Analiza optimalnog plana proizvodnje u ugostiteljskom objektu

Suić Puente, Angelina

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Tourism and Hospitality Management / Sveučilište u Rijeci, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:191:840656

SVEUČILIŠTE U RIJECI
Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu Opatija
Sveučilišni prijediplomski studij

ANGELINA SUIĆ PUENTE

Analiza optimalnog programa proizvodnje u ugostiteljskom objektu

Analysis of the optimal production program in restaurant facility

Završni rad

Zabok, 2023.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu Opatija
Sveučilišni prijediplomski studij
Poslovna ekonomija u turizmu i ugostiteljstvu
Studijski smjer: Menadžment u turizmu

Analiza optimalnog programa proizvodnje u ugostiteljskom objektu

Analysis of the optimal production program in restaurant facility

Završni rad

Kolegij:	**Metode poslovnog odlučivanja u turizmu**	Student:	**Angelina SUIĆ PUENTE**
Mentor:	doc. dr. sc. **Jelena MUŠANOVIĆ**	Matični broj:	**25517/20**
Komentor:	prof. dr. sc. **Tea BALDIGARA**		

Zabok, srpanj 2023.

SVEUČILIŠTE U RIJECI UNIVERSITY OF RIJEKA
FAKULTET ZA MENADŽMENT U TURIZMU I UGOSTITELJSTVU
FACULTY OF TOURISM AND HOSPITALITY MANAGEMENT
OPATIJA, HRVATSKA CROATIA

IZJAVA O AUTORSTVU RADA I O JAVNOJ OBJAVI RADA

Angelina Suić Puente	**25517**
(ime i prezime studenta)	(matični broj studenta)

Analiza optimalnog programa proizvodnje u ugostiteljskom objektu
(naslov rada)

Izjavljujem da sam ovaj rad samostalno izradila/o, te da su svi dijelovi rada, nalazi ili ideje koje su u radu citirane ili se temelje na drugim izvorima, bilo da su u pitanju knjige, znanstveni ili stručni članci, Internet stranice, zakoni i sl. u radu jasno označeni kao takvi, te navedeni u popisu literature.

Izjavljujem da kao student–autor završnog rada, dozvoljavam Fakultetu za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu Sveučilišta u Rijeci da ga trajno javno objavi i besplatno učini dostupnim javnosti u cjelovitom tekstu u mrežnom digitalnom repozitoriju Fakulteta za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu Sveučilišta u Rijeci.

U svrhu podržavanja otvorenog pristupa završnim radovima trajno objavljenim u javno dostupnom digitalnom repozitoriju Fakulteta za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu Sveučilišta u Rijeci, ovom izjavom dajem neisključivo imovinsko pravo iskorištavanja bez sadržajnog, vremenskog i prostornog mog završnog rada kao autorskog djela pod uvjetima *Creative Commons* licencije CC BY Imenovanje, prema opisu dostupnom na http://creativecommons.org/liceses/.

U Opatiji, 19. 6. 2023.

Angelina Suić Puente

Potpis studenta

Sažetak

Svrha završnog rada je primijeniti metode linearnog programiranja kako bi se odredio optimalni program proizvodnje u ugostiteljskom objektu za koji će se ostvariti maksimalni prihod. U empirijskom dijelu primijenjena je simpleks metoda u rješavanju problema linearnog programiranja s ciljem određivanja optimalnog programa proizvodnje u ugostiteljskom objektu. Promatrano je pet najprodavanijih *pizza*, a to su *pizza* Margherita, Vesuvio, Capricciosa, Mexicana i Slavonska *pizza*, te tri faze pripreme kroz koje svaka *pizza* mora proći. Prva faza odnosi se na pripremu namirnica potrebnih za izradu pojedinih *pizza*, druga faza prikazuje potrebno vrijeme za razvlačenje tijesta i pravljenje *pizza*, dok se treća faza odnosi na pečenje *pizza*. Promatrani problem postavljen je kao standardni problem maksimuma, s ciljem određivanja optimalnoga programa kojim će ugostiteljski objekt ostvariti maksimalnu dobit. Optimalni program postavljen je korištenjem simpleks metode i POM-QM programa računalne potpore, te je izvršena i postoptimalna analiza. Iz dobivenih rezultata može se zaključiti da ugostiteljski objekt uz određene preinake u poslovanju može pospješiti svoje poslovne rezultate.

Ključne riječi: optimalni program proizvodnje; modeli linearnog programiranja; ugostiteljski objekt; standardni program maksimuma; POM-QM

Sadržaj

Uvod

Glavni cilj svakog poduzeća je maksimalizirati dobit. Da bi to ostvarili menadžeri najčešće posežu za kvantitativnim metodama, među koje spada i linearno programiranje. Uz pomoć modela linearnog programiranja određuju optimalan program poslovanja svog poslovnog objekta, uzimajući u obzir određena ograničenja resursa, a sve s ciljem maksimiziranja dobit. Također, u svrhu poboljšanja poslovnih rezultata a uz pomoć linearnog programiranja, pokušavaju i minimizirati troškove u svom poslovanju. Kako bi poduzeće opstalo, razvijalo se i nadjačalo konkurenciju mora pravovremeno i pravovaljano djelovati, a optimizaciju poslovanja postići će donošenjem ključnih odluka temeljenih na primjeru raznih postupaka i analiza.

Predmet ovog rada jest praktična primjena modela linearnog programiranja u poslovanju ugostiteljskog objekta s ciljem određivanja optimalnog programa proizvodnje u objektu. Analizirani su podaci pet najprodavanijih *pizza* iz ponude, te tri faze kroz koje *pizze* prolaze u procesu nastajanja.

U teorijskom djelu rada korištene su deduktivna metoda, metoda klasifikacije i metoda kompilacije, dok je u empirijskom djelu korištena metoda linearnog programiranja.

Rad se sastoji od četiri cjeline. Prvo poglavlje, naziva „Teorijske osnove linearnoga programiranja“ opisuje osnovne teorijske pojmove linearnoga programiranja, te su detaljnije predstavljene vrste modela linearnog programiranja, opći model, standardni model, mješoviti problem, kanonski problem, dualni problem, kao i simpleks metoda koja je korištena u rješavanju promatranog problema ugostiteljskog objekta. U drugom poglavlju opisana je postoptimalna analiza. Treće poglavlje „Određivanje optimalnoga programa proizvodnje u ugostiteljskom objektu“ kao empirijski dio završnoga rada prikazuje metodologiju i rezultate istraživanja. Postavljeni problem standardnoga problema maksimuma riješen je primjenom simpleks metode i korištenjem POM-QM računalne potpore. Izvršena je postoptimalna analiza dobivenih rezultata. Na samom kraju rada dan je zaključak, popis korištene literature kao i popis tablica i slika.

1. Teorijske osnove linearnoga programiranja

Leonid Vitalyevich Kantorovich, sovjetski matematičar, u svom je djelu „Matematičke metode organizacije i planiranja proizvodnje“ 1939. godine predstavio matematičke modele, među kojima i model linearnog programiranja. Značajan doprinos razvoju linearnog programiranja dao je američki matematičar George Dantzig, poznat i kao otac linearnog programiranja, koji je 1947. godine razvio simpleks metodu.

Linearno programiranje, posebice u gospodarskom sektoru, ističe se kao korisno sredstvo odlučivanja, rješavanjem problema optimizacije unutar određenih ograničenja. Optimizacija predstavlja poboljšanje u poslovanju reduciranjem neiskorištenih resursa s ciljem povećanja dobiti poslovnog subjekta. Kako bi opstali na dinamičnom tržištu, uz velike konkurente, tehničko-tehnološke inovacije, stalno prisutne neizvjesnosti kao što su svjetske pandemije, ratovi, prirodne katastrofe i slično, menadžeri poduzeća su prisiljeni svakodnevno pratiti, analizirati stanje te pronaći optimalan program za proizvodnju svojih proizvoda i usluga. Točnije moraju pronaći najefikasniji način proizvodnje koristeći najmanje moguće količine resursa a u isto vrijeme ostvariti najveću moguću dobit. Optimizacija se stoga, može definirati kao proces uz pomoć kojega se nastoji unaprijediti performanse poslovanja kako bi one djelovale što efikasnije, odnosno kako bi se postigla maksimalna moguća dobit ili najmanji gubitak.

Pomoću optimizacije u matematičkom problemu određuju se lokalni ekstremi, odnosno maksimum ili minimum funkcije. Uvjete predstavljaju linearne jednadžbe odnosno nejednadžbe kao i nenegativnost varijabli. Problemi se rješavaju određenim redoslijedom, prvi korak je definiranje i opisivanje problema, kao i određivanje cilja koji se planira ostvariti, slijedi formuliranje modela te utvrđivanje njegovih parametara, i naposljetku rješavanje problema i analiza dobivenih rezultata. Problemi se rješavaju različitim metodama linearnog programiranja te se dobiva više mogućih rješenja od koji se odabire ono najoptimalnije, odnosno ono za koje će funkcija cilja postići ekstremnu vrijednost, bilo minimum ili maksimum. Određivanjem maksimuma funkcije menadžeri dobivaju uvid u maksimalnu zaradu od prodanih dobara i usluga uz postojeća ograničenja, kao i maksimalnu količinu dobara u određenom vremenskom periodu, koristeći ograničeni broj resursa. Izračun minimuma funkcije daje uvid u mogućnosti smanjenja energenata, troškova proizvodnje, troškova transporta, preraspodjele zaposlenika i slično.

