

# Rekonstrukcija geometrije koronarne arterije iz CT snimke

---

**Krajcar, Manuel**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:222329>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported / Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerađivanja 3.0](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **ZAVRŠNI RAD**

**Manuel Krajcar**

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Dr. sc. Željko Tuković, dipl. ing.

Komentor:

Dr. sc. Zdravko Virag, dipl. ing.

Student:

Manuel Krajcar

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojem mentoru dr. sc. Željku Tukoviću dipl. ing. te komentoru dr. sc. Zdravku Viragu dipl. ing. na pruženoj potpori, strpljenju te svim savjetima, razgovorima, i kritikama tijekom pisanja ovog završnog rada. Veliko hvala i asistentu Philippu Miloviću dipl. ing. na ukazanoj pomoći i uloženom vremenu.

Također bih se zahvalio svojoj obitelji, djevojci i cimerima na velikoj potpori i inspiraciji tijekom cjelokupnog studiranja.

Manuel Krajcar



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

|                                     |        |
|-------------------------------------|--------|
| Sveučilište u Zagrebu               |        |
| Fakultet strojarstva i brodogradnje |        |
| Datum                               | Prilog |
| Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1        |        |
| Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -           |        |

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Manuel Krajcar**

Mat. br.: 0035211890

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Rekonstrukcija geometrije koronarne arterije iz CT snimke**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Coronary artery geometry reconstruction from CT scan**

Opis zadatka:

Koronarne arterije su krvne žile koje opskrbljuju srčani mišić. Začepljenje krvnih žila oko srca najčešće je uzrokovano aterosklerozom koronarnih arterija, gdje dolazi do formiranja plaka nakupljanjem masnoća na unutarnjoj stijenci arterije. Ukoliko aterosklerotski plak smanji poprečni presjek lumena koronarne arterije za više od 75% nije moguće postići puni intenzitet protoka krvi pri pojačanoj potrebi miokarda za kisikom. Na osnovu rezultata numeričke analize strujanja kroz koronarne arterije omogućava se preciznija dijagnostika bolesti. Prema tome ključna faza u provođenju spomenutih numeričkih analiza je precizna rekonstrukcija geometrije koronarnih arterija promatranog pacijenta (eng. patient-specific modelling).

U sklopu završnog rada potrebno je definirati i opisati postupak rekonstrukcije geometrije koronarne arterije iz CT snimaka korištenjem besplatnih računalnih programa otvorenog koda (eng. free open-source). Primjenom opisanog postupka treba rekonstruirati geometriju koronarnih arterija za dva pacijenta. Na temelju rekonstruirane geometrije koronarnih arterija treba formirati prostornu domenu strujanja, te provesti njenu diskretizaciju s ciljem provedbe simulacije strujanja. Usporediti numerički određene slike strujanja kroz koronarne arterije dva promatrana pacijenta.

Dodatne informacije i nacrti dostupni su prema potrebi.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. studenoga 2020.

Zadatak zadao:

Prof.dr.sc. Željko Tuković

Datum predaje rada:

1. rok: 18. veljače 2021.

2. rok (izvanredni): 5. srpnja 2021.

3. rok: 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 22.2. – 26.2.2021.

2. rok (izvanredni): 9.7.2021.

3. rok: 27.9. – 1.10.2021.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

## SADRŽAJ

|       |                                                             |    |
|-------|-------------------------------------------------------------|----|
| 1     | UVOD.....                                                   | 1  |
| 2     | ANATOMIJA KRVOŽILNOG SUSTAVA .....                          | 3  |
| 2.1   | Krvožilni sustav .....                                      | 3  |
| 2.2   | Srce.....                                                   | 5  |
| 2.3   | Aorta.....                                                  | 6  |
| 2.4   | Koronarne arterije .....                                    | 7  |
| 2.5   | Začepljenje krvnih žila u okolini srca .....                | 8  |
| 2.6   | Krv.....                                                    | 9  |
| 3     | TEORIJSKE OSNOVE MEHANIKE FLUIDA .....                      | 11 |
| 3.1   | Koncept kontrolnog i materijalnog volumena.....             | 12 |
| 3.2   | Osnovni zakoni mehanike fluida.....                         | 12 |
| 3.2.1 | Zakon očuvanja mase ili jednažba kontinuiteta .....         | 13 |
| 3.2.2 | Zakon očuvanja količine gibanja .....                       | 13 |
| 3.3   | Reynoldsov broj .....                                       | 14 |
| 3.4   | Model strujanja krvi .....                                  | 15 |
| 4     | METODA KONAČNIH VOLUMENA .....                              | 17 |
| 5     | IZRADA GEOMETRIJE.....                                      | 21 |
| 5.1   | Izrada geometrije u programu 3DSlicer .....                 | 22 |
| 5.1.1 | Izrada koronarnih arterija.....                             | 23 |
| 5.1.2 | Ekstrakcija aorte.....                                      | 25 |
| 5.2   | Obrada dobivenog modela u paketu Blender .....              | 27 |
| 5.2.1 | Priprema rubnih ploha.....                                  | 31 |
| 6     | NUMERIČKA SIMULACIJA .....                                  | 34 |
| 6.1   | Izrada mreže konačnih volumena.....                         | 34 |
| 6.2   | Implementacija rubnih uvjeta i pulsirajućeg strujanja ..... | 37 |

---

|   |                                     |    |
|---|-------------------------------------|----|
| 7 | REZULTATI I ANALIZA STRUJANJA ..... | 43 |
| 8 | ZAKLJUČAK.....                      | 54 |

## POPIS SLIKA

|          |                                                                     |    |
|----------|---------------------------------------------------------------------|----|
| Slika 1  | Prikaz sagitalne, koronarne i transverzalne ravnine snimanja.....   | 2  |
| Slika 2  | Krvožilni sustav čovjeka .....                                      | 3  |
| Slika 3  | Ovisnost tlaka i brzine strujanja o vrsti krvnih žila [5] .....     | 4  |
| Slika 4  | Srce .....                                                          | 5  |
| Slika 5  | Položaj aorte u tijelu .....                                        | 6  |
| Slika 6  | Položaj koronarnih arterija .....                                   | 7  |
| Slika 7  | Ateroskleroza krvnih žila .....                                     | 8  |
| Slika 8  | Sastav krvi .....                                                   | 9  |
| Slika 9  | Volumni protok koronarnih arterija u trajanju od jednog pulsa ..... | 15 |
| Slika 10 | Dio diskretiziranog područja proračuna .....                        | 17 |
| Slika 11 | Prvi prikaz geometrije iz CT-snimaka.....                           | 22 |
| Slika 12 | Vizualizacija cilindričnih struktura u području srca.....           | 23 |
| Slika 13 | Generirana grana arterije između dviju točaka.....                  | 24 |
| Slika 14 | Konačan volumen desne koronarne arterije .....                      | 24 |
| Slika 15 | Volumen aorte dobiven putem efekta "Threshold" .....                | 25 |
| Slika 16 | Očišćena geometrija aorte .....                                     | 26 |
| Slika 17 | Konačna geometrija aorte i koronarnih arterija.....                 | 27 |
| Slika 18 | Problem ispupčenja na zidovima arterija .....                       | 28 |
| Slika 19 | Problem šiljaka na zidovima arterija .....                          | 28 |
| Slika 20 | Prikaz geometrije prije i nakon lokalnog profinjenja .....          | 29 |
| Slika 21 | Postupak odstranjivanja loše geometrije .....                       | 29 |
| Slika 22 | Prikaz površinske mreže prije i nakon povećanja rezolucije.....     | 30 |
| Slika 23 | Prikaz geometrije prije i nakon globalnog profinjenja .....         | 30 |
| Slika 24 | Odstranjivanje kraja arterije radi niske rezolucije .....           | 31 |

|          |                                                                                 |    |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| Slika 25 | Odstranjivanje kraja arterije radi deformirane površine.....                    | 32 |
| Slika 26 | Geometrija prvog pacijenta .....                                                | 32 |
| Slika 27 | Geometrija drugog pacijenta .....                                               | 33 |
| Slika 28 | Mreža konačnih volumena pacijenta 1 .....                                       | 35 |
| Slika 29 | Profinjenje mreže na izdancima arterija pacijenta 1.....                        | 36 |
| Slika 30 | Mreža konačnih volumena pacijenta 2 .....                                       | 36 |
| Slika 31 | Profinjenje mreže na izdancima arterija pacijenta 2.....                        | 37 |
| Slika 32 | Geometrija lijeve koronarne arterije.....                                       | 37 |
| Slika 33 | Primjena Windkesselovog efekta na krvožilni sustav .....                        | 39 |
| Slika 34 | Hidraulička i električna shema tro-elementnog Windkessel modela .....           | 40 |
| Slika 35 | Vremenska promjena srednje brzine u ulaznom presjeku pacijenta 1 .....          | 43 |
| Slika 36 | Vremenska promjena srednjeg tlaka na ulaznom presjeku pacijenta 1 .....         | 44 |
| Slika 37 | Vrijednosti srednjih brzina na izlaznim presjecima pacijenta 1 .....            | 45 |
| Slika 38 | Vrijednosti srednjih brzina na izlaznim presjecima pacijenta 2 .....            | 46 |
| Slika 39 | Vrijednosti tlakova na izlaznim presjecima pacijenta 1 .....                    | 47 |
| Slika 40 | Vrijednosti tlakova na izlaznim presjecima pacijenta 2 .....                    | 48 |
| Slika 41 | Vrijednosti srednjih brzina na izlazu za rubni uvjet sa jednim elementom.....   | 49 |
| Slika 42 | Vrijednosti tlakova na izlaznim presjecima za rubni uvjet s jednim elementom .. | 49 |
| Slika 43 | Promjena brzine na izlaznom presjeku (Izlaz 3) pacijenta 1 .....                | 50 |
| Slika 44 | Promjena brzine na izlaznom presjeku (Izlaz 7) pacijenta 2 .....                | 51 |
| Slika 45 | Odvajanje strujanja na rubu stijenke kod pacijenta 1 .....                      | 52 |
| Slika 46 | Odvajanje strujanja na vanjskom rubu stijenke kod pacijenta 2 .....             | 52 |
| Slika 47 | Suženje u ulaznom dijelu grane koronarne arterije pacijenta 1 .....             | 53 |
| Slika 48 | Suženje u ulaznom dijelu grane koronarne arterije pacijenta 2.....              | 53 |

---

**POPIS TABLICA**

|           |                                                                                 |    |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tablica 1 | Podaci proračunske mreže prvog pacijenta .....                                  | 34 |
| Tablica 2 | Podaci proračunske mreže drugog pacijenta .....                                 | 35 |
| Tablica 3 | Nazivi pojedinih rubnih ploha .....                                             | 38 |
| Tablica 4 | Vrste granica i rubni uvjeti za oba pacijenta .....                             | 42 |
| Tablica 5 | Maksimalna, minimalna i prosječna brzina na izlaznim površinama pacijenta 1 .   | 45 |
| Tablica 6 | Maksimalna, minimalna i prosječna brzina na izlaznim površinama pacijenta 2 .   | 46 |
| Tablica 7 | Maksimalan, minimalan i prosječan tlak na izlaznim površinama pacijenta 1 ..... | 47 |
| Tablica 8 | Maksimalan, minimalan i prosječan tlak na izlaznim površinama pacijenta 2 ..... | 48 |

## POPIS OZNAKA

| Oznaka        | Jedinica    | Opis                                      |
|---------------|-------------|-------------------------------------------|
| $\rho$        | $[kg/m^2]$  | gustoća krvi                              |
| $\mu$         | [Pas]       | dinamička viskoznost                      |
| $\nu$         | $[m^2/s]$   | kinematička viskoznost                    |
| $\phi$        | [-]         | volumenska gustoća fizikalne veličine     |
| $V_M$         | $[m^3]$     | materijalni volumen                       |
| $V_{KV}$      | $[m^3]$     | kontrolni volumen                         |
| $S_M$         | $[m^2]$     | materijalna površina                      |
| $S_{KV}$      | $[m^2]$     | kontrolna površina                        |
| $v_j$         | $[m/s]$     | komponente vektora brzine strujanja       |
| $v_{max}$     | $[m/s]$     | brzina u vrhuncu sistole                  |
| $t$           | [s]         | vrijeme                                   |
| $n_j$         | [-]         | vektor normale                            |
| $f_i$         | $[N/kg]$    | komponente vektora specifične masene sile |
| $\sigma_{ij}$ | $[N/m^2]$   | tenzor naprezanja                         |
| $\sigma_i$    | $[N/m^2]$   | vektor naprezanja                         |
| $Re$          | [-]         | Reynoldsov broj                           |
| $D$           | m           | promjer koronarne arterije                |
| $\varphi$     | [-]         | polje fizikalne veličine                  |
| $\Gamma$      | $[kg/ms]$   | koeficijent difuzije                      |
| $\Delta n$    | $[m]$       | udaljenost između čvorova konačnog        |
| $D_n$         | $[kg/s]$    | jačina difuzije                           |
| $F_n$         | $[kg/s]$    | jačina konvekcije                         |
| $J_i$         | [-]         | vektor fluksa fizikalne veličine          |
| $\tau$        | [s]         | vremenska konstanta                       |
| $p_{sr}$      | $[mmHg]$    | srednja vrijednost tlak srčanog ciklusa   |
| $p_{sis}$     | $[mmHg]$    | sistolički tlak                           |
| $p_{dij}$     | $[mmHg]$    | dijastolički tlak                         |
| $R$           | $[kg/m^4s]$ | distalni otpor                            |

---

|           |               |                                              |
|-----------|---------------|----------------------------------------------|
| $R_{ch}$  | $[kg/m^4s]$   | karakteristična impedancija                  |
| $C$       | $[s^2m^4/kg]$ | kapacitet na izlazu                          |
| $Q_{cor}$ | $[m^3/s]$     | koronarni protok                             |
| $Q_{out}$ | $[m^3/s]$     | protok na izlazu iz grane koronarne arterije |

---

## SAŽETAK

Razvojem računala i novih algoritama sve je učestalija primjena numeričkih metoda poput metode konačnih elemenata (MKE) i metode konačnih volumena (MKV) u području biomehanike i mehanike bioloških strujanja. Numeričke analize strujanja u krvožilnom sustavu uz medicinske pretrage daju više informacija i omogućuju precizniju dijagnostiku kardiovaskularnih bolesti. Ateroskleroza je bolest arterija koja uzrokuje formiranje plaka nakupljanjem masnoća na unutarnjoj stijenci. Kod ateroskleroze koronarnih arterija suženje poprečnog presjeka veće od 75% može dovesti do srčanog udara. Dijagnosticiranje i provođenje numeričke analize ne bi bilo moguće bez precizne rekonstrukcije geometrije koronarnih arterija oboljelog pacijenta.

U ovom radu opisana je rekonstrukcija geometrije koronarnih arterija dvaju pacijenata na temelju CT koronarografskih snimaka. Iz rekonstruirane geometrije formirana je prostorna domena strujanja te je provedena njena diskretizacija i numerička analiza strujanja.

Rekonstrukcija je provedena u programima 3DSlicer i Blender dok je proračunska mreža napravljena u programu cfMesh. Proračun je proveden pomoću programskog paketa OpenFOAM, a rezultati su obrađeni programom Paraview

Ključne riječi: računalna dinamika fluida, koronarne arterije, hemodinamika, strujanje krvi

---

## SUMMARY

With the development of computers and new algorithms, the application of numerical methods such as the finite element method (FEM) and the finite volume method (FEM) in the field of biomechanics and mechanics of biological flows is becoming more frequent. Numerical analyzes of the flow in the vascular system in addition to medical tests provide more information and allow a more accurate diagnosis of cardiovascular diseases. Atherosclerosis is a disease of the arteries that causes plaque to form by the accumulation of fat on the inner wall. In atherosclerosis of the coronary arteries, narrowing of the cross section by more than 75% can lead to a heart attack. Diagnosing and performing numerical analysis would not be possible without a precise reconstruction of the geometry of the coronary arteries of a diseased patient.

This thesis describes the reconstruction of the coronary artery geometry of two patients from CT coronarographic images. Based on the reconstructed geometry, the spatial domain of the flow is defined and discretised and numerical analysis of the flow was performed.

The reconstruction was carried out in 3DSlicer and Blender while mesh is made in cfMesh. The calculation was performed using the OpenFOAM software package, and the results were processed with the Paraview program.

Key words: computer fluid dynamics, coronary arteries, hemodynamics, blood flow

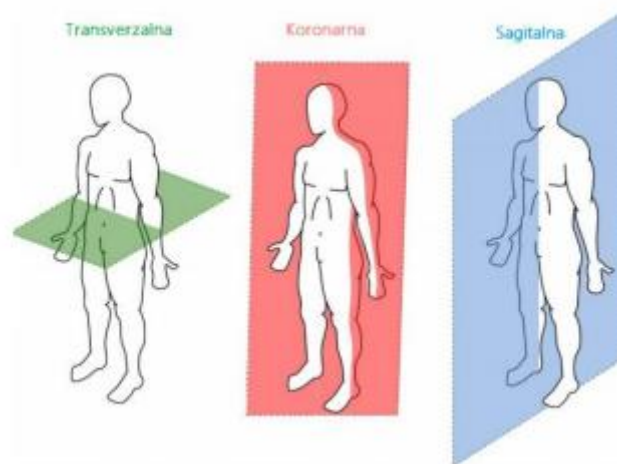
## 1 UVOD

Mehanika fluida je grana fizike koja se bavi mehanikom - dakle proučavanjem sila i gibanja - uzrokovanih od i na samim fluidima. To je teorijsko eksperimentalna znanost koja predstavlja jedno od najkompleksnijih područja mehanike te osim područja klasične mehanike zalazi i u stohastičke procese i teoriju kaosa koja je i evoluirala iz proučavanja pojava u mehanici fluida (turbulencija, meteorologija). Krv koja struji kroz krvne žile, predstavlja ništa drugo već jedan oblik strujanja fluida u određenoj geometriji, koji se može opisati osnovnim zakonima mehanike fluida. Za napredak i razvitak medicine, tj. novih metoda liječenja i dijagnosticiranja zdravstvenih poteškoća, uvelike je zaslužno inženjerstvo. Brojni zdravstveni problemi, pogotovo na području kardiovaskularnog sustava danas se mogu rješavati bez operacije, tj. manje invazivnim metodama.

Korištenjem naprednih alata računalne dinamike fluida (eng. Computational Fluid Dynamics – CFD) moguće je dobiti točnu sliku strujanja za složenu geometriju srca i krvožilnog sustava. S obzirom da je provođenje medicinskih pregleda često skupo i nepraktično te ukoliko pregled nije učinjen pravilno može rezultirati narušavanjem pacijentovog zdravlja, računalne simulacije predstavljaju primamljivu alternativu. CFD simulacije imaju široku primjenu u strojarstvu i omogućavaju detaljan uvid u ponašanje strujanja i pojašnjavanje različitih pojava vezanih uz strujanje fluida te su idealan alat za razumijevanje strujanja kroz srce i krvne žile bez provođenja eksperimenta. Moguće je provesti proračune laminarnog i turbulentnog strujanja do visokih razina točnosti za širok spektar geometrije i uvjeta strujanja prilikom različitih opterećenja na organizam.

Razvoj medicinske radiologije, kao i područja medicinske dijagnostike, omogućilo je primjenu različitih tehnologija poput računalne tomografije (eng. Computed Tomography – CT), magnetske rezonancije (eng. Magnetic Resonance Imaging – MRI) itd. Posebna vrsta tomografije, CT Koronarografija, je neinvazivni pregled koronarnih arterija radiografskim snimanjem kojim se jednostavno i brzo dobiva dvodimenzionalni uvid u geometriju što nam pomaže u vizualizaciji stvarne slike srca, okružujućih krvnih žila i okolnog tkiva. Superpozicijom dvodimenzionalnih snimaka kroz tri ravnine snimanja (sagitalna, koronarna i

aksijalna ravnina) dobiva se trodimenzionalni prikaz tkiva i organa iz kojih je moguće generirati modele za svrhe numeričkih simulacija, Slika 1.



**Slika 1 Prikaz sagitalne, koronarne i transverzalne ravnine snimanja**

Za pojedinog je pacijenta, pomoću koronografskih snimaka i dobro određenim početnim i rubnim uvjetima za simulaciju strujanja, moguće dobiti kvalitetnu sliku strujanja kroz srce i krvne žile.

Naglasak ovog rada je na posebnim granama krvožilnog sustava, koronarnim arterijama o kojima će se više govoriti u nastavku

Cilj ovog rada je opisati postupak rekonstrukcije geometrije koronarnih arterija dvaju pacijenata iz CT snimaka pomoću besplatnih računalnih programa otvorenog koda (eng. free open-source), formirati prostornu domenu strujanja te provesti njenu diskretizaciju s ciljem provedbe simulacije strujanja.

Postupak izrade geometrije proveden je u tri osnovna koraka:

1. Izrada geometrije koronarnih arterija u paketu *3Dslicer* [1].
2. Obrada dobivenog modela u paketu *Blender* [2].
3. Izrada proračunske mreže pomoću programskog paketa *cfMesh* [3].

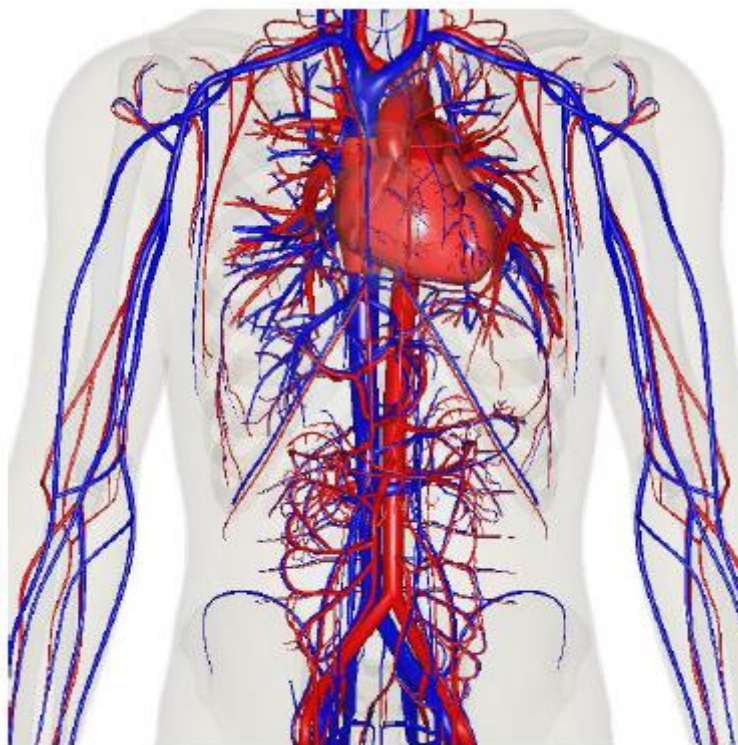
Numerička simulacija provedena je primjenom open-source CFD programskog paketa *OpenFOAM* [4].

