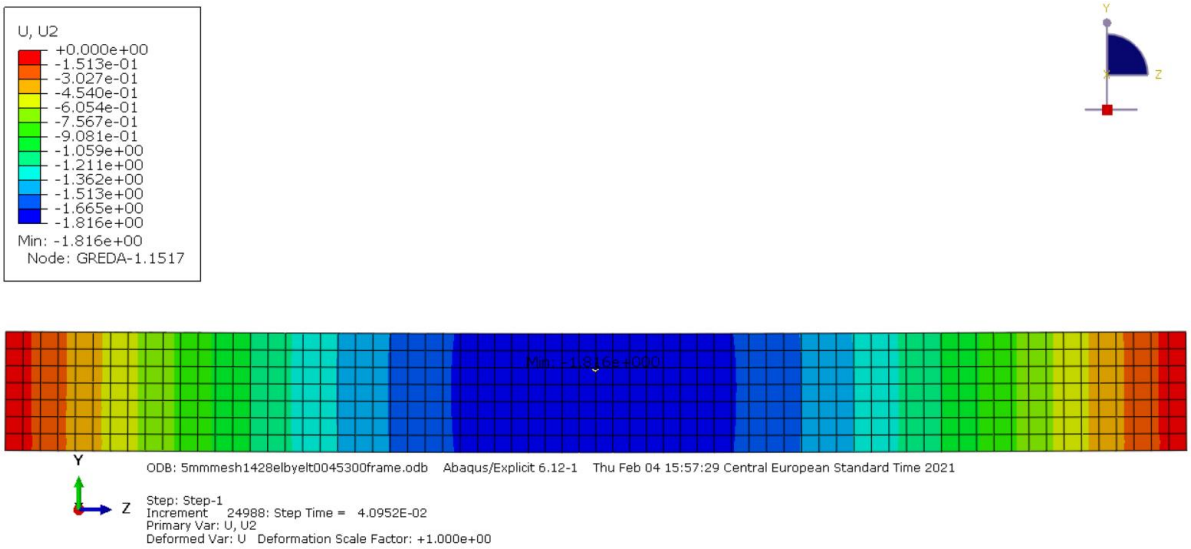
Slika 7. Mreže grede (1428 elemenata) i udarnog tijela (1000 elemenata)

4.3. Postupak analize rezultata

Modul *Visualization* služi za pregled rezultata analize. Obzirom na to da nas zanimaju maksimalno naprezanje i progib, biramo prikaz *S33* koji prikazuje naprezanje oko osi *z* u *Abaqusu*, međutim to naprezanje odgovara izračunatom naprezanju oko osi *x* budući da koordinatni sustavi u *Abaqus*-u i u analitičkom proračunu nisu isti. Također, ako želimo pokazati progib grede, biramo prikaz *U2*. Kao što je ranije napomenuto, u modulu *Step* odabrali smo prikaz 300 točaka analize, i od tih 300 točaka se izabere točka s najvećim naprezanjem i progibom. Najveće naprezanje i progib za pad tereta s visine 5 mm i mrežu od 1428 elemenata su prikazani na slikama 8 i 9.



Slika 8. Prikaz kontura naprezanja *S33* - visina 5 mm, mreža 1428 elemenata



Slika 9. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - visina 5 mm, mreža 1428 elemenata

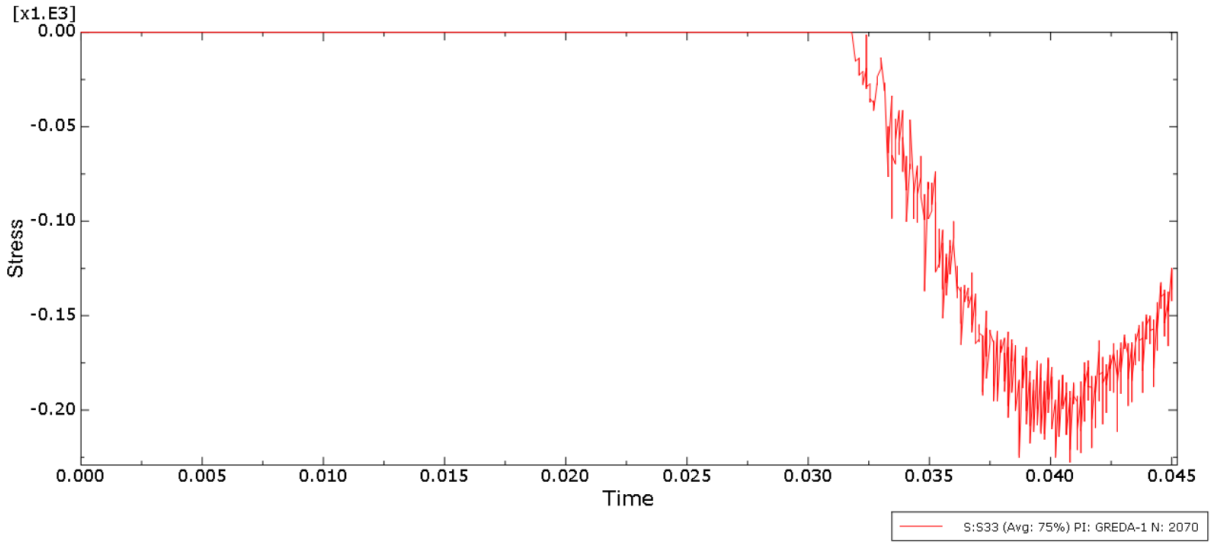
Usporedba naprezanja i progiba dobivenih numerički s onima dobivenim analitičkim dana je tablicom 1.

Tablica 1. Usporedba numeričkih i analitičkih rješenja za mrežu od 1428 elemenata

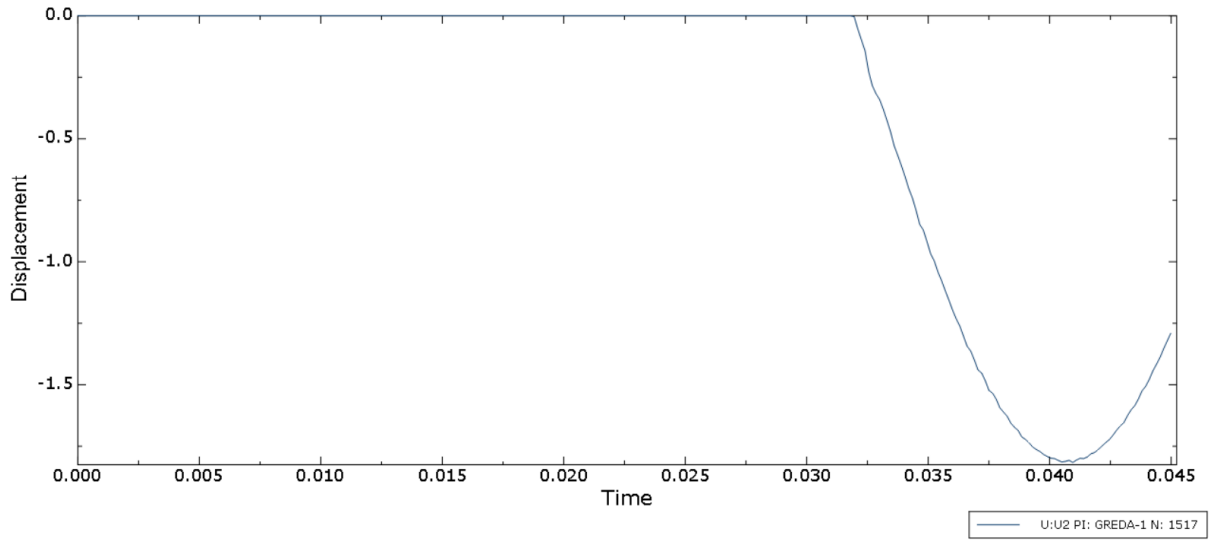
	Numeričko rješenje	**Analitičko rješenje**	**Razlika numeričkog u odnosu na analitičko rješenje**
Naprezanje [N/mm^2]	210,342	224,233	-6.19%
Progib [mm]	1,81614	1,7796	+2.05%

Ovdje treba imati na umu da je mreža od 1428 elemenata prilično gruba mreža. U idućim poglavljima će se napraviti nekoliko finijih mreža i provjeriti konvergiraju li rješenja, kako bismo bili sigurni da je postupak dobar.

