Uloga Fourierovih redova u inženjerstvu okoliša

Vrček, Maja

Undergraduate thesis / Završni rad

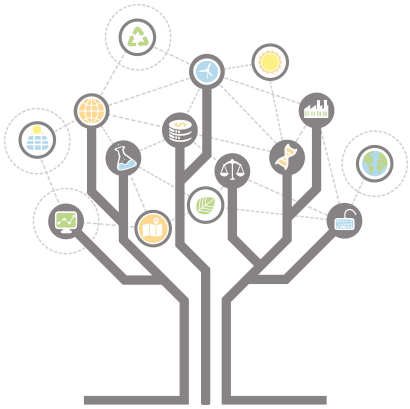
2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Geotechnical Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Geotehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:130:280976

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Geotechnical Engineering - Theses and Dissertations

zir.nsk.hr

dabar
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GEOTEHNIČKI FAKULTET

MAJA VRČEK

ULOGA FOURIEROVIH REDOVA U INŽENJERSTVU OKOLIŠA

ZAVRŠNI RAD

VARAŽDIN, 2020.

Sazivam članove ispitnog povjerenstva

za _____ u _____ sa

Obranu ovog rada kandidat će vršiti i pred

ispitnim povjerenstvom u Varaždinu

Varaždin, _____

Predsjednik
ispitnog povjerenstva:

Izv. prof. dr. sc. Igor Petronić

Članovi povjerenstva

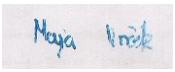
1) Izv. prof. dr. sc. Sanja Kovač
2) Dr. sc. Davor Stanko
3) Doc. dr. sc. Mario Gazdek

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GEOTEHNIČKI FAKULTET

ZAVRŠNI RAD

ULOGA FOURIEROVIH REDOVA U INŽENJERSTVU OKOLIŠA

KANDIDAT:
MAJA VRČEK



MENTOR:
izv.prof.dr.sc. SANJA KOVAČ
KOMENTOR:
dr.sc. DAVOR STANKO

VARAŽDIN, 2020.

Sveučilište u Zagrebu
Geotehnički fakultet

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnica: MAJA VRČEK

Matični broj: 2715 - 2016./2017.

NASLOV ZAVRŠNOG RADA:

ULOGA FOURIEROVIH REDOVA U INŽENJERSTVU OKOLIŠA

Rad treba sadržati: 1. Uvod
2. Periodične funkcije i Fourierov red
3. Fourierova transformacija
4. Primjer upotrebe Fourierovih redova u inženjerstvu okoliša
5. Zaključak
6. Popis literature
7. Dodaci

Pristupnica je dužna predati mentoru jedan uvezen primjerak završnog rada sa sažetkom. Vrijeme izrade završnog rada je od 45 do 90 dana.

Zadatak zadan: 14.05.2020. Rok predaje: 03.09.2020.

Mentor:	Drugi mentor/komentor:	Predsjednik Odbora za nastavu:
Izv.prof.dr.sc. Sanja Kovač	Dr.sc. Davor Stanko	Izv.prof.dr.sc. Igor Petrović

REPUBLIKA HRVATSKA - VARAŽDIN - GEOTEHNIČKI FAKULTET - SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je diplomski rad pod naslovom

ULOGA FOURIEROVIH REDOVA U INŽENJERSTVU OKOLIŠA

(naslov završnog rada)

Rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na istraživanjima te objavljenoj i citiranoj literaturi te je izrađen pod mentorstvom izv.prof.dr. sc. Sanje Kovač i komentorstvom dr.sc. Davora Stanka.

Izjavljujem da nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno daje prepisan iz necitiranog rada te da nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem također, da nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

U Varaždinu, 02.09.2020. .

Maja Vrček

Maja Vrček

IZJAVA MENTORA O POSTOTKU SLIČNOSTI ZAVRŠNOG RADA S VEĆ OBJAVLJENIM RADOVIMA

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je završni rad pod naslovom:

ULOGA FOURIEROVIH REDOVA U INŽENJERSTVU OKOLIŠA

pregledan anti-plagijat programskim paketom PlagScan te da postotak sličnosti cjelovitog završnog rada, s već objavljenim radovima, ne prelazi 20%, kao i da pojedinačni postotak sličnosti završnog rada sa svakom literaturnom referencom pojedinačno ne prelazi 5%.

U Varaždinu, 02.09.2020.

IZV. PROF. DR. SC. SANJA KOVAČ

(Mentor)

(Vlastoručni potpis)

SAŽETAK

Fourierov red rastavlja periodične funkcije u sume funkcija sinusa i kosinusa. Definirat ćemo njihovo dobivanje, te ćemo ih naposljetku transformirati pomoću dobivenih zapisa koeficijenata. Također ćemo navesti i vrste funkcija, odnosno periodične i neperiodične funkcije, te razlike između njih. Navest ćemo i parne i neparne funkcije.

Nakon teorije slijedi primjena Fourierovih redova u inženjerstvu okoliša pri čemu ćemo navesti nekoliko vrsta mjernih sustava, te podatke koji oni prikupljaju. Mjerni sustavi nam služe za prikupljanje različitih podataka o raznim fizikalnim veličinama nekih prirodnih pojava. Navest ćemo njihovu podjelu, opisati svaku vrstu mjernog sustava, te navesti i neke primjere. Ti podaci, odnosno brojčane vrijednosti fizikalnih ili kemijskih veličina koje su zapisane u digitalnom obliku, a koje se mogu zapisati u obliku periodičnih funkcija, a potom i pomoću suma te harmonijskih redova sinusa i kosinusa iz kojih se naposljetku dobivaju Fourierovi redovi. Najvažnija podjela signala je ona na digitalne i analogne. Analogni signal je vremenski kontinuirani signal čija se amplituda odnosno jačina mijenja neprekidno i kontinuirano s vremenom, dok digitalni signal sadrži diskretne funkcije, koje se dobivaju uzorkovanjem zapisa stanja analognog vala u određenim vremenskim koracima čija dužina zavisi o učestalosti, odnosno o frekvenciji signala. Drugim riječima, za dobivanje digitalnog signala iz analognog signala, potrebno je koristiti FFT, odnosno brzu Fourierovu transformaciju. Navest ćemo i druge vrste signala, koje ćemo potom objasniti te navesti primjere za navedene signale. Iz niza funkcija vremena dobivamo spektre.

KLJUČNE RIJEČI: Fourierov koeficijent, Fourierov red, signali, mjerni senzori, spektri

ABSTRACT

Fourier series dissembles periodical functions into the sum of functions from sinuses and cosinuses. We will define the theory of Fourier series, which we will transform with the help of Fourier coefficients. We will list types of functions, like periodical, aperiodical function, and odd and steam functions, and their differences.

We will list a few types of measuring sensors, and adduce the types of data they collect. With usage of measuring sensors, we collect data, or variables of various physical or chemical values of natural phenomena. We will list their classification, and say something about each, and adduce some of their examples. That data, or numeric chemical or physical variables written in digital shape, can be written in the form of periodic functions. The periodic functions can then be written in the form of sums and harmonic series of sinus and cosinus from which the Fourier series are formed. The periodic functions are called signals. We will induce some of the types of signals, among which we will define analog and digital signals. The difference between thise two types of signals is that the analog signal is a time continuous signal which amplitude changes with time constantly and continual with time, whereas the digital signal is formed by discrete functions which we get by sampling of the record of the state of analog signal in certain time pitches which length depends on the frequency of the signal. In other words, for getting the digital signal from the analog signal, we need to use Fast Fourier Transformation, or FFT. We will list other types of signals also, which will be explained and few examples will be shown. From a series of time functions, we get spectres. We will explain what spectres are and list few of their examples.

.

KEYWORDS: Fourier coefficients, Fourier series, sensors, signals, spectrum

SADRŽAJ

1. UVOD 1
2. PERIODIČNE FUNKCIJE I FOURIEROV RED 2
2.1. Periodične funkcije 2
2.2. Fourierov red 2
2.2.1. Izvod Fourierovih koeficijenata 6
2.2.2. Konvergencija Fourierovog reda 7
2.3. Parne i neparne funkcije 10
3. FOURIEROVA TRANSFORMACIJA 12
4. PRIMJER UPOTREBE FOURIEROVIH REDOVA U INŽENJERSTVA OKOLIŠA 17
4.1. Mjerni senzori 17
4.2. Signali 19
4.3. Frekvencijski spektri 23
5. ZAKLJUČAK 28
6. POPIS LITERATURE 29
7. DODACI 31
7.1. Popis slika 31

1. UVOD

Jean Baptiste Joseph Fourier (Slika 1) rođen je 21. ožujka 1768 godine u Auxeru u Francuskoj. Bio je matematičar, egiptolog i administrator koji je imao značajnu ulogu u fizičkoj matematici sa njegovim djelom pod nazivom *O širenju topline u čvrstim tijelima.* Prikazao je kako se provođenje topline u krutim tijelima može zapisati i analizirati kao beskonačni matematički redovi. Ti redovi, preciznije rečeno, trigonometrijski redovi služe za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. S tim redovima je usko vezana i harmonijska analiza. Tako su nastali Fourierovi redovi, odnosno zapis svake periodične funkcije u obliku sume sinusa različitih amplituda, faza i frekvencija koje ne moraju nužno biti konačne. [1]



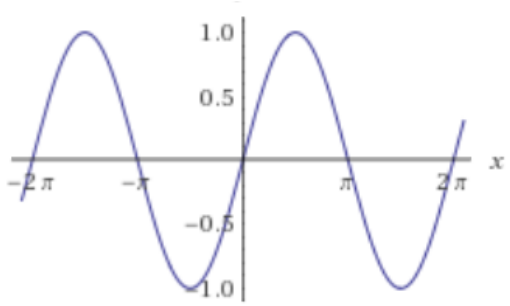
Slika 1: Jean Baptiste Joseph Fourier, [1]

U ovome radu ćemo obrađivati teoriju Fourierovih redova, te njihovu primjenu. Prvo moramo pojasniti motivaciju za dobivanje Fourierovih redova. Objasnit ćemo periodične funkcije, te način njihova zapisa u Fourierov red. Uz Fourierov red se veže i Fourierova transformacija, te Fourierovi koeficijenti. Nakon objašnjene teorije slijedi primjena Fourierovih redova u inženjerstvu okoliša. Periodične funkcije u vremenu nazivamo signalima, odnosno brojčanim varijablama fizikalnih i kemijskih veličina prirodnih pojava zapisanih u digitalnom obliku. Te signale obrađuju mjerni senzori. Nakon prikupljenih podataka, potrebno je te podatke filtrirati kako bi se dobili rezultati samo od primarne pojave, odnosno kod obrađivanja signala moramo izdvojiti primarni signal od buke i šumova. Za izoliranje primarnog signala od buke, odnosno filtriranje, koristimo brzu Fourierovu transformaciju.