1.1. Osnove linearnog programiranja

Tijekom Drugoga svjetskog rata, linearno programiranje se koristilo u rješavanju problema transporta, sastavljanju rasporeda kao i u preraspodjeli ograničenih resursa. Spomenuti američki matematičar George Dantzig, koji je razvio simpleks metodu, također je koristio linearno programiranje u vojne svrhe, i to za smanjenje troškova vojnih aktivnosti i optimizaciju transporta vojnika i vojne opreme. S vremenom se primjena linearnoga programiranja proširila na mnogobrojne gospodarske grane, gdje se koristi i danas. Značajna prekretnica u korištenju metoda linearnoga programiranja desila se 1952. godine, kada je prvi put izrađen program za računalno rješavanje linearnoga problema.

Linearno programiranje matematička je grana koja obuhvaća skup metoda kojima se vrši analiza i izračunava optimalan program poslovanja. Primjenjuje se u mnogobrojnim gospodarskim granama, ponajprije u mikroekonomiji, upravljanju kompanijama, proizvodnom sektoru, transportu, efikasnoj preraspodjeli ljudskih resursa, planiranju investicija i slično.
Prema definiciji „linearno programiranje je grana matematike koja se bavi problemom optimizacije sustava unutar zadanih ograničenja, a predstavlja skup metoda i postupaka kojima se određuju ekstremne vrijednosti takve linearne funkcije čije područje definicije određuje sustav linearnih jednadžbi ili nejednadžbi."[1]

Cilj linearnog programiranja je utvrditi ekstremnu maksimalnu ili minimalnu vrijednost linearne funkcije. Rješavanje problema započinje definiranjem i opisivanjem problema kao i određivanjem cilja, slijedi odabir modela i njegovo formuliranje te na kraju rješavanje samog problema i analiza dobivenih rezultata.

Glavne komponente linearnog programiranja su funkcija cilja i ograničenja. Linearna funkcija cilja predstavlja cilj kojeg se pokušava postići, dok ograničenja predstavljaju raspon mogućih rješenja funkcije, a prikazuju se linearnim jednadžbama odnosno nejednadžbama. Razlikuju se jednostavna i složena ograničenja. U jednostavnim se ograničenjima pojavljuje samo jedan oblik ograničenja, $\leq$, $\geq$ ili =. Neovisno o tipu ograničenja u jednostavnom problemu postoji uvjet nenegativnosti, koji nalaže da vrijednosti svih varijabli moraju biti veće ili jednake nuli.

[1] Baldigara T., Mamula M., Metode poslovnog odlučivanja u turizmu – nastavni e - materijal, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu, Opatija, 2018, str. 1

U složenim problemima mogući su istovremeno različiti tipovi ograničenja kao i različiti uvjeti za vrijednosti varijabla, koji mogu biti već spomenuti uvjet nenegativnosti, uvjet nepozitivnosti u kojem vrijednosti varijabli moraju biti manji ili jednaki nuli ili uopće ne mora biti postavljeno ograničenje varijabli.

1.2. Modeli linearnog programiranja

Modeli linearnog programiranja označavaju proces pronalaska optimalnog programa proizvodnje uz ograničene resurse s ciljem povećanja dobiti, što će biti i prikazano u empirijskom djelu završnog rada kroz standardni problem maksimuma u poslovanju ugostiteljskog objekta.

„Model linearnoga programiranja predstavlja specifičan oblik modela matematičkoga programiranja kao osnovnoga oblika zadatka optimizacije.“ [2]

Modeli obuhvaćaju samo najbitnije osobine problema, pri tome zanemarivši čitav niz detalja koji nisu ključni za optimizaciju, stoga se smatra da modeli izvrsno opisuju i objašnjavaju pojedini problem.

Model određenog problema javlja se u apstraktnom ili matematičkom obliku. Kako bi se apstraktno postavljen problem moglo optimizirati, uz pomoć metoda linearnoga programiranja, potrebno ga je transformirati u matematički oblik. Pri toj transformaciji veoma je važno pažljivo uključiti sve ključne varijable i uvjete problema kako bi rješenje bilo u potpunosti relevantno i kako ne bi došlo do donošenja pogrešnih odluka u poslovanju.

Nakon modeliranja promatranog problema, potrebno je razmotriti tehnike kao i metode rješavanja linearnog problema. U svrhu što učinkovitijeg odlučivanja, razvijene su mnogobrojne tehnike i modeli linearnoga programiranja, a kako bi proces odlučivanja bio što djelotvorniji važno je dobro poznavati specifičnosti pojedinih modela. U nastavku završnog rada opisani su osnovni matematički modeli linearnoga programiranja, kao što su opći model linearnoga programiranja, standardni problem, mješoviti problem, kanonski oblik, te dualni problem.

---

[2] Ibid.

1.2.1. Opći model linearnog programiranja

Funkcija cilja za koju se traži optimalno rješenje, bilo maksimum ili minimum, mora biti linearna, odnosno matematički zapisana u sljedećem obliku:

$$\binom{max}{min} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1}$$

Kako bi funkcija cilja dostigla ekstremnu vrijednost, odnosno maksimum ili minimum, potrebno je izračunati vrijednosti varijabli x_1, x_2, ... x_k, a pritom mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \leq/\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \leq/\geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \leq/\geq b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_j \geq 0 \end{gathered} \tag{2}$$

U nastavku su opisani elementi modela

x_j - varijable

c_j – parametri u funkciji cilja

z – funkcija cilja

a_{ij} – koeficijenti ograničenja

b_i – slobodni članovi nejednadžbi ograničenja

i = 1, 2, 3, ..., m

j = 1, 2, 3, ..., k

Varijable x_1, x_2, ..., x_k su nepoznate, a preostale veličine, odnosno parametri modela, su poznati.

Prikazani model linearnog programiranja mora zadovoljiti četiri uvjeta, a to su linearnost, izvjesnost, djeljivost i nenegativnost. Linearnost podrazumijeva da su funkcija cilja kao i sve jednadžbe i nejednadžbe linearne. Izvjesnost označava da su svi koeficijenti funkcije cilja i sustava ograničenja unaprijed poznati, te da se ne mijenjanu u postupku rješavanja zadatka. Djeljivost zahtjeva da varijable modela linearnoga programiranja ne moraju biti cijeli broj.

Posljednja pretpostavka jest nenegativnost i ona podrazumijeva da varijable u modelu linearnog programiranja ne mogu poprimiti negativnu vrijednost, jer se najčešće radi o ekonomskim veličinama.

Tri temeljna elementa svakog linearnog programiranja su (Backović et al., 2013, 199):

- funkcija cilja (kriterija)
- sustavi ograničenja
- uvjeti nenegativnosti

Funkcija cilja predstavlja matematički izraz zahtjeva problema, dok njena vrijednost označava vrijednost programa. U modelu linearnoga programiranja ona predstavlja unaprijed definirani temeljni cilj, kao i ukupnu sumu ekonomskih učinaka svih djelatnosti poduzeća.

Sustavi ograničenja predstavljaju uvjete za korištenje raspoloživih resursa u svrhu ostvarivanja djelatnosti kojima se poduzeće bavi. U nastavku su navedena tri tipa ograničenja:

- ograničenje tipa I: $\leq$
- ograničenje tipa II: $\geq$
- ograničenje tipa III: $=$

Uvjeti nenegativnosti zahtijevaju da veličine varijabli u modelu linearnog programiranja moraju biti pozitivan broj ili jednak nuli.

1.2.2. Standardni problem

Općenito se razlikuju dvije vrste standardnog problema, a to su:

- standardni problem maksimuma te
- standardni problem minimuma.

Standardni problem maksimuma predstavlja oblik linearnog programiranja kojem su glavne osobine da je funkcija cilja maksimum uz uvjete ograničenja koji pripadaju modelu ograničenja tip I ($\leq$). Ovaj oblik modela linearnoga programiranja koristi se kada poduzeća žele ostvariti maksimalnu moguću dobit, koristeći pritom raspoložive resurse.

Standardni problem maksimuma se matematički izražava na sljedeći način:

- maksimizacijom funkcije cilja

$$maxz = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \tag{3}$$

- poštivajući sljedeće uvjete:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \leq b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \end{gathered} \tag{4}$$

Standardni problem maksimuma rješava se na način da se izračunaju vrijednosti varijabli x_1, x_2, ..., x_k koje zadovoljavaju sva ograničenja i za koje funkcija cilja postiže maksimalnu vrijednost.

Standardni problem minimuma je oblik linearnog programiranja koji za glavni cilj ima minimizirati vrijednost funkcije cilja, uz poštivanje sustava ograničenja tip II (≥). Funkcija cilja u standardnom problemu minimuma ima sljedeći oblik:

$$minz = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \tag{5}$$

uz uvjete ograničenja:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \geq b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Pri rješavanju standardnog problema minimuma potrebno je izračunati vrijednosti varijabli x_1, x_2, ..., x_k za koje su zadovoljena sva ograničenja a za koje funkcija cilja postiže minimalnu vrijednost. Ovaj oblik linearnoga programiranja se koristi kako bi se odredio optimalni program proizvodnje a istovremeno minimizirao trošak proizvodnje.

1.2.3. Mješoviti problem

Mješoviti problem predstavlja poseban oblik općeg modela linearnog programiranja jer se u njemu pojavljuju ograničenja tipa I (≤) i ograničenja tipa II (≥), te ograničenja tipa III (=). Poduzeća ga koriste za izračun funkcije cilja, bilo maksimum ili minimum, uz postavljenu gornju granicu ograničenih raspoloživih resursa te donju granicu limitirajućeg uvjeta, a ukoliko su ograničenja tipa III znači da poduzeće treba iskoristiti sve raspoložive kapacitete. Mješoviti problem može biti mješoviti problem maksimuma i mješoviti problem minimuma.