Još jedna ranije spomenuta stvar koju je potrebno provjeriti je raspodjela naprezanja i progiba tijekom vremena, kako bismo bili sigurni da je zadano dovoljno veliko vrijeme analize. Dijagrami raspodjele naprezanja i progiba tijekom vremena prikazani su slikama 10 i 11.



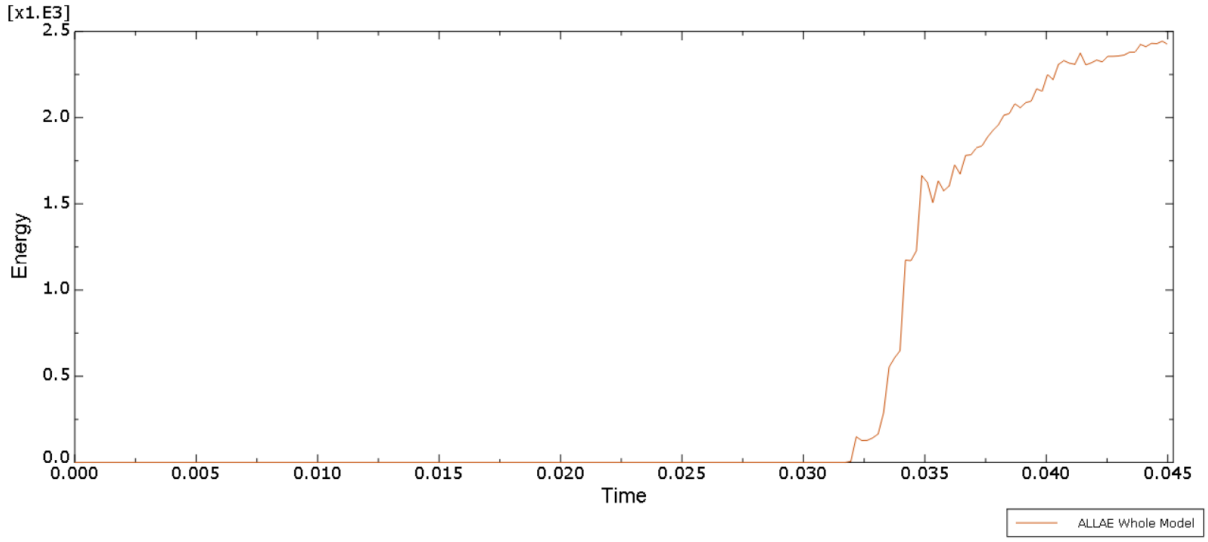
Slika 10. Raspodjela naprezanja *S33* tijekom vremena



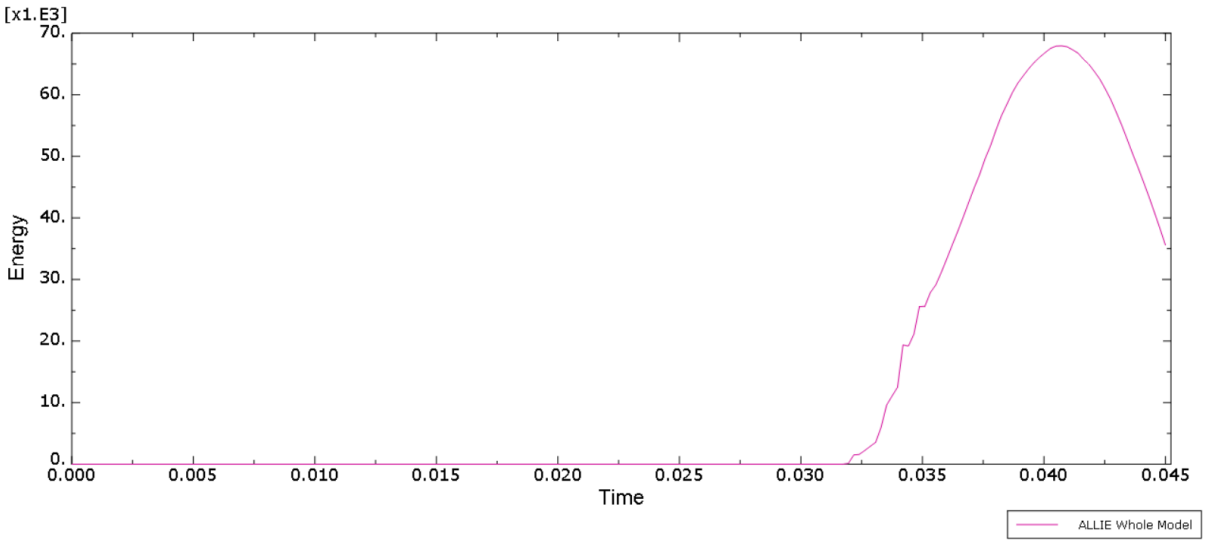
Slika 11. Raspodjela progiba sredine grede *U2* tijekom vremena

Iz slika 10 i 11 jasno je vidljivo kako naprezanja i progibi dosežu svoj maksimum po apsolutnoj vrijednosti oko 0,04 sekunde nakon trenutka ispuštanja udarnog tijela, i zatim se u preostalih 0,005 sekundi analize smanjuju. To znači da je vrijeme analize u modulu *Step* dobro određeno i neće biti potrebe za njegovom korekcijom.

U poglavlju 3 je spomenuta i energetska ravnoteža sustava, odnosno da maksimalan udio "umjetne" energije deformacija ne bi smio prijeći 1 do 2%. Stoga se iz rezultata analize iščitavaju dobiveni rezultati za "umjetnu" energiju deformacija i unutarnju energiju, prikazani na slikama 12 i 13.



Slika 12. ''Umjetna'' energija deformacija sustava tijekom vremena



Slika 13. Unutarnja energija sustava tijekom vremena

Iz slika 12 i 13 zanima nas trenutak u kojem dolazi do najvećeg naprezanja i progiba. Očitani podaci obaju energija u tom trenutku se nalaze u tablici 2.

Tablica 2. Energije sustava u trenutku najvećeg naprezanja i progiba

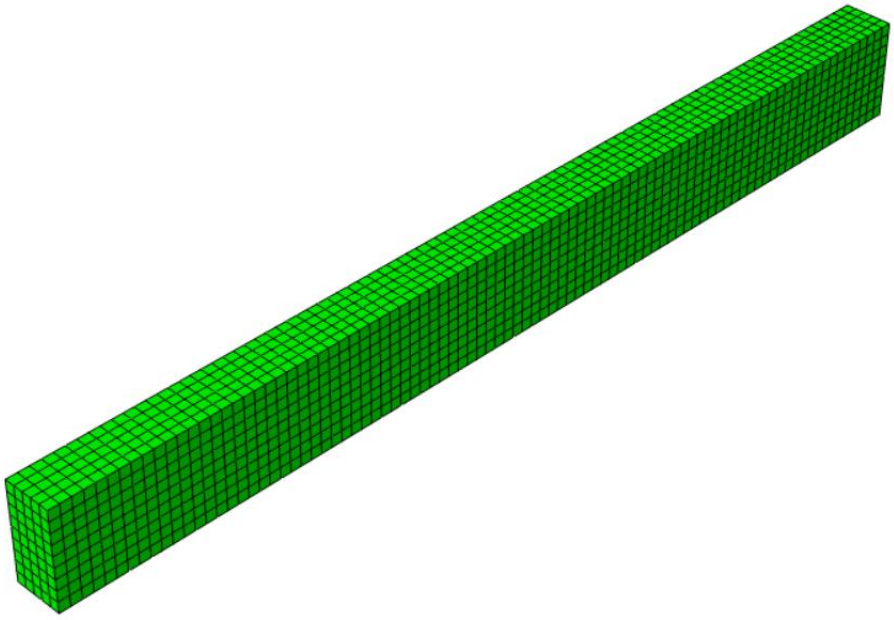
''Umjetna'' energija deformacija [J]	**Unutarnja energija [J]**	**Udio ''umjetne'' energije deformacija u unutarnjoj energiji**
2308,91	67895,8	3,4%

Iz tablice 2 vidljivo je kako udio "umjetne" energije deformacija ne zadovoljava postavljeni uvjet od maksimalnih 1 do 2%. Stoga će u idućem poglavlju biti potrebno provjeriti konvergiraju li naprezanje i progib, ali isto tako treba provjeriti kako se u gušćim mrežama mijenjaju iznosi energija, te može li se zadovoljiti zadani uvjet.