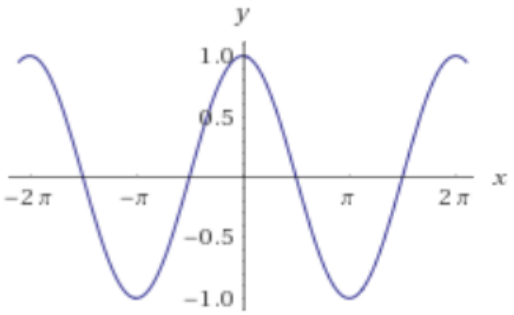
2. PERIODIČNE FUNKCIJE I FOURIEROV RED

2.1. Periodične funkcije

Periodičnost je svojstvo ponavljanja jedne ili više varijabli u određenom vremenskom razmaku. Periodične funkcije su one funkcije f: D -> R koje zadovoljavaju uvjet $f(x+T) = f(x)$ za $(x \in D) \Rightarrow (x + T \in D)$, pri čemu je period T konstanta~~,~~ ~~i~~ različita od 0. Najmanji period T > 0, ako postoji, zove se temeljni period funkcije [2].



Slika 2: Sinus funkcija [3]



Slika 3. Kosinus funkcija [3]

Primjer periodične funkcije sa periodom 2π su ~~sve~~ trigonometrijske funkcije, odnosno funkcije sinus (Slika 2) i kosinus (Slika 3). Sinus funkcija je oblika $f(x) = a\sin(bx + c)$ a kosinus funkcija je oblika $f\ (x) = a\cos(bx + c)$, pri čemu je a amplituda funkcije, b period, a c faza funkcije. [2]

2.2. Fourierov red

Fourierov red se razvija za periodične i neperiodične funkcije koje se mogu zapisati u periodičnom obliku. Uvjet za razvijanje Fourierovog reda je da se jedan interval ponavlja beskonačno mnogo puta. U daljnjoj razradi ćemo razmatrati periodične funkcije općenitog perioda $(-L/2\ , L/2)$. Radi jednostavnosti ćemo pretpostaviti da je promatrana

funkcija periodična na intervalu $(-\pi, \pi)$, što znači da ćemo promatrati trigonometrijske funkcije. Z danu periodičnu funkciju ili signal, ako je ona ovisna o vremenu i periodična na tom intervalu $(-\pi, \pi)$, moramo pronaći a_0, a_k, φ_k, za $k = 1, \dots, n$ tako da vrijedi [4]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \, sin(kx + \varphi_k), n \geq 0, \qquad [1]$$

gdje a_k je amplituda, φ_k faza za sinus funkciju frekvencije k. Član $\frac{a_0}{2}$ služi za translatiranje funkcije po y -osi. Koristeći adicijsku formulu za sinus funkciju ($\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$) iz prethodnog zapisa reda dobivamo [4]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \sin(kx) \cos \varphi_k + a_k \cos(kx) \sin \varphi_k] \qquad [2]$$

U gornjem zapisu Fourierovog reda, φ_k ne predstavlja zavisnu varijablu po x niti k, radi toga što je φ_k dio koeficijenta uz $\sin(kx)$ i $\cos(kx)$. Stoga uvodimo Fourierove koeficijente a_k, b_k koji pripadaju skupu realnih brojeva [4]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)] \qquad [3]$$

Za traženje Fourierovih redaka su nam sada potrebni samo koeficijenti a_k, b_k, što znači da više ne moramo promatrati fazu pojedine sinus funkcije, nego samo koeficijente, odnosno amplitude uz sinus i kosinus[4].

Za bolje razumijevanje Fourierovih redova i valjanost posljednjeg zapisa Fourierovog reda ćemo navesti uvjete koji su nam potrebni kako bi taj red postojao, te ćemo utvrditi vrijedi li ta jednakost baš za sve periodične funkcije. Prisjetimo se dakle nekih elementarnih tvrdnji iz diferencijalnog računa: zbroj svakih dviju neprekinutih funkcija je također neprekinuta funkcija, te zbroj dvaju derivabilnih funkcija je također derivabilna funkcija, odnosno zbroj svakih dviju m-puta derivabilnih funkcija je također m-puta derivabilna funkcija., pri čemu m pripada prirodnom skupu brojeva. Funkcije sinusa i kosinusa su također neprekidne i m-puta derivabilne funkcije, što znači da je i njihova suma takva. Prema ovome navedenome, čini se da je nemoguće razviti nederivabilnu funkciju iz posljednjeg zapisa Fourierovog reda [4].

Suma funkcija sinusa i kosinusa kod većih frekvencija poprimaju oštrije rubove u rezultatnoj krivulji. Pomoću takozvane *rectangle* funkcije ćemo prikazati to zagušnjenje. *Rectangle* funkcija je normalizirana boxcar funkcija oblika [4]:

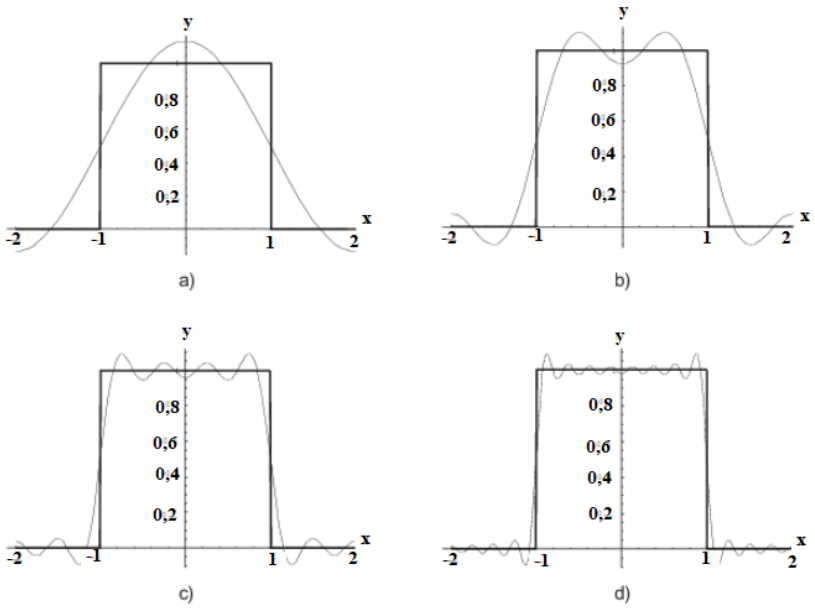
$$rect(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & |t| < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad [4]$$

pri čemu je alternativna definicija funkcije $rect\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ 0, 1 ili nedefinirana.

Radi jednostavnijeg prikaza tog zagušnjenja ćemo koristiti ovaj oblik *rectangular* funkcije [4]:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1,1) \\ 0 & inače \end{cases} \qquad [5]$$

Na Slici 4 je prikazana aproksimacija *rectangle* krivulje[1] na intervalu od $[-2,2]$ s pomoću Fourierovog reda za : a) $n = 2$; b) $n = 4$; c) $n = 8$ te d) $n = 16$.



Slika 4. R*ectangle* funkcija [4]

[1] rectangle funkcija, služi kao pomoć kod obrade signala

Kao što je prikazano na Slici 4, kada povećavamo k, naša rezultatna krivulja sve više aproksimira vrhove u kojima funkcija nije derivabilna. Funkciju ćemo dakle oblikovati u beskonačnu funkciju oblika [4]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)] \qquad [6]$$

Tu formulu možemo zapisati i na drugačiji način, tako da koristimo nove koeficijente c_k koji su elementi iz skupa kompleksnih brojeva, pri čemu-k-ovi pripadaju skupu cijelih brojeva. Kako bi bili sigurni da ćemo na kraju dobiti realne koeficijente koristit ćemo svojstvo $z + \bar{z} = 2Re(z)$, gdje z pripada skupu cijelih brojeva, a $\bar{z}$ predstavlja konjugirano kompleksni broj. Pomoću Eulerove formule [2]za dobivanje konjugiranog kompleksnog broja nam je dovoljno uzeti u obzir svojstvo neparnosti funkcije sinus. Sada želimo dobiti koeficijente c_k takve da vrijedi [4]:

$$c_k e^{ikx} + \overline{c_k e^{\imath kx}} = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx) \qquad [7]$$

iz čega slijedi [4]:

$$[\cos(kx) - i \sin(kx)]\overline{c_k} + [\cos(kx) + i \sin(kx)]c_k = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx) \qquad [8]$$

Nadalje [3]:

$$\cos(kx)\,(\overline{c_k} + c_k) + \sin(kx)\,(c_k i - \overline{c_k} i) = a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx) \qquad [9]$$

Prije smo naveli svojstvo kompleksnih brojeva koje glasi $z + \bar{z} = 2Re(z)$, što možemo primijeniti kod $c_k i - \overline{c_k} i$, iz čega dobivamo $-2Im(c_k)$, odnosno $\overline{c_k} + c_k$ iznosi $2Re(c_k)$. To nas dovodi do Fourierovih koeficijenata, odnosno [4]

$$a_k = -2Im(c_k) \qquad [10]$$

$$b_k = 2Re(c_k) \qquad [11]$$

Sada prvu jednadžbu množimo s imaginarnom jedinicom i, te joj pribrojimo drugu jednadžbu, iz čega dobivamo [4]:

$$b_k + a_k i = 2Re(c_k) - 2Im(c_k)i \qquad [12]$$

[2] Eulerove formule se koriste u području analize kompleksnih brojeva kada želimo prikazati povezanost kompleksnih eksponencijalnih funkcija sa trigonometrijskim funkcijama uz formulu koja je ustanovljena za svaki realni broj x, a ona glasi: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, gdje je e prirodni logaritam, *i* imaginarna jedinica, a sin i cos trigonometrijske funkcije s argumentom x dane u radijanima