## 2 ANATOMIJA KRVOŽILNOG SUSTAVA

### 2.1 Krvožilni sustav

Krvožilni sustav se sastoji od srca – srce je moguće promatrati kao pumpu koja stvara odgovarajući gradijent tlaka nužan za samo strujanje, tj. cirkulaciju krvi, krvnih žila – krvne žile predstavljaju rutu kojom krv struji, te od krvi – fluida koji donosi kisik i potrebne tvari do svih stanica u tijelu.

Cjelokupni volumen krvi je nejednoliko raspodijeljen u ljudskom tijelu. Oko 84 % cjelokupnog volumena se nalazi u sistemske cirkulaciji, od čega u venama 64 %, 13% u arterijama i 7% u kapilarama i arteriolama. Srce sadrži oko 7% ukupnog volumena dok ostalih 9% otpada na plućne žile.



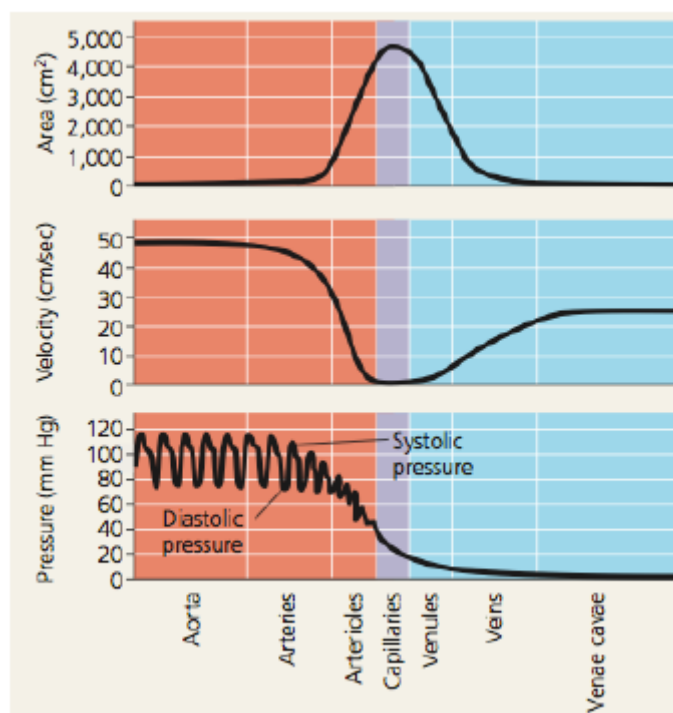
**Slika 2 Krvožilni sustav čovjeka**

Normalan puls u mirovanju iznosi između 60 i 100 otkucaja u minuti, dok sam volumen krvi koji se za jednu minutu transportira iznosi približno 5 litara. Navedene veličine se u višim godinama postupno smanjuju. No, u stanju fizičkih napora srce može povećati broj otkucaja i na 150 u minuti, a ukupni protok može iznositi i do 20 litara u minuti.

Zbog vrlo različitih brzina otkucaja i volumnih protoka, brzina strujanja krvi i tlak u krvnim žilama se uvelike mogu mijenjati. Pri normalnim uvjetima otkucaja srca, brzina strujanja krvi kroz velike žile kao što je aorta se kreće između vrijednosti od 40 odnosno 50 cm/s, dok je za male krvne žile kao što su kapilare ona puno manja, i iznosi oko 0.3 mm/s.

Kao i sama brzina i tlak koji se javlja u krvnim žilama se razlikuje od žile do žile. Pri normalnim uvjetima, pulsirajuće djelovanje srca inducira arterijski tlak koji oscilira između 120 mmHg i 80 mmHg. To je ujedno i najveći tlak koji se javlja u žilama (pri normalnim uvjetima). Baš kao i kod brzine, u manjim žilama tlak je bitno niži. Tako za kapilare on oscilira između 35 i 17 mmHg. U aorti i skoro svim arterijama tlak je pulsirajući, dok se za sve druge krvne žile on može smatrati konstantnim.

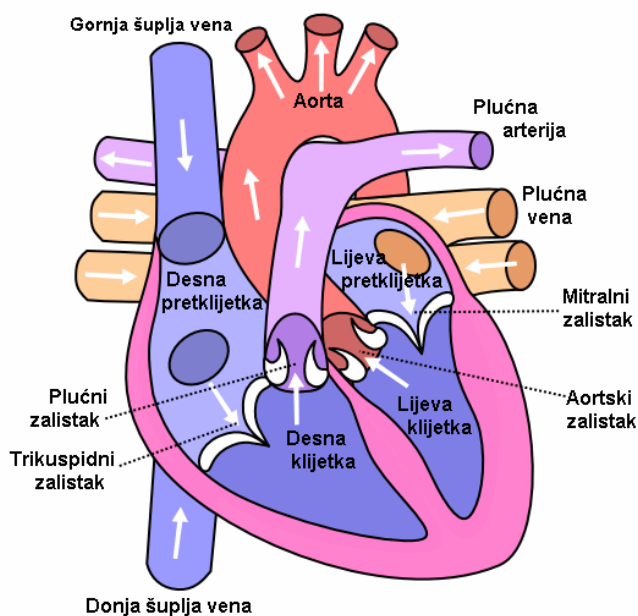
Na slici 3 prikazana je ovisnost tlaka i brzine strujanja o vrsti krvnih žila u tijelu, te udio pojedinih krvnih žila u ukupnom poprečnom presjeku.



**Slika 3 Ovisnost tlaka i brzine strujanja o vrsti krvnih žila [5]**

## 2.2 Srce

Centralni dio kardiovaskularnog sustava je srce. Srce je mišićni organ lociran u središnjem dijelu prsne šupljine, između dva plućna krila. Veličine je ljudske šake. Građeno je od posebne vrste mišićnog tkiva, srčano mišićno tkivo koje je po strukturi slično poprečno-prugastom mišićnom tkivu. Sastoji se od lijeve i desne polovice, a svaka polovica se sastoji od komora koje se nazivaju klijetke (veće) i pretklijetke (manje). Između komora nalaze se srčani zalisci koji sprečavaju povratak krvi u suprotnom smjeru. Srce radi neprestano kroz čitav život, pumpa krv naizmjeničnim stezanjem i otpuštanjem klijetki i pretklijetki. Brzina rada srca varira ovisno o potrebama organizma odnosno o fizičkom naporu i potrebom za hranjivim tvarima i kisikom.



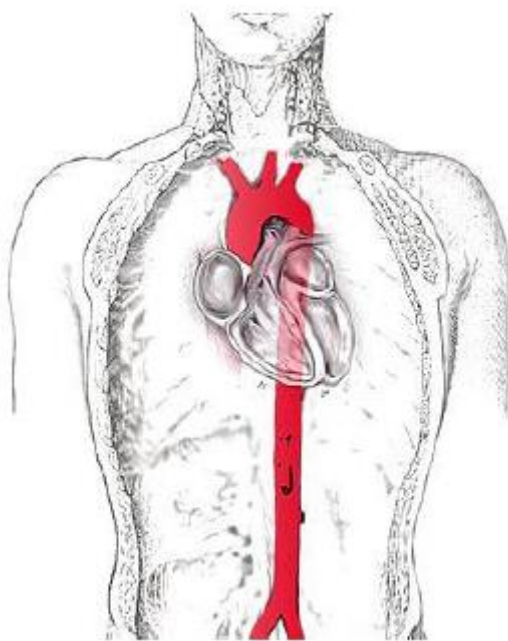
Slika 4 Srce

## 2.3 Aorta

Aorta je najveća arterija ljudskog tijela koja izlazi iz lijeve klijetke srca te dovodi krv bogatu kisikom u sve dijelove tijela. Aorta se obično dijeli u pet dijelova:

- Uzlazna (ascendentna) aorta – dio aorte od srca do luka aorte
- Luk aorte – vršni dio aorte koji izgleda poput slova U
- Silazna (descendentna aorta) – dio od luka aorte do dijeljenja aorte na dvije bočne arterije; sastoji se od dva dijela:
- Torakalna aorta – dio silazne aorte iznad ošita
- Abdominalna aorta – dio silazne aorte ispod ošita

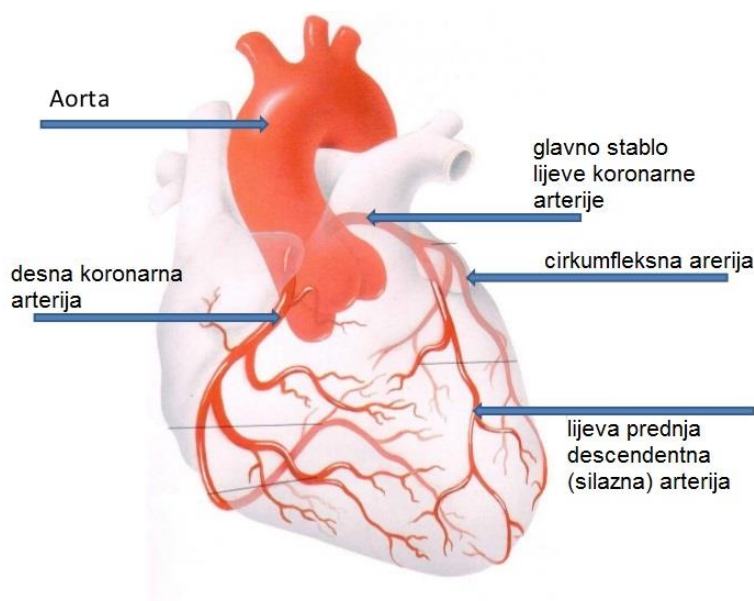
Desna i lijeva koronarna arterija izlaze iz aorte, preciznije, iz uzlaznog dijela aorte. Uzlazna aorta je dio aorte dug oko 5 cm i polazi od gornjeg dijela baze lijeve klijetke srca u razini donjeg ruba treće hrskavice iza lijeve polovice prsne kosti.



**Slika 5 Položaj aorte u tijelu**

## 2.4 Koronarne arterije

Osnovna funkcija koronarnih arterija je opskrbljivanje srčanog mišića krvlju. Kao i svim ostalim tkivima u tijelu, i srčanom mišiću je potreban kisik za pravilno obavljanje funkcija. Koronarne arterije dijele se na desnu i lijevu koronarnu arteriju koje izlaze iz desnog i lijevog koronarnog sinusa u korijenu aorte, nešto iznad aortnog ušća. Obje arterije imaju veliki broj grana koje protječu duž srčane površine i šalju manje arteriole u srčani mišić. Lijeva koronarna arterija počinje kao glavno deblo arterije (lijeva glavna, engl. “left main” = LM), te se ubrzo dijeli na lijevu prednju silaznu arteriju (engl. left anterior descending = LAD) i cirkumfleksnu arteriju (ACx). LAD opskrbljuje prednji septum (uključujući proksimalni dio provodnog sustava) i slobodnu prednju stijenku lijevog ventrikula. ACx, koja je obično manja od LAD, opskrbljuje slobodnu lateralnu stijenku lijevog ventrikula. Desna koronarna arterija koja se dijeli na zadnju silaznu i akutnu marginalnu arteriju prelazi preko atrioventrikulske brazde i desne strane srca. Desna koronarna arterija doprema krv u sinusni čvor (u 55% ljudi), desni ventrikul, obično AV–čvor i donju stijenku srčanog mišića [6].



Slika 6 Položaj koronarnih arterija

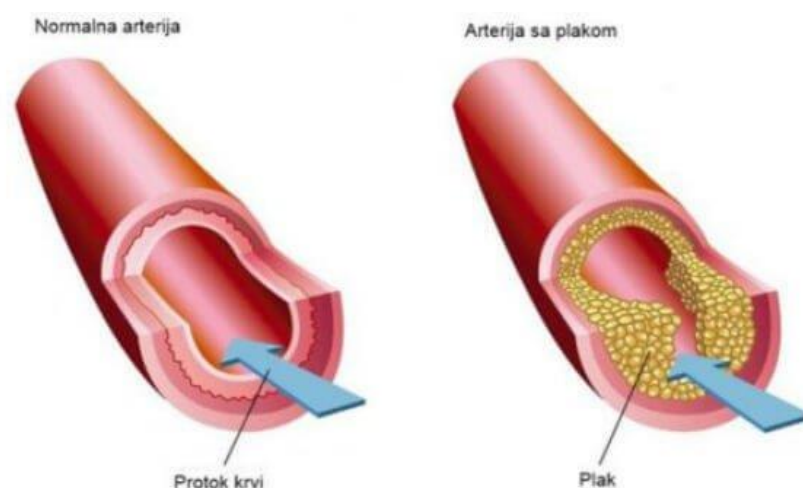
## 2.5 Začepljenje krvnih žila u okolini srca

Začepljenje krvnih žila oko srca najčešće je uzrokovano aterosklerozom koronarnih arterija kao što je začepljenje krvnih žila u nogama uzrokovano aterosklerozom arterija nogu. Ateroskleroza je bolest krvnih žila u kojoj dolazi do nakupljanja lipida (masnoća) na unutarnje stijenke arterija. Arterije tada postanu krute i sužava im se promjer. Začepljenje krvnih žila može biti kao stenozna (smanjenje promjera) ili okluzija (potpuno začepljenje). Koronarne arterije glavno su mjesto aterosklerotske bolesti.

Rizični čimbenici za nastanak ateroskleroze su:

- Visok krvni tlak -hipertenzija
- Visoke vrijednosti kolesterola -hiperkolesterolemija
- Visoke vrijednosti triglicerida
- Koronarna bolest srca u obitelji
- Pušenje
- Dijabetes
- Pretilost
- Fizička neaktivnost

Pojam ishemija odnosi se na stanje pomanjkanja kisika. Aterosklerotski plakovi sužavaju lumen koronarne arterije i, ako ona smanji poprečni presjek lumena za oko 75 %, tada više nije moguće postignuti puni opseg protoka krvi pri pojačanoj potrebi miokarda za kisikom (pri fizičkoj aktivnosti). Ako se presjek koronarne krvne žile smanji za više od 80 % tada će protok krvi biti smanjen i u mirovanju.



Slika 7 Ateroskleroza krvnih žila

## 2.6 Krv

Krv (lat. sanguis) je crvena, neprozirna i gusta tekućina, posebna mirisa i slana okusa. Ona protječe kroz srčano-krvožilni sustav te kroz tijelo prenosi hranjive tvari i kisik. Ubrajamo ju u tekuće vezivno tkivo. Ukupni volumen u odrasle osobe je oko 5 litara, a sastoji se od tekućeg dijela, krvne plazme i od krvnih stanica (leukocita i eritrocita) i krvnih pločica (trombocita). Neke od uloga krvi su:

- funkcija prehrane (prijenos hranjivih tvari iz crijeva do stanica),
- izlučivanje i filtriranje štetnih tvari iz tijela,
- održavanje tjelesne temperature
- održavanje količine vode u tijelu
- prijenos različitih tvari (hormoni, vitamini).

Krvna plazma je žućkasta tekućina koju dobivamo ekstrakcijom krvnih tjelešaca iz krvi. Struktura krvne plazme je 90 % voda i 10% mješavina proteina, glukoze i anorganske soli. Osim plazme, svojstva krvi daju i krvna tjelešca i to najviše crvene i bijele krvne stanice te trombociti. Eritrociti, crvene krvne stanice, čine gotovo polovice krvnog volumena. Ispunjene su hemoglobinom što im omogućava prijenos kisika iz pluća svim tkivima u organizmu. Leukociti, bijele krvne stanice, nisu zastupljene u krvi koliko i eritrociti, jedna bijela krvna stanica dolazi na svakih 660 crvenih. Njihova je glavna uloga obrana organizma od infekcija, stvaranje protutijela i održavanje imunološkog sustava. Trombociti, krvne pločice jesu fragmenti stanice koji nemaju jezgru i nastaju u koštanoj srži. Glavna im je uloga zaustavljanje krvarenja na način da se skupljaju na mjestu ozljeda te započinju proces koagulacije (zgrušavanja) krvi [7].



Slika 8 Sastav krvi

Viskoznost i gustoća kao dva glavna fizikalna svojstva potrebna za proračun strujanja ovise o nekoliko faktora.

Viskoznost ovisi o sljedećim čimbenicima:

- Razini hematokrita
- Deformiranošću eritrocita
- Viskoznosti plazme
- Skupljanju (lijepljenju) eritrocita
- Temperaturi

Razina hematokrita predstavlja ukupni postotak crvenih krvnih stanica (eritrocita) u krvi, i s njegovim porastom raste i sama viskoznost. Viskoznost će također rasti s povećanom deformiranošću i slijepljenošću eritrocita. Kao i s većinom fluida, i krv će imati manju viskoznost pri većim temperaturama. Istraživanja su pokazala da za svako povećanje temperature od 1°C, viskoznost krvi pada za 2%.

Gustoća krvi ovisi o tlaku i temperaturi. Ona nije toliko „osjetljiva“, kao što je to slučaj s viskoznošću. S povećanjem temperature gustoća krvi se smanjuje, dok se s povećanjem tlaka ona povećava.

Za krv pri razini hematokrita od 45%, vrijednosti temperature od 37°C mogu se uzeti sljedeće vrijednosti dinamičke i kinematičke viskoznosti te gustoće:

$$\begin{aligned}\rho &= 1060 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 4.24 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s} \\ \nu &= \frac{\mu}{\rho} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Za potrebe ovog rada, promatrano je nestlačivo pulsirajuće strujanje, a radi jednostavnosti je krv promatrana kao newtonski fluid, stoga korištene vrijednosti fizikalnih svojstava krvi pod (1.1) su se smatrale konstantnima prilikom postavljanja uvjeta strujanja.

### 3 TEORIJSKE OSNOVE MEHANIKE FLUIDA

Mehanika fluida je grana fizike koja se bavi proučavanjem sila i kretanja uzrokovanih od strane fluida ili na samim fluidima. Teorijska osnova na kojoj počiva mehanika fluida i njezini zakoni jest neprekinutost fluida, tj. spoznaja da fluidi u potpunosti ispunjavaju prostor u kojem se nalaze.

Činjenica da se svi realni fluidi sastoje od atoma i/ili molekula, a poznato je da su atomi i molekule osnovna građevna jedinica svake tvari što ih ujedno čini i nositeljima fizikalnih svojstava fluida. Kada bi se definirala svojstva fluida izražena po jedinici volumena. Smanjivanjem tog volumena ka nuli može doći do trenutka gdje se postignuo toliko maleni volumen u kojem nema atoma ni molekule [8]. Kada bi to doista bilo moguće nepostojanje atoma ni molekula u volumenu značila bi nemogućnost definiranja fizikalnih svojstava fluida. Radi toga uvodi se pojam kontinuuma. Kontinuum je matematički model materije prema kojem materija zadržava sva svoja fizikalna svojstva pri smanjivanju volumena do razine točke. Uvođenjem kontinuuma dobiva se idealizirani fluid koji je kontinuirano raspodijeljen po prostoru i upravo zbog toga moguće je definirati fizikalna svojstva fluida, čak i kada volumen teži k nuli. Kada se pojam kontinuuma primjeni na određenu fizikalnu veličinu, na primjer gustoću, u matematičkom obliku to možemo zapisati kao:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (3.1)$$

U izrazu (3.1) definirana je čestica infinitezimalnog volumena  $dV$ , čija je masa jednaka  $dm = \rho dV$ . Prethodno uvedenim pojmom slijedi da će svaka čestica fluida zauzimati jednu točku prostora, te da se u jednoj točki prostora može definirati samo jedna čestica fluida, koja se prema hipotezi kontinuuma smatra zatvorenim termodinamičkim sustavom koji se nalazi u ravnotežnom stanju.

### 3.1 Koncept kontrolnog i materijalnog volumena

Kontrolni volumen definiran je kao volumen u prostoru koji se ne pomiče te kroz njega prolaze čestice fluida kako struji fluid. Suprotno kontrolnom volumenu, materijalni volumen će mijenjati svoj položaj, oblik i veličinu, ali će se uvijek sastojati od jednih te istih čestica. No, primarni interes mehanike fluida je interakcija fluida i stijenke. Ideja je odrediti posljedice djelovanja fluida na stijenku kroz koji određeni fluid struji. Kako materijalni volumen govori o interakciji sa strane volumena fluida, potrebno je definirati kontrolni volumen, čije se granice poklapaju sa stijenkom konstrukcije kroz koju se želi istražiti utjecaj strujanja. Svi osnovni zakoni mehanike fluida izvorno su formulirani za materijalni volumen, te kako bi ih mogli primijeniti na kontrolni volumen potrebno je provesti transformaciju osnovnih zakona pomoću Reynoldsovog transportnog teorema koji glasi:

- a) slučaj kontrolnog volumena KV koji je ograden mirujućom kontrolnom površinom KP

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \phi dV = \int_{V_M} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_M} \phi v_j \cdot n_j dS = \int_{V_{KV}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_{KV}} \phi v_j \cdot n_j dS$$

- b) slučaj gibanja kontrolnog volumena KV čija se granica S giba brzinom  $u_j$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \phi dV = \int_{V_{KV}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_{KV}} \phi (v_j - u_j) \cdot n_j dS$$

### 3.2 Osnovni zakoni mehanike fluida

U osnovne zakone mehanike fluida ubrajamo:

- zakon očuvanja mase,
- zakon očuvanja količine gibanja,
- zakon očuvanja momenta količine gibanja,
- zakon očuvanja energije,
- drugi zakon termodinamike.