Mješoviti problem maksimuma podrazumijeva izračun maksimalne vrijednosti funkcije cilja, pritom zadovoljavajući uvjete ograničenja tipa I, II i/ili III. U nastavku je prikazan matematički oblik mješovitoga problema maksimuma:

$$maxz = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \tag{7}$$

uz uvjete ograničenja:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \geq b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Potrebno je izračunati vrijednosti varijabli x_1, x_2, ..., x_k kojima će se ostvariti maksimalna vrijednost funkcije cilja, uz zadovoljenje svih zadanih ograničenja.

Dok se kod mješovitog problema minimuma računa minimalna vrijednost funkcije cilja, zadovoljavajući pri tome uvjete ograničenje u kojima se javljaju nejednadžbe oblika ≥ i/ili ≤, koje pripadaju ograničenjima tipa I i II, te jednadžbe oblika =, koje odgovaraju ograničenju tipa III. Matematički model mješovitoga problema minimuma dan je sljedećim izrazima:

$$minz = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \tag{9}$$

uz uvjete ograničenja:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \geq b_2$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \leq b_k \tag{10}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_k \geq 0$$

Pri rješavanju mješovitog problema minimuma potrebno je izračunati vrijednosti varijabla x_1, x_2, ..., x_k za koje se ostvaruje minimalna funkcija cilja uz zadovoljenje svih zadanih ograničenja.

1.2.4. Kanonski oblik

Polazni model i kanonski model linearnoga programiranja ekvivalentni su modeli. Kanonski oblik predstavlja specifičan oblik modela linearnoga programiranja, koji se dobije tako što se polazni model linearnoga programiranja transformira u istovjetan kanonski oblik tako što se sva ograničenja u obliku nejednadžbi pretvaraju u jednadžbe uvođenjem dodatnih varijabli.

Kako bi se nejednadžbe ≤ i ≥ transformirale u jednakost, uvode se dodatne ili dopunske varijable. Svakom ograničenju tipa I i II dodaje se jedna nova dodatna varijabla. Broj novouvedenih dodatnih varijabli jednak je broju ograničenja tipa I i II. Dodatne varijable moraju zadovoljavati uvjet nenegativnosti, a njihovi koeficijenti uz dodatne varijable u funkciji cilja iznose 0, kako ne bi utjecale na njenu vrijednost.

Umjetne varijable, za razliku od dodatnih varijabli, nemaju ekonomski značaj te njihova vrijednost u optimalnom rješenju linearnog programiranja mora biti 0. Da bi se osigurala vrijednost nula, umjetnim varijablama se u funkciji cilja dodjeljuje dovoljno mali broj u slučaju maksimuma, te dovoljno veliki u slučaju minimuma. Njihov koeficijent označuje se: $\pm M$.

Ukoliko se u problemu javlja ograničenje I tipa (≤) tada se dodaje dodatna varijabla sa znakom (+1), kako bi se izravnale lijeva i desna strana nejednadžbe.

Standardnom modelu linearnoga programiranja:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \geq b_2 \tag{11}$$

kako bi se transformirao u kanonski oblik, potrebno je uvesti dodatnu varijablu $x_{k+1} \geq 0$ za prvo ograničenje te $x_{k+2} \geq 0$ za drugo:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + x_{k+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + x_{k+2} = b_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Vrijednosti dodatnih varijabli x_{k+1} i x_{k+2} u optimalnom rješenju ukazuje na neiskorištenost resursa prvog i drugog ograničenja pri postizanju maksimalne vrijednosti funkcije cilja.

Kad se u problemu javlja ograničenje II tipa (≥) tada se oduzima neka pozitivna vrijednost kako bi se lijeva i desna strana nejednadžbe izjednačile, odnosno dodaju se dodatna varijabla sa znakom (-1) i umjetna varijabla sa znakom (+1).
Za transformaciju u kanonski oblik, standardnom modelu linearnoga programiranja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \leq b_2 \end{aligned} \tag{13}$$

potrebno je uvesti dodatnu varijablu $x_{k+1} \geq 0$ i umjetnu varijablu x_{k+1}^* za prvo ograničenje, te dodatna varijabla $x_{k+2} \geq 0$ kao i umjetna x_{k+2}^* za drugo:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + x_{k+1} + x_{k+1}^* = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + x_{k+2} + x_{k+2}^* = b_2 \end{aligned} \tag{14}$$

Kad se u problemu javlja ograničenje III tipa (=) ne uvode se dodatne varijable jer su lijeva i desna strane jednake, ali se uvodi umjetna varijabla x_{k+n}^* sa znakom (+1).

Dodatne varijable uvode se i u funkciju cilja, gdje njihovi koeficijenti iznose 0, a koeficijenti uz umjetne varijable u funkciji cilja minimuma iznose +M, dok u funkciji cilja maksimuma one iznose –M.

1.3.Teorija dualnosti i dualni problem

Svaki primarni problem linearnoga programiranja ima svoj dualni problem. S obzirom na određivanje ekstremne vrijednosti funkcije cilja, primarni i dualni problem nalaze se u inverznom odnosu, stoga, ako primarni problem ima za cilj maksimizirati funkciju cilja, tada će njegov dualni problem imati cilj minimizirati funkciju cilja i obrnuto.

Dualni problem ima onoliko strukturnih varijabli koliko je u primarnom problemu ograničenja, odnosno za svako ograničenje primarnog modela pridružuje se po jedna dualna varijabla. Također, dualni problem će imati onoliko ograničenja, koliko u primarnom problemu ima strukturnih varijabli, znači svakoj strukturnoj varijabli primarnog problema se pridružuje po jedna uvjetna nejednadžba. Ukoliko primarni problem nema rješenje tada ga nema ni dualni, isto tako ako primarni problem ima optimalno rješenje, tada će i njegov dual imati isto to optimalno rješenje.

U nastavku su navedena i opisana četiri najznačajnija teorema dualiteta, koji razmatraju odnose između primarnog i dualnog problema linearnoga programiranja.
Teorem o omeđenosti funkcija cilja primarnog problema i njegovog duala govori da ukoliko su x i y moguća rješenja primarnog i dualnog problema, tada je vrijednost funkcije cilja primarnog problema manja ili jednaka vrijednosti funkcije cilja dualnog problema. Matematički:

$$z(x) \leq w(y) \tag{15}$$

Teorem o kriteriju optimalnosti podučava da ukoliko moguća rješenja primarnog i dualnog problema iznose x^* i y^*, a za koje vrijedi $z(x^*) = w(y^*)$, tada su x^* i y^* optimalna rješenja primarnog i dualnog problema.

Temeljni teorem dualiteta govori da ukoliko ili primarni ili dualni problem imaju barem jedno moguće rješenje, tada i primarni i dualni problem imaju optimalna rješenja. Isto tako, ukoliko primarni problem nema moguće rješenje, tada niti dualni problem neće imati optimalno rješenje, i obrnuto.

Četvrti teorem, načelo oslabljene komplementarnosti, tvrdi da „ukoliko su x^* i y^* moguća rješenja primarnog i dualnog problema, tada su i optimalna rješenja ako i samo ako su zadovoljeni uvjeti:
– dualna strukturna varijabla je jednaka nuli kada je njoj odgovarajuća dodatna varijabla pozitivna u optimalnom rješenju primarnog problema te

– ukoliko je neka strukturna varijabla u optimalnom rješenju primarnog problema jednaka nuli onda je njoj odgovarajuća dodatna varijabla u optimalnom rješenju dualnog problema pozitivna.“ [3]

Pri formuliranju dualnog problema, u svrhu razlikovanja od njegovog primarnog problema, strukturne varijable umjesto x označavaju se sa y, a funkcija cilja dualnog problema označava se sa w, umjesto sa z. Ako se radi o primarnom problemu maksimuma tada će njegov dualni problem imati funkciju cilja minimuma, isto tako ukoliko je primarni problem minimum, dualni će biti maksimum. Sukladno tome, u dualnom problemu treba promijeniti smjer znakova nejednakosti u sustavu ograničenja.

Prilikom formuliranja dualnog problema „vrši se transponiranje matrice koeficijenata sustava ograničenja primarnog problema, na osnovu čega, ukoliko u primarnom problemu postoji m nejednadžbi sa n strukturnih varijabli, u dualnom problemu biti će n nejednadžbi sa m strukturnih varijabli. Koeficijenti uz strukturne varijable u funkciji cilja dualnog problema jednaki su slobodnim članovima sustava ograničenja primarnog problema, a slobodni članovi sustava nejednadžbi dualnoga problema jednaki su koeficijentima koji se nalaze uz strukturne varijable u funkciji cilja primarnog problema. Sve strukturne varijable dualnog problema moraju biti nenegativne veličine, zbog čega je i navedeni zahtjev prisutan i u dualnom problemu.“[4]

U nastavku su prikazani primarni problem te njegov dual:

$$\boldsymbol{maxz = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n}$$

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k \leq b_k \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered} \tag{16}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$$

[3] Baldigara T., Mamula M., Metode poslovnog odlučivanja u turizmu – nastavni e - materijal, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu, Opatija, 2018, str. 11

[4] Ibid.

$$\boldsymbol{minw = \ b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m}$$

$$\begin{gathered}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_k \geq b_1 \\
a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2m}y_k \geq b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mk}x_k \geq b_k \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_{mn} \geq b_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_1, y_2, \dots, y_k \geq 0
\end{gathered} \tag{17}$$

Kako bi se dokazala međusobna uvjetovanost rješenja primarnog i dualnog problema, oba oblika je potrebno transformirati u kanonski oblik, na način da se u primarni problem uvedu dodatne varijable $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ a u njegov dualni problem varijable $y_{m+1}, \dots, y_{m+n}$.