Kada koristimo $Re(c_k) - Im(c_k)i = \overline{c_k}$, iz [12] slijedi:

$$\overline{c_k} = \frac{1}{2}\,(b_k + a_k i) \qquad [13]$$

Uvođenjem oznake $c_{-k} = \overline{c_k}$ dobivamo općenitiji razvoj Fourierovog reda, odnosno [4]:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \qquad [14]$$

gdje c_{-k} iznosi $\frac{1}{2}\,(b_k + a_k i)$, a $c_k\,\frac{1}{2}\,(b_k - a_k i)$. Nulti član je u ovom slučaju c_0 koji je jednak sa $\overline{c_0}$, a iznosi $\frac{a_0}{2}$. [4]

2.2.1. Izvod Fourierovih koeficijenata

Za danu periodičnu funkciju $f(x)$ ćemo izračunati koeficijent c_k, Tako da ćemo funkciju

$$f(x) = \cdots + c_{k-1}e^{(k-1)xi} + c_k e^{(k)xi} + c_{k+1}e^{(k+1)xi} + \cdots \qquad [15]$$

podijeliti sa e^{kxi}, brojem koji je uvijek različiti od nule, iz čega dobivamo [4]:

$$c_k = \frac{f(x)}{e^{kxi}} - \left(\cdots + c_{k-1}e^{-xi} + c_{k+1}e^{xi} + \cdots\right) \qquad [16]$$

$$c_k = f(x)e^{-kxi} - \sum_{j=-\infty\, j\neq k}^{\infty} c_j e^{(j-k)xi} \qquad [17]$$

za k-ove koji pripadaju skupu cijelih brojeva. c_k je konstanta, radi čega obje strane možemo integrirati po varijabli x, na intervalu $[-\pi, \pi]$ [4]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_k\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-kxi}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-\infty\, j\neq k}^{\infty} c_j e^{(j-k)xi} \qquad [18]$$

$$c_k\pi - (-c_k\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-kxi}\,dx - \sum_{j=-\infty\, j\neq k}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_j e^{(j-k)xi} \qquad [19]$$

$$2c_k\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-kxi}\,dx - \sum_{j=-\infty\, j\neq k}^{\infty} \frac{1}{(j-k)i}\,c_j(e^{(j-k)\pi i} - e^{-(j-k)\pi i}) \qquad [20]$$

za k-ove koji pripadaju skupu cijelih brojeva. Kada kod sume primijetimo prema Eulerovoj formuli, te da je $(j-k)$ element skupa cijelih brojeva, dobivamo [4]:

$$e^{(j-k)\pi i} - e^{-(j-k)\pi i} = \sin(j-k)\pi = 0 \qquad [21]$$

Iz čega je vidljivo da se suma poništava. Cijeli gornji red iznad retka gdje poništavamo sumu dijelimo sa 2 π, iz čega slijedi [4]:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-kxi}\, dx \qquad [22]$$

Također vrijedi i općenitiji interval, $[-L/2, L/2]$, iz čega dobivamo:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(2\pi ikx)/L} \qquad [23]$$

s pridruženim koeficijentima [4]:

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-(2\pi kxi)/L}\, dx \qquad [24]$$

Koeficijent $\frac{2\pi}{L}$ služi kako bi sinus i kosinus funkcije sveli na interval $[0, L]$ s periodom L. Također tu funkciju možemo promatrati i na intervalu $[-L/2, L/2]$ s periodom T [4].

2.2.2. Konvergencija Fourierovog reda

Bilo koji red oblika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan kada je niz parcijalnih suma s_n konvergentan, odnosno [5]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \qquad [25]$$

U matematici konvergentnost opisuje granično ponašanje beskonačnih nizova ili redova prema nekom limesu. Nužan uvjet konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Kako bi utvrdili da li je Fourierov red konvergentan ili nije koristimo Dirichletove uvjete koji glase[5]:

1. u svim točkama zatvorenog intervala $[a, b]$ funkcija mora biti konačna

2. u tom zatvorenom intervalu ona mora biti monotona ili imati konačni broj minimuma i maksimuma
3. funkcija mora biti neprekinuta u tom intervalu ili imati konačan broj točaka, odnosno diskontinuiteta prve vrste

Kada Fourierov red odgovara tim uvjetima, tada on konvergira te ima sumu na svakoj točki u kojoj je funkcija neprekinuta, dok je u točkama diskontinuiteta funkcije suma reda jednaka aritmetičkoj sredini vrijednosti funkcije iz lijeve i desne strane [5].

Na Slici 5 prikazana periodična funkcija perioda $L = b - a$ koja odgovara svim Dirichletovim uvjetima. U bilo kojoj točki x_1 Fourierov red ima sumu $f(x_1)$, a u točkama c i d gdje funkcija ima točke diskontinuitete prve vrste, suma Fourierovog reda je [5]

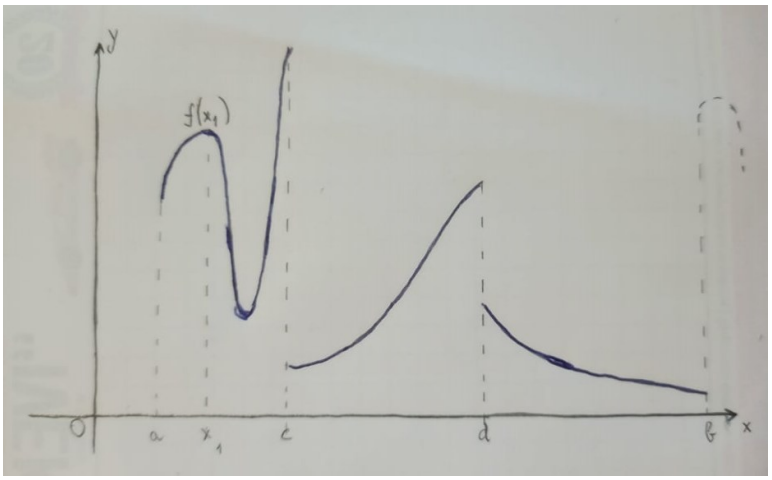
$$\frac{f(c-0)+f(c+0)}{2} \qquad [26]$$

odnosno:

$$\frac{f(d-0)+f(d+0)}{2} \qquad [27]$$

Na krajevima intervala $[a, b]$ suma reda ima vrijednost

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad [28]$$



Slika 5. Periodična funkcija perioda *L=b-a* [5]

Još postoje dva osnovna svojstva Fourierov reda. Prvo je kada aproksimiramo zadanu funkciju $f(x)$ parcijalnom sumom Sn prvih n članova trigonometrijskog reda, greška se

smatra kvadratnom greškom aproksimacija, odnosno teoriju najmanjih kvadrata. Tu grešku zapisujemo kao [4]:

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{L}\int_0^L [f(x) - S_n(x)]^2\, dx = \text{minimum} \qquad [29]$$

s koeficijentima a_n i b_n [4] .

Za svaku omeđenu funkciju $f(x)$ koja je po odsječcima neprekinuta u intervalu $0 < x < L$, red konvergira prema sredini zadane funkcije, odnosno [5]:

$$\int_0^L [f(x) - S_n(x)]^2\, dxn \to 0;\ n \to \infty \qquad [30]$$

Iz gornjeg izraza je nastala Parsevalova jednakost [5]:

$$\frac{2}{L}\int_0^L [f(x)]^2\ dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \qquad [31]$$

Također, uvjet za konvergenciju reda tada postaje integrabilnost funkcije koju razvijamo u Fourierov red. Navodimo teorem o konvergenciji reda po L^2, odnosno prema Riesz-Fisheru funkcija $f \in L^2\left(\left[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right]\right)$ s periodom P, gdje je L integrabilna funkcija, to jest [5]

$$\int_{-P/2}^{P/2} |f(x^2)|\, dx < \infty \qquad [32]$$

odnosno, Fourierov red funkcije L^2 je konvergentan ako vrijedi:

$$\int_{-P/2}^{P/2} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{(2\pi i k x)/P} \right|^2 dx \to 0, \qquad [33]$$

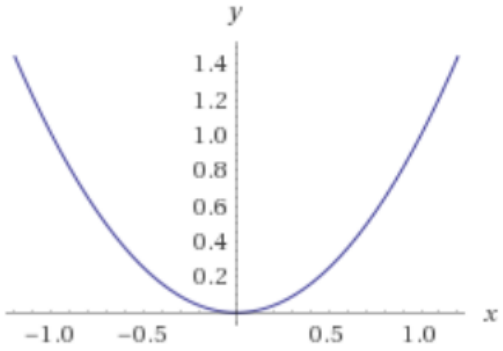
kada je n teži u beskonačnost [5].

Drugim riječima, kvadrat razlike funkcije i njene konačne aproksimacije na nekom određenom intervalu teži nuli, što je samo moguće kada se koristimo Lebesgueovim

integralom[3]. Integral funkcije L^2 predstavlja energiju signala. Kada je taj integral konačan, tada je i energija konačna. Ovaj teorem je također vezan uz Parsevalovim teoremom[4] [5].

2.3. Parne i neparne funkcije

Parne funkcije su one funkcije čija je domena simetrična po koordinatnim osima. Za njih vrijedi da je $f(x) = f(-x)$ za sve elemente domene, odnosno područja definicije zadane funkcije. Graf te funkcije je simetričan prema osi y, odnosno apscisi. Primjer takve funkcije je $f(x) = x^2$ prikazan je na Slici 6. [6]

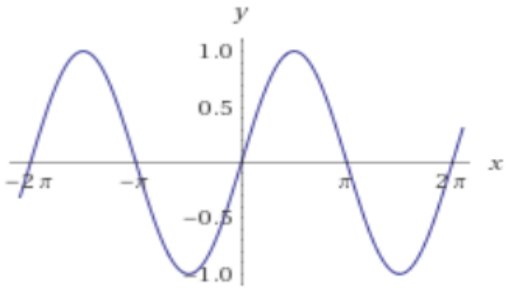


Slika 6. Kvadratna funkcija [3]

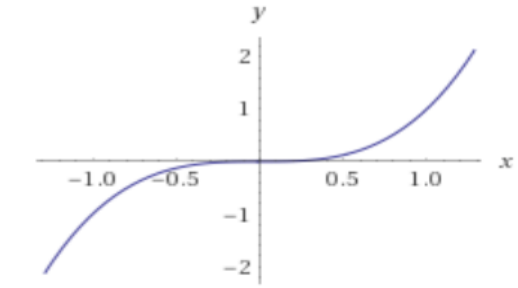
Neparne funkcije su one funkcije čija je domena simetrična s obzirom na ishodište. Za njih vrijedi da je $f(-x) = -f(x)$ za svaki element iz skupa domene te funkcije. Primjeri neparne funkcije su sinus funkcija (Slika 7) i kubna funkcija $f(x) = x^3$ (Slika 8) [6]