Ukoliko se pretpostavi da u fluidu nema momenata (spregova sila) raspodijeljenih po površini materijalnog volumena ili unutar samog volumena, tada se zakon očuvanja momenta količine gibanja svodi na činjenicu simetričnosti tenzora naprezanja  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ . Ako se unaprijed pretpostavi simetričnost tenzora naprezanja, to znači da je jednačba momenta količine gibanja

već zadovoljena te se tu jednadžbu više ne treba uključivati u skup osnovnih diferencijalnih jednadžbi dinamike fluida.

Budući se entropija ne javlja u ostalim zakonima dinamike fluida, jednadžbu drugog zakona termodinamike možemo rješavati nezavisno od ostalih jednadžbi, pa se ona naziva „pasivnom“ jednadžbom. Stoga se drugi zakone termodinamike neće uzimati u skup osnovnih jednadžbi već će ga se primjenjivati samo po potrebi za ispitivanjem fizikalnosti procesa.

U sljedećim poglavljima definirati će se zakoni očuvanja primijenjeni u ovome radu

### 3.2.1 Zakon očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta

Zakon očuvanja mase govori da je brzina promjene mase unutar materijalnog volumena jednaka nuli. U integralnom obliku zakon glasi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho dV = 0 \quad (3.2)$$

Primjenom Reynoldsovog transportnog teorema izraz (3.2) glasiti će:

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_{KV}} \rho v_j \cdot n_j dS = 0$$

Gdje lijevi član u jednadžbi označuje brzinu promjene mase fluida unutar kontrolnog volumena, a desni ukupni maseni protok kroz kontrolnu površinu.

### 3.2.2 Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja govori da je brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka zbroju vanjskih, masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen. U integralnom obliku zakon očuvanja količine gibanja glasi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho v_i dV = \int_{V_M} \rho f_i dV + \int_{S_M} \sigma_i dS = \int_{V_M} \rho f_i dV + \int_{S_M} n_j \sigma_{ij} dS \quad (3.3)$$

Primjenom Reynoldsovog transportnog teorema izraz (3.3) glasiti će:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho v_i dV + \int_{S_{KV}} \rho v_i v_j n_j dS = \int_{V_{KV}} \rho f_i dV + \int_{S_{KV}} \sigma_i dS$$

Gdje prvi član s lijeve strane predstavlja brzinu promjene količine gibanja kontrolnog volumena. Drugi član označava protok količine gibanja kroz kontrolnu površinu. Prvi član s desne strane predstavlja ukupnu masenu silu na kontrolni volumen, a posljednji član ukupnu površinsku silu na kontrolni volumen.

### 3.3 Reynoldsov broj

Jedan od najvažnijih bezdimenzijskih parametara, bilo za slučaj optjecanja ili za slučaj protjecanja fluida je upravo Reynoldsov broj [9]. Reynoldsov broj označuje omjer inercijskih i viskoznih sila i glavni je kriterij prelaska laminarnog u turbulentno strujanje fluida. Laminarno strujanje je uredno strujanje u kojem se čestice fluida gibaju u slojevima te ne dolazi do međusobnog miješanja strujnica fluida. Laminarno strujanje javlja se pri niskim vrijednostima Reynoldsova broja gdje su viskozne sile dominantne naspram inercijskih. Naspram laminarnog, turbulentno strujanje javlja se pri visokim vrijednostima Reynoldsova broja kada su inercijske sile dominantne nad viskoznim. Turbulentno strujanje karakterizira kaotično gibanje čestica fluida u kojem sve promjenjive veličine pokazuju slučajne promjene po vremenskoj i prostornim koordinatama.

Reynoldsov broj računa se prema izrazu:

$$Re = \frac{\rho v x}{\mu} = \frac{\text{inercijske sile}}{\text{viskozne sile}} \quad (3.4)$$

Gdje  $\rho$  označava gustoću fluida,  $v$  brzinu strujanja,  $x$  karakterističnu duljinu te  $\mu$  dinamičku viskoznost. Budući Reynoldsov broj definira vrstu strujanja, definiran je kritičan Reynoldsov broj  $Re_{kr}$  kao vrijednost kod koje se pojavljuje prva nestabilnost strujanja. Definiraju se dvije vrijednosti kritičnog Reynoldsovog broja: donja i gornja vrijednost. Donja vrijednost je ona ispod koje nije zabilježeno turbulentno strujanje, a gornja vrijednost je ona iznad koje nije zabilježeno laminarno strujanje. Naime, vrijednost  $Re_{kr}$  nije čvrsta vrijednost budući ovisi o mnogo parametara. Za cijev, na primjer,  $Re_{kr}$  zavisi o: obliku ulaza, hrapavosti stijenke, vibracijama u cijevi, čistoći fluida i mnogim drugim. Za okrugle cijevi s oštrim ulaznim bridom donja vrijednost kritičnog Reynoldsovog broja iznosi:  $Re_{kr} = 2300$ , a gornja:  $Re_{kr} = 40000$ .

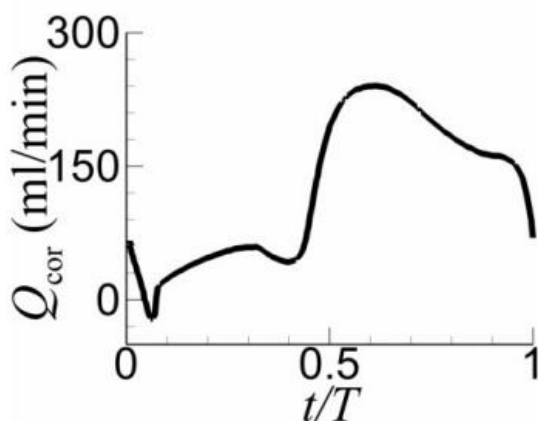
### 3.4 Model strujanja krvi

U ovom poglavlju prikazati će se implementacija mehanike fluida na problem strujanja krvi kroz koronarne arterije.

Pretpostavke prisutne prilikom modeliranja strujanja su sljedeće:

1. Tok krvi je pulsirajući stoga brzina i protok nisu konstantni tijekom jednog otkucaja srca
2. Arterije se smatraju krutim cijevima koje se postupno sužavaju
3. Geometrija koronarnih arterija je složena te sadrži suženja, zaobljenja i grananja
4. Za koronarne arterije krv se smatra Newtonovskim fluidom stoga vrijedi Newtonov zakon viskoznosti
5. Gustoća krvi je konstantna
6. Strujanje je nestlačivo, nestacionarno i izotermičko

Pulsirajuće strujanje kroz krvožilni sustav sprječava mogućnost razmatranja strujanja kroz koronarne arterije kao stacionarnog. Promjena protoka s vremenom izrazito je nelinearna stoga se mora uzeti u obzir prilikom modeliranja. Nelinearnost protoka vidljiva je u slici 9.



**Slika 9 Volumni protok koronarnih arterija u trajanju od jednog pulsa**

Kako protok i brzina nisu konstantni te se mijenjaju u vremenu, tako će i Reynoldsov broj također biti funkcija vremena stoga sam problem može prelaziti iz jednog oblika strujanja u drugi. No kako na ulazu koronarne arterije, ekvivalentnog promjera  $D = 3.95 \text{ mm}$ , maksimalna brzina tijekom vrhunca sistole iznosi  $v_{max} = 0.715 \text{ m/s}$  za Reynoldsov broj može se pisati sljedeće:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{1060 \cdot 0.715 \cdot 0.00395}{4.24 \cdot 10^{-3}} = 706.1,$$

što je puno manje od kritične vrijednosti od  $Re_{kr} = 2300$  iznad koje strujanje u cijevi više nije laminarno, stoga se strujanje za provedbu ovog rada smatra laminarnim.

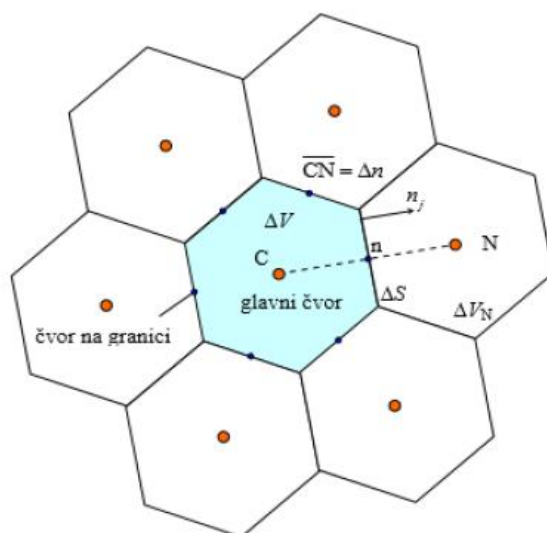
## 4 METODA KONAČNIH VOLUMENA

Metoda konačnih volumena je integralna metoda koja se temelji na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednadžbi po konačnim volumenima na koje je podijeljeno područje proračuna. Metoda konačnih volumena je najzastupljenija numerička metoda u problemima strujanja fluida. Prema toj metodi, domena strujanja dijeli se na velik broj konačnih volumena u kojima se računaju vrijednosti polja fizikalnih veličina. Konačni volumeni se ne smiju preklapati, te moraju u potpunosti ispunjavati domenu. Upravo kao metoda konačnih elemenata, metoda konačnih volumena temelji se na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednadžbi

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{\text{Član lokalne promjene}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j}}_{\text{Konvekcijski član}} - \underbrace{\Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{Difuzijski član}} = \underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)}_{J_j = \text{vektor fluksa}} = \underbrace{S_\varphi}_{\text{Izvorski član}} \quad (4.1)$$

po konačnim volumenima na koje je podijeljeno područje proračuna. Integral jednadžbe (4.1) po konačnom volumenu prikazanom na slici 10. glasi:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV}_{\text{Brzina promjene sadržaja } \varphi \text{ u } \Delta V} = \underbrace{- \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS}_{\text{Konvekcijski i difuzijski protok } \varphi \text{ kroz granice}} + \underbrace{\int_{\Delta V} S_\varphi dV}_{\text{Izvor } \varphi} \quad (4.2)$$



Slika 10 Dio diskretiziranog područja proračuna

U izrazu (4.1) javljaju se volumenski i površinski integrali koji se aproksimiraju sukladno integralnom teoremu o srednjoj vrijednosti, uz pretpostavku nestlačivosti fluida ( $\rho = \text{konst.}$ ) dobije se izraz:

$$\int_{\Delta V} \varphi dV = \bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V \quad (4.3)$$

Pri čemu je  $\bar{\varphi}_{\Delta V}$  srednja vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  unutar konačnog volumena. Ukoliko se pretpostavi dovoljno mali konačni volumen, onda se promjena veličine  $\varphi$  unutar konačnog volumena može aproksimirati linearnom raspodjelom, odnosno razvojem u Taylorov red oko vrijednosti u čvoru C, u obliku:

$$\varphi(x_j) = \varphi_C + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_C (x_j - x_j^C) \quad (4.4)$$

Gdje je  $x_j$  vektor položaja bilo koje točke unutar konačnog volumena.

Uvrstimo li izraz (4.4) u jednadžbu (4.3) dobije se:

$$\bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V = \left[ \varphi_C + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_C (x_j^T - x_j^C) \right] \Delta V \quad (4.5)$$

iz jednadžbe je vidljivo, ako je vektor položaja težišta  $x_j^T$  jednak vektoru položaja centralnog čvora C, veličinu  $\varphi$  unutar kontrolnog volumena je moguće aproksimirati na način:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV \approx \rho \frac{d\varphi_C}{dt} \Delta V \quad (4.6)$$

time je aproksimiran član lokalne promjene, te izgleda upravo kako je gore navedeno.

Slično vrijedi i za integral izvorskog člana koji se aproksimira na sljedeći način:

$$\int S_\varphi dV \approx S_C \Delta V \quad (4.7)$$

Gdje je  $S_C$  vrijednost izvorskog člana u čvoru C kao aproksimacija srednje vrijednosti izvorskog člana unutar volumena  $\Delta V$ .

Potrebno je još aproksimirati površinske integrale koji u jednadžbi (4.2) označuju protok fizikalnog svojstva uslijed konvekcije i difuzije kroz površinu konačnog volumena. Vektor

konvekcijskog toka je definiran kao  $\rho v_j \varphi$ , a vektor difuzijskog toka je  $-\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ . Ova dva vektora nisu kolinearna, a njihov zbroj čini ukupni vektor  $J_j$ . Protoku fizikalnog svojstva doprinosi samo normalna komponenta vektora toka  $J_j n_j$ .

$$\Delta J_n = \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \left[ \rho (\overline{v_n \varphi})_{\Delta S} - \Gamma \left( \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \right)_{\Delta S} \right] \Delta S \quad (4.8)$$

Član  $(\overline{v_n \varphi})_{\Delta S}$  se može raspisati kao umnožak srednjih vrijednosti normalne komponente brzine i vrijednosti u težištu n površine  $\Delta S$ . Na isti način se srednja vrijednost normalne derivacije polja  $\varphi$  na površini  $\Delta S$  aproksimira vrijednošću normalne derivacije polja  $\varphi$  u točki n  $\left( \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \right)_{\Delta S} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_n$ . Nakon uvođenja bezdimenzijske koordinate  $\tilde{n} = n/\Delta n$ , gdje je  $\Delta n$  udaljenost čvorova C i N prikazana na Slici 8, može se zapisati:

$$\Delta J_n = \underbrace{\rho v_{n,n} \Delta S}_{F_n} \varphi_n - \underbrace{\frac{\Gamma \Delta S}{\Delta n}}_{D_n} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n \quad (4.9)$$

Gdje  $F_n = \rho v_{n,n} \Delta S$  predstavlja jačinu konvekcije, tj. maseni protok fluida kroz površinu  $\Delta S$ , a  $D_n = \Gamma \Delta S / \Delta n$  jačinu difuzije, odnosno difuzijsku vodljivost.

Uvrštavanjem izraza (4.3)(4.7) i (4.10) u jednadžbu (4.2) slijedi:

$$\rho \frac{d\varphi_c}{dt} \Delta V = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left( F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n \right)^{nb} + S_c \Delta V \quad (4.10)$$

Gdje suma po nb označuje zbrajanje po svih  $N_{nb}$  stranica konačnog volumena. U numeričkom postupku računaju se i pamte samo čvorne vrijednosti polja  $\varphi$  i to u glavnim čvorovima, stoga je potrebno vrijednosti na stranicama aproksimirati pomoću vrijednosti u glavnim čvorovima. Taj se postupak naziva shemom diferencije ili numeričkom shemom. Primjenom sheme diferencija koje koriste samo vrijednosti u glavnim čvorovima za aproksimaciju, dobije se izraz:

$$\Delta J_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = F_n \varphi_c + a_n (\varphi_c - \varphi_n) \quad (4.11)$$

Gdje je  $a_n$  koeficijent zavisao o korištenoj shemi diferencije. Naknadnim sređivanjem jednadžbi, linearizacijom, te primjenom određene metode za vremensku diskretizaciju izraz se svede na:

$$a_c \varphi_c = \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + b \quad (4.12)$$

Gornja jednađba je linearna algebarska jednađba dobivena diskretizacijom integrala po konačnom volumenu s centralnim čvorom C. Ovaj postupak je proveden za jedan konačni volumen. Ako bi se postupak ponovio za sve konačne volumene nastao bi sustav linearnih algebarskih jednađbi u kojem su nepoznanice čvorne vrijednosti polja  $\varphi$ . Sustav će se sastojati od broja jednađbi koji je jednak broju konačnih volumena, odnosno broju nepoznatih čvornih vrijednosti polja  $\varphi$ , taj se sustav može simbolički zapisati u matričnom obliku:

$$[A_{ji}][\varphi_i] = [b_j] \quad (4.13)$$

gdje  $[A_{ji}]$  označuje matricu sustava u kojoj retke čine koeficijenti  $a_c$  i  $a_N^{nb}$  gdje su koeficijenti  $a_c$  na glavnoj dijagonali,  $[\varphi_i]$  označuje vektor nepoznanica čvornih vrijednosti polja  $\varphi$ , a  $[b_j]$  označuje vektor desne strane u kojeg ulaze sve poznate veličine. Polje  $\varphi$  mora zadovoljavati rubne uvjete no ako je izvorski član bio nelinearna funkcija od  $\varphi$ , tada će numerički postupak nužno biti iterativnog karaktera.

## 5 IZRADA GEOMETRIJE

Konačnu geometriju, korištenu kao temelj za izradu proračunske mreže, nije moguće dobiti izravno iz nalaza dobivenih pregledom CT uređajem. Geometrija je dobivena tek nakon obrade u više različitih programskih paketa. U nastavku slijedi pregled korištenih paketa te njihova funkcija i postupak izrade modela pomoću istih. Sve korištene pakete moguće je legalno i besplatno pronaći na internetu te ih je moguće koristiti na prosječnom računalu uz najčešće operativne sustave.

Postupak izrade odvija se u četiri osnovna koraka

1. Izrada geometrije koronarnih arterija u paketu *3DSlicer*
2. Obrada dobivenog modela u paketu *Blender*
3. Obrada rubnih ploha i povezivanje u jedinstvenu geometriju
4. Izrada proračunske mreže u programu *cfMesh*

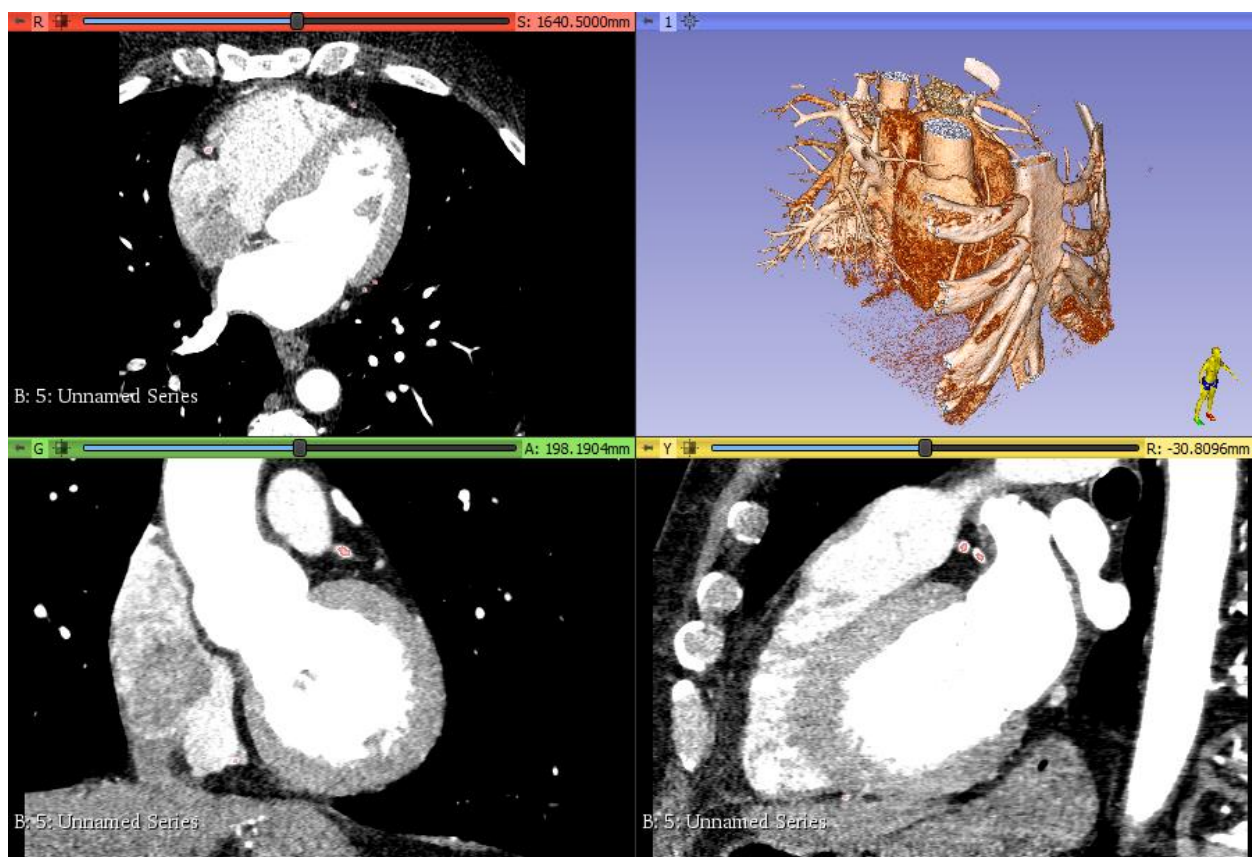
Računalni program pomoću kojega je iz CT koronarografskih snimaka dobivena trodimenzionalna geometriju naziva se *3DSlicer*. *3DSlicer* je besplatni računalni program otvorenog koda (eng. free open-source). Stvoren je upravo kako bi omogućio izradu trodimenzionalnih prikaza snimaka izrađenih tehnologijom radioloških snimanja (CT, MRI, ...). Vrlo je jednostavno učitati dokumente u većini formata korištenih u medicinskoj praksi, a također omogućuje i zapis u stereolitografskom (STL ili .stl) formatu, koji se koristi i u inženjerskoj praksi. Instalacije su dostupne za Windows, macOS i Linux i mogu se preuzeti sa službene stranice *3DSlicera*.

Format datoteka CT koronarografskih snimaka naziva se DICOM (engl. *Digital Imaging and Communications in Medicine*). DICOM je format koji se sastoji od velike količine 2D snimaka, gdje svaka snimka predstavlja dio geometrije.

## 5.1 Izrada geometrije u programu 3DSlicer

3DSlicer sučelje sastoji se od 4 zaslona, gdje tri prikazuju CT snimak u tri ravnine snimanja te četvrti u kojem se iz CT snimaka generira 3D volumen promatranog dijela tijela.

Prvi formirani volumen prikazuje sve vrste tkiva i čestice koje se nalaze unutar CT snimaka stoga je teško odrediti poziciju aorte i koronarnih arterija.