Kanonski oblik primarnog problema

$$\begin{gathered}
maxz = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i \qquad (i = 1, \dots, m) \\
x_j \geq 0 \qquad x_{n+1} \geq 0 \qquad (j = 1, \dots, n) \qquad (i = 1, \dots, m)
\end{gathered} \tag{18}$$

Kanonski oblik dualnog problema

$$\begin{gathered}
minw = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
\textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i + y_{m+1} = c_i \qquad (j = 1, \dots, n) \\
y_i \geq 0 \qquad y_{m+1} \geq 0 \qquad (i = 1, \dots, m) \qquad (j = 1, \dots, n)
\end{gathered} \tag{19}$$

Iz kanonskih oblika primarnog i dualnog problema vidljivo je kako svakoj dodatnoj varijabli primarnog problema odgovara jedna strukturna iz njegovog duala. Primarni i dualni problem imaju iste veličine za svoje parametre, ali im se ne nalaze na istim pozicijama. Tako maksimum funkcije cilja primarnog problema predstavlja minimum duala, dok minimum funkcije cilja primarnog problema odgovara maksimumu dualnog, slobodni članovi primara imaju iste veličine kao i koeficijenti funkcije cilja dualnog problema, a koeficijenti funkcije cilja primarnog odgovaraju slobodnim članovima duala.

Simetričnost veličina primarnog i dualnog problema javlja se samo u slučaju standardnog oblika linearnoga programiranja, odnosno pri maksimizaciji funkcije cilja uz ograničenja I tipa i uvjet nenegativnosti, te pri minimizacijij funkcije cilja uz ograničenja II tipa i uvjet nenegativnosti. Ukoliko problem nije standardan, moguće ga je transformirati na način da se „ograničenje tipa „≥“ pretvori u „≤“, ili obratno i to množenjem nejednadžbe sa (-1), te da se ograničenje u obliku jednakosti pretvori u dvije nejednadžbe tipa „≤“ te „≥“, prema potrebi, s međusobno suprotnim koeficijentima.“[5]

1.4. Primjena Simpleks metode u rješavanju problema linearnoga programiranja

Simpleks metoda najčešće se koristi pri rješavanju problema linearnog programiranja, iz razloga što je prikladna za rješavanje problema s više nepoznanica i moguće ju je primijeniti u svim tipovima ograničenja. Njen utemeljitelj je američki matematičar George Dantzig.

Interaktivnost, kao glavna značajka simpleks metde, predstavlja proces niza koraka kroz koje se poboljšava polazno rješenje sve dok se ne izračuna optimalno rješenje. Svako novo dobiveno bazično rješenje u problemu maksimuma, prikazuje da je trenutna vrijednost funkcije cilja veća ili jednaka vrijednosti iz prethodnog koraka, dok kod problema minimuma svako novo bazično rješenje je jednako ili manje od prethodnoga. Simpleks metoda obuhvaća četiri iteracije, prva se odnosi na izradu početnog rješenja, nakon čega u drugoj iteraciji rješenje podliježe testu optimalnosti. U trećoj iteraciji, ukoliko rješenje nije optimalno, nastavlja se s poboljšanjem

[5] Baldigara T., Mamula M., Metode poslovnog odlučivanja u turizmu – nastavni e - materijal, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu, Opatija, 2018, str. 13

rješenje sve dok se ne dobije optimalno rješenje u četvrtoj iteraciji, ili se utvrdi da rješenja nema.

Rješavanje problema, uz pomoć simpleks metode, započinje zapisivanjem zadanog problema u primarni (matematički) oblik, a nakon toga dobiveni primarni oblik transformira se u kanonski oblik.

Primarni oblik standardnog problema maksimuma:

$$\boldsymbol{max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n}$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{gathered} \tag{20}$$

U svrhu dobivanja kanonskog oblika problema, u ograničenja primarnog oblika uvode se dodatne varijable kao i u funkciju cilja i to sa koeficijentom 0, kako je prikazano u nastavku:

$$\boldsymbol{max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + 0 x_{n+1} + 0 x_{n+m}}$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{gathered} \tag{21}$$

Uzimajući vrijednosti varijabli iz kanonskog oblika, formira se nulta simpleks tabela, odnosno početno bazično rješenje. To se čini na način da se za strukturne varijable unosi vrijednost 0, a za dodatne varijable vrijednosti slobodnih koeficijenata sustava ograničenja. U prvi stupac ST0 (c_B) unose se vrijednosti dodatnih varijabli iz kanonskog oblika, koje ujedino predstavljaju i bazične varijable čija vrijednost u početnom baznom rješenju iznosi 0. U idući stupac (α_0) upisuju se dodatne varijable x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}, koje u baznom rješenju odgovaraju baznim varijablama. U treći stupac (X_B) unose se vrijednosti slobodnih članova s desne strane u ograničenju, koje predstavljaju vrijednosti raspoloživih resursa. U idućim stupcima unose se odgovarajuće vrijednosti koje se u sustavu ograničenja nalaze pored pojedine varijable $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$.

U prvi red (C_j) početne simpleks tabele unose se vrijednosti koeficijenata varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ iz funkcije cilja. Predzadnji redak iz tabele (z_j) računa se kao suma umnožaka vrijednosti prvog stupca (C_j) i vrijednosti baznih varijabli iz svakog stupca pojedinačno. U posljednjem redu ($c_j - z_j$) određuje se razlika vrijednosti iz prvog i predzadnjeg reda za svaki stupac pojedinačno, te ona predstavlja kriterij optimalnosti. Dobivena vrijednost u problemu maksimuma prikazuje za koliko bi se povećala vrijednost funkcije cilja ukoliko bi se u bazu uvrstila jedna jedinica odgovarajuće varijable, dok kod problema minimuma ona prikazuje za koliko bi se smanjila vrijednost funkcije cilja. U baznom rješenju njena vrijednost uvijek je jednaka 0.

Slijedeći navedene korakte formira se početna simpleks tabela:

Tablica 1. *Početna simpleks tabela ST0*

C_j			c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0
c_B	α_0	X_B	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_{n+m}
0	X_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0
0	X_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	X_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1
z_j		z	z_1	z_2	...	z_n	z_{n+1}	z_{n+2}	...	z_{n+m}
$c_j - z_j$			$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	...	$c_n - z_n$	$c_{n+1} - z_{n+1}$	$c_{n+2} - z_{n+2}$	...	$c_{n+m} - z_{n+m}$

Izvor: Baldigara, T. i Mamula M., Metode poslovnog odlučivanja u turizmu – nastavni e – materijal, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu, Opatija, 2018., str. 43

Kako bi se izračunalo optimalno rješenje linearnoga programiranja u svakoj novoj iteraciji mijenja se struktura baze, na način da određene nebazične varijable ulaze u bazu i obrnuto, dok vrijednost funkcije cilja, za problem maksimuma, u svakoj novoj iteraciji mora biti jednaka ili veća od prethodne, te kod problema minimuma vrijednost mora biti jednaka ili manja od prethodne. Prvi korak iteracije odnosi se na određivanje prethodno nebazične varijable koja će ući u bazu. Za problem maksimuma u novu bazu uključuje se prethodno nebazična varijabla koja ima najveću pozitivnu razliku u zadnjem retku prethodne tabele $(c_j - z_j)$. Kada razlika $(c_j - z_j)$ nema niti jednu pozitivnu vrijednost, tada se ne prelazi na novu iteraciju već se zaključuje optimalno rješenje. Drugi korak u iteraciji jest određivanje prethodno bazične varijable koja će napustiti bazu. „Uklanjanje prethodno bazične varijable ostvaruje se kako slijedi: odredi se karakteristični stupac simpleks tabele, koji odgovara varijabli koja ulazi u bazu; odredi se vrijednost kvocijenta između varijabli iz kolone xB i pozitivnih koeficijenata iz karakterističnoga stupca; te isključivanje iz baze one varijable kojoj odgovara najmanja vrijednost ovako određenoga koeficijenta, temeljem čega se redak simpleks tabele koji odgovara ovoj varijabli smatra karakterističnim retkom.“[6]

Nakon određivanja karakterističnog stupca i karakterističnog retka, na njihovom sjecištu nalazi se karakterističan element (a_{lk}). Idući korak u iteraciji jest utvrditi vrijednosti varijabli korištenjem idućih formula:

Za novouvedene varijable:

$$x_k = \frac{b_l}{a_{lk}} \text{ , } a_{lk} > 0 \tag{22}$$

Dobivena vrijednost odgovara minimalnoj vrijednosti kvocijenta iz prethodnog rješenja.

Za vrijednosti preostalih varijabli:

$$x_r = b_r - \frac{b_l}{a_{lk}} \cdot a_{rk} \tag{23}$$

Vrijednost ostalih varijabli (x_r) jednaka je razlici vrijednosti varijable iz prethodne iteracije i umnoška vrijednosti novouvedene i odgovarajućeg koeficijenta iz karakterističnog stupca.

Nakon utvrđivanja vrijednosti varijabli, potrebno je izračunati vrijednosti koeficijenata za novu simpleks tabelu. Koeficijenti iz karakterističnog retka računaju se na način da im se prethodna vrijednost podijeli sa karakterističnim elementom:

[6] Baldigara T., Mamula M., Metode poslovnog odlučivanja u turizmu – nastavni e - materijal, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu, Opatija, 2018, str. 46

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{lk}} \tag{24}$$

dok se koeficijenti u ostalim recima simpleks tabele računaju tzv. kružnom transformacijom, prema sljedećoj formuli:

$$a'_{rj} = a_{rj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \cdot a_{rk} \tag{25}$$

U zadnjem koraku iteracije utvrđuje se vrijednost funkcije cilja z, kao i vrijednosti svih z_j. Vrijednost funkcije cilja dobiva se umnoškom koeficijenta funkcije cilja sa odgovarajućim vrijednostima varijabli. Nakon što su izračunate sve z_j vrijednosti, računa se posljednji red tabele $(c_j - z_j)$ koji predstavlja kriterij optimalnosti. Kad su u tom, posljednjem redu, sve dobivene vrijednosti negativne ili jednake 0 govori se o optimalnom rješenju.