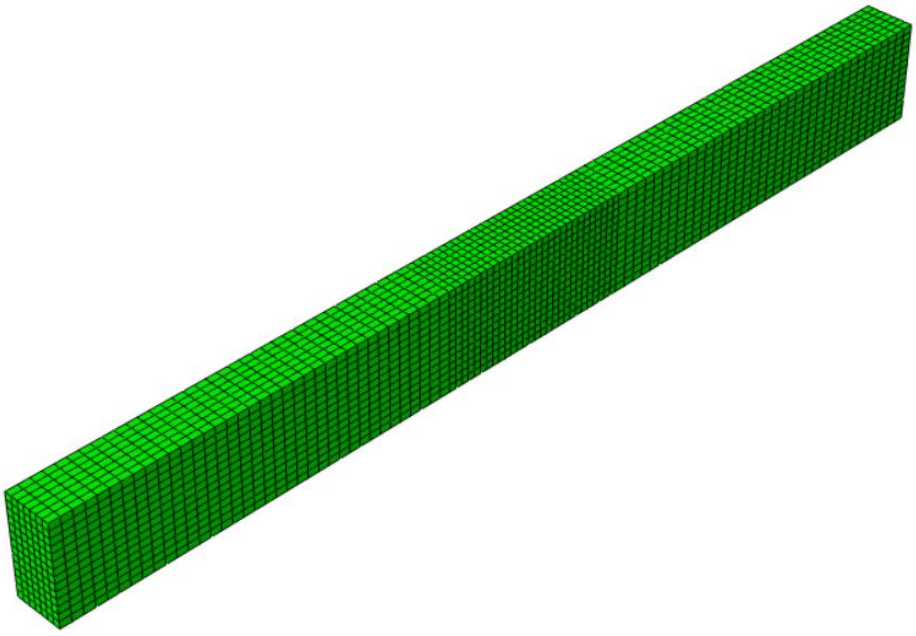
4.4. Ispitivanje konvergencije naprezanja i progiba

Konvergencija rješenja se provjerava tako što se rade gušće mreže i ispituje se promjena u maksimalnoj vrijednosti tražene veličine. Iz modula *Visualization* potrebno se zato vratiti u modul *Mesh* i napraviti nekoliko gušćih mreža. S tim gušćim mrežama će se zatim ponoviti isti postupak, provest će se analize i iščitati maksimalne vrijednosti naprezanja i progiba. Zatim će se te vrijednosti prikazati tablično i grafički, i utvrditi dolazi li do konvergencije.

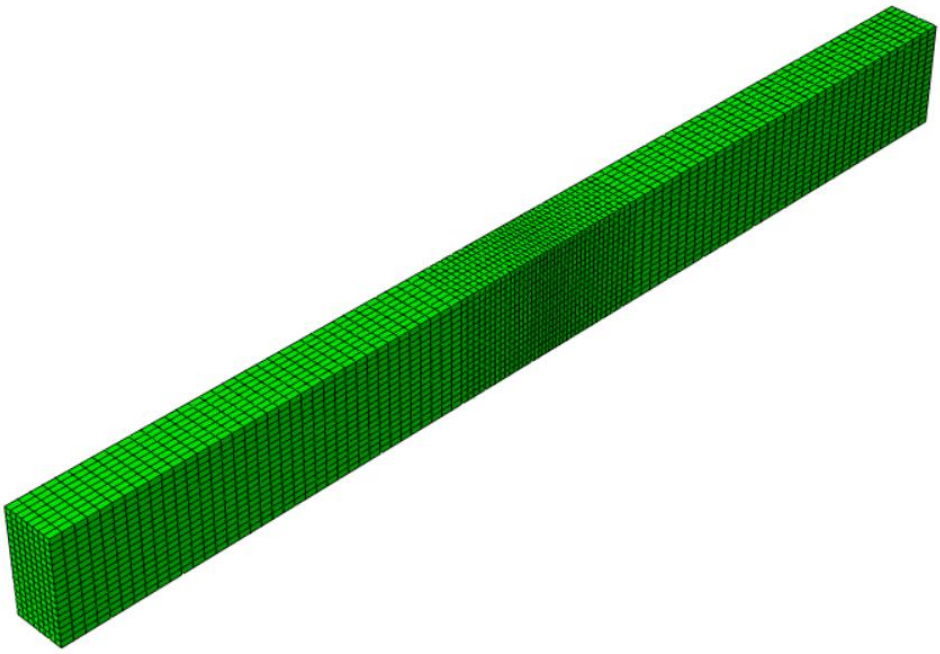
Gušće mreže se mogu napraviti tako da se opcijom *Seed Part Instance* odaberu manje veličine elemenata nego u odnosu na prošle analize. Međutim, to će rezultirati jednolikom mrežom sitnih elemenata koji su korisni na području najvećeg naprezanja, ali na ostalim područjima nema velike razlike između sitnih i velikih elemenata, a sitni elementi samo produljuju analizu. Stoga se opcijom *Partition Face: Sketch* povuku linije oko područja najvećeg naprezanja, te se zatim odabirom opcije *Seed Edges* po tim linijama lokalno progusti mreža. Različitim kombinacijama vrijednosti unesenih u gore navedene opcije dobivamo mreže s različitim brojevima elemenata, koje su prikazane na slikama 14, 15, 16, 17 i 18. Mreža udarnog tijela uvijek ostaje na 1000 elemenata.