[3] Lebesgueov integral izmjerive funkcije na prostoru mjere, odnosno konačni integral koji kod rješavanja integrala duljine, površine, volumena uzima particiju kodomene funkcije f pri čemu možemo izmjeriti onaj dio domene koji funkcija preslikava u pojedini dio particije

[4] Parsevalov teorem energije glasi: $\varepsilon(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(\omega)|^2\, d\omega$



Slika 7. Sinus funkcija, [3]



Slika 8. Kubna funkcija, [3]

3. FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

U prethodnom poglavlju smo pratili razvoj periodične funkcije perioda L na intervalu $[-L/2, L/2]$ u Fourierov red. Neperiodične funkcije su one funkcije kojima se periodi ne ponavljaju, a mogu biti dio periodične funkcije. One najčešće prikazuju kaotične, odnosno neperiodične, nasumično generirane signale te se kao takve pojavljuju u raznim mjerenjima u inženjerstvu okoliša. [2] Pretpostavit ćemo da je funkcija definirana svugdje, što znači da ćemo sada promatrati period L koji teži u beskonačnost, odnosno na intervalu $[-\infty, \infty]$. To nas dovodi do razmišljanja da svaku, pa i neperiodičnu funkciju možemo zapisati u obliku Fourierovog reda. Na temelju jednadžbe za izračunavanje Fourierovih koeficijenata c_k iz sekcije 2.2.1. dolazimo do zaključka, ako $L \to \infty$, te integral poprima konačnu vrijednost na intervalu $[-\infty, \infty]$, dobiveni izraz će otići u nulu, radi $1/L$ ispred integrala. Gledano iz te perspektive, čini se da je nemoguće dobiti Fourierov red, jer promatramo neperiodičnu funkciju s beskonačno dugim periodom [4] Međutim, možemo izraz za koeficijent c_k zapisati i u drugačijem obliku. Funkcija će biti ovisna o varijabli k/L, što ćemo zapisati u slijedećem obliku [4]:

$$F\left(\frac{k}{L}\right) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-(2\pi k x i)/L}\, dx \qquad [34]$$

ako uvrstimo gornji u formulu za Fourierov red, dobivamo [4]:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} F\left(\frac{k}{L}\right) e^{(2\pi k x i)/L} \qquad [35]$$

Sada L može težiti u beskonačnost, jer varijabla k/L koja je prije bila diskretna prelazi u kontinuiranu. Ideja je da je $-\infty < k < \infty$. Povećanjem broja L smanjuje se razmak između vrijednosti koje varijabla prima. Odnosni, drugim riječima rečeno, varijabla k/L prelazi u kontinuiranu varijablu s [4].

Sada onaj prethodni zapis Fourierovog reda pišemo kao [4]:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi s x i}\, dx \qquad [36]$$

Funkcija F se naziva Fourierovom transformacijom funkcije f. Obje funkcije F i f sadržavaju kompleksne brojeve, što znači da one i daju i primaju kompleksne brojeve[4].

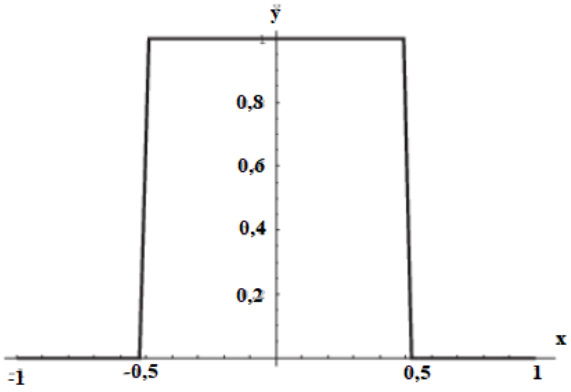
Pošto smo naveli da $L \to \infty$, suma prelazi u integral, odnosno $1/L$, te predstavlja beskonačno malu vrijednost ds:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{2\pi isx}\, ds \qquad [37]$$

Sada izraz za $f(x)$ predstavlja inverznu Fourierovu transformaciju, odnosno transformacija $F(s)$ se za svaki element s iz skupa realnih brojeva vraća u originalnu funkciju temeljeno na koeficijentima. Napomena je na tome da smo formulu za Fourierovu tranformaciju dobili na temelju koeficijenata Fourierovih redova, a inverznu Fourierovu transformaciju iz jednadžbe Fourierovog reda[4].

Sada ćemo prikazati Fourierovu transformaciju za *rectangle* funkciju (Slika 9). Sada ćemo prikazati način transformacije funkcije u Fourierov red. Zadana je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$



Slika 9. *Rectangle* funkcija određena jednadžbom, [4]

Koristimo formulu [4]:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi sxi}\, dx \qquad [38]$$

Za lakše rješavanje integrala zadani integral dijelimo na tri dijela na sljedeći način [4]:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} 0 \cdot e^{-2\pi sxi} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-2\pi sxi} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-2\pi sxi} dx \qquad [39]$$

Kako se u dva člana rastava javlja 0, tako gubimo ta dva člana, iz čega slijedi[4]:

$$F(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi s x i} dx \qquad [40]$$

Prema Eulerovoj formuli slijedi [4]:

$$F(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\cos(-2\pi s x) + i \sin(-2\pi s x)] dx \qquad [41]$$

$$F(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(-2\pi s x)\, dx + i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(-2\pi s x)\, dx \qquad [42]$$

$$F(s) = -\frac{1}{2\pi s}\left\{\left[\sin\left(-2\pi s \cdot \frac{1}{2}\right)\right] - \sin\left[-2\pi s \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$
$$-\frac{i}{2\pi s}\left\{\left[\cos\left(-2\pi s \cdot \frac{1}{2}\right)\right] - \cos\left[-2\pi s \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \qquad [43]$$

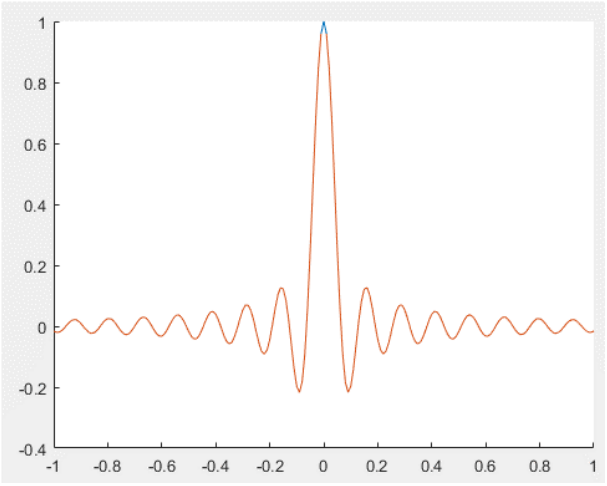
Prema svojstvu parnosti funkcije kosinusa i neparnosti funkcije sinusa dobivamo [4]:

$$F(s) = -\frac{1}{2\pi s}[-\sin(\pi s) - \sin(\pi s)] - \frac{i}{2\pi s}[\cos(\pi s) - \cos(\pi s)] \qquad [44]$$

$$F(s) = -\frac{1}{2\pi s}[-2\sin(\pi s)] = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \qquad [45]$$

Ova dobivena funkcija se naziva *sinc* funkcija te služi za analizu signala. Zapisuje se i prikazuje (Slika 9) na sljedeći način[4]:

$$sinc\,(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



Slika 10. Prikaz sinc funkcije, [3]:

Kada imamo diskretan skup kompleksnih brojeva koje smo dobili uzorkovanjem funkcije na nekom intervalu, moramo definirati i diskretnu Fourierovu transformaciju. To radimo na sljedeći način: [4]:

$$F_j = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{\frac{2\pi i k j}{n}} \qquad [46]$$

Diskretna Fourierova transformacija pretvara niz kompleksnih $f_0, \cdots, f_{n-1}$ u niz kompleksnih brojeva $F_0, \cdots, F_{n-1}$ s pripadajućim inverzom [4]::

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F_j e^{\frac{-2\pi i k j}{n}} \qquad [47]$$

Kao što možemo primijetiti, kod diskretnih vrijednosti kada određene vrijednosti funkcije *f(x)*; $x_0, \ldots, x_{n-1}$ te vrijednosti funkcije *F(s)*; $s_0, \ldots, s_{n-1}$ zamijenimo sa indeksima $k = 0, \ldots, n-1$ i $j = 0, \ldots, n-1$ na određenom uzorku veličine n tako da definiramo da je $F(s_j) = F_j$, odnosno $f(x_k) = f_k$. Umnožak dvaju odgovarajućih uzoraka $x_k s_j$ u eksponentu Eulerove konstante *e* bit će jednak *kj/n* radi pretpostavke da uzorkujemo funkciju *f(x)* na nekom intervalu $[0, L]$ duljine *L* s uzorcima $x_k = k/B$, a funkciju *F(s)* na nekom intervalu oblika $[0, B]$ duljine *B* s uzorcima $s_j = j/L$. Uzorci x_k i s_j uzimaju se tako da vrijedi [4]:

$$n \cdot \frac{1}{B} = L, \text{odnosno } n \cdot \frac{1}{L} = B$$

Kako su gornje funkcije inverz jedna drugoj, ne moramo nužno definirati inverz. Radi jednostavnosti se druga jednadžba koristi kao diskretna Fourierova transformacija kod analize signala, a prva se definira kao inverz [4].

4. PRIMJER UPOTREBE FOURIEROVIH REDOVA U INŽENJERSTVA OKOLIŠA

U ovom poglavlju ćemo prikazati primjere primjene Fourierovih redova u inženjerstvu okoliša. Usredotočit ćemo se na signale i mjerne senzore, vremenske nizove te spektre.

4.1. Mjerni senzori

Postoje mnoge suvremene metode koje služe za prikupljanje informacija o raznim fizikalnim veličinama koje opisuju prirodne procese. Dobivene vrijednosti prikazujemo u digitalnom obliku, kao brojčane vrijednosti. Taj proces se naziva prikupljanje podataka. Podatke prikupljamo mjernim senzorima. Mjerni senzori služe za pretvaranje fizikalnih veličina (tlak, temperatura, vlažnost zraka, broj okretaja motora…) u električne veličine koje su primjerene za daljnju obradu. Primjer jedne mjerene veličine je mehaničko titranje membrane ploče električnog kondenzatora u kondenzatorskome mikrofonu koje je uzrokovano zvučnim valovima što čini promjenu električnog kapaciteta [7].