2. Postoptimalna analiza

Nakon određivanja optimalnog rješenja problema linearnoga programiranja, a usljed promjena u poslovanju, kao što su primjerice dodavanje dodatnih radnih sati, proizvodnja manje količine promatranih proizvoda, uvođenje novog proizvoda u program, smanjenje troškova energenata u proizvodni i slično, postavlja se pitanje da li će i na koji način te promjene utjecati na već dobiveno optimalno rješenje.

Postupkom postoptimalne analize ispituje se koje će se promjene dogoditi ukoliko se promijeni vrijednost nekog od parametra problema linearnoga programiranja u odnosu na dobiveno optimalno rješenje problema. Analiziraju se moguće promjene vrijednosti koeficijenata funkcije cilja, slobodnih članova sustava ograničenja kao i koeficijenata uz varijable unutar sustava ograničenja.

Postoje dva moguća ishoda postoptimalne analize. A to je da će prethodno određeno optimalno rješenje ostati nepromjenjeno, odnosno optimalno, ukoliko dođe do promjene u vrijednostima određenih parametara modela. Odnosno, izračunato rješenje više neće biti optimalno dođe li do promjene vrjednosti parametara problema linearnoga programiranja, te je u tom slučaju potrebno odrediti novo optimalno rješenje promjenom baze.

U postoptimalnoj analizi, optimalni raspon određuje donju i gornju granicu vrijednosti unutar kojih će rješenje ostati optimalno. Odnosno, ukoliko se vrijednosti promjenjenih varijabli nalaze u optimalnom rasponu, njihova promjena neće utjecati na dobiveno optimalno rješenje. Raspon izvedivosti, koji se odnosi na sustav ograničenja, određuje granice unutar kojih se dualne cijene, odnosno granični troškovi, neće mijenjati. Točnije, ukoliko se promijeni jedna jedinica ograničenja tada se vrijednost funkcije cilja mijenja za iznos dualne cijene u vidu povećanja ili smanjenja dobiti.
Menadžeri koriste postoptimalnu analizu kako bi im bilo jasnije koliko prostora imaju za promjene u svom poslovanju a da pri tom ne naruše optimalan program proizvodnje.

3. Određivanje optimalnoga programa proizvodnje u ugostiteljskom objektu

U ovom djelu završnog rada prikazano je korištenje linearnoga programiranja u ugostiteljskom objektu, s ciljem određivanja optimalnoga programa ugostiteljskoga objekta koji će omogućiti postizanje maksimalne moguće dobiti.

Ugostiteljski objekt svoj prihod ostvaruje prodajom *pizza*, kao i toplih i hladnih napitaka, dok joj troškove poslovanja predstavljaju potrošnja energenata (struja, voda, grijanje), održavanje strojeva i opreme potrebne za rad, materijali odnosno namirnice neophodne za rad, zaposlenici, promocija i slično.

Cilj empirijskog istraživanja u ovom završnom radu jest određivanje optimalnoga programa proizvodnje u ugostiteljskom objektu, promatrajući pet najprodavanijih *pizza*, u svrhu postizanja najefikasnijih poslovnih rezultata. Problem je postavljen kao standardni problem maksimuma, a za njegovo rješavanje korištena je simpleks metoda kao i POM-QM računalna potpora.

3.1. Postavljanje modela optimalnog programa proizvodnje

U završnom radu predstavljen je postupak određivanja optimalnoga programa proizvodnje uz pomoć simpleks metode u ugostiteljskom objektu, promatrajući pet najprodavanijih vrsta *pizza*. To su *pizza* Margherita (A), *pizza* Vesuvio (B), *pizza* Capricciosa (C), *pizza* Mexicana (D) te Slavonska *pizza* (E). U procesu pripreme svaka *pizza* prolazi kroz tri faze: I. priprema namirnica, II. razvlačenje tijesta i pravljenje *pizze* i III. pečenje *pizze*. U prvoj fazi pripreme namirnica za *pizzu* A potrebno je uložiti 2 minute, kao i za *pizzu* B, za *pizze* C i E potrebne su 4 minute dok je 5 minuta potrebno za pripremu namirnica za *pizzu* D. Maksimalni dnevni fond sati za prvu fazu iznosi 220 minuta. U drugoj fazi pripreme za *pizze* A i B potrebna je 1 minuta dok za preostale *pizze* potrebne su 2 minute, maksimalni dnevni fond za drugu fazu iznosi 200 minuta. Za pečenje *pizza* potrebno je 3 minute, neovisno o vrsti, a maksimalni dnevni fond za ovu fazu iznosi 300 minuta. Dobit po jednoj prodanoj *pizzi* A iznosi 45 kuna, za *pizzu* B 48 kuna, za *pizzu* C 50 kuna, za *pizzu* D 58 kuna i za *pizzu* E dobit iznosi 54 kuna. Podaci su prikazani u sljedećoj tablici.

Tablica 2. *Zadani problem*

	POTREBNO VRIJEME (minuta)					MAKSIMALNI DNEVNI FOND (minuta)
FAZA	A	B	C	D	E	
I	2	2	4	5	4	220
II	1	1	2	2	2	200
III	3	3	3	3	3	300
DOBIT	45	48	50	58	54	
NEPOZNANICE	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

Izvor: izrada autorice

Određivanje optimalnog plana proizvodnje započinje postavljanjem polaznog standardnoga problema maksimuma, a temeljem raspoloživih podataka:

$$maxz = 45x_1 + 48x_2 + 50x_3 + 58x_4 + 54x_4$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 220$$
$$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_3 + 2\mathrm{x}_4 + 2\mathrm{x}_5 \leq 200$$
$$3\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 + 3\mathrm{x}_3 + 3\mathrm{x}_4 + 3\mathrm{x}_5 \leq 300$$
$$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4, \mathrm{x}_5 \geq 0$$

3.2. Rješavanje postavljenoga modela standardnoga problema maksimuma primjenom simpleks metode

Za primjenu simpleks metode u rješavanju postavljenog problema, potrebno je polazni problem pretvoriti u kanonski oblik kako je prikazano u nastavku:

$$maxz = 45x_1 + 48x_2 + 50x_3 + 58x_4 + 54x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 = 220$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_7 = 200$$
$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_8 = 300$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Na temelju kanonskog oblika polaznog modela izrađuje se polazna simpleks tablica prikazana u nastavku.

Tablica 3. *ST0*

cj			45	48	50	58	54	0	0	0
C_B	α_o	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_6	220	2	2	4	[5]	4	1	0	0
0	x_7	200	1	1	2	2	2	0	1	0
0	x_8	300	3	3	3	3	3	0	0	1
zj		0	0	0	0	0	0	0	0	0
cj-zj			45	48	50	58	54	0	0	0

Izvor: izrada autorice

Izračun vrijednosti funkcije cilja za bazično rješenje:

$$z = (0 \cdot 220) + (0 \cdot 200) + (0 \cdot 300) = 0$$

$$z_1 = (0 \cdot 2) + (0 \cdot 1) + (0 \cdot 3) = 0$$

$$z_2 = (0 \cdot 2) + (0 \cdot 1) + (0 \cdot 3) = 0$$

$$z_3 = (0 \cdot 4) + (0 \cdot 2) + (0 \cdot 3) = 0$$

$$z_4 = (0 \cdot 5) + (0 \cdot 2) + (0 \cdot 3) = 0$$

$$z_5 = (0 \cdot 4) + (0 \cdot 2) + (0 \cdot 3) = 0$$

$$z_6 = (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = 0$$

$$z_7 = (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0) = 0$$

$$z_8 = (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = 0$$

Vrijednost funkcije cilja iznosi 0 kuna.

Vrijednost varijabli u bazičnom rješenju iznosi:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 220, \; x_7 = 200, x_8 = 300$

Izračunom vrijednosti retka $c_j - z_j$ ispituje se optimalnost rješenja:

$c_1 - z_1 = 45 - 0 = 45$ $\quad c_4 - z_4 = 58 - 0 = \mathbf{58}$ $\quad c_7 - z_7 = 0 - 0 = 0$

$c_2 - z_2 = 48 - 0 = 48$ $\quad c_5 - z_5 = 54 - 0 = 54$ $\quad c_8 - z_8 = 0 - 0 = 0$

$c_3 - z_3 = 50 - 0 = 50$ $\quad c_6 - z_6 = 0 - 0 = 0$

Rezultati testiranja optimalnosti upućuju na neoptimalnost dobivenoga rješenja. Pristupa se stoga, poboljšanju rješenja u sljedećoj iteraciji prema utvrđenoj metodologiji.

Određivanje varijable (prethodno nebazične) koja će ući u bazu

Slijedi izrada prve simpleks tablice, za čiju izradu je potrebno odrediti koja nebazična varijabla ulazi u bazu nove ST1 tabele. Stupac x_4 ima najveću pozitivnu vrijednost 58 i predstavlja karakterističan stupac. Što znači da bi se, ukoliko bi ju uvrstili u bazu, funkcija cilja povećala za 58 kuna.

Određivanje varijable (prethodno bazične) koja će napustiti bazu

Karakteristični redak predstavlja varijablu koja izlazi iz baze i to je ona čiji je koeficijent najmanji:

$\frac{220}{5} = \mathbf{44}$ $\quad$ $\frac{200}{2} = 100$ $\quad$ $\frac{300}{3} = 100$

Iz baze izlazi varijabla x_6. Baza prve simpleks tablice stoga sadrži varijable x_4, x_7 i x_8.