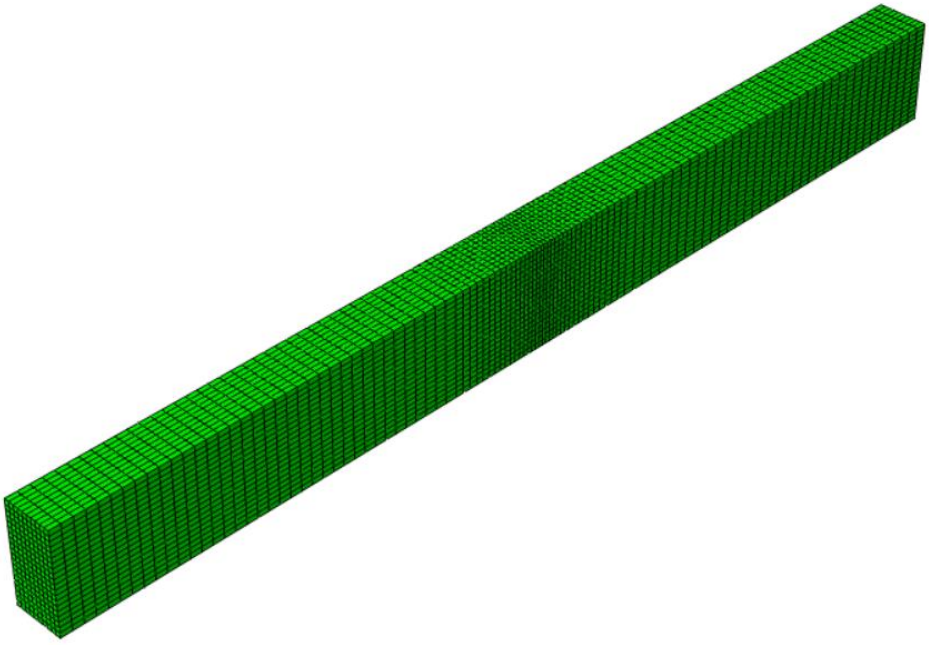
Slika 14. Mreža s 4050 elemenata



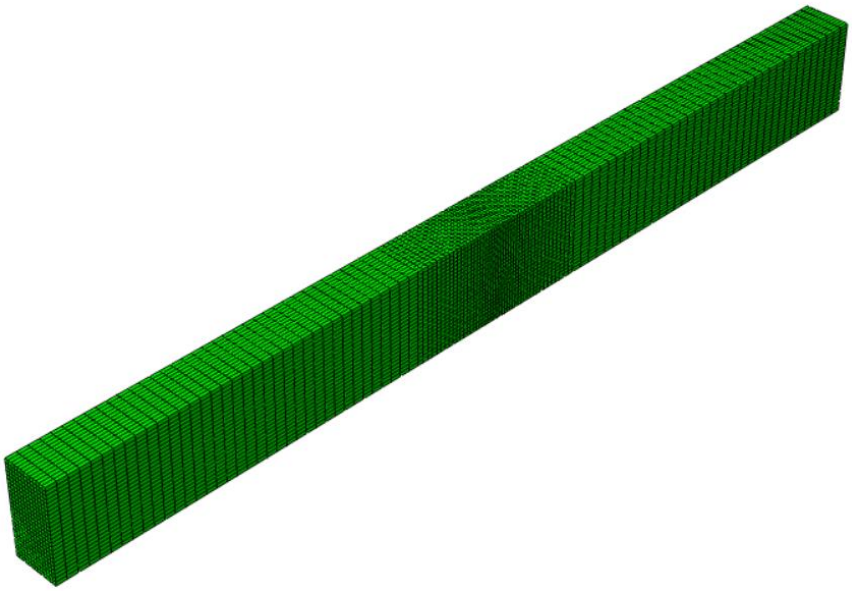
Slika 15. Mreža s 9800 elemenata



Slika 16. Mreža s 14960 elemenata



Slika 17. Mreža s 21200 elemenata



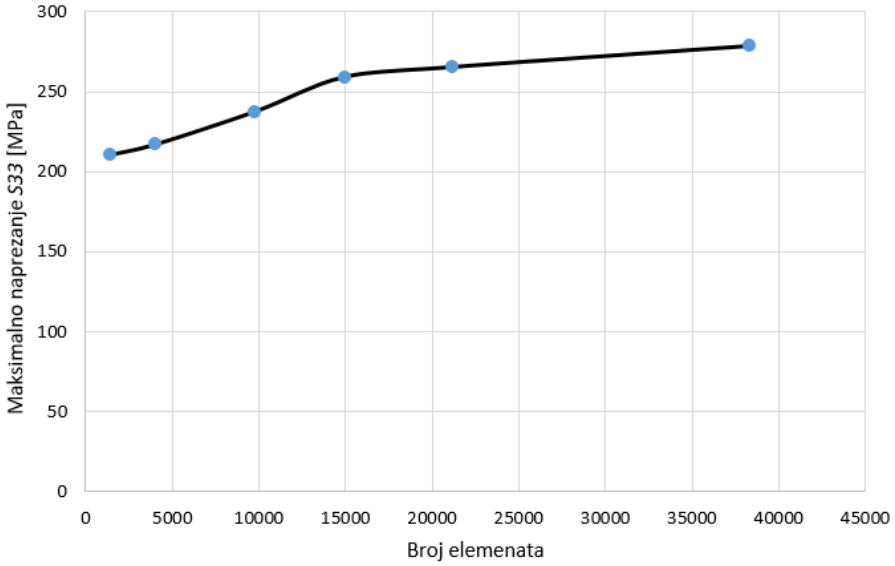
Slika 18. Mreža s 38350 elemenata

Jednom kad se odrade analize za sve prikazane mreže, rezultati se pronađu na isti način kao i za početnu mrežu, te se daje tablični i grafički prikaz konvergencije.

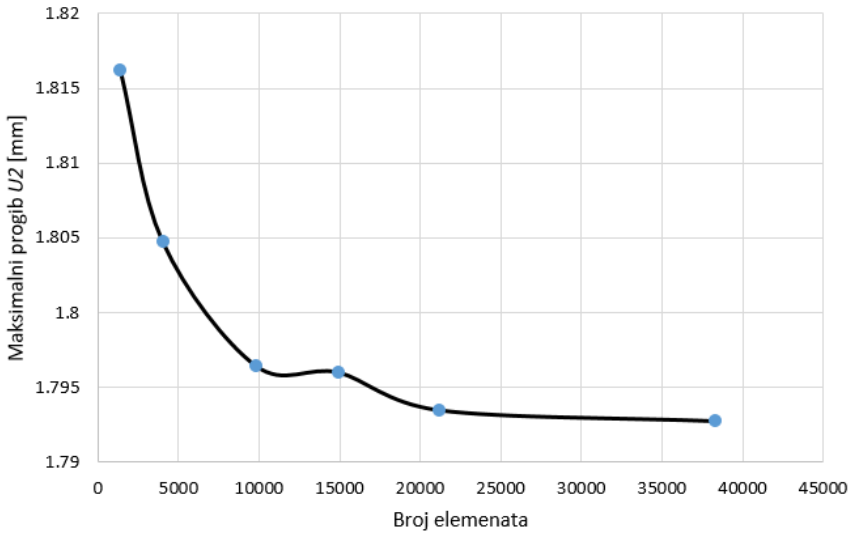
Tablica 3. Vrijednosti maksimalnih naprezanja i progiba za različite mreže

Broj elemenata	Maksimalno naprezanje [MPa]	Vrijeme maksimalnog naprezanja [s]	Maksimalni progib [mm]	Vrijeme maksimalnog progiba [s]	Udio ''umjetne'' energije deformacija u unutarnjoj energiji
1428	210,342	0,0402	1,81614	0,04095	3,4%
4050	216,944	0,0405	1,8047	0,04065	3,47%
9800	237,399	0,0408	1,79645	0,04065	0,69%
14960	258,974	0,0408	1,79599	0,04065	1,37%
21200	265,144	0,0408	1,79347	0,0405	0,74%
38350	278,306	0,04065	1,79274	0,0405	0.87%

Iz tablice 3 vidljivo je da pomaci konvergiraju bolje od naprezanja, međutim grafička usporedba na slikama 19 i 20 će nam dati bolju ideju o konvergenciji. Također se vremena u kojima se postiže maksimalno naprezanje i maksimalni progib ne poklapaju idealno, međutim razlike su zanemarivo malene. Poklapanje bi se moglo postići zadavanjem više točki analize za prikaz u modulu *Step*.