**Slika 11 Prvi prikaz geometrije iz CT-snimaka**

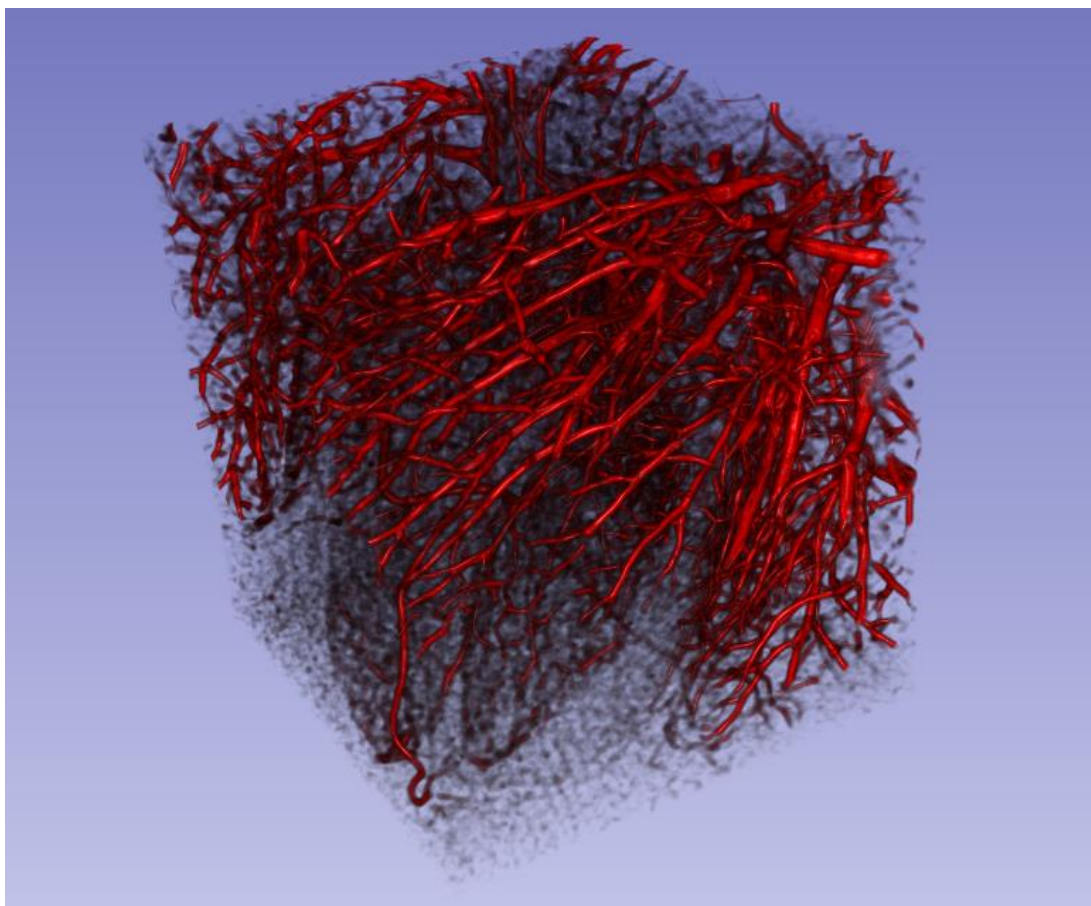
Budući je za potrebe ovog rada dovoljno prikazati koronarne arterije te mali dio aorte (uzlaznu aortu), korišteni su posebni alati unutar programa kako bi se odstranilo nepotrebno tkivo.

Korišten je specifičan set alata unutar 3DSlicera, "Vascular Modeling Toolkit (VMTK)" [11]. Dodatak VMTK sadrži skup modula i alata za 3D rekonstrukciju, geometrijsku analizu i generiranje mreže za krvne žile.

### 5.1.1 Izrada koronarnih arterija

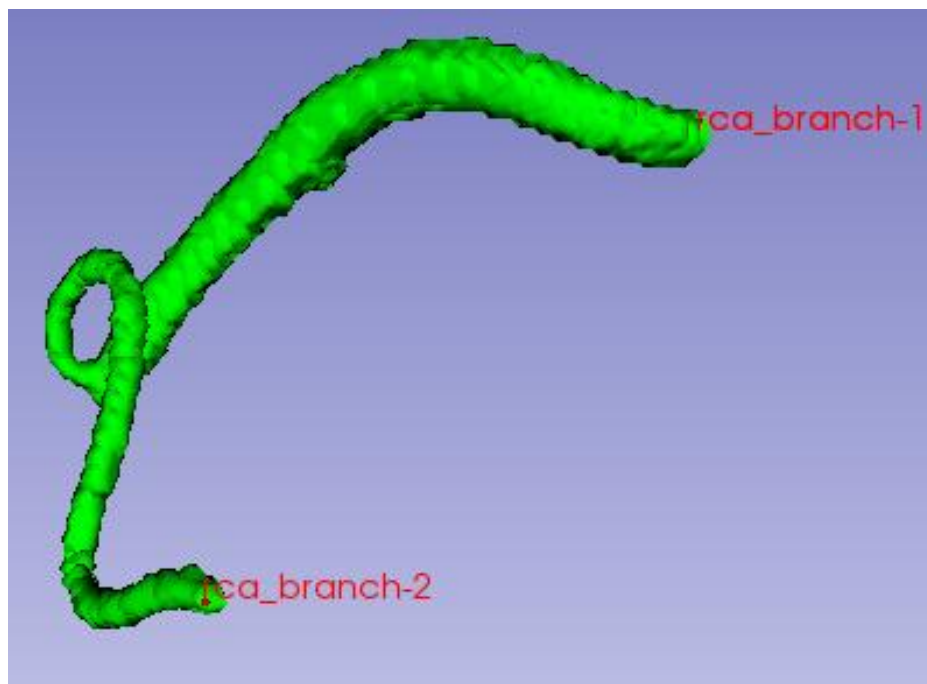
Za izradu koronarnih arterija korištena su dva modula unutar VMTK skupine. "Vesselness Filtering" i "Level Set Segmentation".

"Vesselness Filtering" vrši obradu slike, na način da povećava svjetlinu svih cilindričnih struktura te potiskuje, odnosno uklanja sve ostale oblike poput pločica ili čvorova. Modul je posebno koristan za prethodnu obradu podataka CT snimaka kako bi se olakšala segmentacija arterija. Rezultat alata prikazan je u slici 12.



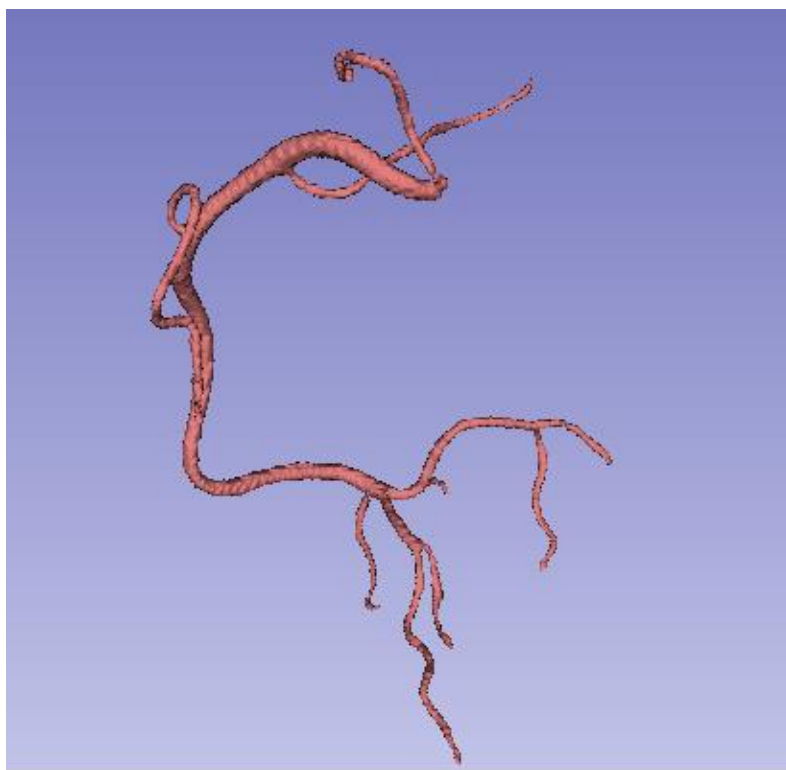
**Slika 12 Vizualizacija cilindričnih struktura u području srca**

Ekstrakcija koronarnih arterija izvedena je ručno, modulom "Level Set Segmentation". Slično, modul segmentira cjevastu strukturu između dviju zadanih točaka, stoga je bilo potrebno generirati svaku granu koronarne arterije zasebno.



**Slika 13** Generirana grana arterije između dviju točaka

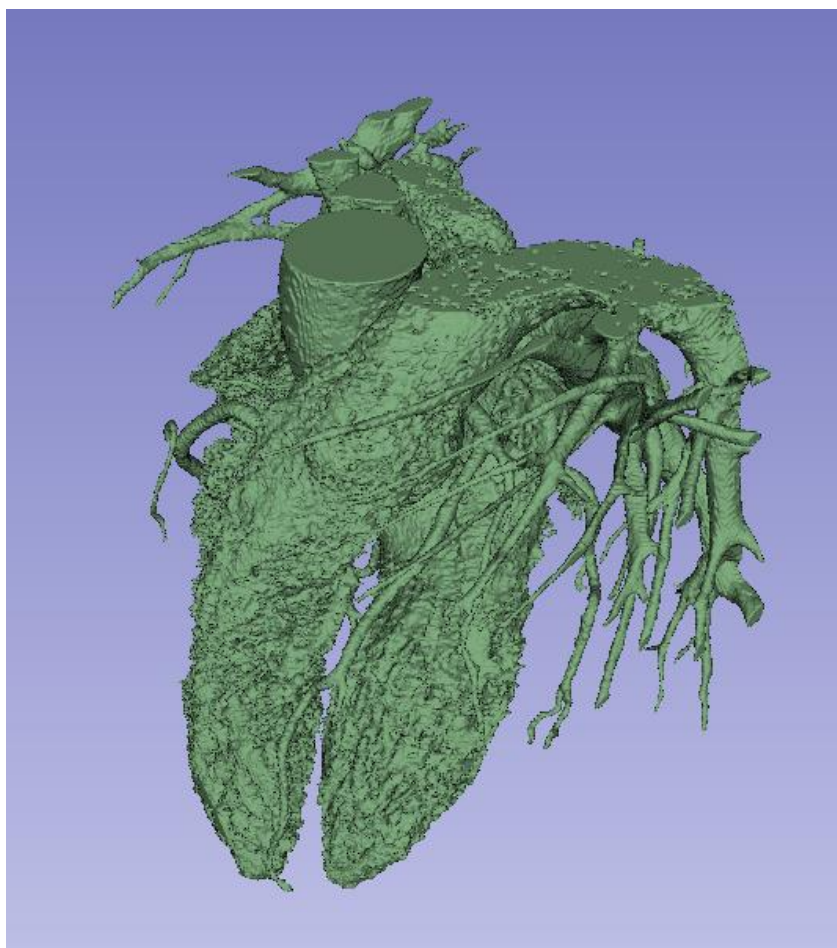
Ponavljajući proces sa svakom granom koronarne arterije dobiva se konačan volumen prikazan na slici 14. Postupak ekstrakcije jednak je za desnu i lijevu koronarnu arteriju.



**Slika 14** Konačan volumen desne koronarne arterije

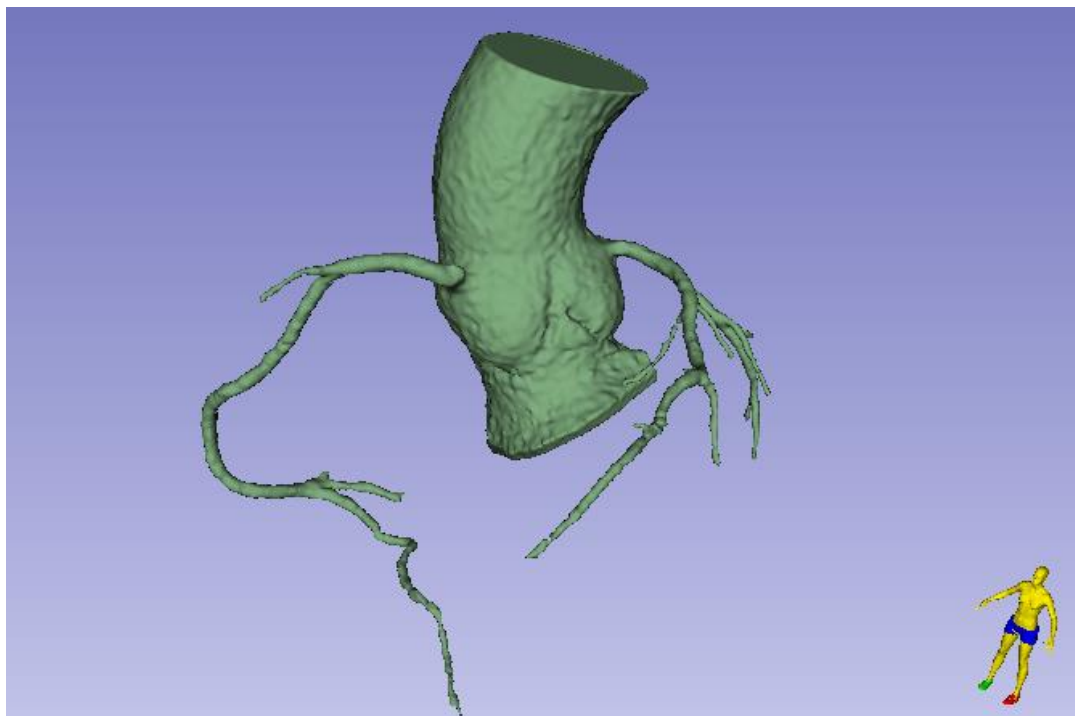
### 5.1.2 Ekstrakcija aorte

Nakon uspješne ekstrakcije arterija, slijedi ekstrakcija uzlaznog dijela aorte. Za ekstrakciju korišten je modul "Segment editor" i nekoliko efekata unutar modula. Za prvi trodimenzionalni prikaz aorte, efektom "Threshold", generiran je volumen iz CT snimaka na osnovu određenog raspona intenziteta snimaka.



**Slika 15 Volumen aorte dobiven putem efekta "Threshold"**

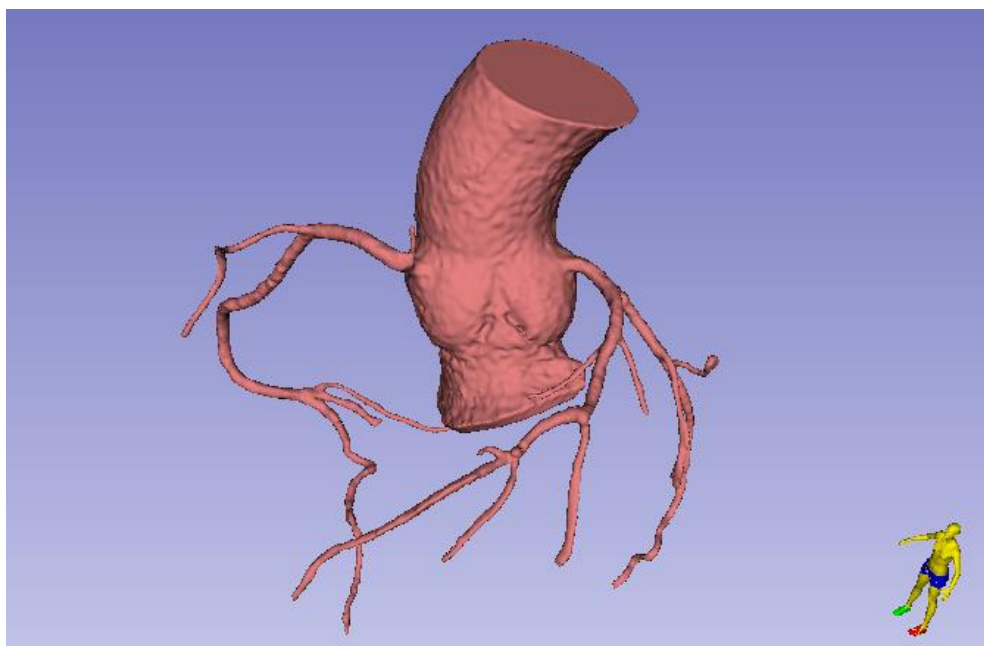
Moguće je uočiti da je ovako postavljenim rasponom, uz aortu, generiran popriličan broj čestica slijepljenih uz željenu geometriju. Povećanjem raspona moguće je dobiti kvalitetniju sliku aorte uz povećanu količinu okolnih čestica koje je zatim potrebno naknadno ukloniti. Smanjenjem raspona umanjila bi se količina generiranih čestica u okolini aorte, ali postoji mogućnost generiranja loše kvalitete volumena aorte. Korištenjem dodatnih efekata uklonjeno je lokalno tkivo i nepotrebne čestice te je konačni volumen aorte prikazan na slici 16.



**Slika 16 Konačna geometrija aorte**

Vidljivo je sa slike 16 da je uz pomoć efekata kojim smo izdvojili aortu moguće dobiti i koronarne arterije, ali sa znatno manjom kvalitetom i puno manje prikazanih grana nego prije spomenutim metodama ekstrakcije. Posljednji korak u izradi jest spajanje generirane aorte i koronarnih arterija. Na slici 17 prikazana je konačna geometrija generirana i uređena u programu *3DSlicer*.

Daljnja profinjenja na geometriji nisu se radila u programu *3DSlicer* stoga je geometriju potrebno spremići u formatu pogodnom za daljnji rad. Kako smo već prije spomenuli *3DSlicer* ima mogućnosti spremanja u .STL formatu što je upravo ono što nam treba za mogućnost formiranja prostorne domene strujanja.

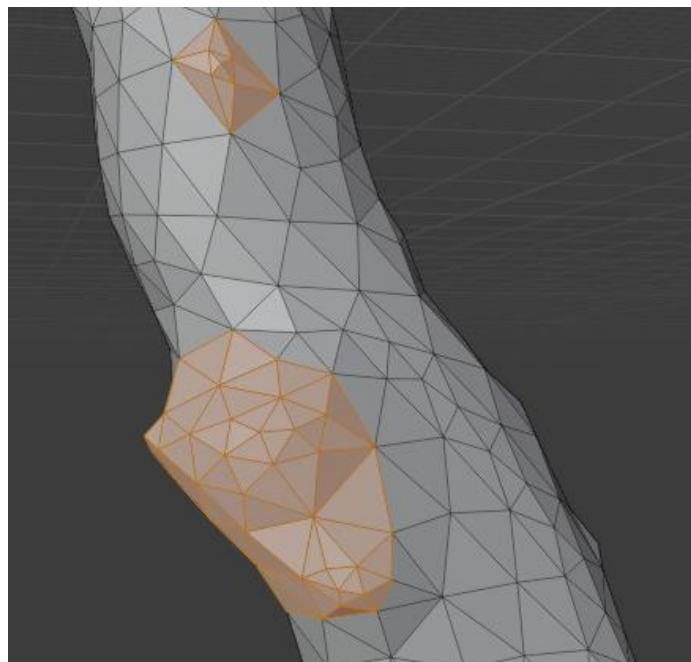


**Slika 17** Konačna geometrija aorte i koronarnih arterija

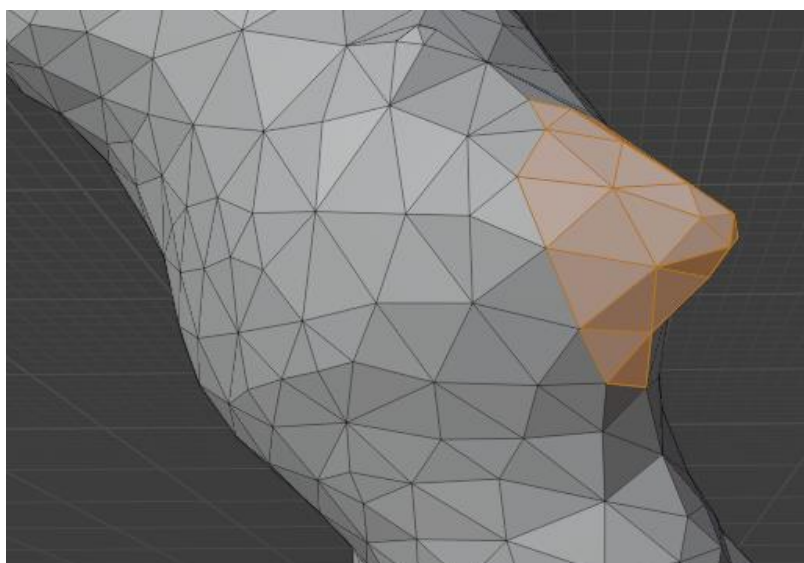
## 5.2 Obrada dobivenog modela u paketu Blender

Sljedeći korak u pripremi geometrije jest profinjavanje površina i konačna priprema za izradu prostorne domene strujanja. Zbog nesavršenosti na modelu napravljenom uz pomoć programskog paketa *3DSlicer*, potrebno je napraviti određene dorade. U tu svrhu korišten je programski paket za manipulaciju i obradu 3D modela, vizualnih animacija i videa pod nazivom *Blender*. Razlog korištenja programa *Blender* jest mnogo bolje funkcioniranje sa datotekama u STL formatu te lakša manipulacija naspram regularnih CAD programa.

STL file koji smo dobili iz programa *3DSlicer* zapravo predstavlja površinsku mrežu koronarnih arterija te detaljnijim pregledom vidljivo je da geometrija i dalje nije spremna za izradu prostorne domene strujanja jer se na površini arterija i aorte mogu pronaći raznovrsne nepravilnosti i deformacije u obliku rupa, ispupčenja, kvrga i šiljaka koji mogu predstavljati problem prilikom izrade proračunske mreže. Neke od deformacija prikazane su na slikama 18 i 19.