Utvrđivanje vrijednosti varijabli u novom poboljšanom rješenju, odnosno novoj simpleks tabeli

Nove vrijednosti varijabli u prvoj simpleks tabeli izračunaju se izrazom:

$$xB_{x_7} = 200 - 44 * 2 = 112$$

$$xB_{x_8} = 300 - 44 * 3 = 168$$

Utvrđivanje vrijednosti koeficijenata nove simpleks tabele

S obzirom da vrijednost karakterističnoga retka mora biti 1, potrebno je karakteristični redak podijeliti s brojem 5:

0		220	2	2	4	[5]	4	1	0	0
: 5										
0		44	0,4	0,4	0,8	[1]	0,8	0,2	0	0

Vrijednosti ostalih koeficijenata u novoj simpleks tablici dobiju se:

	drugi red (x_7)	treći red (x_8)
prvi stupac (x_1)	$1 - 2 \cdot \frac{2}{5} = 0{,}2$	$3 - 3 \cdot \frac{2}{5} = 1{,}8$
drugi stupac (x_2)	$1 - 2 \cdot \frac{2}{5} = 0{,}2$	$3 - 3 \cdot \frac{2}{5} = 1{,}8$
treći stupac (x_3)	$2 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 0{,}4$	$3 - 3 \cdot \frac{4}{5} = 0{,}6$
četvrti stupac (x_4)	$2 - 2 \cdot \frac{5}{5} = 0$	$3 - 3 \cdot \frac{5}{5} = 0$

peti stupac (x_5) $2 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 0{,}4$ $3 - 3 \cdot \frac{4}{5} = 0{,}6$

šesti stupac (x_6) $0 - 2 \cdot \frac{1}{5} = -0{,}4$ $0 - 3 \cdot \frac{1}{5} = -0{,}6$

sedmi stupac (x_7) $1 - 2 \cdot \frac{0}{5} = 1$ $0 - 3 \cdot \frac{0}{5} = 0$

osmi stupac (x_8) $0 - 2 \cdot \frac{0}{5} = 0$ $1 - 3 \cdot \frac{0}{5} = 1$

Nakon pojedinih izračuna dobije se prva simpleks tablica. Dobivene podatke uvrštavamo u prvu simpleks tabelu ST1.

Tablica 4. *ST1*

cj			45	48	50	58	54	0	0	0
C_B	α_1	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
58	x_4	44	0,4	0,4	0,8	1	0,8	0,2	0	0
0	x_7	112	0,2	0,2	0,4	0	0,4	-0,4	1	0
0	x_8	168	1,8	[1,8]	0,6	0	0,6	-0,6	0	1
zj		2.552	23,2	23,2	46,4	58	46,4	11,6	0	0
cj-zj			21,8	24,8	3,6	0	7,6	-11,6	0	0

Izvor: izrada autorice

Slijedi izračun vrijednosti funkcije cilja ST1 pomoću izraza:

$z = (58 \cdot 44) + (0 \cdot 112) + (0 \cdot 168) = 2\,552$

$z_1 = (58 \cdot 0{,}4) + (0 \cdot 0{,}2) + (0 \cdot 1{,}8) = 23{,}2$

$z_2 = (58 \cdot 0{,}4) + (0 \cdot 0{,}2) + (0 \cdot 1{,}8) = 23{,}2$

$z_3 = (58 \cdot 0{,}8) + (0 \cdot 0{,}4) + (0 \cdot 0{,}6) = 46{,}4$

$z_4 = (58 \cdot 1) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = 58$

$z_5 = (58 \cdot 0{,}8) + (0 \cdot 0{,}4) + (0 \cdot 0{,}6) = 46{,}4$

$z_6 = (58 \cdot 0{,}2) + (0 \cdot (-0{,}4)) + (0 \cdot 1{,}8) = 23{,}2$

$z_7 = (58 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0) = 0$

$z_8 = (58 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = 0$

Vrijednost funkcije cilja se povećala sa nula na 2 552 kuna.

Vrijednost varijabli u prvom bazičnom rješenju iznose:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 44, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 112, x_8 = 168$

U svrhu ispitivanja optimalnosti se izračunavaju vrijednosti retka $c_j - z_j$:

$c_1 - z_2 = 45 - 23{,}2 = 21{,}8$ $\quad c_4 - z_4 = 58 - 58 = 0$ $\quad c_7 - z_7 = 0 - 0 = 0$

$c_2 - z_2 = 45 - 23{,}2 = \mathbf{24{,}8}$ $\quad c_5 - z_5 = 54 - 46{,}4 = 7{,}6$ $\quad c_8 - z_8 = 0 - 0 = 0$

$c_3 - z_3 = 50 - 46{,}4 = 3{,}6$ $\quad c_6 - z_6 = 0 - 11{,}6 = -11{,}6$

Testiranje optimalnosti ukazuje da rješenje nije optimalno. Prelazi se stoga na sljedeću iteraciju.

Određivanje varijable (prethodno nebazične) koja će ući u bazu

U retku $c_j - z_j$ stupac x_2 ima najveću vrijednost, koja iznosi 24,8, što znači da on ulazi u bazu druge simpleks tabele te postaje karakterističan stupac tabele ST1.

Određivanje varijable (prethodno bazične) koja će napustiti bazu

Izračun karakterističnog retka ST1 tabele:

$\frac{44}{0{,}4} = 110$ $\qquad \frac{112}{0{,}2} = 560$ $\qquad \frac{168}{1{,}8} = \mathbf{93{,}3}$

Varijabla čiji je koeficijent najmanji i koja izlazi iz baze jest varijabla x_8. Baza druge simpleks tablice stoga sadrži varijable x_4, x_7 i x_2.

Na sjecištu karakterističnog retka i karakterističnog stupca ST1 nalazi se karakteristični element koji iznosi 1,8.

Utvrđivanje vrijednosti varijabli u novom poboljšanom rješenju, odnosno novoj simpleks tabeli

Nove vrijednosti varijabli u drugoj simpleks tabeli dobiju se izrazom:

$$xB_{x_4} = 44 - 93{,}33 \cdot 0{,}4 = 6{,}67$$

$$xB_{x_7} = 112 - 93{,}33 \cdot 0{,}2 = 93{,}33$$

Utvrđivanje vrijednosti koeficijenata nove simpleks tabele

Karakteristični redak potrebno je podijeliti sa 1,8 kako bi karakteristični element iznosio 1.

0	x_8	168	1,8	[1,8]	0,6	0	0,6	-0,6	0	1
					: 1,8					
0		93,3	1	[1]	0,3	0	0,3	-0,3	0	0,56

Izračun vrijednosti ostalih koeficijenata u novoj simpleks tablici:

	prvi red (x_4)	drugi red (x_7)
prvi stupac (x_1)	$0{,}4-0{,}4\cdot\frac{1{,}8}{1{,}8}=0$	$0{,}2-0{,}2\cdot\frac{1{,}8}{1{,}8}=0$
drugi stupac (x_2)	$0{,}4-0{,}4\cdot\frac{1{,}8}{1{,}8}=0$	$0{,}2-0{,}2\cdot\frac{1{,}8}{1{,}8}=0$
treći stupac (x_3)	$0{,}8-0{,}4\cdot\frac{0{,}6}{1{,}8}=0{,}67$	$0{,}4-0{,}2\cdot\frac{0{,}6}{1{,}8}=0{,}33$
četvrti stupac (x_4)	$1-0{,}4\cdot\frac{0}{1{,}8}=1$	$0-0{,}2\cdot\frac{0}{1{,}8}=0$
peti stupac (x_5)	$0{,}8-0{,}4\cdot\frac{0{,}6}{1{,}8}=0{,}67$	$0{,}4-0{,}2\cdot\frac{0{,}6}{1{,}8}=0{,}33$
šesti stupac (x_6)	$0{,}2-0{,}4\cdot\frac{-0{,}6}{1{,}8}=0{,}33$	$-0{,}4-0{,}2\cdot\frac{-0{,}6}{1{,}8}=-0{,}33$
sedmi stupac (x_7)	$0-0{,}4\cdot\frac{0}{1{,}8}=0$	$1-0{,}2\cdot\frac{0}{1{,}8}=1$
osmi stupac (x_8)	$0-0{,}4\cdot\frac{1}{1{,}8}=-0{,}22$	$0-0{,}2\cdot\frac{1}{1{,}8}=-0{,}11$

Izračunate podatke uvrštavamo u drugu simpleks tablicu.

Tablica 5. *ST2*

Cj			45	48	50	58	54	0	0	0
C_B	α_2	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
58	x_4	6,67	0	0	0,67	1	0,67	0,33	0	-0,22
0	x_7	93,33	0	0	0,33	0	0,33	-0,33	1	-0,11
48	x_2	93,33	1	1	0,33	0	0,33	-0,33	0	0,56
zj		4.866,7	48	48	54,7	58	54,7	3,3	0	14,12
cj-zj			-3	0	-4,7	0	-0,7	-3,3	0	-14,12

Izvor: izrada autorice

Vrijednost funkcije cilja: $z=(58\cdot 6{,}67)+(0\cdot 93{,}33)+(48\cdot 93{,}33)=4\,866{,}7$

$$z_1 = (58\cdot 0)+(0\cdot 0)+(48\cdot 1) = 48$$

$$z_2 = (58\cdot 0)+(0\cdot 0)+(48\cdot 1) = 48$$

$$z_3 = (58\cdot 0{,}67)+(0\cdot 0{,}33)+(48\cdot 0{,}33) = 54{,}7$$

$$z_4 = (58\cdot 1)+(0\cdot 0)+(48\cdot 0) = 58$$

$$z_5 = (58\cdot 0{,}67)+(0\cdot 0{,}33)+(48\cdot 0{,}33) = 54{,}7$$

$$z_6 = (58\cdot 0{,}33)+(0\cdot(-0{,}33))+(48\cdot(-0{,}33)) = 3{,}3$$

$$z_7 = (58\cdot 0)+(0\cdot 1)+(48\cdot 0) = 0$$

$$z_8 = (58\cdot(-0{,}22))+(0\cdot(-0{,}11)+(48\cdot 0{,}56) = 14{,}12$$

Vrijednost funkcije cilja se povećala sa 2 552 kuna na 4 866,7 kuna.

$$maxz = 4\,866{,}7 \text{ kuna}$$

Vrijednost varijabli u drugom baznom rješenju iznose:

$$x_1 = 0, x_2 = 93{,}33, x_3 = 0, x_4 = 6{,}67, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 93{,}33, x_8 = 0$$

Prikazan je izračun vrijednosti retka $c_j - z_j$, u svrhu testiranja optimalnosti rješnja:

c_1-z_1 = 45-48 = -3 c_4-z_4 = 58-58 = 0 c_7-z_7 = 0-0 = 0

c_2-z_2 = 48-48 = 0 c_5-z_5 = 54-54,7 = -0,7 c_8-z_8 = 0-14,12 = -14,12

c_3-z_3 = 50-54,7 = -4,7 c_6-z_6 = 0-3,3 = -3,3

U posljednjem retku tabele ST2 sva rješenja su negativna ili jednaka nuli, što znači da je dobiveno drugo bazično rješenje optimalno.