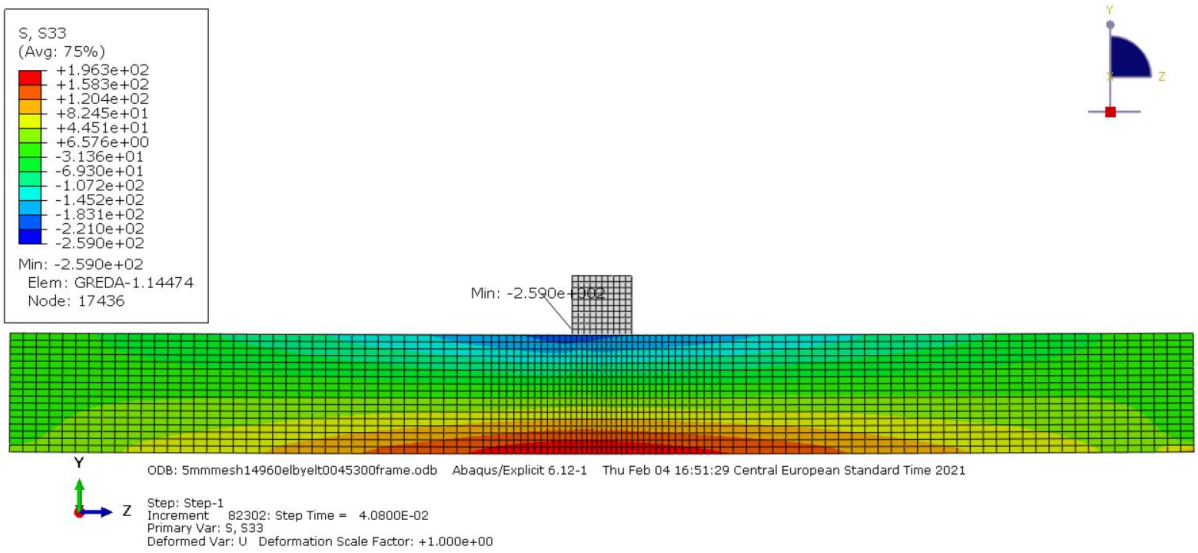


Slika 19. Konvergencija naprezanja

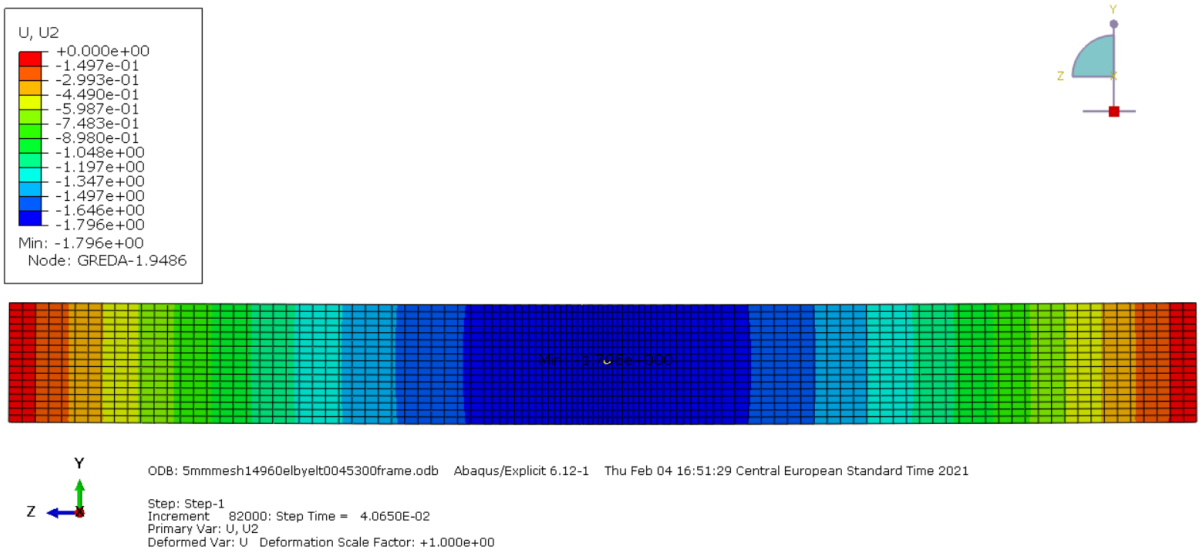


Slika 20. Konvergencija progiba

Iz gornjih grafičkih prikaza vidi se da postoji konvergencija naprezanja i progiba. Jedino što preostaje jest odlučiti se koja od mreža će se koristiti pri analizama s drugim visinama udarnog tijela. Iz konvergencije naprezanja vidi se da postoji prijelom kod mreže od 14960 elemenata. Razlika u naprezanjima između nje i mreže od 38350 elemenata je 7,46%, što je prihvatljivo odstupanje. Usporedbom progiba za iste mreže može se izračunati međusobna razlika od 0,18%, što je zanemarivo. Mreža od 14960 elemenata također zadovoljava i energetski uvjet. Stoga će se u daljnjim analizama koristiti mreža od 14960 elemenata.



Slika 21. Prikaz kontura naprezanja *S33* - visina 5 mm, mreža 14960 elemenata



Slika 22. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - visina 5 mm, mreža 14960 elemenata

Na slikama 21 i 22 je prikazana raspodjela naprezanja i progiba za visinu 5 mm i odabranu mrežu od 14960 elemenata. Točne vrijednosti su navedene u tablici 3, i uspoređujući ih sa vrijednostima iz jednadžbi (2.20) i (2.23) možemo izračunati da je naprezanje dobiveno numerički veće za 15,5% od naprezanja dobivenog analitički. Također, progib dobiven numerički je za 0,9% veći od progiba dobivenog analitički. U idućem poglavlju ta će usporedba biti prikazana i tablično zajedno s rezultatima od ostalih visina.

5. REZULTATI SIMULACIJA

U ovom će poglavlju biti opisani rezultati za sve tri visine i uspoređeni s analitičkim rješenjem, te će se ispitati utjecaj trenja i vlastite težine grede na dobivene rezultate.

5.1. Utjecaj visine pada na točnost analitičkog rješenja

Postupak u *Abaqusu* za visine 1 i 2 mm je u najvećem dijelu identičan već obrađenom postupku s visinom 5 mm. Kao što je ranije spomenuto, koristit će se mreža od 14960 elemenata. Prva razlika je u modulu *Assembly*, gdje se opcijom *Translate Instance* udarno tijelo smješta na potrebnu visinu iznad grede. Druga razlika će biti u zadavanju potrebnog vremena za analizu u modulu *Step*. Budući da je u ovom slučaju visina na kojoj se nalazi udarno tijelo manja nego u prethodnom slučaju, potrebno vrijeme za analizu će biti manje. Ostaje procijeniti koliko manje, a to se čini na isti način kao i u prethodnom slučaju. Uvrštavanjem visine h=2 mm u jednadžbu (4.1) dobivamo sljedeću vrijednost:

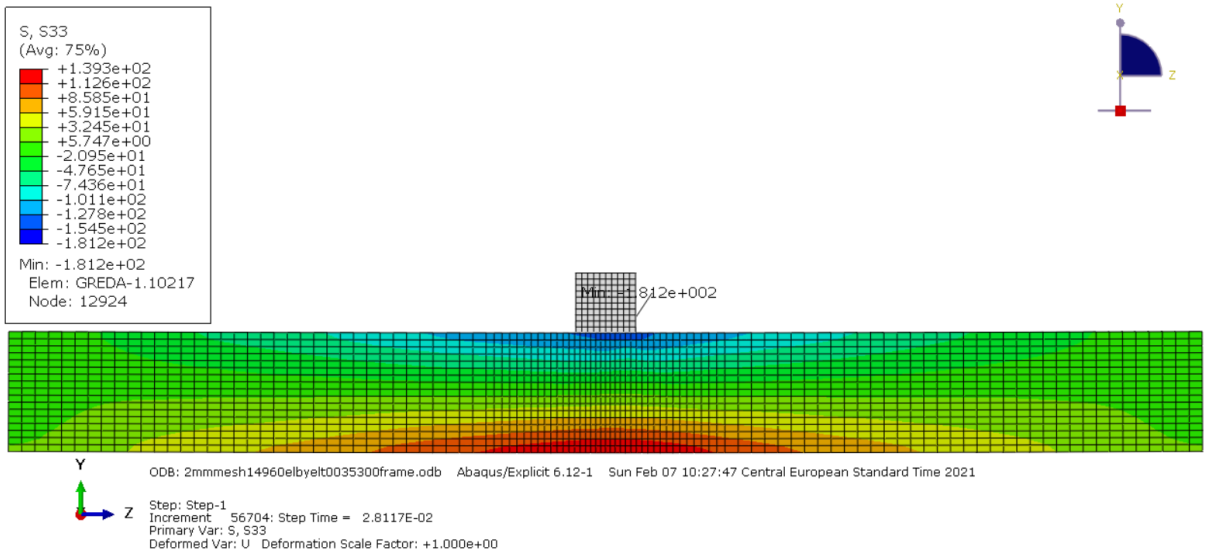
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{9810}} = 0{,}02019 \text{ s} . \tag{5.1}$$

Uzimajući u obzir da je u prošlom slučaju vrijeme t dobiveno jednadžbom (4.1) iznosilo 0,03193 sekunde, a maksimumi naprezanja i progiba su se postizali u vremenu između 0,0402 i 0,04095 sekundi, može se zaključiti da će u slučaju s visinom 2 mm dovoljno vrijeme analize biti t=0,035 sekundi.