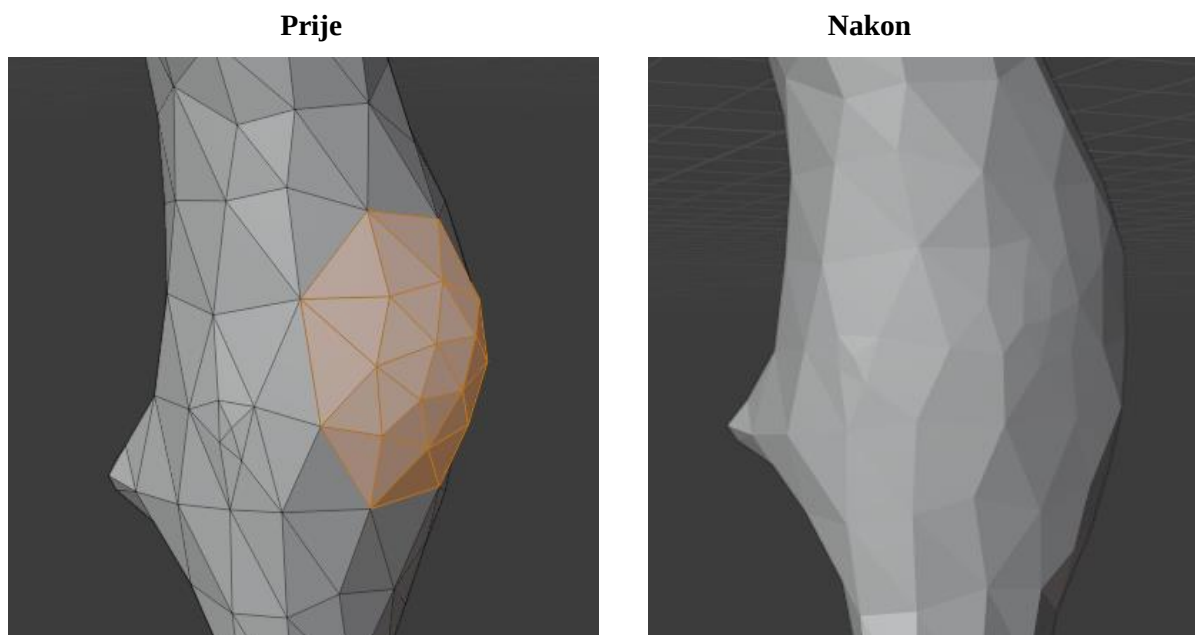


**Slika 18 Problem ispupčenja na zidovima arterija**



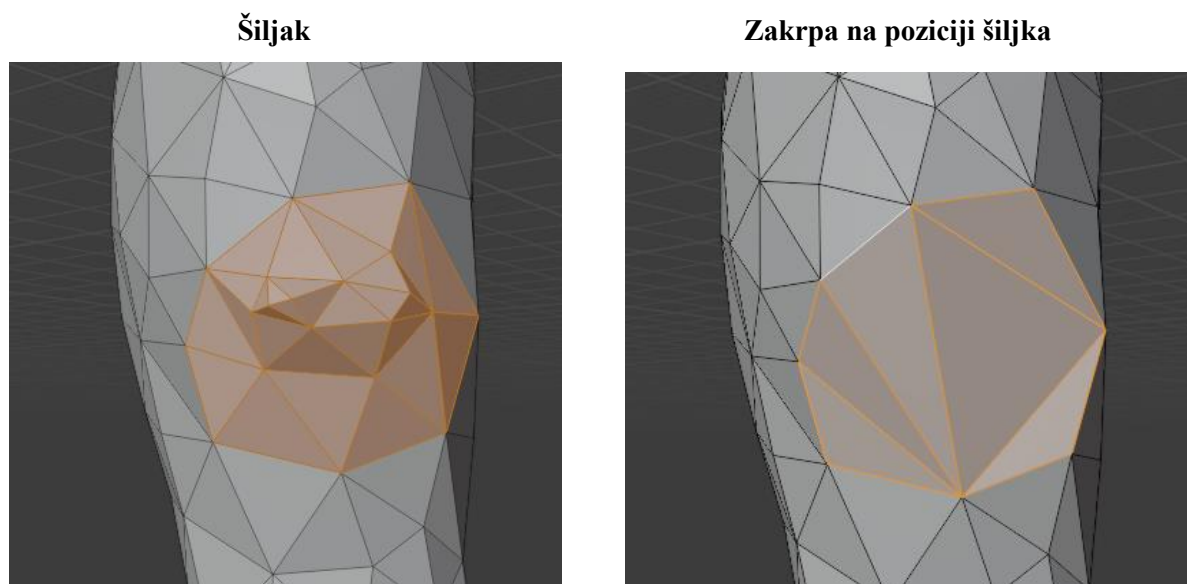
**Slika 19 Problem šiljaka na zidovima arterija**

Za početak potrebno, je sva blaga zadebljanja koja se nalaze na površini koronarnih arterija i aorte ispraviti, odnosno što bolje zagladiti lokalnim profinjavanjem površine. Lokalnim profinjenjem moguće je ukloniti samo zaobljene deformacije dok je postupak odstranjivanja šiljaka i rupa ponešto drugačiji.



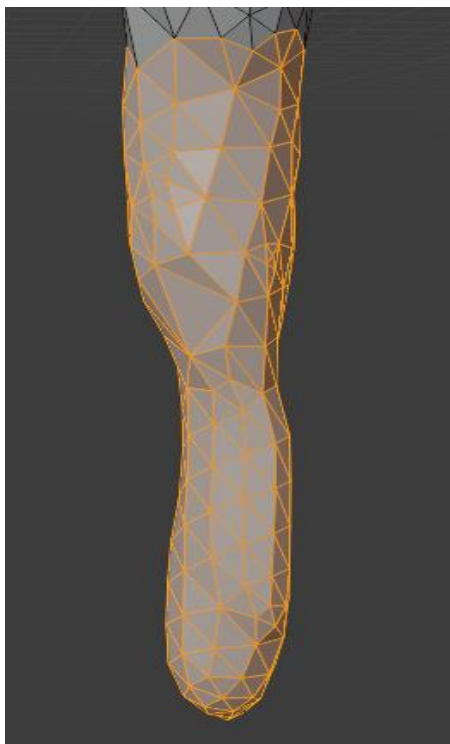
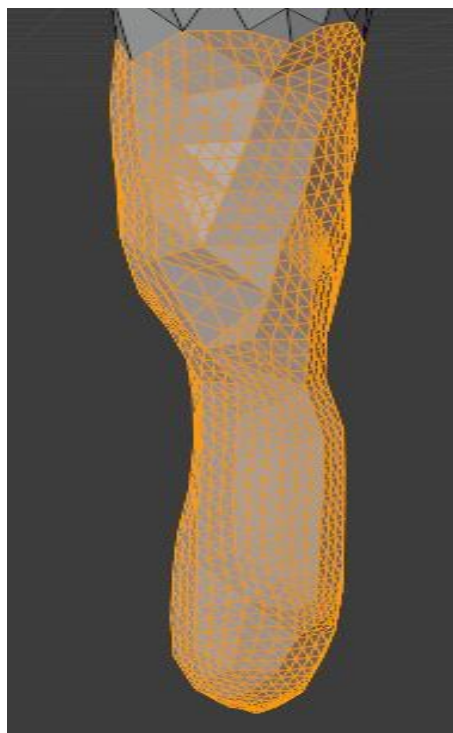
**Slika 20 Prikaz geometrije prije i nakon lokalnog profinjenja**

Za uklanjanje oštrijih izbočenja, potrebno je odstraniti onaj dio površine koji odstupa od prave geometrije, te na tom mjestu zakrpati geometriju i zatim ju naknadno profiniti prethodno navedenim postupkom.



**Slika 21 Postupak odstranjivanja loše geometrije**

Budući da je rezolucija površinske mreže koja je izvedena iz *3DSlicer*-a limitirana rezolucijom CT snimke, poželjno je napraviti globalno profinjenje. Prvi korak u obradi geometrije bio je povećanje rezolucije površinske mreže kako bi se osigurala veća sloboda profinjavanja na osjetljivim područjima.

**Početna rezolucija****Povećana rezolucija****Slika 22 Prikaz površinske mreže prije i nakon povećanja rezolucije****Slika 23 Prikaz geometrije prije i nakon globalnog profinjenja**

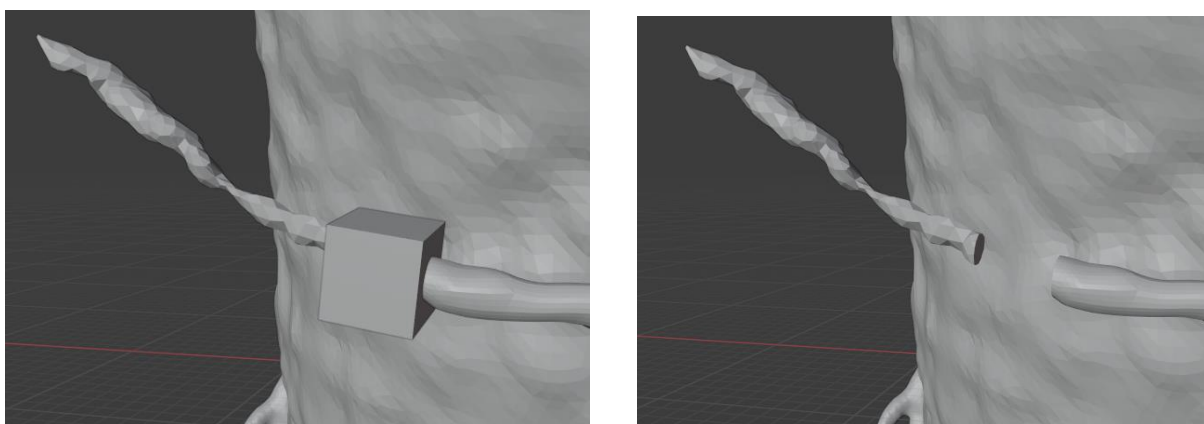
Doduše, globalno profinjenje treba činiti s oprezom iz razloga što se tim postupkom mijenja volumen geometrije, stoga ukoliko kvaliteta površine grana arterije nije zadovoljena potrebno je vratiti se na lokalno profinjenje kako se ne bi pretjeralo u izmjeni cijele geometrije.

### 5.2.1 Priprema rubnih ploha

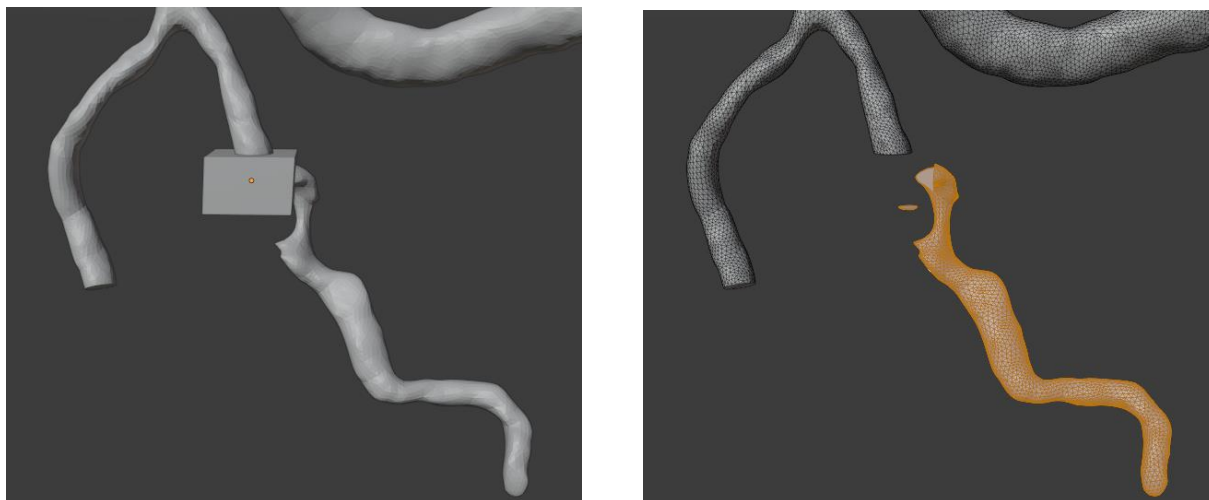
Nakon što je kvaliteta površinske mreže zadovoljavajuća, slijedi odstranjivanje nepravilnih vrhova arterija te zamjena ravnim ploham kako bi se omogućilo postavljanje odgovarajućih rubnih uvjeta.

Prilikom odstranjivanja treba uzeti u obzir sljedeće čimbenike:

- Kako je ideja postizanje što kvalitetnije mreže, svi dijelovi za koje se smatra da će generirati mrežu niske kvalitete se u ovom trenutku odstranjuju.
- Kod odstranjivanja vrhova cilj je odstraniti što je manje arterije moguće kako bi konačna geometrija predstavljala što vjerniji prikaz realne geometrije.
- Cilj je da rezovi budu okomiti na centralnu liniju arterija, što će naknadno reducirati neortogonalnost u računalnoj mreži.

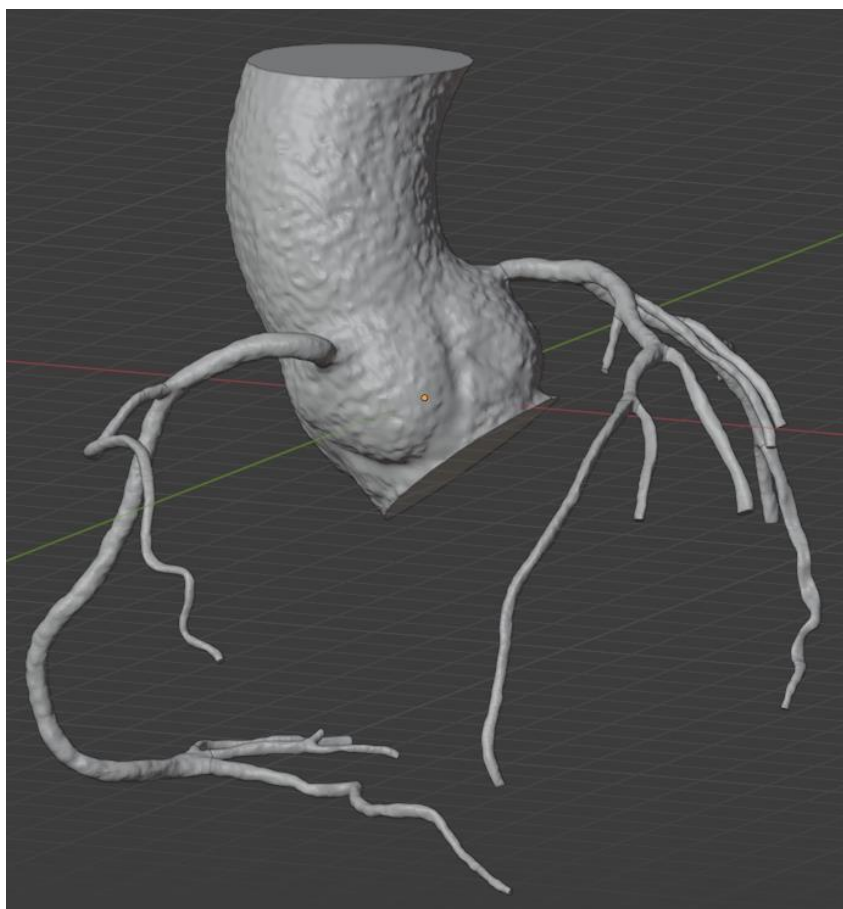


Slika 24 Odstranjivanje kraja arterije radi niske rezolucije

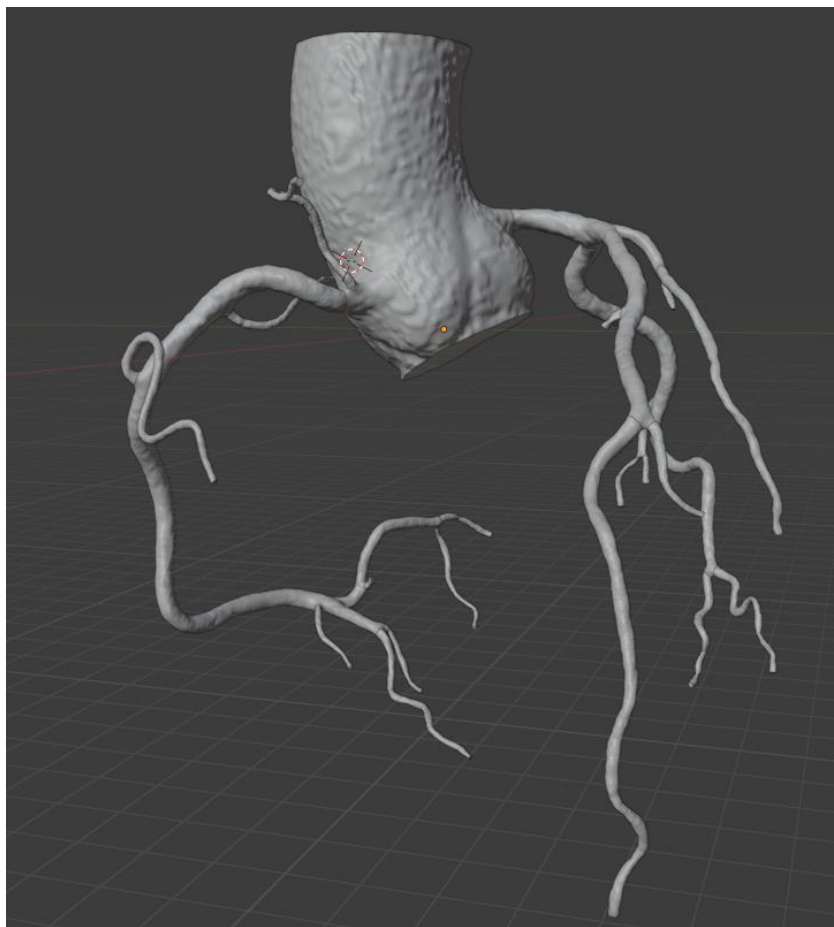


**Slika 25** Odstranjivanje kraja arterije radi deformirane površine

Nakon pripreme rubnih ploha geometrija je spremna za izradu proračunske mreže. Prikaz finalne geometrije prikazan je na slici 26 i slici 27.



**Slika 26** Geometrija prvog pacijenta



**Slika 27 Geometrija drugog pacijenta**

Geometrija je izvezena iz programa Blender u nekoliko STL datoteka kako bi se prilikom izrade mreže omogućila veća kontrola na pojedinačnim površinama, te radi prepoznavanja različitih rubnih ploha kako bi na njima bilo moguće postavljanje rubnih uvjeta.

Za potrebe izrade mreže unutar *cfMesh* programskog paketa, razdijeljene rubne površine su kasnije ponovno povezane i spremljene u FMS format, budući je to poželjan format za izradu mreže unutar *cfMesh*-a.

## 6 NUMERIČKA SIMULACIJA

### 6.1 Izrada mreže konačnih volumena

Diskretizacija područja proračuna za ovaj rad napravljena je uz pomoć prethodno spomenutog programa *cfMesh*. *cfMesh* je program za automatsku izradu mreže koji je dostupan unutar novijih *OpenFOAM* paketa. Program omogućuje automatsko generiranje nestrukturiranih mreža određene kompleksnosti. Kako su rubne plohe unaprijed pripremljene unutar programa *Blender*, preostalo je postaviti parametre prostorne diskretizacije unutar datoteke *meshDict*. U datoteci *meshDict* definirane su željene veličine konačnih volumena u području geometrijskog modela te posebni zahtjevi u blizini pojedinih granica.

Za svaku geometriju uspješno je generirana po jedna nestrukturirana, hibridna mreža sa približno 3 milijuna konačnih volumena. Detalji pojedinih mreža prikazani su u Tablici 1 i Tablici 2.

Konačne mreže zadovoljavaju kriterije koje je potrebno zadovoljiti prilikom ispitivanja kvalitete mreže kao što su uvjeti ortogonalnosti, uniformnosti i omjer veličina kontrolnih volumena.