3.3. Analiza optimalnoga plana proizvodnje

Prema dobivenome optimalnome planu ugostiteljski objekt mora dnevno proizvesti 93,33 *pizze* Vesuvio po cijeni od 48 kuna te 6,67 *pizza* Mexicana po cijeni od 58 kuna, kako bi se ostvarila maksimalna dnevna dobit koja iznosi 4 866,7 kuna. Pri takvom optimalnom planu u II fazi pripreme ostaje neiskorišteno 93,33 minute, dok je vrijeme u ostale dvije faze u potpunosti iskorišteno.

$$48 \cdot 93{,}33 + 58 \cdot 6{,}67 = 4\ 866{,}7$$

Analiza ispunjenosti ograničenja:

1. ograničenje

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 220$$
$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 93{,}33 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 6{,}67 + 4 \cdot 0 = 220$$
$$220 = 220$$

Za fazu pripreme namirnica raspoloživo je 220 minuta dnevno, koje su prema optimalnom programu u potpunosti iskorištene.

2. ograničenje

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 200$$
$$0 + 93{,}33 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 6{,}67 + 0 = 200$$
$$106{,}67 \neq 200$$
$$200 - 106{,}67 = 93{,}33$$

Ovo ograničenje nije u potpunosti iskorišteno, ugostiteljski objekt za II fazu pripreme ima na raspolaganju 200 minuta dnevno, dok je ovim optimalnim programom iskorišteno 106,67 minuta, a 93,33 minute ostaju neiskorištene.

3. ograničenje

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 300$$
$$3 \cdot 0 + 3 \cdot 93{,}33 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 6{,}67 + 3 \cdot 0 = 300$$
$$300 = 300$$

Ugostiteljski objekt za III fazu pečenja *pizza* raspolaže sa 300 minuta dnevno, koje u potpunosti iskorištava uz ovaj optimalni program.

Potpuno iskorištena ograničenja, u ovom slučaju to su prvo i treće ograničenje, predstavljaju usko grlo programa. Dok se drugo ograničenje koje je ostalo neiskorišteno naziva nevezano ograničenje.

U nastavku je prikazano rješenje promatranog linearnog problema uz pomoć računalnog programa POM-QM, čime je ujedno i napravljena provjera rezultata dobivenih simpleks metodom.

Prvi korak pri rješavanju problema u POM-QM programu je odabir *Linear Programming* opcije u padajućem izborniku programa. Zatim je potrebno otvoriti novi dokument u koji se upisuje *Number of Contraints* odnosno broj ograničenja kojih je u ovom primjeru tri, pri tom ne uključujući uvjet nenegativnosti. Iduće se upisuje *Number of Variables*, odnosno broj varijabli kojih u ovom problemu ima pet. Naposljetku se odabire funkcije cilja u dijelu prozorčića pod nazivom *Objective*, u ovom slučaju radi se o standardnom problemu maksimuma te se bira opcija *Maximize.*

Nakon odabira početnih postavki problema, u redak naziva *Maximize,* upisuju se svi koeficijenti koji se nalaze uz strukturne varijable funkcije cilja. U retke pod nazivom *Contraint 1,2 i 3* upisuju se koeficijenti iz sustava ograničenja, dok se slobodni koeficijenti koji se nalaze s desne strane ograničenja upisuju u stupac pod nazivom *RHS*, kako je prikazano na slici 1.

Slika 1. Postavljanje modela u POM-QM računalnoj potpori

	A	B	C	D	E		RHS	Equation form
Maximize	45	48	50	58	54			Max 45A + 48B + 50C + 58D + 54E
Constraint 1	2	2	4	5	4	<=	220	2A + 2B + 4C + 5D + 4E <= 220
Constraint 2	1	1	2	2	2	<=	200	A + B + 2C + 2D + 2E <= 200
Constraint 3	3	3	3	3	3	<=	300	3A + 3B + 3C + 3D + 3E <= 300

Izvor: POM-QM program

Nakon što se unesu svi podaci i numeričke vrijednosti modela, odabire se opcija *Solve* nakon čega program ispisuje izračunato optimalno rješenje, a koje je prikazano na drugoj slici.

Slika 2. Optimalno rješenje dobiveno POM-QM računalnom potporom

Cj	Basic Variables	Quantity	45 X1	48 X2	50 X3	58 X4	54 X5	0 slack 1	0 slack 2	0 slack 3
0	slack 1	220	2	2	4	5	4	1	0	0
0	slack 2	200	1	1	2	2	2	0	1	0
0	slack 3	300	3	3	3	3	3	0	0	1
	zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	cj-zj		45	48	50	58	54	0	0	0
Iteration 2										
58	X4	44	0,4	0,4	0,8	1	0,8	0,2	0	0
0	slack 2	112	0,2	0,2	0,4	0	0,4	-0,4	1	0
0	slack 3	168	1,8	1,8	0,6	0	0,6	-0,6	0	1
	zj	2.552	23,2	23,2	46,4	58	46,4	11,6	0	0
	cj-zj		21,8	24,8	3,6	0	7,6	-11,6	0	0
Iteration 3										
58	X4	6,6667	0	0	0,6667	1	0,6667	0,3333	0	-0,2222
0	slack 2	93,3333	0	0	0,3333	0	0,3333	-0,3333	1	-0,1111
48	X2	93,3333	1	1	0,3333	0	0,3333	-0,3333	0	0,5556
	zj	4.866,6666	48	48	54,6667	58	54,6667	3,3333	0	13,7778
	cj-zj		-3,0	0	-4,6667	0	-0,6667	-3,3333	0	-13,7778

Izvor: POM-QM program

Na slici 2 je prikazano optimalno rješenje koje iznosi 4 866,7 kuna, što je i ranije utvrđeno, Također, je prikazano kako se optimalno rješenje dobije u drugoj simpleks tablici, odnosno u trećoj iteraciji. Slika pod brojem 3, prikazuje vrijednosti strukturnih i dodatnih varijabli, te vrijednost funkcije cilja.

Slika 3. Optimalno rješenje

Variable	Status	Value
X1	NONBasic	0
X2	Basic	93,3333
X3	NONBasic	0
X4	Basic	6,6667
X5	NONBasic	0
slack 1	NONBasic	0
slack 2	Basic	93,3333
slack 3	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		4866,667

Izvor: POM-QM program

Na slici 3 u prvom stupcu prikazane su strukturne varijable, to su varijable x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5, te dodatne varijable *slack 1, slack 2* i *slack 3,* odnosno x_6, x_7 i x_8. U srednjem stupcu navedene su varijable koje su u bazi, a to su stukturne varijable x_2, i x_4, te dodatna varijabla x_7, dok su preostale varijable nebazične. U zadnjem stupcu prikazane su vrijednosti varijabli: $x_1 = 0$, $x_2 = 93{,}33$, x_3=0, $x_4 = 6{,}67$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 93{,}33$, $x_8 = 0$, te vrijednost funkcije cilja odnosno *Optimal Value* $z = 4\,866{,}67$ kuna. Iz dobivenog optimalnog rješenja u programu da se iščitati da je optimalni program ponude ugostiteljskog objekta, uz uvažavanje danih ograničenja resursa, onaj u kojem se dnevno proizvede 93,33 *pizze* Vesuvio i 6,67 *pizza* Mexicana, dok se preostale tri *pizze* Margherita, Capricciosa i Slavonska uopće ne bi trebale proizvoditi, kako bi se ostvarila maksimalna dnevna dobit u iznosu od 4 866,7 kuna. Prikazane vrijednosti dodatnih varijabli u programu ukazuju da je u drugom ograničenju, koje se odnosi na vrijeme potrebno za razvlačenje tijesta i pravljenje *pizza*, preostalo 93,33 neiskorištenih minuta, dok su ostala dva ograničenja u potpunosti iskorištena.

Dualni problem

Ugostiteljski objekt kroz dualni problem želi ostvariti minimalni trošak u pripremi *pizza*, dok je cilj primarnog problema maksimizacija dobiti od prodanih *pizza*. U nastavku je prikazan odgovarajući dualni problem za polazni problem, a s obzirom da primarni problem predstavlja problem maksimuma, funkcija cilja dualnog problema biti će funkcija minimuma. Unutar problema javljaju se strukturne dualne varijable y_6, y_7 i y_8 koje je potrebno pravilno rasporediti unutar primarnog problema. Stoga, dualni oblik glasi:

$$minw = 220y_6 + 200y_7 + 300y_8$$
$$2y_6 + y_7 + 3y_8 \geq 45$$
$$2y_6 + y_7 + 3y_8 \geq 48$$
$$4y_6 + 2y_7 + 3y_8 \geq 50$$
$$5y_6 + 2y_7 + 3y_8 \geq 58$$
$$4y_6 + 2y_7 + 3y_8 \geq 54$$
$$y_6, y_7, y_8 \geq 0$$

Prikazani dualni problem linearnog programiranja pripada standardnom problemu minimuma iz razloga što se traži minimalna vrijednost funkcije cilja, dok su sva ograničenja II. Tipa a uvjet nenegativnosti vrijedi za sve strukturne varijable duala.