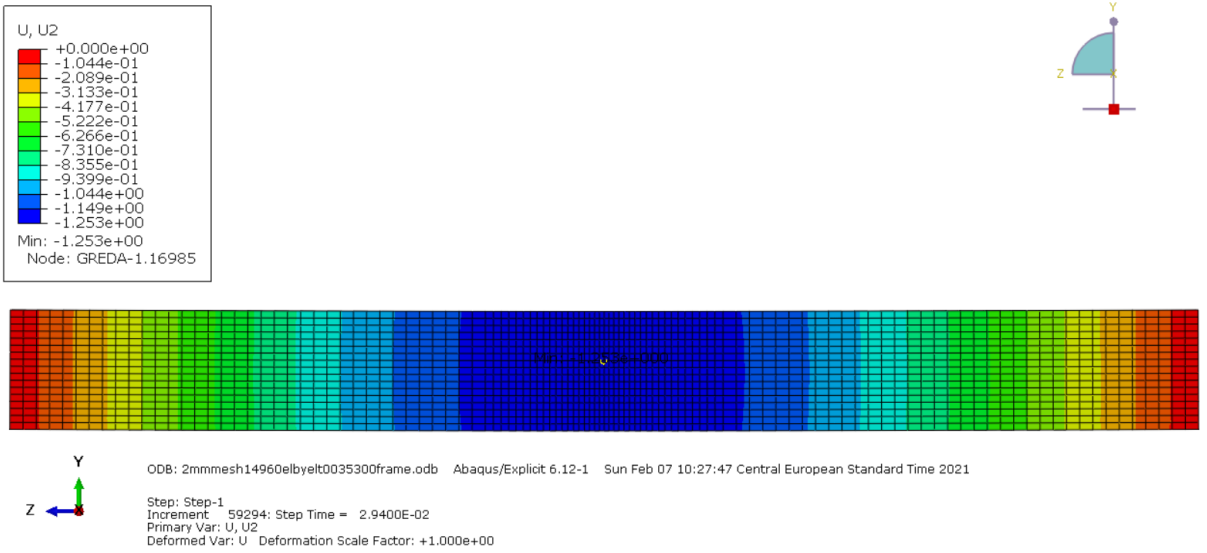
Na isti način će se uvrštavanjem vrijednosti visine h=1 mm u jednadžbu (4.1) procijeniti potrebno vrijeme za analizu u modulu *Step*:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9810}} = 0{,}01428 \text{ s} . \tag{5.2}$$

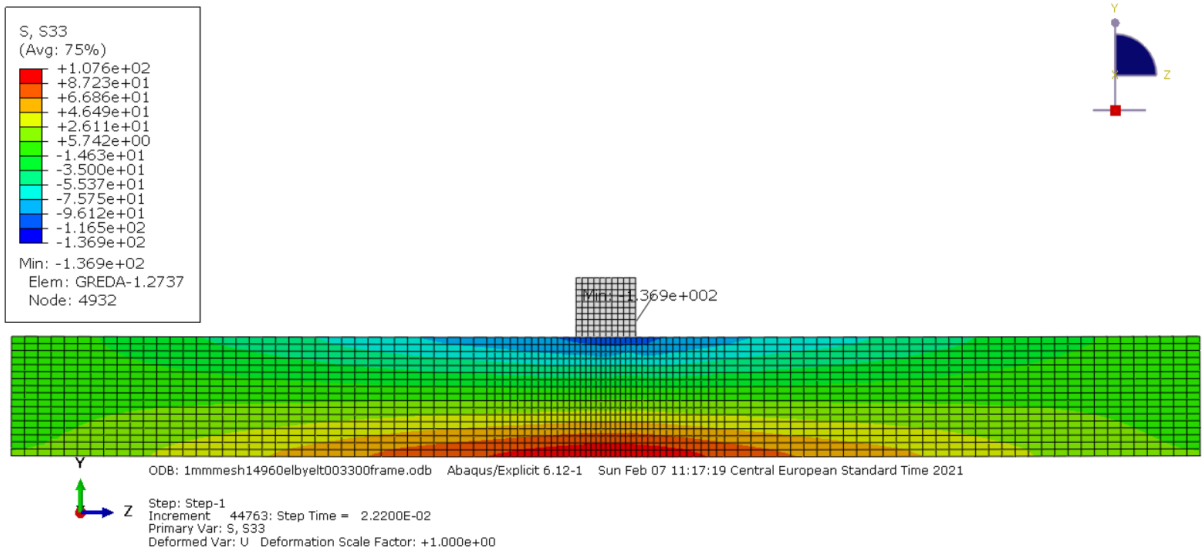
Dovoljno vrijeme analize u slučaju s visinom 1 mm bit će t=0,03 sekunde.



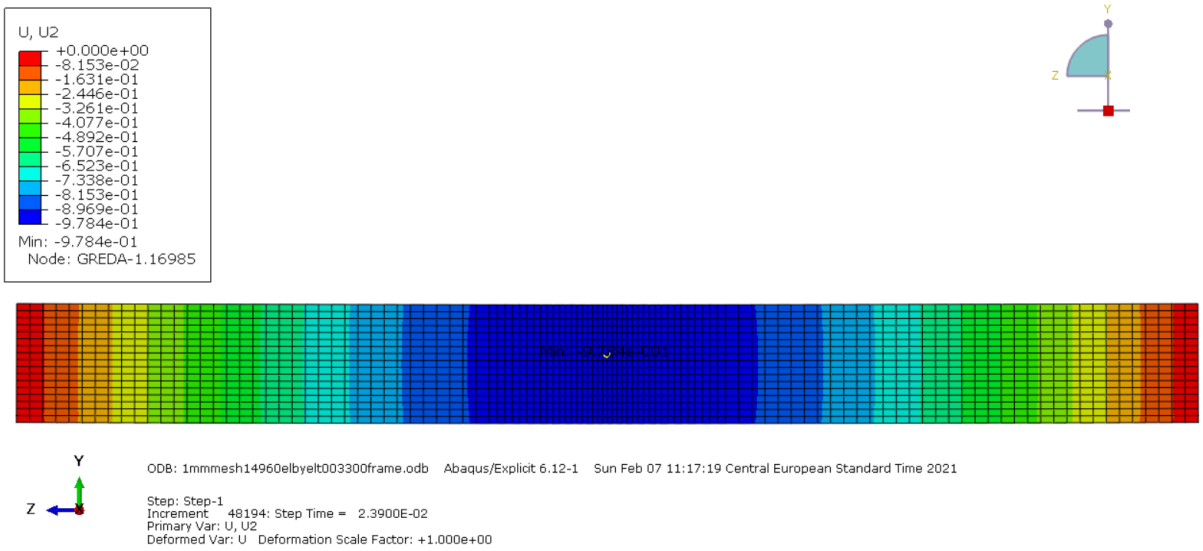
Slika 23. Prikaz kontura naprezanja *S33* - visina 2 mm



Slika 24. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - visina 2 mm



Slika 25. Prikaz kontura naprezanja *S33* - visina 1 mm



Slika 26. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - visina 1 mm

Na slikama 23, 24, 25 i 26 prikazana su naprezanja i progibi grede za visine 1 i 2 mm. Usporedba analitičkih i numeričkih rezultata za sve visine bit će prikazana u tablicama 4 i 5.

Tablica 4. Usporedba analitički i numerički dobivenih naprezanja za sve visine

Visina [mm]	Numerički rezultat [N/mm^2]	Analitički rezultat [N/mm^2]	Razlika numeričkog u odnosu na analitički rezultat
1	136,863	120,439	+13,64%
2	181,159	154,725	+17,08%
5	258,974	224,233	+15,49%

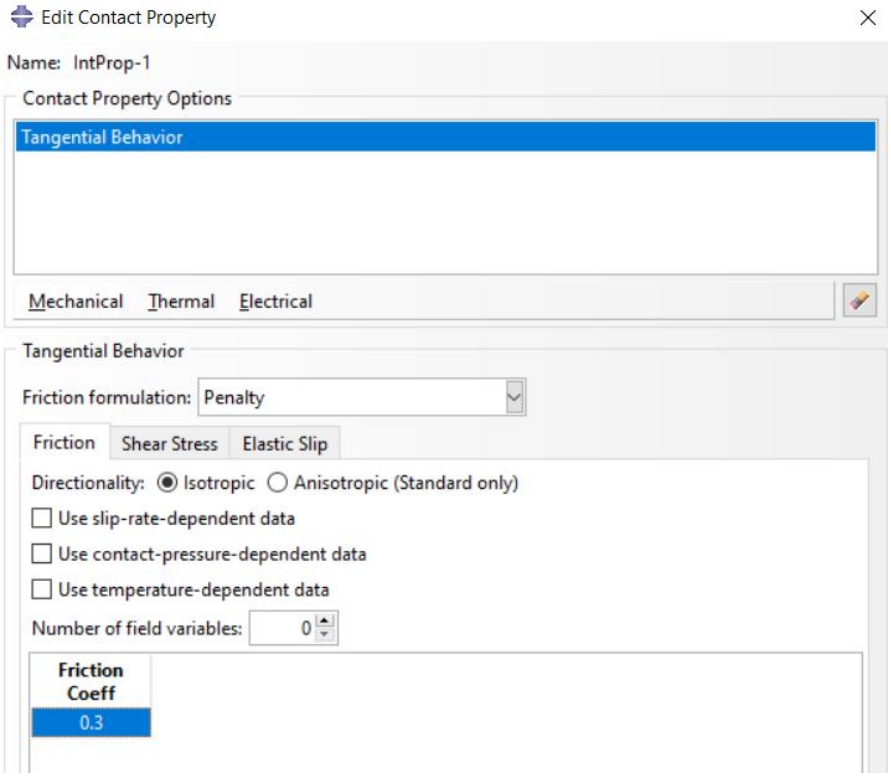
Tablica 5. Usporedba analitički i numerički dobivenih progiba za sve visine