**Tablica 1 Podaci proračunske mreže prvog pacijenta**

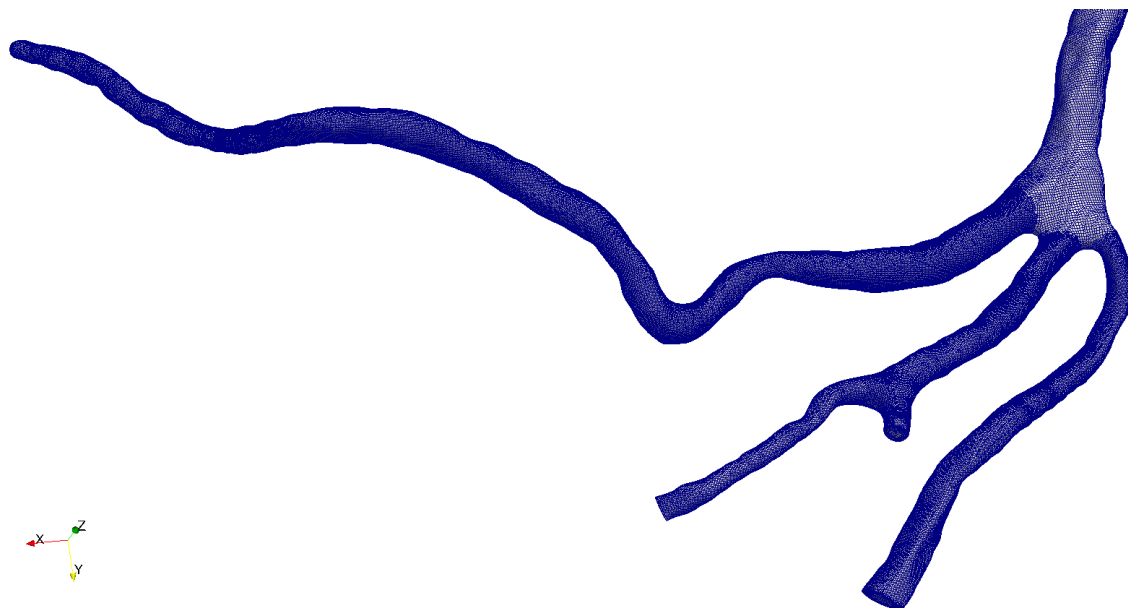
| OBLIK KONTROLNIH VOLUMENA | BROJ KONTROLNIH VOLUMENA |
|---------------------------|--------------------------|
| <b>heksaedar</b>          | 3097765                  |
| <b>prizma</b>             | 8232                     |
| <b>piramida</b>           | 7209                     |
| <b>tetraedar</b>          | 7110                     |
| <b>poliedar</b>           | 104650                   |
| <b>klin</b>               | 0                        |
| <b>UKUPNO</b>             | 3224966                  |
| UKUPNI BROJ TOČAKA        | 3792704                  |
| UKUPNI BROJ PLOHA         | 10239121                 |
| BROJ UNUTARNJIH PLOHA     | 9527058                  |

Tablica 2 Podaci proračunske mreže drugog pacijenta

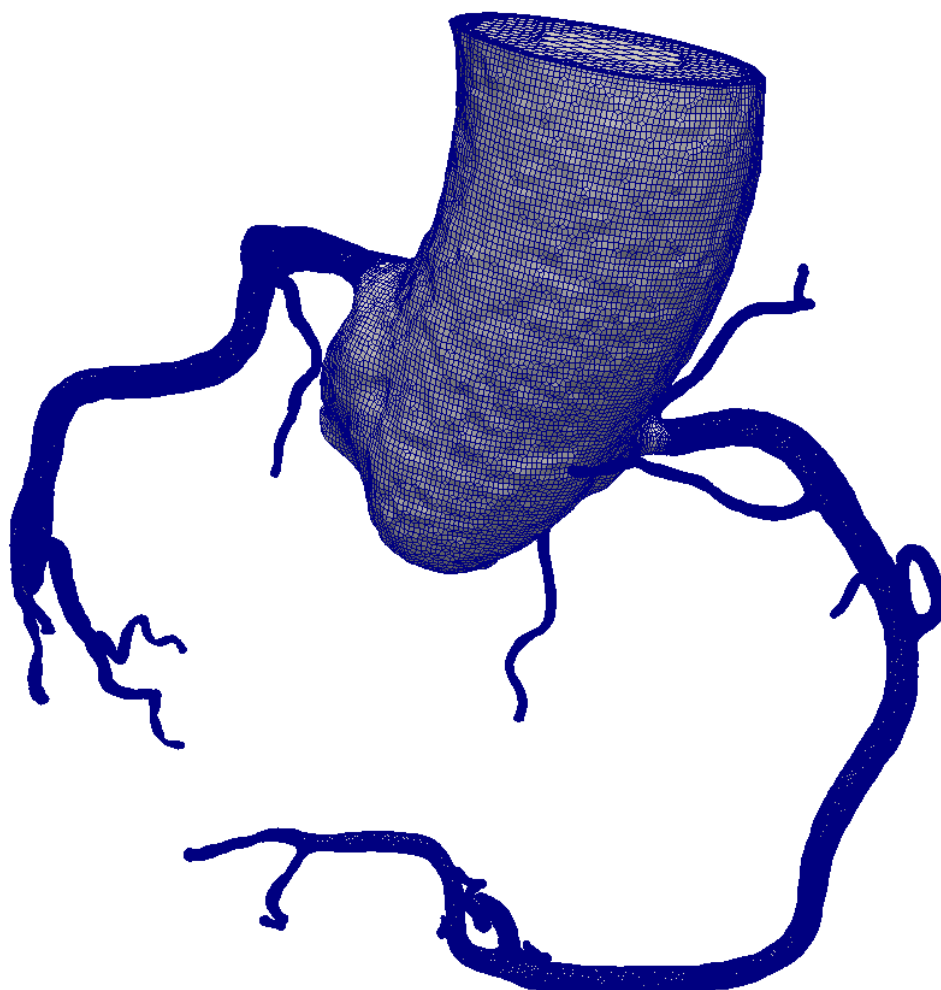
| OBLIK KONTROLNIH VOLUMENA | BROJ KONTROLNIH VOLUMENA |
|---------------------------|--------------------------|
| <b>heksaedar</b>          | 2587440                  |
| <b>prizma</b>             | 9219                     |
| <b>piramida</b>           | 8019                     |
| <b>tetraedar</b>          | 8489                     |
| <b>poliedar</b>           | 75651                    |
| <b>klin</b>               | 0                        |
| <b>UKUPNO</b>             | 2688818                  |
| UKUPNI BROJ TOČAKA        | 3792704                  |
| UKUPNI BROJ PLOHA         | 10239121                 |
| BROJ UNUTARNJIH PLOHA     | 9527058                  |



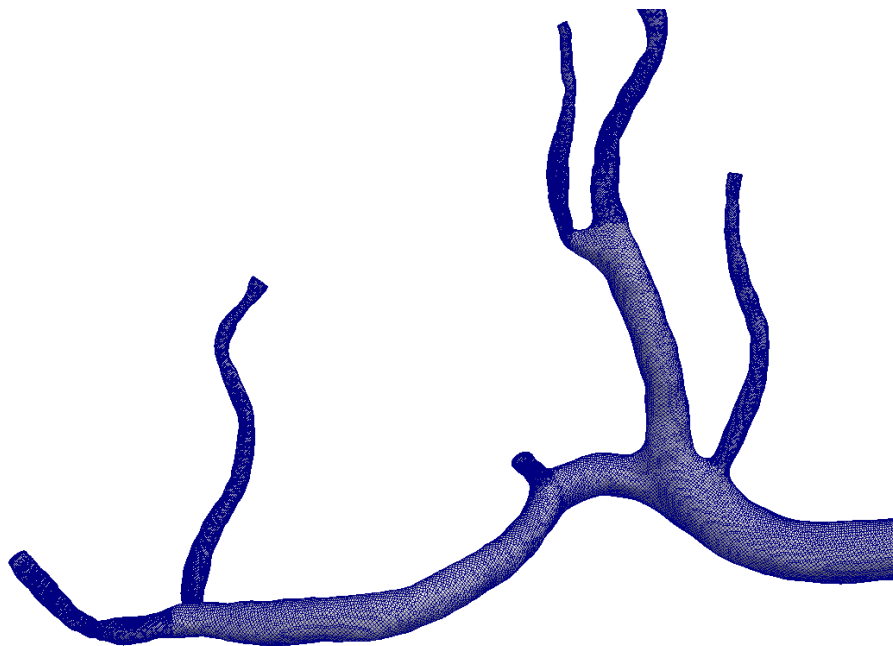
Slika 28 Mreža konačnih volumena pacijenta 1



**Slika 29** Profinjenje mreže na izdancima arterija pacijenta 1



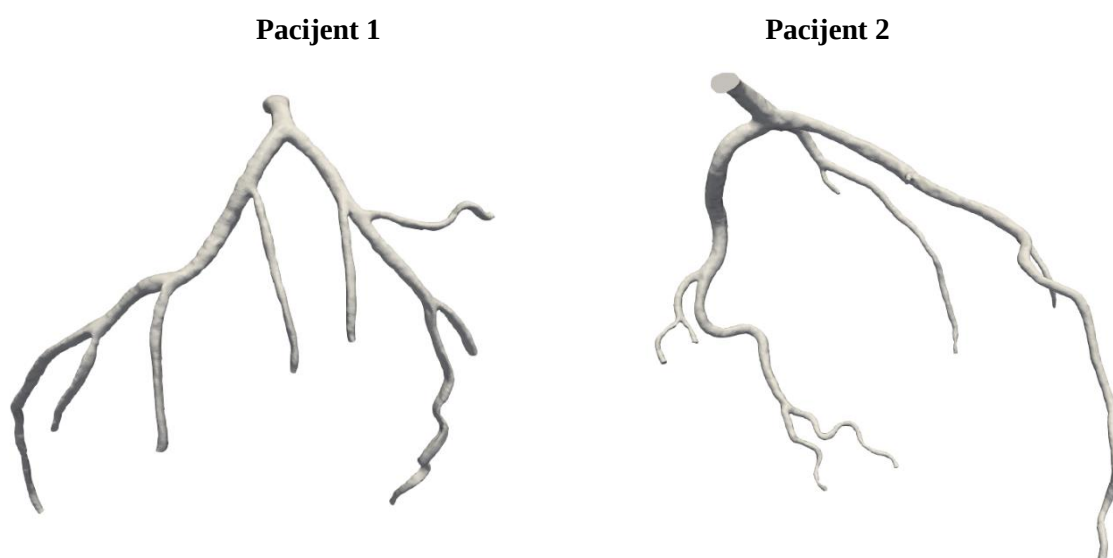
**Slika 30** Mreža konačnih volumena pacijenta 2



**Slika 31** Profinjenje mreže na izdancima arterija pacijenta 2

## 6.2 Implementacija rubnih uvjeta i pulsirajućeg strujanja

Prije objašnjavanja rubnih uvjeta važno je napomenuti da je zbog velike računalne mreže i ograničenih računalnih resursa, simulacija strujanja izvršena kroz lijevu koronarnu arteriju.



**Slika 32** Geometrija lijeve koronarne arterije

Budući se geometrija lijeve koronarne arterije oba pacijenta sastoji od 9 izlaznih grana, u Tablici 3 dan je prikaz rubnih ploha za oba pacijenta.

**Tablica 3 Nazivi pojedinih rubnih ploha**

|           |                                                    |
|-----------|----------------------------------------------------|
| lca_in    | Ulazni presjek, ravnina gdje strujanje ulazi       |
| walls     | Stijenka lijeve koronarne arterije                 |
| lca_out_1 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 1 |
| lca_out_2 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 2 |
| lca_out_3 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 3 |
| lca_out_4 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 4 |
| lca_out_5 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 5 |
| lca_out_6 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 6 |
| lca_out_7 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 7 |
| lca_out_8 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 8 |
| lca_out_9 | Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 9 |

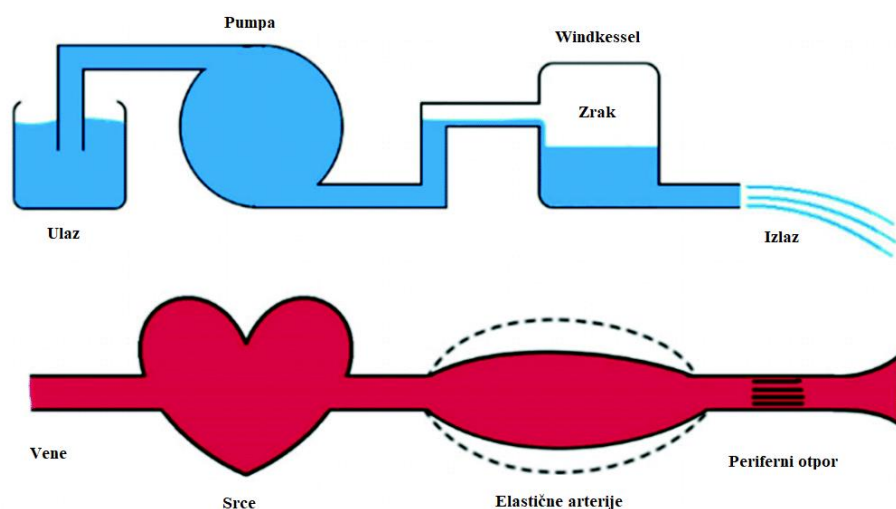
Rubni uvjeti imaju veliki utjecaj na rješenja jednadžbi strujanja fluida te je iz tog razloga važno pravilno odrediti rubne uvjete kako bi se dobila što realnija slika strujanja.

Kao što je već spomenuto, radi se o nestlačivom, nestacionarnom i laminarnom strujanju te je sukladno tome potrebno definirati veličinu brzine i tlaka na rubnim plohama. Kod nestacionarnog strujanja protok i brzina se mijenjaju u vremenu te iz tog razloga nije moguće zadati vremenski konstantnu vrijednost istih. Iz navedenog razloga je u sklopu paketa *OpenFOAM* odabran pogodan rubni uvjet kojim se brzina na ulaznoj granici zadaje putem protoka uz dodatnu opciju promjene njegove vrijednosti u vremenu. Na taj način se raspodjela protoka u vremenu može zadati u obliku tekstualne datoteke.

U realnoj situaciji, strujanje kroz arterije ne završava na izlazu promatrane geometrije već se nastavlja kroz krvne žile i kapilare gdje tlak zavisi o izlaznom protoku, stoga je potrebno postaviti i poseban rubni uvjet za tlak na izlazu iz arterija. Za rubni uvjet tlaka na izlazu uspoređena su dva modela s koncentriranim parametrima:

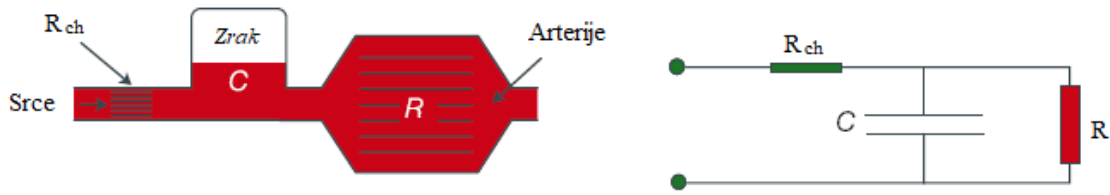
- model s jednim elementom
- Windkessel model s tri elementa

Windkessel model često se koristi u medicini kako bi se opisao valni oblik krvnog tlaka u arterijama u ovisnosti o udarnom valu srca, podatljivosti stijenke aorte i većih arterija te otporu manjih arterija, arteriola i kapilara. Prvi model arterijskog stabla, definirao je Otto Frank u analogiji s vatrogasnom ručnom pumpom gdje gasitelj stapnom pumpom periodički utiskuje vodu iz spremnika u tlačnu komoru sa stlačenim zrakom (njem. Windkessel) iz koje voda kontinuirano istječe kroz cijev.



**Slika 33 Primjena Windkesselovog efekta na krvožilni sustav**

Windkessel model s tri elementa sastoji se od otpora  $R_{ch}$  i  $R$ , te kapaciteta  $C$ . Normalno je za Windkessel modele koristiti analognu električnu shemu zato što postoji analogija između električnih i hidrauličkih veličina gdje struja odgovara protoku, a napon tlaku, Slika 34. U hidrauličkoj shemi, distalni otpor  $R$ , glavni je i primarni otpor strujanja te nosi većinu ukupnog iznosa otpora, predstavlja otpor svih manjih arterija, arteriola i kapilara koje se nalaze u nastavku analizirane geometrije. Otpor  $R_{ch}$  označuje takozvanu karakterističnu impedanciju koja u sustav uvodi disipaciju energije. Kapacitet  $C$  označuje podatljivost arterijskog stabla, a u rubnom uvjetu predstavlja podatljivost preostalih arterija, arteriola i kapilara u koje krv istječe iz analiziranog sustava.



**Slika 34 Hidraulička i električna shema Windkessel modela s tri elementa**

Umnožak perifernog otpora i kapaciteta definira vremensku konstantu  $\tau$  koja opisuje eksponencijalni pad tlaka ( $p(t) = p_d \exp(-t/\tau)$ ) za vrijeme dijastole. Eksperimentalna mjerenja prikazuju da vrijednosti vremenske konstante variraju od 0.8-1.5% perioda  $T$ , a za potrebe ovog rada uzeto je da vremenska konstanta iznosi:

$$\tau = R_{tot} \cdot C \approx 1T = 1s \quad (6.1)$$

Na izlaznim presjecima tlak i protok su prema Windkessel modelu povezani diferencijalnom jednačinom:

$$CR \frac{\partial p}{\partial t} + p = CRR_{ch} \frac{\partial Q}{\partial t} + (R + R_{ch})Q \quad (6.2)$$

U jednačini (6.2)  $p$  označuje tlak u izlaznom presjeku, a  $Q$  predstavlja krvni protok kroz arteriju.

Za periodičko pulsirajuće strujanje, gornja jednačina se primjenom Fourierove transformacije može prevesti u frekvencijsku domenu, gdje onda prelazi u algebarsku jednačinu koja glasi:

$$\widehat{p}_k = \widehat{Q}_k \frac{R_{ch} + R + i\omega_k R_{ch}RC}{1 + i\omega_k RC} \quad (6.3)$$

gdje su  $\widehat{p}_k$  i  $\widehat{Q}_k$  fazori tlaka i protoka na frekvenciji  $\omega_k = k\omega_0 = k2\pi/T$ , dobiveni Fourierovom transformacijom. Odnosom tlaka i protoka definira se impedancija  $Z(\omega)$ :

$$Z_k = Z(\omega_k) = \frac{\widehat{p}(\omega_k)}{\widehat{Q}(\omega_k)} = \frac{\widehat{p}_k}{\widehat{Q}_k} = \frac{R_{ch} + R + i\omega_k R_{ch}RC}{1 + i\omega_k RC} \quad (6.4)$$

U nastavku je dan proračun parametara Windkessel modela za sve izlazne grane koronarne arterije. Pretpostavljeno je da su protoci kroz svaku granu koronarne arterije jednaki što znači da su i parametri Windkessel modela na izlazu svake grane jednaki.

U koronarnom stablu pretpostavljen je srednji tlak  $p_{sr} = 100 \text{ mmHg} = 13332 \text{ Pa}$  koji je odabran kao srednja vrijednosti sistoličkog (120 mmHg) i dijastoličkog (80 mmHg) tlaka zdrave osobe.

Geometrija koronarne arterije ima 9 izlaza stoga protok na izlazu svake grane glasi:

$$Q_{out}^n = \frac{1}{9} \cdot Q_{cor} = \frac{1}{9} * 2.0086 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 2.23172 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad (6.5)$$

Ukupni otpor na izlazu svake grane jednak je zbroju karakteristične impedancije i distalnog otpora:

$$R_{tot}^n = R_{ch}^n + R^n = \frac{p_{sr}}{Q_{out}^n} = \frac{13332 \text{ Pa}}{2.23172 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 5.9739 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \text{s}} \quad (6.6)$$

Mjerenja pokazuju da se karakteristična impedancija  $R_{ch}$  kreće u rasponu od 5-10% ukupnog otpora  $R_{tot}$  arterije, a u ovom radu uzeto je:

$$R_{ch}^n = 0.05 \cdot R_{tot}^n = 2.9869 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \text{s}} \quad (6.7)$$

Iz jednadžbe (6.6) slijedi iznos distalnog otpora:

$$R^n = R_{tot}^n - R_{ch}^n = 5.6752 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \text{s}} \quad (6.8)$$

Podatljivost arterija C, iz jednadžbe (6.1) glasi:

$$C^n = \frac{\tau}{R_{tot}^n} = \frac{1}{5.9739 \cdot 10^{10}} = 1.6739 \cdot 10^{-11} \frac{\text{s}^2 \text{m}^4}{\text{kg}} \quad (6.9)$$

Kako geometrija oba pacijenta sadrži 9 izlaza, parametri Windkessel rubnog uvjeta su jednaki za oba pacijenta.

Kod modela s jednim elementom uzet je u obzir samo distalni otpor  $R$  bez utjecaja podatljivosti stijenke  $C$  i disipacije energije uvedene karakterističnom impedancijom  $R_{ch}$ .

Stoga će vrijednosti distalnog otpora  $R$  na svakom izlazu promatrane geometrije iznositi:

$$R_{tot}^n = R^n = \frac{p_{sr}}{Q_{out}^n} = \frac{13332 \text{ Pa}}{2.23172 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 5.9739 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \text{s}} \quad (6.10)$$

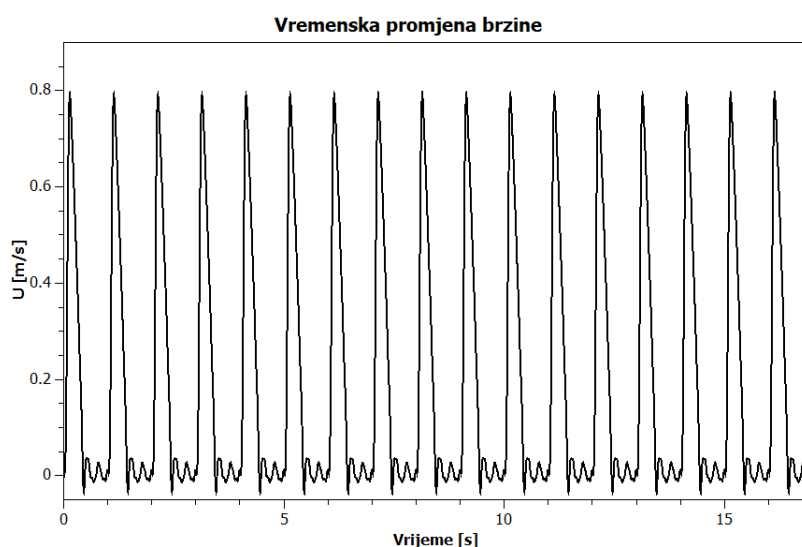
U Tablici 4 dan je popis rubnih uvjeta brzine i tlaka zadan na granicama sustava. Na ulaznim i izlaznim površinama postavljen je uvjet koji ne sadrži geometrijske i topološke informacije o mreži (eng. patch), a na stijenci arterija korišten je rubni uvjet nepropusne stijenke (eng. wall). Budući da sve izlazne granice imaju jednake rubne uvjete, radi jednostavnosti će sve granice biti nazvane  $lca\_out\_n$ .