Mjerne senzore možemo podijeliti prema mjernoj veličini, načinu pretvorbe, području primjene, materijalu, tehnologiji izrade, aktivnosti i pasivnosti, načinu rada, složenosti, vrsti izlaznog signala, te tipu primjene [7].

a) Podjela mjernih senzora prema mjerenoj veličini: mehanička, toplinska, radijacijska, magnetna, kemijska, biološka mjerna osjetila.
b) Podjela mjernih senzora prema načinu pretvorbe: piezoelektrični, fotoelektrični, termoelektrični.
c) Podjela mjernih senzora prema području primjene: medicina, kućanstvo, svemirska istraživanja.
d) Podjela mjernih senzora prema materijalu: vodič, poluvodič, optičko vlakno.
e) Podjela mjernih osjetila prema tehnologiji izrade: mikroelektromehanička tehnologija, nanotehnologija.
f) Podjela mjernih senzora s električki mjerljivim signalom mogu biti aktivna i pasivna. Aktivno mjerno osjetilo pod utjecajem neke veličine generira električni signal. Primjer aktivnog mjernog osjetila je generiranja svjetlosti u električni napon preko fotonaponskih ćelija. Kod pasivnog mjernog osjetila mjerena

veličina kvantitativno mijenja neko njegovo električno svojstvo, kao za primjer možemo uzeti promjenu otpora fotootpornika pod utjecajem svjetlosti.

g) Podjela mjernih senzora prema načinu rada: kontaktne i beskontaktne. Kontaktna mjerna osjetila moraju biti u dodiru s predmetom mjerenja kao na primjer termometar, turbinski mjerač protoka, dok beskontaktne: nisu u dodiru s predmetom mjerenja. Kao primjer beskontaktnih mjernih osjetila možemo uzeti GPS i radar.
h) Podjela senzora prema složenosti: samostalne i nesamostalne jedinice. Samostalne jedinice su one jedinice kod kojih je izlaz odnosno očitanje je moguće odmah koristiti (termometar), a nesamostalne jedinice su dio složenije cjeline kod kojih izlaz senzora treba prilagoditi prije upotrebe (optički senzor, mikrofon).
i) Podjela senzora prema vrsti izlaznog signala: električni signal (struja ili napon) te neelektrični signal (tlak zraka, svjetlina). Vrste električnih signala su: binarni signal: u kojem postoje samo dva stanja, pulsni u kojem je nekontinuirani graduirani izlaz, analogni izlaz bez pojačala i analogni izlaz sa pojačalom.
j) Podjela senzora prema načinu prikaza signala: binarni senzori i analogni senzori. Binarni senzori pretvaraju mjerenu fizikalnu veličinu u binarni signal kao što su senzor blizine, senzor pritiska, senzor temperature, dok analogni senzori: pretvaraju fizikalnu veličinu u analogni signal (električnu veličinu kao senzor udaljenosti, senzor sile, akustički senzor). Razlika analognog i digitalnog senzora je u tome što analogni senzor proizvodi signal koji je proporcionalan mjernoj veličini te ima kontinuiranu amplitudu, dok digitalni senzor proizvodi digitalni izlazni signal odnosno prikaz mjerene veličine i ima vrijednosti amplitude u diskretnim vremenskim trenucima. Pod pojmom diskretnih vremenskih trenutaka podrazumijevamo konstantnu razinu intenziteta signala u nekom vremenskom periodu koji se mijenja sa vremenom.

4.2. Signali

Signali su funkcije vremena kojim se prikazuju željene fizikalne i kemijske varijable nekog sustava koji mjerimo [8].

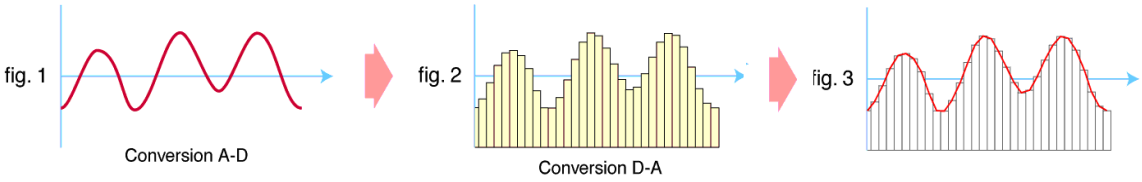
Vrste signala prema fizikalnim veličinama su: mehanički, električni, kemijski, biološki, elektromagnetski signal [9]:

a) Mehanički signal čini utjecaj tromosti tijela na drugo tijelo. Primjer mehaničkog signala je: brzina, sila, tlak, zvuk, protok.
b) Električni signal čini tok elektrona kroz poluvodič ili vodič, kao na primjer struja i napon.
c) Biološki signal čini elektrokemijska aktivnost u organizmu.
d) Elektromagnetski signal predstavlja širenje elektromagnetskog vala kroz neki medij, kao na primjer elektromagnetska zračenja i svjetlost.

Mjerene signale možemo podijeliti na digitalne i analogne signale [10].

a) Analogni signal je vremenski kontinuirani signal čija se amplituda odnosno jačina mijenja neprekidno i kontinuirano s vremenom. Analogni signal odgovara nekoj fizikalnoj veličini u danom trenutku te ima beskonačni broj razina.. Možemo ga podijeliti na periodični kontinuirani i aperiodički kontinuirani signal.
b) Digitalni signal sadrži diskretne funkcije, koje se dobivaju uzorkovanjem zapisa stanja analognog vala u određenim vremenskim koracima čija dužina zavisi o učestalosti, odnosno o frekvenciji signala. Svojstva digitalnog signala su njegov prikaz kao pravokutni signal s dvije razine, odnosno 0 i 1, veća otpornost na smetnje radi postojanja zaštitnih kodova, lakša pohrana na memoriju te veće mogućnosti obrade signala radi kompresije protoka podataka.

Na Slici 11 prikazan je pretvorba analognog signala u digitalni signal.



Slika 11. Pretvorba analognog signala u digitalni signal, [11]

Za pretvorbu signala iz analognog u digitalni signal koristimo analogno-digitalnu transformaciju te Fourierove transformacijske parove koji su navedeni ispod [12]:

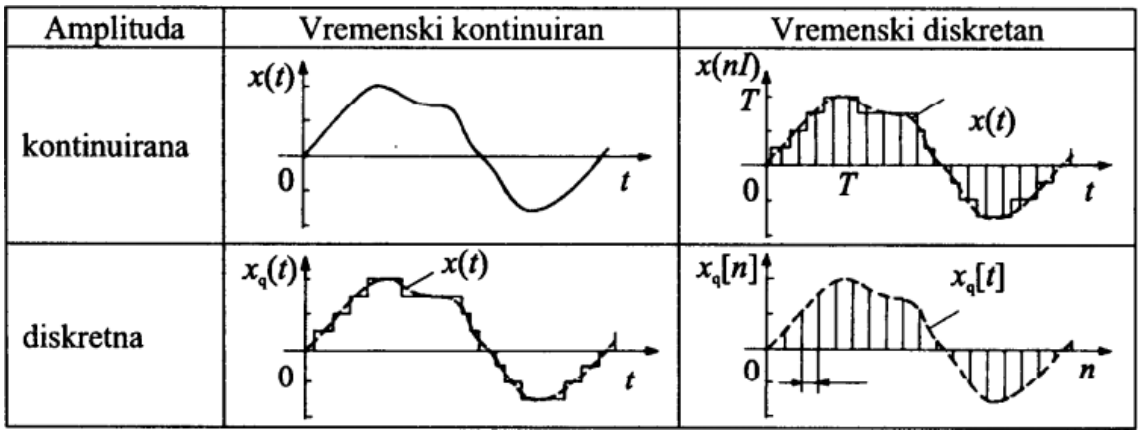
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \qquad [48]$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) \cdot \left(e^{j\omega n}\right) d\omega \qquad [49]$$

Pretvorba analognog signala u digitalni naziva se frekvencijska analiza te su Fourierovi redovi baza te pretvorbe. Teorijska osnova Fourierove transformacije je prikazana u poglavlju 3.

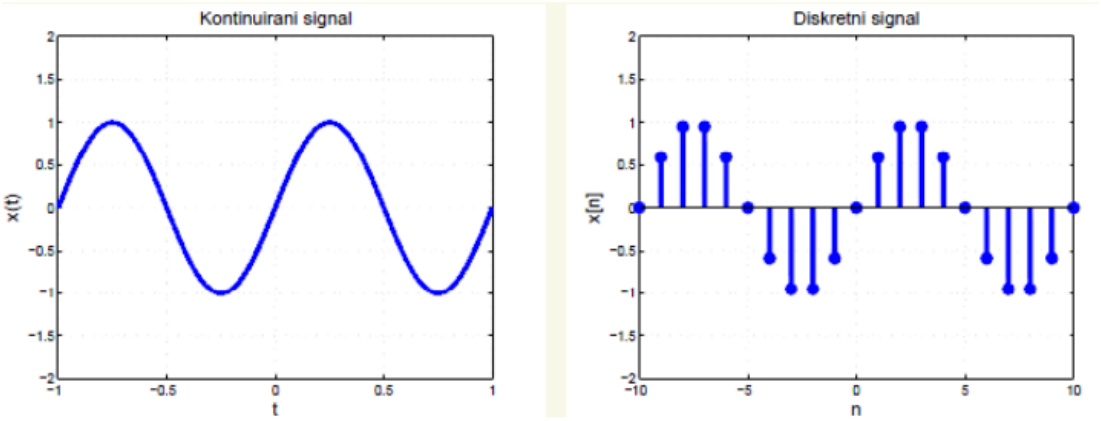
Matematičku podjelu signala čine: kontinuirani i diskretni signali, deterministički i stohastički (slučajni) signali, periodični i aperiodični signali, kauzalni i nekauzalni signali, realni (stvarni) i kompleksni signali [9].

Vremenski i amplitudno (vrijednosno) kontinuirani signali su signali funkcije *x(t)* vremenski kontinuiranih varijabli *t, t* ∈ *R* uz bilo koje vrijednosti A prikazani na Slici 12. Vremenski diskretni signal je signal funkcije *x(n)* diskretnih varijabli *n, n* ∈ *Z* [9].