Visina [mm]	Numerički rezultat [mm]	Analitički rezultat [mm]	Razlika numeričkog u odnosu na analitički rezultat
1	0,978389	0,9559	+2,35%
2	1,25322	1,228	+2.05%
5	1,79599	1,7796	+0,92%

Iz tablica 4 i 5 može se zaključiti kako su naprezanja dobivena numerički veća za 10 do 20% od naprezanja dobivenih analitički. Progibi dobiveni numerički su također veći od progiba dobivenih analitički, međutim u manjoj mjeri nego što su to naprezanja. Takvi su rezultati očekivani, budući da analitički izraz zanemaruje kontaktna naprezanja u blizini mjesta udara kao i valove naprezanja i njihove refleksije.

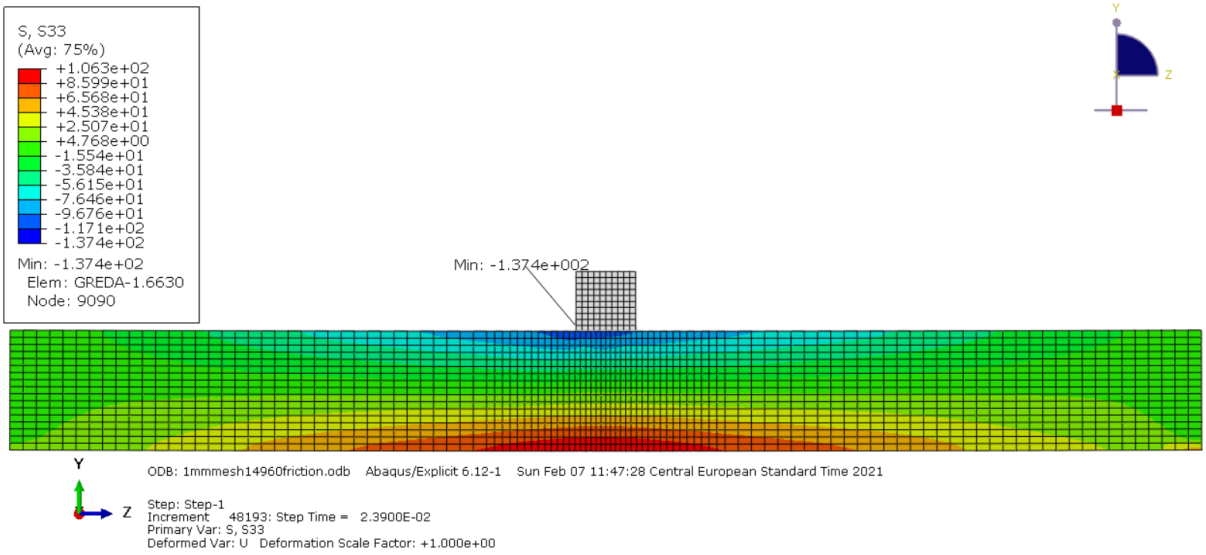
5.2. Utjecaj trenja na točnost numeričkih rješenja

U ovom zadatku potrebno je također ispitati kako trenje utječe na rezultate, i iz toga izvući zaključak koliko je ono značajno za analizu ovog problema. Ono će se ispitati na slučaju s visinom 1 mm, te će se usporediti s numeričkim rješenjem iz prethodnog poglavlja. Trenje se zadaje u modulu *Interaction* tako da se odaberu opcije sa slike 27.

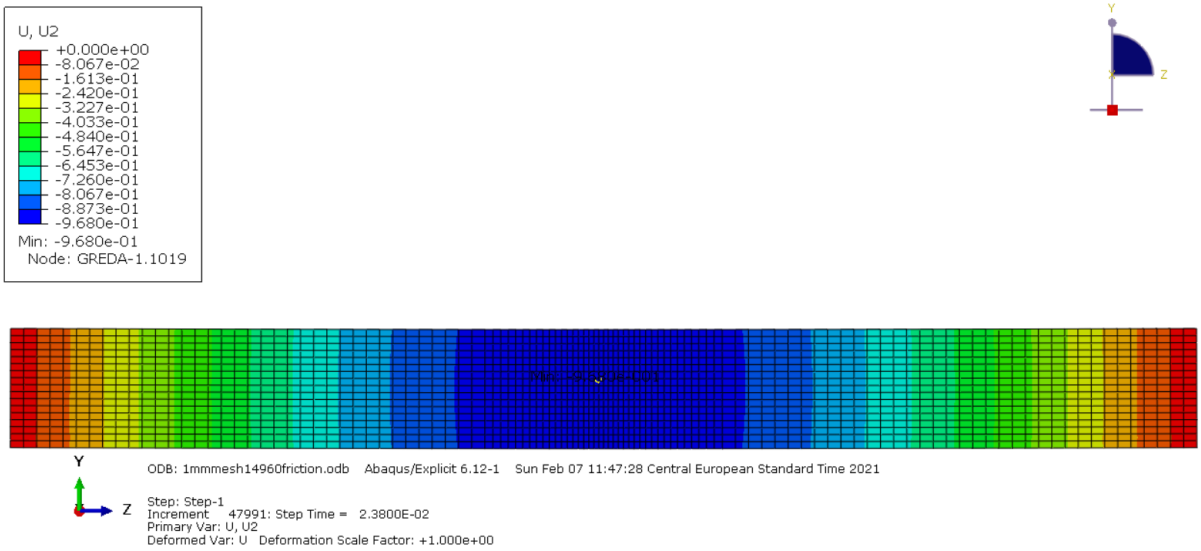


Slika 27. Zadavanje trenja

Na slikama 28 i 29 prikazani su rezultati analize s trenjem, a u tablici 6 usporedba s numeričkim rješenjem.



Slika 28. Prikaz kontura naprezanja *S33* - slučaj s trenjem, visina 1 mm



Slika 29. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - slučaj s trenjem, visina 1 mm

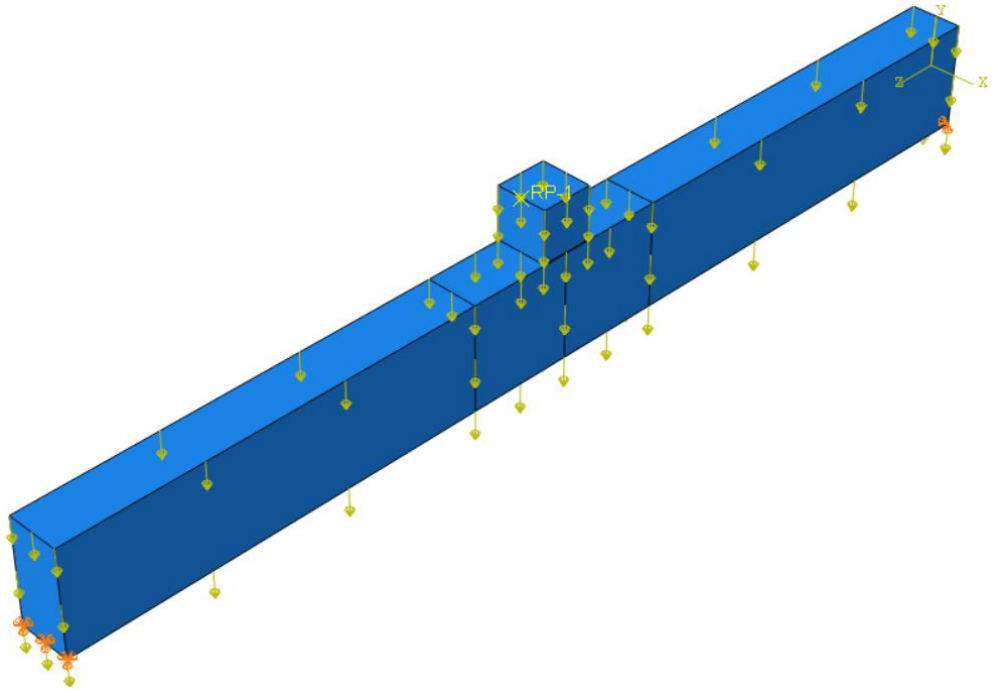
Tablica 6. Usporedba numeričkih rješenja bez trenja i s trenjem

	Numeričko rješenje bez trenja	**Numeričko rješenje s trenjem**	**Razlika rješenja s trenjem u odnosu na rješenje bez trenja**
Naprezanje [N/mm^2]	136,863	137,373	+0.37%
Progib [mm]	0,978389	0,967991	-1.07%

Iz tablice 6 se može zaključiti da trenje ima utjecaj na rezultate, međutim taj je utjecaj zanemarivo malen.