**Tablica 4 Vrste granica i rubni uvjeti za oba pacijenta**

| Naziv granice | Vrsta granice | Rubni uvjet           |                    |
|---------------|---------------|-----------------------|--------------------|
|               |               | $U$                   | $p$                |
| $lca\_in$     | patch         | flowRateInletVelocity | zeroGradient       |
| $lca\_out\_n$ | patch         | zeroGradient          | windkesselPressure |
| walls         | wall          | noSlip                | zeroGradient       |

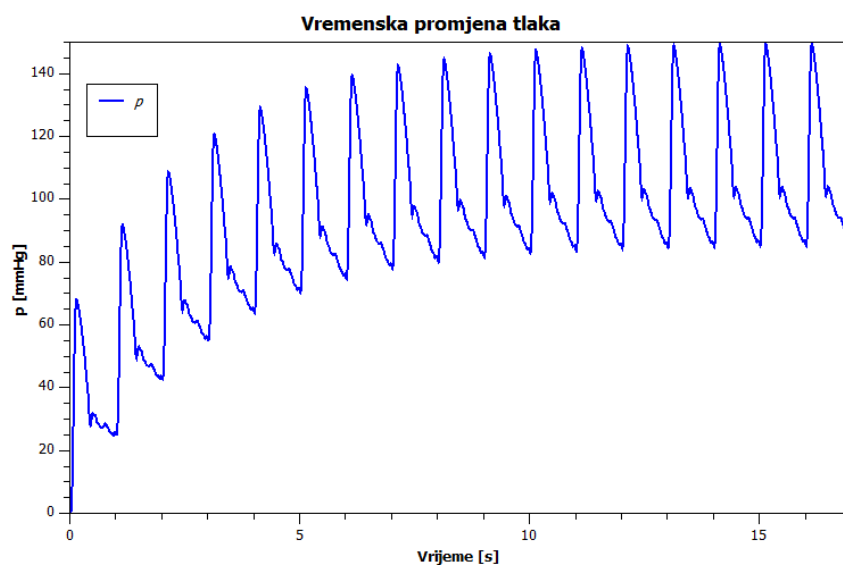
## 7 REZULTATI I ANALIZA STRUJANJA

Kako je već spomenuto, strujanje krvi je nestacionarno, ali periodično. Kod provođenja nestacionarnih simulacija važno je provesti simulaciju kroz dovoljno dugo vremenskih koraka kako bi se postigla periodičnost strujanja, odnosno kako bi došlo do iščezavanja utjecaja početnih uvjeta. Nakon što je periodičnost postignuta, analiziraju se rezultati iz posljednja dva perioda. U ovom radu trajanje srčanog perioda je 1 [s], a vrijeme integracije bilo je 25 [s]. Slika 35 prikazuje vremensku promjenu srednje brzine na ulaznom presjeku za simulaciju sa troelementnim Windkessel modelom, a Slika 36 vremensku promjenu tlaka na ulaznom presjeku.



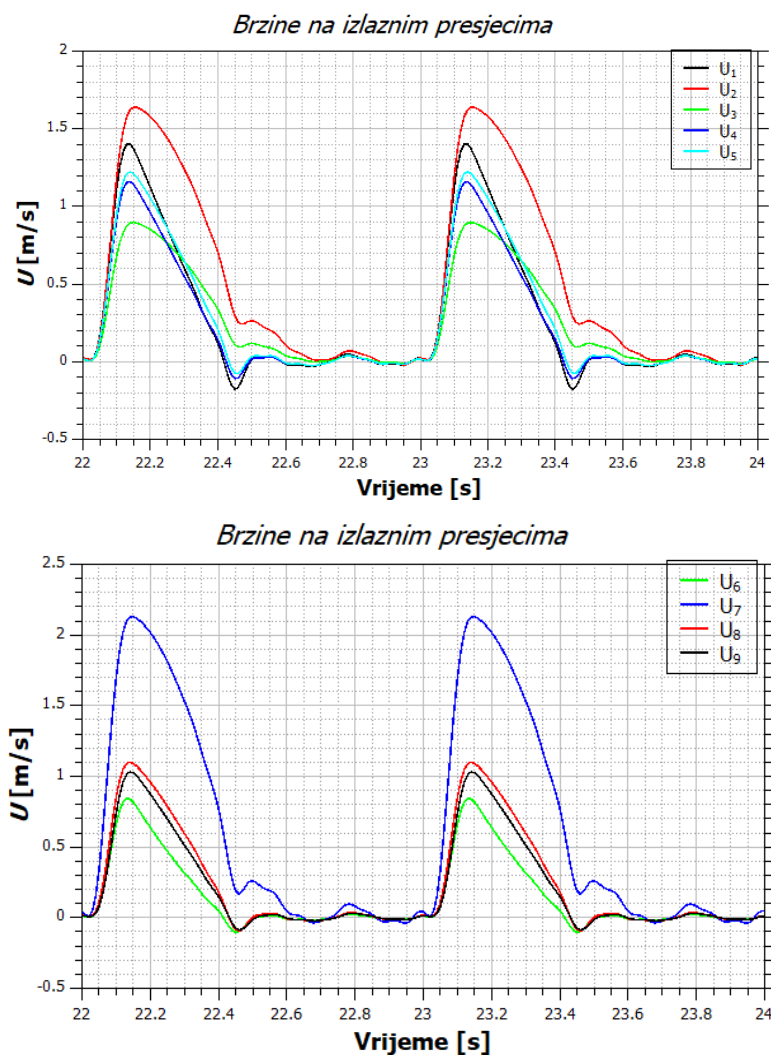
**Slika 35** Vremenska promjena srednje brzine u ulaznom presjeku pacijenta 1

Iz slike tlaka vidljivo je da je vrijeme potrebno da se uspostavi periodičnost tlaka otprilike 15 sekundi.



**Slika 36 Vremenska promjena srednjeg tlaka na ulaznom presjeku pacijenta 1**

Od rezultata promatrane su vrijednosti tlaka i brzine na izlaznim presjecima. Analizirani su rezultati iz posljednja 2 ciklusa u ukupnom trajanju od 2 sekunde. Svaki ciklus sastoji se od 100 vremenskih koraka što omogućuje detaljno prikazivanje rezultata. Brzine na izlaznim presjecima dane su na slikama 37 i 38, a maksimalne, minimalne i prosječne brzine u jednome ciklusu dane su u tablicama 5 i 6.

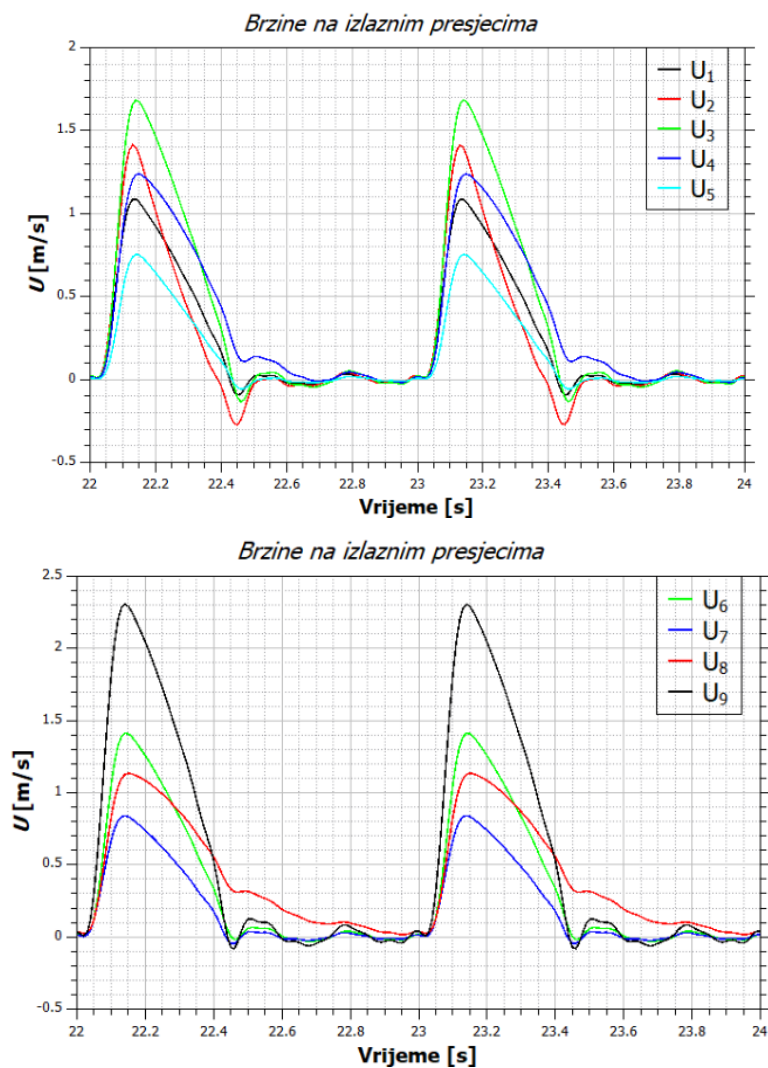


Slika 37 Vrijednosti srednjih brzina na izlaznim presjecima pacijenta 1

Tablica 5 Maksimalna, minimalna i prosječna brzina na izlaznim površinama pacijenta 1

|              | Izlaz 1             | Izlaz 2             | Izlaz 3             | Izlaz 4             |
|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Brzina [m/s] | $U_{max} = 1.4014$  | $U_{max} = 1.6386$  | $U_{max} = 0.8972$  | $U_{max} = 1.1593$  |
|              | $U_{min} = -0.1774$ | $U_{min} = -0.0198$ | $U_{min} = -0.0111$ | $U_{min} = -0.1082$ |
|              | $U_{avg} = 0.2772$  | $U_{avg} = 0.4975$  | $U_{avg} = 0.2594$  | $U_{avg} = 0.2423$  |

|              | Izlaz 5             | Izlaz 6             | Izlaz 7             | Izlaz 8             | Izlaz 9             |
|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Brzina [m/s] | $U_{max} = 1.2232$  | $U_{max} = 0.8429$  | $U_{max} = 2.1314$  | $U_{max} = 1.1008$  | $U_{max} = 1.0313$  |
|              | $U_{min} = -0.0752$ | $U_{min} = -0.1035$ | $U_{min} = -0.0399$ | $U_{min} = -0.0948$ | $U_{min} = -0.0875$ |
|              | $U_{avg} = 0.2734$  | $U_{avg} = 0.1549$  | $U_{avg} = 0.6107$  | $U_{avg} = 0.2443$  | $U_{avg} = 0.2156$  |



Slika 38 Vrijednosti srednjih brzina na izlaznim presjecima pacijenta 2

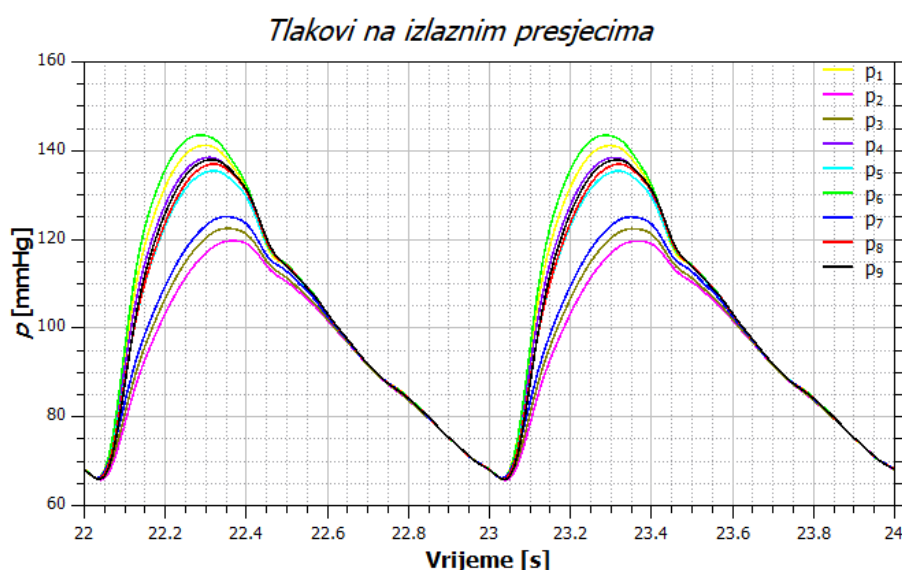
Tablica 6 Maksimalna, minimalna i prosječna brzina na izlaznim površinama pacijenta 2

|              | Izlaz 1             | Izlaz 2             | Izlaz 3            | Izlaz 4             |
|--------------|---------------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| Brzina [m/s] | $U_{max} = 1.0862$  | $U_{max} = 1.4135$  | $U_{max} = 1.6841$ | $U_{max} = 1.2388$  |
|              | $U_{min} = -0.0939$ | $U_{min} = -0.2726$ | $U_{min} = -0.134$ | $U_{min} = -0.0179$ |
|              | $U_{avg} = 0.2383$  | $U_{avg} = 0.2277$  | $U_{avg} = 0.3727$ | $U_{avg} = 0.3416$  |

|              | Izlaz 5             | Izlaz 6             | Izlaz 7             | Izlaz 8            | Izlaz 9             |
|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| Brzina [m/s] | $U_{max} = 0.7535$  | $U_{max} = 1.4127$  | $U_{max} = 0.8405$  | $U_{max} = 1.1345$ | $U_{max} = 2.3065$  |
|              | $U_{min} = -0.0579$ | $U_{min} = -0.0309$ | $U_{min} = -0.0463$ | $U_{min} = 0.0158$ | $U_{min} = -0.0832$ |
|              | $U_{avg} = 0.157$   | $U_{avg} = 0.3369$  | $U_{avg} = 0.1976$  | $U_{avg} = 0.3973$ | $U_{avg} = 0.5550$  |

Uzimajući u obzir da su pretpostavljeni protoci kroz koronarne grane gotovo jednaki, brzina na izlaznim presjecima ovisiti će o površini izlaznog poprečnog presjeka. Budući da se grananjem koronarne arterije sužavaju sve do manjih arteriola, veličina poprečnog presjeka ovisiti će o tome na kojoj poziciji, odnosno na kojoj udaljenosti od glavnog debla je odrezana određena grana koronarne arterije. Također deblo lijeve prednje silazne arterije (LAD) veće je od stražnje cirkumfleksne arterije (ACx) što također utječe na razliku u brzinama.

Tlakovi na izlaznim presjecima dani su na slikama 39 i 40, a maksimalne, minimalne i prosječne vrijednosti tlaka u jednome taktu dane su u tablicama 7 i 8.

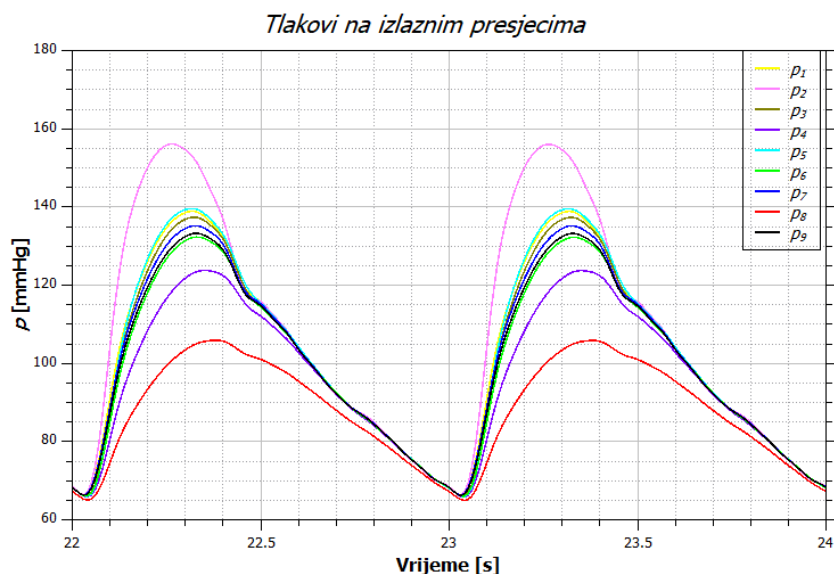


**Slika 39 Vrijednosti tlakova na izlaznim presjecima pacijenta 1**

**Tablica 7 Maksimalan, minimalan i prosječan tlak na izlaznim površinama pacijenta 1**

|             | Izlaz 1            | Izlaz 2            | Izlaz 3            | Izlaz 4            |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Tlak [mmHg] | $p_{max} = 141.17$ | $p_{max} = 119.68$ | $p_{max} = 122.47$ | $p_{max} = 138.51$ |
|             | $p_{min} = 66.15$  | $p_{min} = 65.68$  | $p_{min} = 65.87$  | $p_{min} = 66.11$  |
|             | $p_{avg} = 102.96$ | $p_{avg} = 94.55$  | $p_{avg} = 95.76$  | $p_{avg} = 102.02$ |

|             | Izlaz 5            | Izlaz 6            | Izlaz 7            | Izlaz 8            | Izlaz 9            |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Tlak [mmHg] | $p_{max} = 135.53$ | $p_{max} = 143.51$ | $p_{max} = 125.10$ | $p_{max} = 137.04$ | $p_{max} = 137.98$ |
|             | $p_{min} = 66.07$  | $p_{min} = 66.13$  | $p_{min} = 66.14$  | $p_{min} = 66.05$  | $p_{min} = 65.88$  |
|             | $p_{avg} = 100.85$ | $p_{avg} = 103.88$ | $p_{avg} = 97.04$  | $p_{avg} = 101.18$ | $p_{avg} = 101.52$ |



Slika 40 Vrijednosti tlakova na izlaznim presjecima pacijenta 2

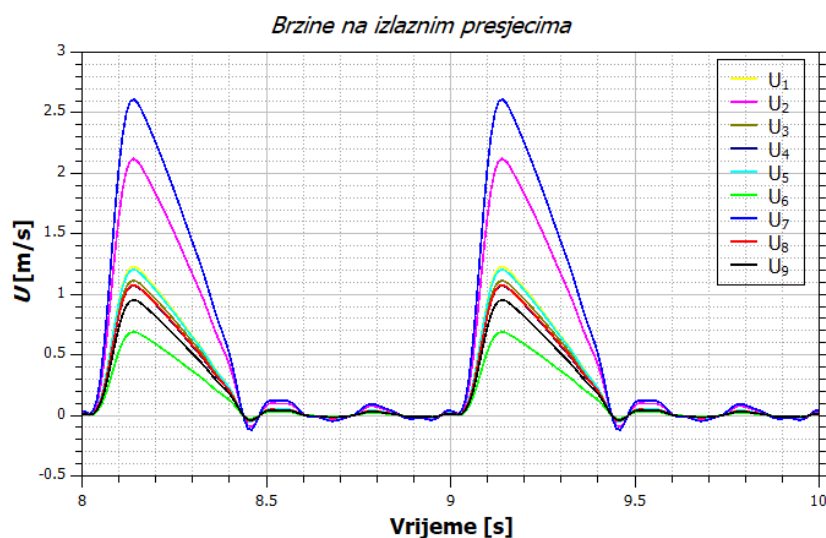
Tablica 8 Maksimalan, minimalan i prosječan tlak na izlaznim površinama pacijenta 2

|             | Izlaz 1            | Izlaz 2            | Izlaz 3            | Izlaz 4            |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Tlak [mmHg] | $p_{max} = 138.92$ | $p_{max} = 156.09$ | $p_{max} = 137.39$ | $p_{max} = 123.78$ |
|             | $p_{min} = 66.25$  | $p_{min} = 65.68$  | $p_{min} = 66.02$  | $p_{min} = 65.78$  |
|             | $p_{avg} = 102.30$ | $p_{avg} = 107.93$ | $p_{avg} = 101.51$ | $p_{avg} = 96.47$  |

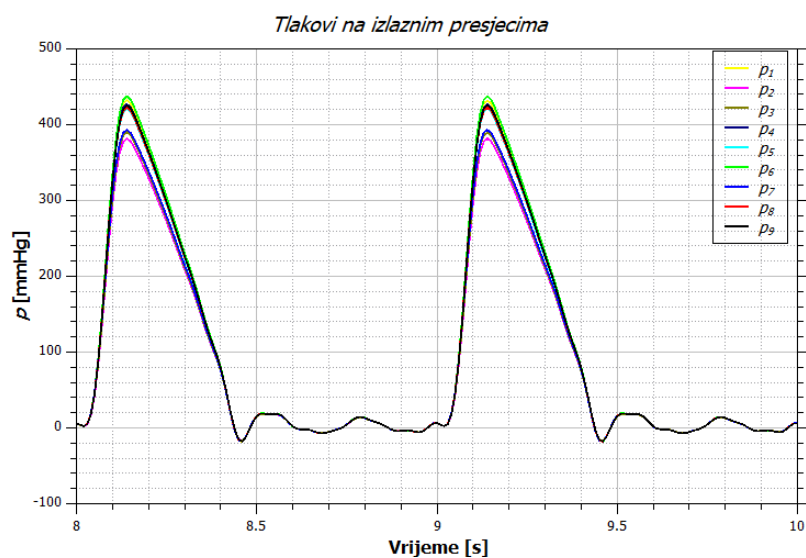
|             | Izlaz 5            | Izlaz 6            | Izlaz 7            | Izlaz 8            | Izlaz 9            |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Tlak [mmHg] | $p_{max} = 139.58$ | $p_{max} = 132.32$ | $p_{max} = 135.21$ | $p_{max} = 105.88$ | $p_{max} = 133.28$ |
|             | $p_{min} = 65.89$  | $p_{min} = 66.00$  | $p_{min} = 66.25$  | $p_{min} = 64.96$  | $p_{min} = 66.20$  |
|             | $p_{avg} = 102.30$ | $p_{avg} = 99.78$  | $p_{avg} = 101.03$ | $p_{avg} = 88.17$  | $p_{avg} = 100.27$ |

Može se uočiti da je, kod oba pacijenta, srednja vrijednost tlaka ( $p_{avg}$ ) na izlaznim presjecima oko 100 mmHg što je jednako vrijednosti tlaka kojom su računati parametri Windkessel modela, stoga može se reći da je relativno dobro opisana promjena tlaka u krvožilnom sustavu. Unatoč tome što je uzeta u obzir podatljivost stijenke C, u ovom radu arterija je promatrana kao kruta cijev te nema elastična svojstva koja u stvarnosti također utječu na promjenu tlaka.

Simulacija strujanja modela sa jednim elementom nije pokazala zadovoljavajuće rezultate. Naime, uzimajući u obzir distalni otpor  $R$  bez utjecaja podatljivosti stijenke  $C$  i karakteristične impedancije  $R_{ch}$  nije moguće fizikalno opisati promjenu tlaka u ovisnosti o protoku što je vidljivo iz grafova na slikama 41 i 42.