Slika 12. Prikaz amplitudnog kontinuiranog (analognog) u diskretnog signala, [9]

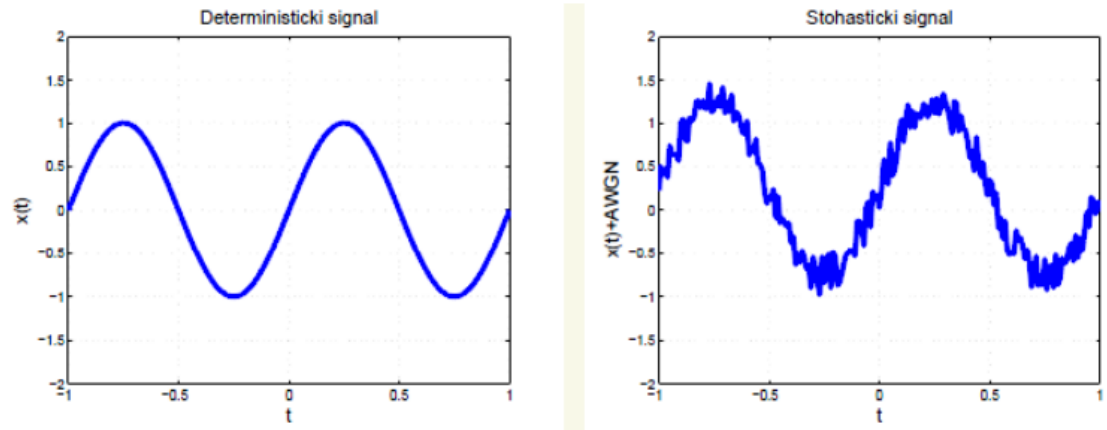
Amplitudno i vremenski diskretni signal (diskretni signal) dobiva se uzimanjem vrijednosti u određenim trenucima istog vremenskog intervala u određenim periodima njegova utipkavanja Na slici 13 prikazan je kontinuirani i diskretni signal [9].



Slika 13. Kontinuirani i diskretni signal, [9]

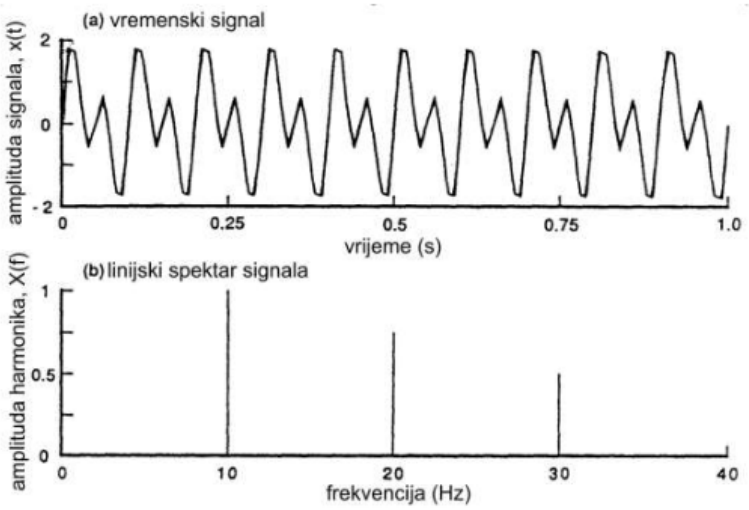
Digitalni signal čini diskretni signal koji ima brojčanu vrijednost, dok binarni signal čini diskretni signal s dvije vrijednosti amplitude, odnosno 0 i 1. Digitalni signal je sastavljen i od buke, odnosno šuma spojenog sa prvotnim signalom. Kako bi dobili izvorni signal moramo ga konvertirati, odnosno rastaviti taj signal na manje dijelove, što također možemo učiniti pomoću korištenja Fourierovih redova.[13]

Deterministički signali čine one signale čiji je fizikalni opis u matematičkom i grafičkom obliku u potpunosti poznat. Dijelimo ih na periodične i tranzijetne Stohastički signali su slučajni signali čija se vrijednost signala ne može točno predvidjeti, odnosno on čini šum, radi čega se on matematički ne može opisati. u potpunosti s matematičkom formulom, kod njega su poznati samo neki statički parametri signala Dijelimo ih na stacionarne i nestacionarne. Na slici 14 prikazani su deterministički i stohastički signali [13].

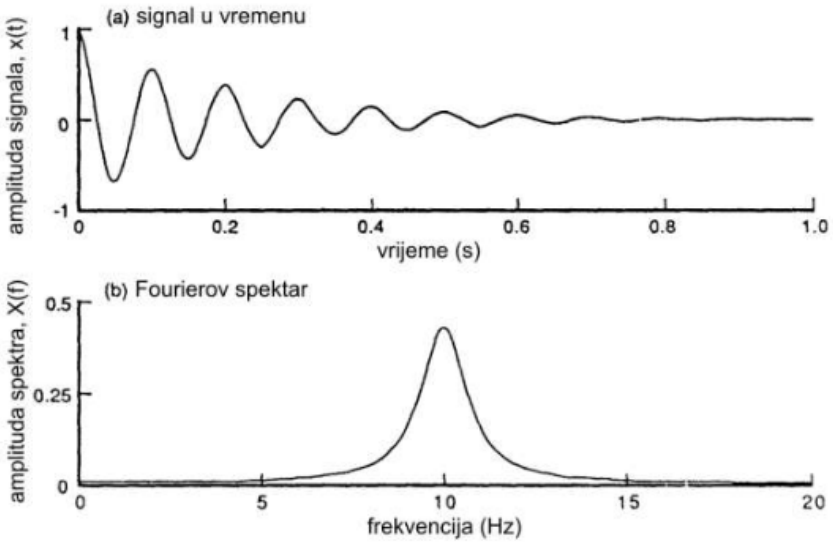


Slika 14. Deterministički i stohastički signali, [13]

Periodični signal čini zbroj nekoliko sinusoidnih i kosinusoidnih signala različite frekvencije i amplitude. Tako nastali red se zove Fourierov niz. Kod periodičnih signala je važno napomenuti da se njegova srednja vrijednost i spektar ne mijenjaju, odnosno oni čine kontinuirane vrijednosti. Periodični signal je prikazan primjerom zvuka stroja (Slika 15). Tranzijenti signali su signali koji se pojavljuju u audio sustavima, odnosno oni koji valovi čiji su frekvencijski sastav i amplituda različiti (Slika 16). Za oba signala, periodični i tranzijetni, prikazan je i pripadni Fourierov frekvencijski spektar [13].

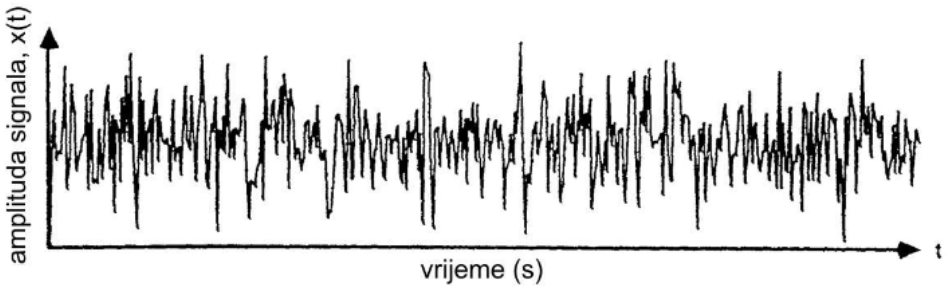


Slika 15. Periodični signal [13]

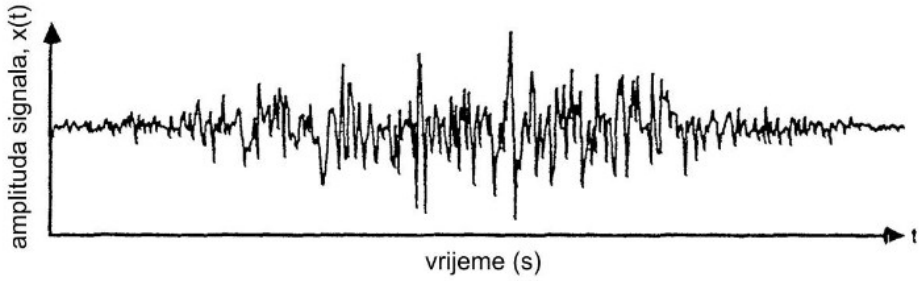


Slika 16. Prikaz tranzijentog signala[13]

Stacionarni signali imaju široko frekvencijsko područje te prosječno vremenski nepromjenjive vrijednosti. Kao primjer možemo navesti buku iz auspuha te umjetno generirani šum (Slika 17). Nestacionarni signali su oni kojima se vremenske vrijednosti mijenjaju. Kao primjer možemo navesti eksploziju petardi (Slika 18) [13].



Slika 17. Prikaz stacionarnog vala, [13]

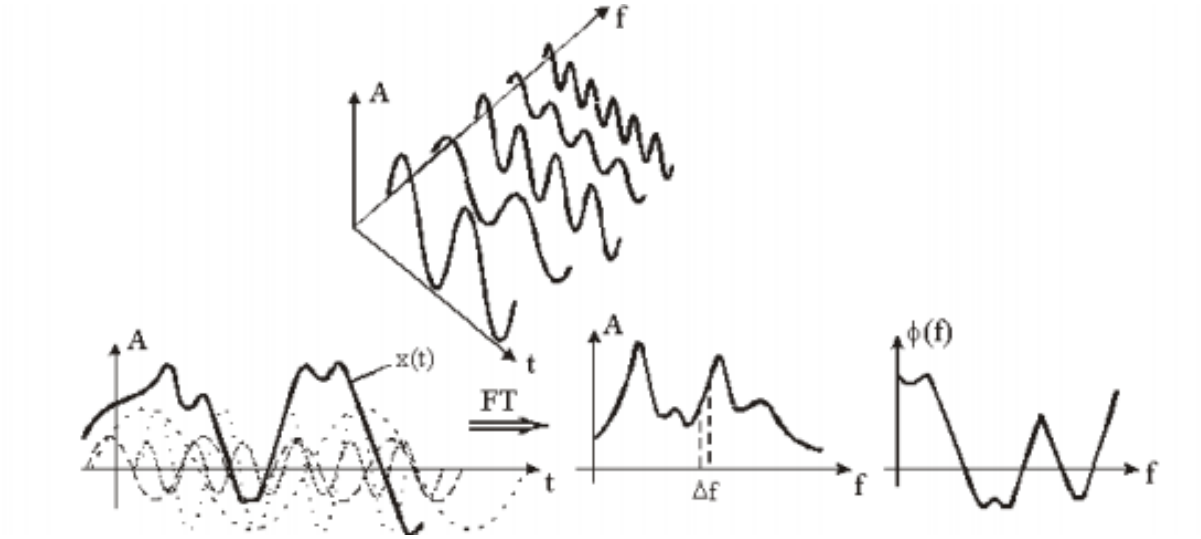


Slika 18. Prikaz tranzijentnog vala, [13]