Na slici 4 prikazan je dualni problem uz pomoć računalnog programa POM-QM.

Slika 4. Dualni problem

Original Pr...							
Maximize	A	B	C	D	E		
1	2	2	4	5	4	<=	220
2	1	1	2	2	2	<=	200
3	3	3	3	3	3	<=	300
Dual Probl...							
	1	2	3				
Minimize	220	200	300				
A	2	1	3	>=	45		
B	2	1	3	>=	48		
C	4	2	3	>=	50		
D	5	2	3	>=	58		
E	4	2	3	>=	54		

Izvor: POM-QM program

U gornjem dijelu tablice prikazan je početni problem, dok je u donjem dijelu prikazan njegov dual. Koji ukazuje da se u drugoj fazi koja se odnosi na razvlačenje tijesta i pravljenje *pizze* javlja višak od 93,33 minute, te stoga nema smisla osigurati dodatne minute za ovu fazu pripreme. Kao što je prije spomenuto, ovo neiskorišteno ograničenje spada u nevezana ograničenja, čijim se povećanjem ne utječe na povećanje funkcije cilja.

U problemu postoje i dva vezana ograničenja, radi se o I. fazi i III. fazi pripreme, čije su vrijednosti dodatnih varijabli jednake nuli, dok vrijednosti dualnih varijabli ukazuju na moguću promjenu vrijednosti funkcije cilja. Točnije, ukoliko se u prvoj fazi, koja se odnosi na pripremu namirnica, poveća raspoloživi font radnih sati za 1 minutu, tada će se dobit povećati za 3,33 kuna. Dok bi u III. fazi pripreme koja označava proces pečenja *pizza*, dodavanjem 1 minute u ukupan font radnih sati, profit narastao za 13,78 kuna, što bi po satu iznosilo 826,8 kuna i upravo to bi trebao biti maksimalan iznos koji je ugostiteljski objekt spreman platiti za jedan dodatni radni sat jer svaki iznos veći od toga predstavlja gubitak za ugostiteljski objekt.

3.4. Postoptimalna analiza dobivenoga optimalnoga plana proizvodnje

Kroz postoptimalnu analizu, odnosno analizu osjetljivosti, ispituju se učinci potencijalnih promjena uvjeta u poslovanju na promjenu optimalnog programa proizvodnje.

Na slici 5 prikazana je analiza osjetljivosti dobivena uz pomoć računalnoga programa POM-QM.

Slika 5. Analiza osjetljivosti

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
A	0	3	45	-Infinity	48
B	93,33	0	48	46	58
C	0	4,67	50	-Infinity	54,67
D	6,67	0	58	57	120
E	0	,67	54	-Infinity	54,67
	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
1	3,33	0	220	200	500
2	0	93,33	200	106,67	Infinity
3	13,78	0	300	132	330

Izvor: POM-QM program

Iz prikazane analize može se zaključiti kako je optimalni program ponude *pizze* Vesuvio $B = 93{,}33$ i *pizze* Mexicana $D = 6{,}67$, dok preostale tri vrste *pizza* ne ulaze u optimalni program. U takvom optimalnom programu ostvaruje se maksimalni dnevni profit od 4 866,7 kuna.

Prvo i treće ograničenje u potpunosti su iskorišteni, dok drugo ograničenje vezano za razvlačenje tijesta i pravljenje *pizze* nije u potpunosti iskorišteno, te su prema optimalnom programu ostale neiskorištene 93,33 minuta.

Na slici su također prikazani i intervali optimalnih raspona ograničenja. Optimalan raspon prikazuje raspon vrijednosti za koje će rješenje ostati optimalno, a omeđen je donjom i gornjom granicom. U ovom slučaju za prvu strukturnu varijablu donja granica iznosi (-) beskonačno, a gornja 48; za drugu donja granica iznosi 46 dok gornja iznosi 58; trećoj strukturnoj varijabli iznos donje granice je (-) beskonačno, a gornje 54,67; za četvrtu strukturnu varijablu donja granica iznosi 57, a gornja 120; te za petu strukturnu varijablu donja granica je (-) beskonačno a gornja 54,67:

$$x_1 = -\infty - 48$$

$$x_2 = 46 - 58$$

$$x_3 = -\infty - 54{,}67$$

$$x_4 = 57 - 120$$

$$x_5 = -\infty - 54{,}67$$

Iz optimalnog raspona može se zaključiti da ukoliko menadžeri odluče cijenu *pizze* Vesuvio povećati za 10 kuna po komadu, to neće promijeniti optimalni program jer je cjiena od 58 kuna i dalje u optimalnom rasponu, samo će se ukupni profit povećati sa 4 866,7 na 5 800 kuna.

$$maxz = 58 \cdot 93{,}33 + 58 \cdot 6{,}67 = 5\ 800$$

Također, ukoliko menadžment ugostiteljskog objekta utvrdi da se prihod *pizze* Mexicana može povećati sa 58 kuna po *pizzi* na 100 kuna po *pizzi*, tada bi se profit povećao za 280,14 kuna uz nepromjenjeni optimalni program.

$$maxz = 48 \cdot 93{,}33 + 100 \cdot 6{,}67 = 5\ 146{,}84$$
$$5\ 146{,}84 - 4\ 866{,}7 = 280{,}14$$

4. ZAKLJUČAK

Svako poduzeće teži najefikasnijem načinju poslovanja, odnosno pokušavaju maksimizirati svoju dobit kao i minimizirati troškove poslovanja. Kako bi postigli optimalan program proizvodnje koriste se raznim modelima lilenarnoga programiranja. Njihov cilj je pronaći maksimum ili minimum linearnih funkcija, uvažavajući pri tom ograničene raspoložive resurse koji označavaju sustav ograničenja promatranog problema. Simpleks metoda, korištena u ovom radu, najčešće je birana metoda linearnoga programiranja upravo radi svojih karakteristika. U suvremenom dobu tehnologije, sve češće se koriste i programi računalne potpore, koji u kratkom vremenu dovode do korisnih informacija potrebnih za donošenje odluka u poslovanju.

Cilj završnog rada bio je prikazati teorijsko poimanje linearnoga programiranja, kao i načina primjene raznih modela linearnog programiranja, dok je cilj u empirijskom djelu bio izračunati optimalni program proizvodnje standardnog problema maksimuma na primjeru poslovanja ugostiteljskog objekta. Za optimizaciju programa promatrano je pet najprodavnijih *pizza*, to su *pizza* Margherita, *pizza* Vesuvio, *pizza* Capricciosa, *pizza* Mexicana te Slavonska *pizza*. Kao i tri faze kroz koje svaka *pizza* prolazi u procesu pripreme: I. priprema namirnica, II. razvlačenje tijesta i pravljenje *pizze* te III. pečenje *pizze*. Navedene faze predstavljaju ograničenja promatranoga problema. Iz dobivenog optimalnog programa proizvodnje, uz dana ograničenja, može se zaključiti da ugostiteljski objekt ne koristi maksimalno postavljena ograničenja, što ukazuje na postojanje prostora za poboljšanje efikasnosti poslovanja ugostiteljskog objekta. Točnije, ugostiteljski objekt u II fazi pripreme, koja se odnosi na razvlačenje tijesta i pravljenje *pizza*, preostaju neiskorištene 93,33 minute, što ukazuje na potrebu pronalaska boljeg načina iskoristivosti fonda sati. Dok je minutaža iz I i III faze u potpunosti iskorištena, što znači da bi se uvođenjem dodatnih radnih sati u fazu pripreme namirnica kao i fazu pečenja *pizza* potencijalno povećala dobit ugostiteljskog objekta, uzimajući u obzir troškove dodatnih sati. Prema dobivenom optimalnom programu proizvodnje ugostiteljski objekt dnevno mora proizvesti 93,33 *pizze* Vesuvio po cijeni od 48 kuna te 6,67 *pizza* Mexicana po cijeni od 58 kuna, s ciljem ostvarivanja maksimalne dnevne dobit koja iznosi 4 866,7 kuna.

Na temelju dobivenog optimalnog programa proizvodnje, menadžer ugostiteljskog objekta mora donjeti odluku o preraspodjeli vremena unutar ograničenja, kao i mogućnosti dodavanja dodatne minutaže, a sve u svrhu poboljšanja poslovanja objekta u vidu povećanja dobiti od prodanih *pizza* uz smanjenje troškova proizvodnje istih.

Popis ilustracija

Popis tablica

Popis slika

LITERATURA

Babić, Z. (2011.): Linearno programiranje, Ekonomski fakultet Split, Split

Baldigara, T., Mamula, M.: Metode poslovnog odlučivanja u turizmu – nastavni e - materijal, Fakultet za menadžment u turizmu i ugostiteljstvu, Opatija, 2018.

Barnett,R.A.,Byleen,K.E.,Ziegler,M.R.: Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti, MATE d.o.o., Zagreb, 2006

Brajdić,I.: Matematički modeli i metode poslovnog odlučivanja, Sveučilište u Rijeci, Fakultet za turistički i hotelski menadžment u Opatiji, 2013

Render, B., Stair, R., Hanna, E.M., Hale, T.S.: Quantative Analysis for Managment, 13th edition, England, 2018.