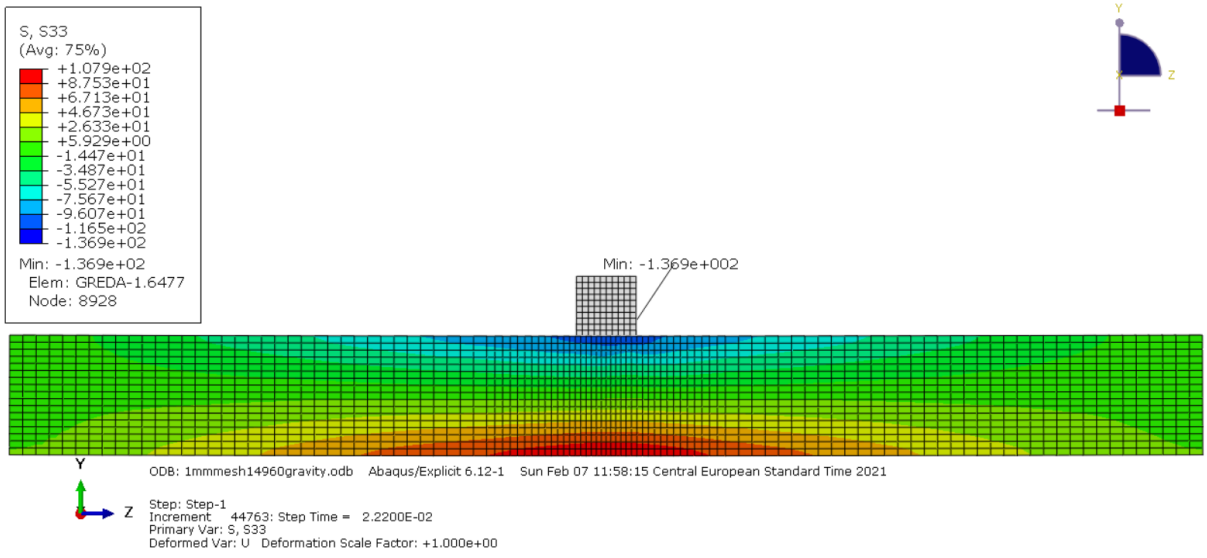
5.3. Utjecaj težine grede na točnost numeričkih rješenja

Utjecaj težine grede se također ispituje na slučaju s visinom udarnog tijela 1 mm. U modulu *Load* je potrebno samo označiti da i na gredu djeluje gravitacijska sila. Rubni uvjeti u tom slučaju prikazani su slikom 30.

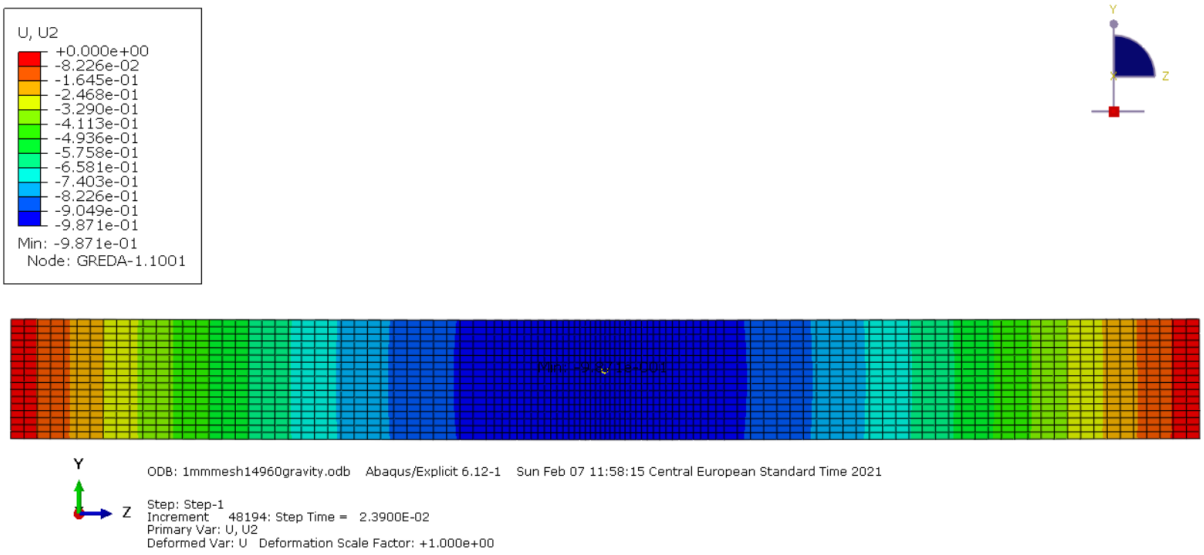


Slika 30. Rubni uvjeti s vlastitom težinom grede

Na slikama 31 i 32 prikazani su rezultati analize s težinom grede, a u tablici 7 usporedba s numeričkim rješenjem.



Slika 31. Prikaz kontura naprezanja *S33* - slučaj s težinom grede, visina 1 mm



Slika 32. Prikaz progiba u smjeru osi *y* - slučaj s težinom grede, visina 1 mm

Tablica 7. Usporedba numeričkih rješenja s težinom grede i bez težine grede

	Numeričko rješenje bez težine grede	**Numeričko rješenje s težinom grede**	**Razlika rješenja s težinom grede u odnosu na rješenje bez težine grede**
Naprezanje [N/mm^2]	136,863	136,874	0%
Progib [mm]	0,978389	0,987112	+0.89%

Iz tablice 7 se može zaključiti da vlastita težina grede ne utječe na naprezanje, dok na progibe utječe tako da ih povećava, što je logično zato što gravitacija djeluje u istom smjeru kao i progib koji nastane. Međutim, taj utjecaj je zanemarivo malen.

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu se obradio problem udarnog opterećenja, odnosno ispuštanja udarnog tijela s određene visine na zglobno oslonjenu gredu. Problem se riješio analitički i numerički za slučajeve s različitim visinama. Analizirajući sve slučajeve pokazalo se da su naprezanja dobivena numerički veća za između 10 i 20% od naprezanja dobivenih analitički. To je bilo i za očekivati, obzirom da analitički izraz zanemaruje kontaktna naprezanja u blizini mjesta udara kao i valove naprezanja i njihove refleksije. Progibi dobiveni numerički su također veći od progiba dobivenih analitički, međutim u manjoj mjeri nego naprezanja. Zbog svega toga treba biti oprezan u primjeni analitičkog izraza, pogotovo kod konstrukcija opterećenim visokim dinamičkim opterećenjem. Također su se zasebno ispitali utjecaj trenja i vlastite težine grede na rezultate, i utvrdilo se da ne utječu značajno na rezultate.

LITERATURA

[1] ISO 4210-6:2015(en)

[2] Bicycle ISO 4210-2:2014

[3] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći I, Zagreb: Tehnička knjiga, 1995.

[4] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći II, Zagreb: Golden marketing, 1999.

[5] Abaqus Documentation- Getting Started with Abaqus: Interactive Edition, Section 9.2

[6] Abaqus Documentation- Getting Started with Abaqus: Interactive Edition, Section 9.3

[7] Abaqus Lecture 1- Overview of Abaqus/Explicit

[8] Abaqus Documentation- Getting Started with Abaqus: Interactive Edition, Section 12.4.2

[9] Abaqus Documentation- Abaqus Analysis User's Manual, Section 34.2.2

PRILOZI

I. CD-R disc