4.3. Frekvencijski spektri

Spektar u matematici definiramo kao dvodimenzionalni graf složenog vala prikazanog u nekim drugim mjerama. Spektar čini raspodjela intenziteta mjerenih veličina koje su u ovisnosti s nekim fizikalnim veličinama, kao na primjer o energiji, frekvenciji, brzini, masi i drugim mjerenim veličinama [14]. Ulazni signali su sastavljeni od osnovnih komponenata sa dodatkom šuma. Prijamni signal se uobičajeno sastoji od željenog dijela; informacije koju mjerimo, te neželjenog dijela koji ne prenosi nikakav sadržaj informacije, (šum). Drugim riječima, potrebno je prvo odrediti dominantu frekvencijsku komponentu signala kako bi on što točnije odgovarao stvarnom stanju. S obzirom da signal ima vremensku komponentu, potrebno je pronaći i njenu frekvencijsku komponentu. Kako bi spektar prikazali pomoću Fourierovog reda, prvo taj red moramo prilagoditi. Za prilagodbu Fourieovog reda našoj potrebi, koristit ćemo Fourierovu

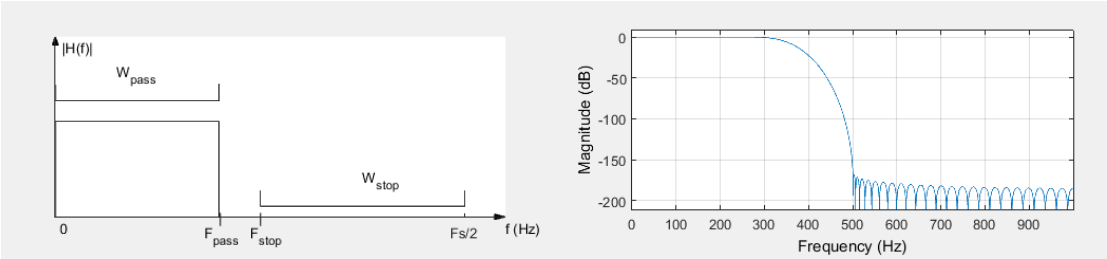
transformaciju $x(t) \rightarrow X(\omega)$, odnosno koristit ćemo frekvencijsku analizu ulaznih signala spektra. Određivanje dominantne frekvencije spektra također možemo odrediti i direktnom metodom, pomoću prikaza u sklopu frekvencijske spektralne analize. Spektralna analiza signala nam omogućuje uvid u frekvencijski sadržaj signala, odnosno pokazuje nam pojavljivanje intenziteta, amplituda pojavljivanih frekvencija. Vremenski signal se također može prikazati preko brze Fourierove transformacije, čime se dobije prikaz signala u frekventnoj domeni (Slika 19). [15]



Slika 19. Razlaganje signala na ortogonalne komponente: amplituda, frekvencija te faza [16]

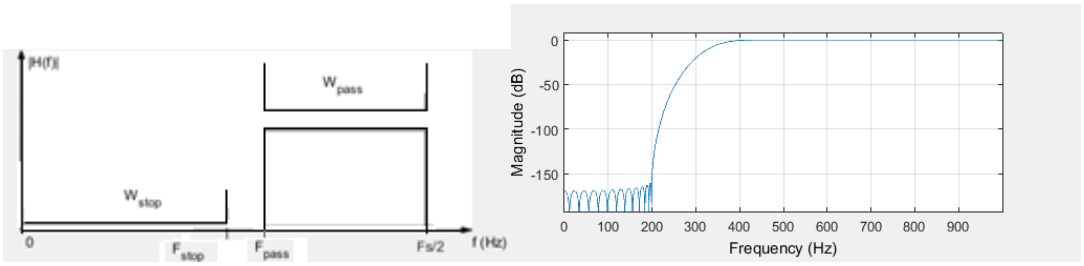
Upotreba Fourierovih redova važna je kod mjernih senzora i obrade mjerenih signala u inženjerstvu okoliša pri čemu važnu ulogu igra filtriranje mjerenog signala od šuma. Filtriranje signala je odvajanje frekvencija signala od frekvencija šuma i smetnji. Signal možemo filtrirati koristeći niskopropusni filtar, visokopropusni filtar te pojasni filtar [15].

Niskopropusni filtar (Slika 20) nam omogućuje prikaz signala ispod njihove granične frekvencije, odnosno prolaznog pojasa te smanjuje signale iznad frekvencija prekida, odnosno frekvencija iz zaustavnog pojasa. Koriste se za *očuvanje signala, uklanjanje buke, izradu i prikaz prosječnih (average) podataka, te otkrivanje važnih obrazaca signala.* [15]



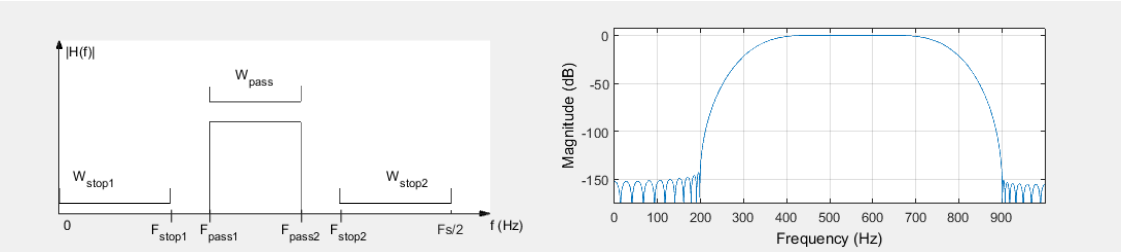
Slika 20. Prikaz rada niskopropusnog filtra gdje je W_{pass} označava propušteno frekventno područje, a W_{stop} područje nepropuštenih frekvencija. Sve frekvencije iznad 500 Hz su prigušene [15].

Visokopropusni filtar (Slika 21) omogućuje prolaz signalima iznad frekvencije prekida u prolaznom pojasu, drugim riječima, on omogućuje prolaz visokim frekevencijama signala pri čemu on guši niže frekvencije. *Primjena ovih filtara je za čišćenje buke niske frekvencije, uklanjanje šumova u audio signalima, preusmjeravanje viših frekvencijskih signala na odgovarajuće zvučnike u zvučnim sustavima te uklanjanje niskofrekventnih trendova što ističe visokofrekventne trendove.* [15].



Slika 21. Prikaz rada visokopropusnog filtra pri čemu su propuštene sve frekvencije iznad 200 Hz, [15]

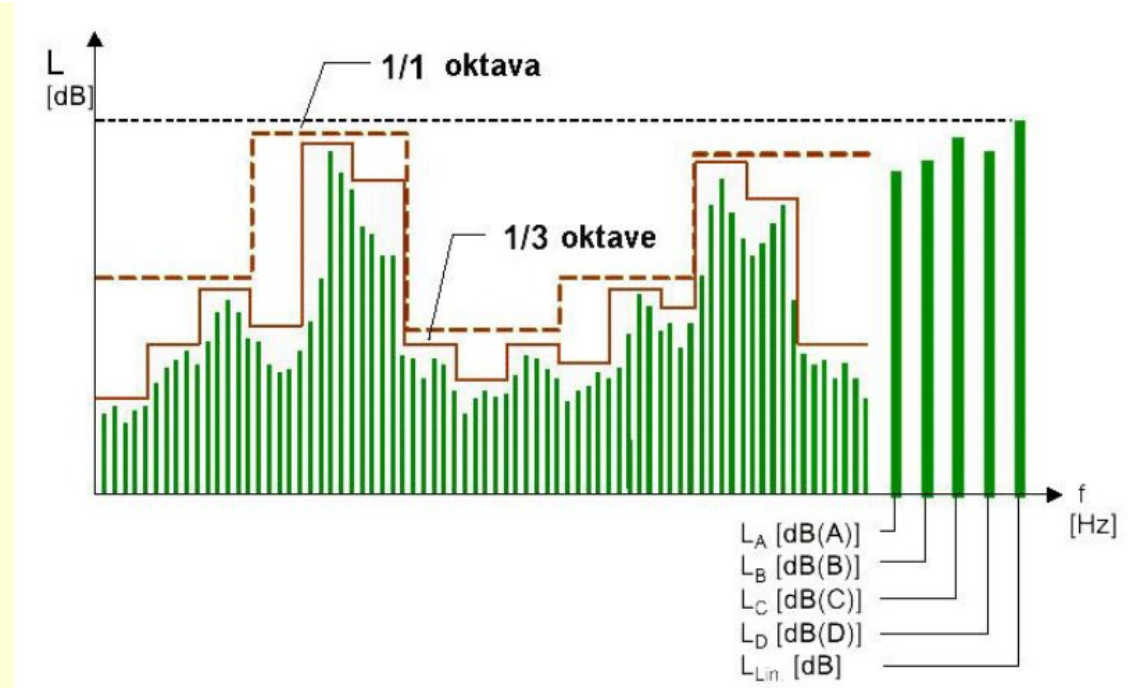
Pojasni filtar (Slika 22) je kombinacija niskopropusnog i visokopropusnog filtra, što omogućuje prolaz signalima svih propuštenih frekvencija u prolaznom pojasu-niske i visoke frekvencije. Također ima i dva područja zaustavljenih (nepropuštenih) frekvencija, W_{stop}, što omogućuje postavljanje granica između frekvencija koje se žele propuštati. Koristi se za prikaz određenog frekventnog područja. *Takav filter koristi se najčešće kada poznajemo određeni šum kojega želimo izolirati iz samog mjerenog* signala [15].