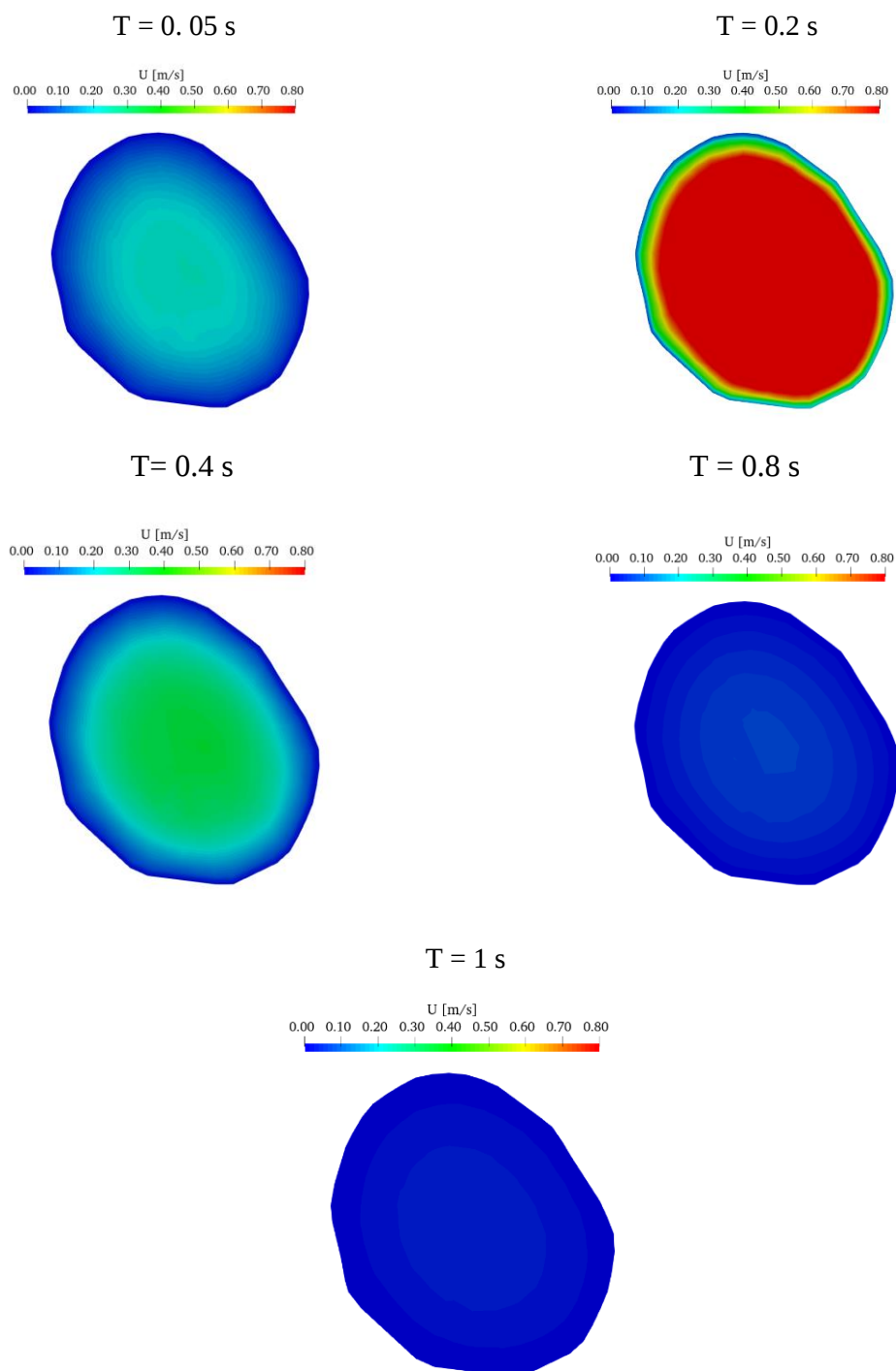
**Slika 41** Vrijednosti srednjih brzina na izlazu za rubni uvjet sa jednim elementom



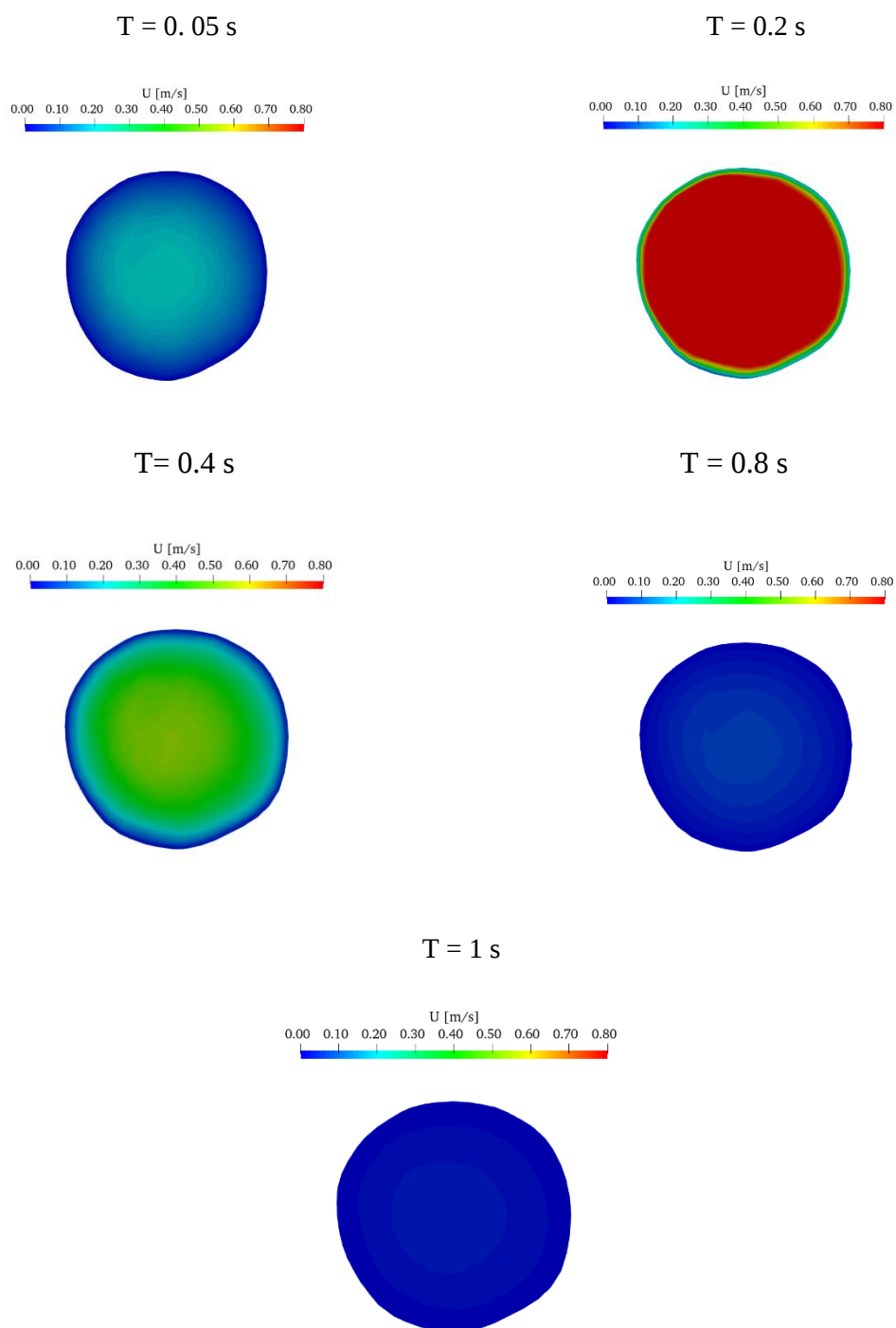
**Slika 42** Vrijednosti tlakova na izlaznim presjecima za rubni uvjet s jednim elementom

Iz navedenih podataka može se uočiti da promjena tlaka za vrijeme srčanog ciklusa prati oblik funkcije brzine te dobivene vrijednosti tlaka ne predstavljaju niti približno fizikalne vrijednosti krvnog tlaka, stoga se model sa jednim elementom neće razmatrati u daljnjoj analizi.

Slike 43 i 44 prikazuju promjenu brzine na jednom izlaznom presjeku za vrijeme jednog srčanog ciklusa. Promjena brzine opisana je grafovima na slikama 37 i 38. Iz grafa je uočljivo da brzina doživljava vrhunac za vrijeme sistole, a zatim vrijednost naglo opada te je u ostatku ciklusa brzina neznatna.



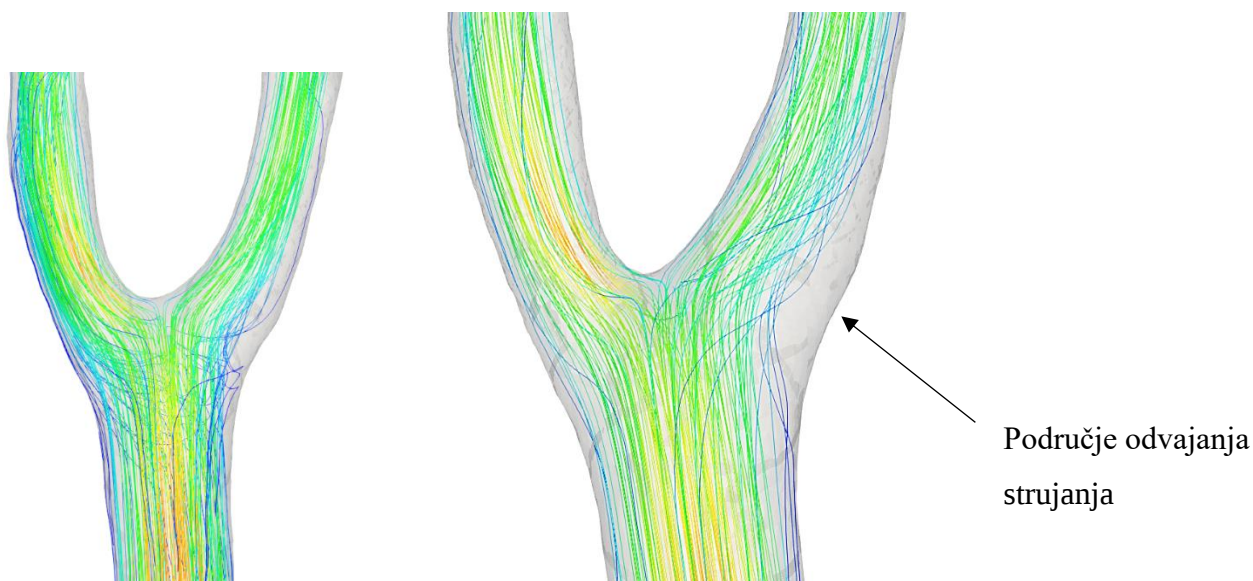
**Slika 43** Promjena brzine na izlaznom presjeku (Izlaz 3) pacijenta 1



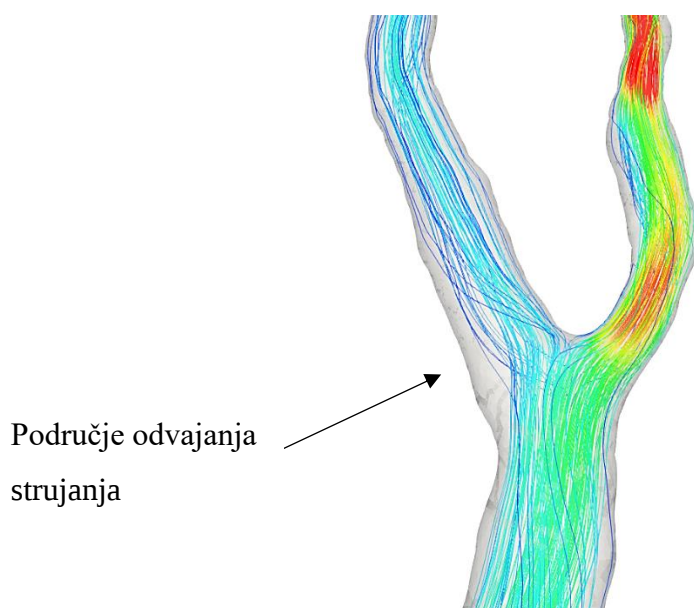
**Slika 44** Promjena brzine na izlaznom presjeku (Izlaz 7) pacijenta 2

Zanimljiva pojava javlja se u područjima grananja arterija. Naime, analiza je pokazala da u nekim područjima grananja dolazi do odvajanja strujanja koje je nepoželjno zbog mogućnosti oštećenja stijenke arterije i može dovesti do formiranja aterosklerotskog plaka te pojačane opstrukcije krvnog protoka.

Budući je geometrija arterija poprilično nepravilna nije moguće napraviti presjek ravninom duž arterije kako bi se prikazalo polje brzina, već je strujanje prikazano strujnicama. Slike 45 i 46 prikazuju kritična područja u račvama gdje dolazi do odvajanja strujanja kod oba pacijenta.

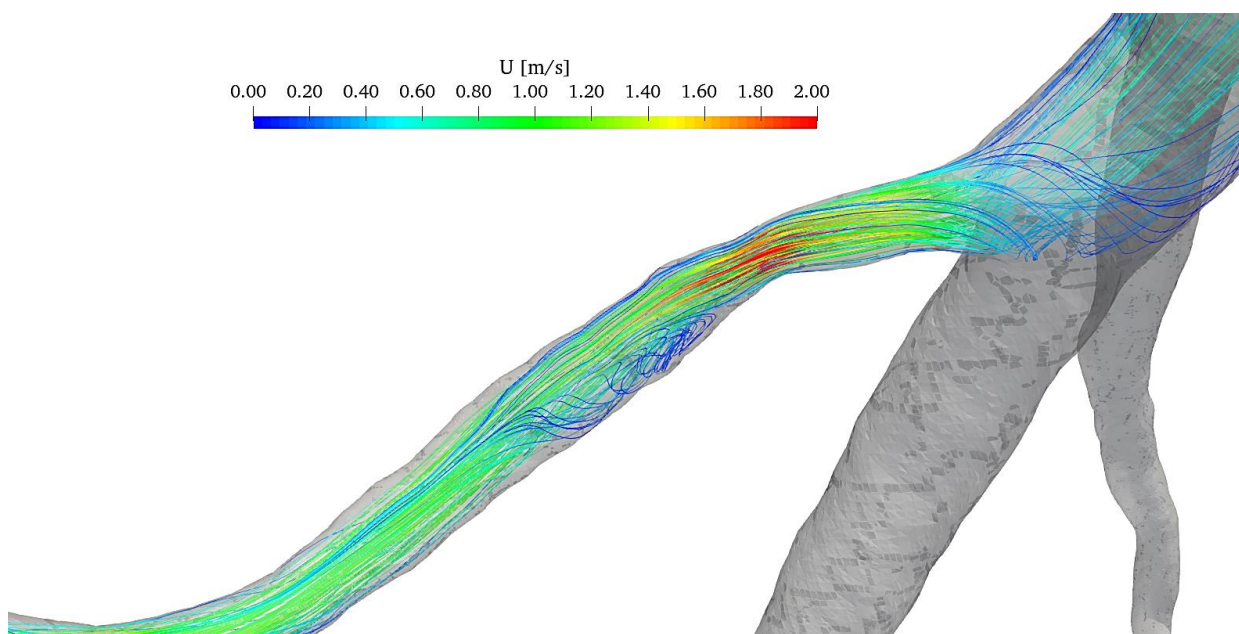


**Slika 45 Odvajanje strujanja na rubu stijenke kod pacijenta 1**

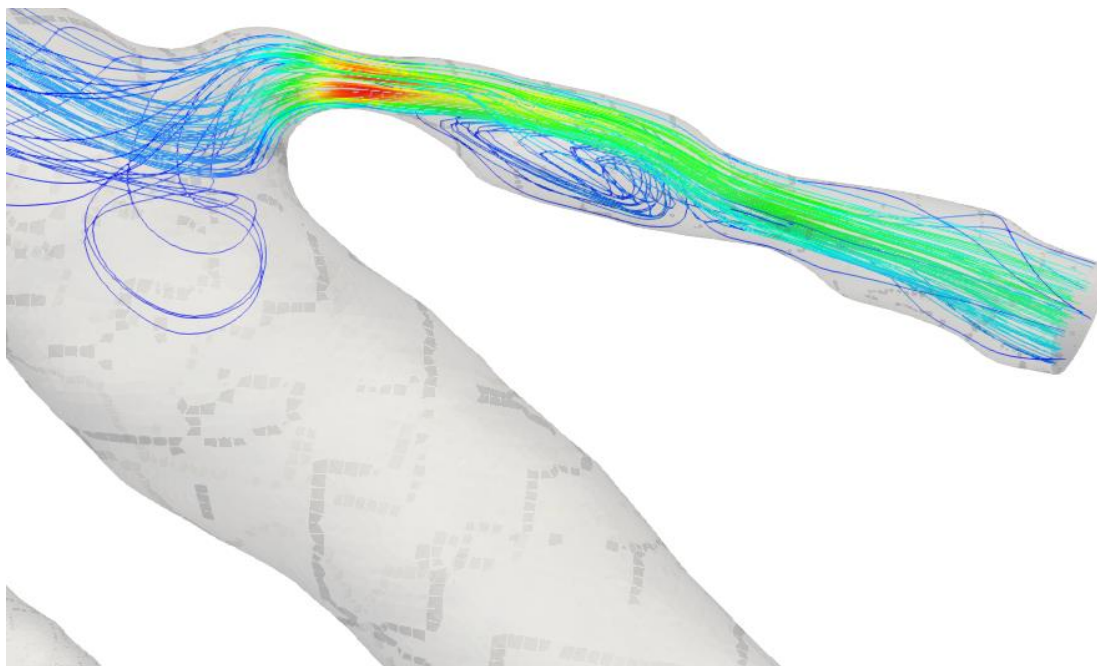


**Slika 46 Odvajanje strujanja na vanjskom rubu stijenke kod pacijenta 2**

U nekim granama arterije uočena su neuobičajena suženja (stenoze). Nagla proširenja nakon stenoza uzrokuju natražno strujanje u okolišu mlaza krvi u kojem su brzine manje te je stoga i smično naprezanje u tom području znatno manje što pogoduje formiranju plaka. U budućim istraživanjima poželjno je proračunati vrijednosti smičnih naprezanja u kritičnim točkama arterija kako bi se moglo na vrijeme djelovati u sprječavanju formiranja plaka.



**Slika 47** Odvajanje strujanja nakon suženja koronarne arterije pacijenta 1



**Slika 48** Odvajanje strujanja nakon suženja arterije kod pacijenta 2

## 8 ZAKLJUČAK

Tijekom godina, učestala suradnja tehničkih znanosti i medicine uvelike je pridonijela razvoju biomehanike. Njezina važnost leži upravo u uspješnijem i sigurnijem liječenju pacijenata te je od velike pomoći liječnicima i zdravstvenim radnicima.

Cilj ovog rada bio je rekonstruirati geometriju koronarnih arterija dvaju pacijenta iz dobivenih CT snimaka s ciljem analiziranja strujanja te preciznijeg dijagnosticiranja koronarnih bolesti. U radu je opisan postupak dobivanja baznog volumena koronarnih arterija pomoću programa *3DSlicer*, također je prikazan detaljan opis profinjavanja površine geometrije i pripreme rubnih ploha za izradu proračunske mreže u programskom paketu *Blender*. Diskretizacija područja proračuna napravljena je programom *cfMesh*, a proračuni su provedeni u programskom paketu *openFOAM*.

Radi ograničenih računalnih resursa proračun strujanja analiziran je kroz lijevu koronarnu arteriju. Koronarna arterija modelirana je kao kruta stijenka, dok je za krv uzeto da je newtonski fluid. Pretpostavljeno strujanje je nestacionarno, laminarno i nestlačivo. Postavljanje odgovarajućih rubnih uvjeta brzine i tlaka rezultiralo je fizikalnoj promjeni krvnog tlaka i protoka u svim granama arterije. Analizom strujanja kroz izrađenu geometriju uočena su neuobičajena suženja poprečnog presjeka na neočekivanim mjestima, a na račvanjima manjih grana arterije uočena je pojava odvajanja strujanja. Obje pojave izazivaju oštećenja stijenke arterija te pogoduju razvoju aterosklerotskog plaka koji može znatno umanjiti protok krvi pri pojačanoj potrebi srca za kisikom.

U budućim radovima koji uključuju rekonstrukciju krvnih žila poželjna je konzultacija sa kardiologom koji bi mogao ukazati na potencijalno oboljela područja krvnih žila, time bi se moglo detaljnije posvetiti modeliranju kritičnog područja prilikom rekonstrukcije geometrije što u konačnici može rezultirati preciznijim rezultatima.

## LITERATURA

- [1] <https://www.slicer.org/> (pristup 5.2.2021.)
- [2] Hess, R., Blender Foundations: The Essential Guide to Learning Blender 2.6, Focal Press, 2010
- [3] Juretić, F.: User Guide- cfMesh v1.1, Zagreb 2015
- [4] <https://openfoam.org/> (pristup 5.2.2021.)
- [5] Reece, Jane B, Meyers, N., Urry, Lisa A., Cain, Michael L., Wasserman, Steven A., Minorsky Peter V., Jackson, Robert N., Cooke, B.: Campbell biology, Tenth edition (Australia and New Zealand Edition), Pearson Australia 2015
- [6] Ivančević, Ž., Rumboldt, Z., Bergovec, M., Silobrčić V.: MSD-priručnik dijagnostike i terapije, Split 2000
- [7] Ivančević, Ž.: MSD-priručnik za pacijente (Prvo hrvatsko izdanje), Split 2002
- [8] Virag, Z.: Dinamika plinova, Zagreb 2013
- [9] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I.: Mehanika fluida 2, Zagreb 2015
- [10] Virag, Z., Džijan, I.: Računalna dinamika fluida, Zagreb 2014
- [11] <http://www.vmtk.org/index.html> (pristup 6.2.2021)
- [12] Westerhof, Nicolaas M., Stergiopulos, N., Noble I. M.: Snapshots of Hemodynamic

## **PRILOZI**

### **I. CD-R disc**