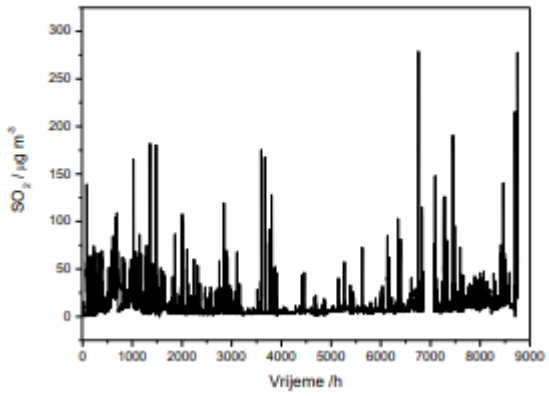
Slika 22. Prikaz rada pojasnog filtra pri čemu su propuštene frekvencije između 200 i 900 Hz, [15]

Fourierovi redovi igraju važnu ulogu u inženjerstvu okoliša jer se njihova transformacija iz vremenskog signala, odnosno iz analognog signala zamućenih vrijednosti u frekvencijski, odnosno digitalni signal, koristi za obradu mjerenih signala, filtriranje sadržaja, određivanje dominantnih frekvencija mjerenog signala što u konačnici može izolirati neki izvor onečišćenja u okoliša kao što je frekvencija dominantne buke (Slika 23) ili onečišćenje SO_2 u okolišu (Slika 24).

Na slici 23 su prikazani spektri 1/1 i 1/3. 1/1 spektar služi za kontrolu buke pomoću mjerenja i on predstavlja ljudski sluh. Analiza ovog spektra se često koristi kod kontrole buke, kontrole sluha te kod zaštite sluha i u okolišu. 1/3 spektar se koristi za detaljnije frekvencijske odzive kao i za mjerenje i kontrolu buke u okolišu. [17]

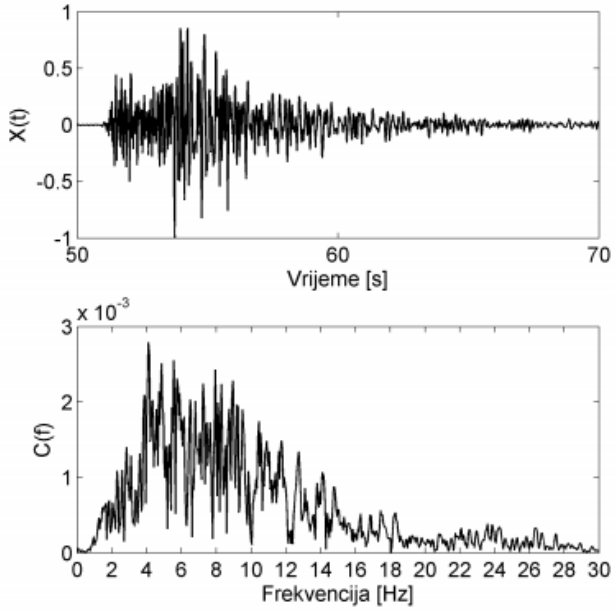


Slika 23. Primjer spektra buke [17]



Slika 24. Fourierov spektar onečišćenja SO_2, [18]

Također možemo navesti i primjenu Fourierovih redova u seizmologiji za određivanje spektralnih karakteristika potresa te se može primijeniti i za filitriranje šuma iz zapisa potresa. [19]



Slika 25: Seizmogram i spektar seizmograma za potres od 31. siječnja 2015. godine, [19] ˇ

5. ZAKLJUČAK

Fourierov red se razvija za periodične i neperiodične funkcije koje se mogu zapisati u periodičnom obliku. Uvjet za razvijanje Fourierovog reda je da se jedan interval ponavlja beskonačno mnogo puta.

Mjerni senzori služe za pretvaranje fizikalnih veličina (tlak, temperatura, vlažnost zraka, broj okretaja motora…) u električne veličine koje su primjerene za daljnju obradu. Primjer jedne mjerene veličine je mehaničko titranje membrane ploče električnog kondenzatora u kondenzatorskome mikrofonu koje je uzrokovano zvučnim valovima što čini promjenu električnog kapaciteta. Mjerna osjetila možemo podijeliti prema mjernoj veličini, načinu pretvorbe, području primjene, materijalu, tehnologiji izrade, aktivnosti i pasivnosti, načinu rada, složenosti, vrsti izlaznog signala, te tipu primjene.

Mjerni senzori procesuiraju signale. Signali su funkcije vremena kojim se prikazuju željene fizikalne i kemijske varijable nekog sustava. Vrste signala prema fizikalnim veličinama su: mehanički, električni, kemijski, biološki, elektromagnetski signal. Signale možemo podijeliti na analogni i digitalni. Analogni signal je vremenski kontinuirani signal čija se amplituda odnosno jačina mijenja neprekidno i kontinuirano s vremenom. Analogni signal odgovara nekoj fizikalnoj veličini u danom trenutku te ima beskonačni broj razina.. Možemo ga podijeliti na periodični kontinuirani i aperiodički kontinuirani signal. Digitalni signal sadrži diskretne funkcije, koje se dobivaju uzorkovanjem zapisa stanja analognog vala u određenim vremenskim koracima čija dužina zavisi o učestalosti, odnosno o frekvenciji signala. Signali koje procesuiraju mjerni senzori su sastavljeni od početne frekvencije i buke. Kako bi signale prikazali pomoću spektra, odnosno u obliku dvodimenzionalnog grafa složenog vala prikazanog u nekim drugim mjerama. Ulazne signali su sastavljeni od osnovnih komponenata sa dodatkom šuma. moramo prvo odrediti dominantu frekvencijsku komponentu signala kako bi on što točnije odgovarao stvarnom stanju. S obzirom da signal ima vremensku komponentu, potrebno je pronaći i njenu frekvencijsku komponentu. Kako bi spektar prikazali pomoću Fourierovog reda, prvo taj red moramo prilagoditi. Za prilagodbu Fourieovog reda našoj potrebi, koristit ćemo Fourierovu transformaciju $x(t) \rightarrow X(\omega)$, odnosno koristit ćemo frekvencijsku analizu ulaznih signala spektra. Određivanje dominantne frekvencije spektra također možemo odrediti i direktnom metodom, pomoću prikaza u sklopu signalne analize.

6. POPIS LITERATURE

[1] *Joseph Fourier*, dostupno na https://bs.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier, zadnji pristup: 1.6.2020.

[2] Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühlig: *Matematički priručnik*, Zagreb; Golden marketing – Tehnička knjiga, 2004

[3] https://www.wolframalpha.com/, zadnji pristup: 1.6.2020.

[4] Matijević D. i Poljak S., Fourierov red i Fourierova transformacija; dostupno na: http://e.math.hr/math_e_article/br19/matijevic, zadnji pristup: 1.6.2020.

[5] Apsen B.: *Repetitorij više matematike,* 8. izdanje, Zagreb; Tehnička knjiga, 1983.

[6] *Parne i neparne funkcije*, dostupno na: https://bs.wikipedia.org/wiki/Parne_i_neparne_funkcije

[7] Piljac I., *Senzori fizikalnih veličina i elektroanalitičke metode,* Zagreb, Medija Print, Tiskara Hrastić d.o.o., 2010

[8] Sučić I., *Signali i sustavi*, dostupno na: https://www.veleri.hr/files/datotekep/nastavni_materijali/k_telematika_1/Predavanje_1_c_-_V1-Sucic2.pdf, predavanja, zadnji pristup: 1.6.2020

[9] *Telematika 1*, dostupno na https://www.veleri.hr/files/datotekep/nastavni_materijali/k_telematika_1/Predavanje_1_a.pdf, zadnji pristup: 1.6.2020

[10] *Analogno i digitalno*, dostupno na: https://razno.sveznadar.info/02-2razred/3-analogDig/10.htm, zadnji pristup: 1.6.2020

[11] *Analogni signal*, dostupno na: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5a/Conversion_AD_DA.png, zadnji pristup: 1..2020

[12] *Diskretna Fourierova tranformacija DFT* https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/DOS0304_vj2.pdf, zadnji pristup: 1.7.2020

[13] prof.dr.sc. Jambrošić K., *Zvuk i okoliš, predavanje 3*, 2013.

[14] *Spektar.* Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2020. dostupno na http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=57368 1.7.2020

[15] Svetec E., *Fourierova transformacija vremenskog signala i spektralna analiza*, seminarski rad, Sveučilište u Zagrebu, Geotehnički fakultet Varaždin

[16] Mikulić, M. *Primjena Fourierove transformacije u analizi veličina nekih prijelaznih pojava u elektroenergetskom sustavu,* završni rad

[17] *Frekvencijska analiza zvuka predavanja*, Akademska godina: 2019/2020. Diplomski studij IO, smjer Upravljanje okolišem 1.godina, I. semestar (zimski)

[18] Srdanović, S., *Dugotrajne promjene u koncentracijama polutanata u zraku - istraživanje skrivenih ciklusa*, završni rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2013.

[19] Špoljar J., *Seizmičko pojačanje klizišta Kostanjek*, diplomaki rad, Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet, 2016.

7. DODACI

7.1. Popis slika

Slika 1: Jean Baptiste Joseph Fourier, 1 1
Slika 2: Sinus funkcija 3 2
Slika 3. Kosinus funkcija 3 2
Slika 4. R*ectangle* funkcija 4 4
Slika 5. Periodična funkcija perioda *L=b-a* 5 8
Slika 6. Kvadratna funkcija 3 10
Slika 7. Sinus funkcija, 3 11
Slika 8. Kubna funkcija, 3 11
Slika 9. *Rectangle* funkcija određena jednadžbom, 4 13
Slika 10. Prikaz sinc funkcije, 3: 15
Slika 11. Pretvorba analognog signala u digitalni signal, 11 19
Slika 12. Prikaz amplitudnog kontinuiranog (analognog) u diskretnog signala, 9 20
Slika 13. Kontinuirani i diskretni signal, 9 21
Slika 14. Deterministički i stohastički signali, 13 21
Slika 15. Periodični signal 13 22
Slika 16. Prikaz tranzijentog signala13 22
Slika 17. Prikaz stacionarnog vala, 13 23
Slika 18. Prikaz tranzijentnog vala, 13 23
Slika 19. Razlaganje signala na ortogonalne komponente: amplituda, frekvencija te faza 16 24
Slika 20. Prikaz rada niskopropusnog filtra gdje je W_{pass} označava propušteno frekventno područje, a W_{stop} područje nepropuštenih frekvencija. Sve frekvencije iznad 500 Hz su prigušene 15. 25
Slika 21. Prikaz rada visokopropusnog filtra pri čemu su propuštene sve frekvencije iznad 200 Hz, 15 25
Slika 22. Prikaz rada pojasnog filtra pri čemu su propuštene frekvencije između 200 i 900 Hz, 15 26
Slika 23. Primjer spektra buke 17 26
Slika 24. Fourierov spektar onečišćenja SO_2, 18 27
Slika 25: Seizmogram i spektar seizmograma za potres od 31. siječnja 2015. godine, 19 ˇ 27