

Prostorna grafostatika

Živković, Božana

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:237:625454>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-03**

Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Civil Engineering,
University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Božana Živković

PROSTORNA GRAFOSTATIKA

ZAVRŠNI ISPIT

Zagreb, 2024.



Sveučilište u Zagrebu

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Božana Živković

PROSTORNA GRAFOSTATIKA

ZAVRŠNI ISPIT

Mentor: Krešimir Fresl

Zagreb, 2024.



University of Zagreb

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Božana Živković

3D GRAPHIC STATICS

FINAL EXAM

Supervisor: Krešimir Fresl

Zagreb, 2024.

ZAHVALE

Veliko hvala mentoru prof. dr. sc. Krešimiru Freslu na predloženoj temi, savjetima, strpljenju i vodstvu tijekom izrade rada te na prenesenom znanju tijekom studija.

Posebno zahvaljujem roditeljima i sestri na podršci, ljubavi i razumijevanju tijekom cijelog obrazovanja.

Zahvaljujem se i ostalim članovima obitelji, kolegama, prijateljima i osobama koje sam srela tijekom studiranja.

Najveće hvala dragom Bogu što mi je pružio priliku da studiram, darovao mi strpljivost, razum i upornost u učenju.

SAŽETAK

Prostorna grafostatika bavi se rješavanjem statičkih problema u trodimenzionalnom prostoru. Ovaj rad analizira ključne aspekte prostorne grafostatike, definirajući osnovne pojmove kao što su točke, pravci, ravnine i sile. Naglasak je, vidljivo u primjerima, stavljen na zamjenu složenih sustava statički ekvivalentnim sustavima.

Teorijsko-metodološko polazište je analiza dostupne literature. Izrazi u teorijskom dijelu, pomoću Grassmannove algebre, prevedeni su u programski kod, pisan u Sage-u, koji znatno olakšava vizualizaciju.

Osim već navedenih pojmova točke, pravca, ravnine i sile, u radu su opisani i pojmovi Grassmannove algebre koja proučava svojstva višedimenzionalnih prostora, homogenih i Plückerovih koordinata kao i trodimenzionalnog projektivnog prostora te dualnosti koju vežemo s projektivnom geometrijom. Svi navedeni pojmovi čine neizostavne dijelove koji povezani u cjelinu čine da prostorna grafostatika u građevinarstvu, ali i u drugim srodnim strukama, omogućava bolje razumijevanje struktura pod različitim opterećenjima.

Ključne riječi: Grassmannova algebra, pravac, prostor, prostorna grafostatika, ravnina, sila, statička ekvivalencija, točka

SUMMARY

3D graphic statics deals with solving static problems in three-dimensional space. This paper analyzes key aspects of 3D graphic statics, defining basic terms such as points, lines, planes and forces. The emphasis, as seen in the examples, is placed on replacing complex systems with statically equivalent systems.

The theoretical-methodological starting point is the analysis of the available literature. Expressions in the theoretical part, using Grassmann algebra, have been translated into program code, written in Sage, which significantly facilitates visualization.

In addition to the previously mentioned concepts of points, directions, planes and forces, the paper also describes the concepts of Grassmann algebra, which studies the properties of multidimensional spaces, homogeneous and Plücker coordinates, as well as three-dimensional projective space and duality associated with projective geometry. All these concepts form indispensable parts that, when connected into a whole, allow 3D graphic statics in construction, but also in other related professions, to provide a better understanding of structures under various loads.

Key words: Grassmann algebra, line, space, 3D graphic statics, plane, force, static equivalence, point

SADRŽAJ

1.	UVOD	1
2.	GRASSMANNOVA ALGEBRA	2
2.1.	Homogene koordinate.....	2
2.2.	Trodimenzionalni projektivni prostor	2
2.3.	Plückerove koordinate.....	3
3.	RAVNINA.....	4
3.1.	Sila u ravnini	4
3.2.	Točka i vektor u ravnini.....	7
3.3.	Pravac u ravnini	7
4.	PROSTOR.....	15
4.1.	Točka u prostoru	15
4.2.	Pravac u prostoru	15
4.3.	Sila u prostoru	17
4.4.	Ravnina	18
5.	PRIMJENA GRAFOSTATIKE U PROSTORU	25
5.1.	Načela geometrijske konstrukcije.....	25
5.2.	Zamjena triju mimosmjernih sila dvjema mimosmjernim silama.....	25
5.3.	Zamjena četiri mimosmjerne sila dvjema mimosmjernim silama	33
6.	ZAKLJUČAK.....	39
7.	POPIS LITERATURE	40
8.	POPIS SLIKA	41

1. UVOD

Prostorna grafostatika je grana statike koja se bavi proučavanjem ravnoteže i ponašanja čvrstih tijela u trodimenzionalnom prostoru geometrijskim postupcima. Početak razvoja grafostatike nalazimo u radovima S. Stevina i P. Varignona koji datiraju u 16. odnosno 17. stoljeće, no većina postupaka je bila ograničena na ravninu. Razvojem računala i računalnih alata, grafostatika i njezini postupci prelaze u prostor.

Pri rješavanju statičkih problema praktično je postojeći sustav sila zamijeniti drugim, statički ekvivalentnim, jednostavnijim i pogodnijim sustavom. Kako bismo dva sustava sila smatrali statički ekvivalentnim, njihovi doprinosi uvjetima statičke ravnoteže moraju ostati isti. Općenito, sustav se sila u prostoru ne može zamijeniti jednom silom, što je i jedan od razloga kasnije primjene prostorne grafostatike. Za razliku od ravnine, gdje se sustav može svesti ili na rezultantu (rezultirajuću silu) ili na rezultirajući moment (spreg sila), u prostoru je rezultirajuće djelovanje sastavljeno od obje komponente odnosno i od rezultirajuće sile i od rezultirajućega momenta. Umjesto na složeno rezultirajuće djelovanje, sustav sila se može svesti na dvije sile na mimosmjernim pravcima (što je primjerenije grafičkim postupcima). Na jednu je silu sustav svodiv samo u slučaju kada je rezultirajući moment okomit na rezultirajuću silu. Uz spomenuti, drugi razlog kasnije primjene grafostatike u prostoru je to što su grafičke konstrukcije složenije s obzirom na to da se provode na projekcijama prostornih sustava na ravnine. Naime, „vraćanje“ s crteža u prostor i predočavanje stvarnih prostornih odnosa zna biti vrlo teško.

Operacije koje grafostatika koristi za rješavanje statičkih problema, poput statičke ekvivalencije i statičke ravnoteže, su, rekli smo, geometrijske. Zasnivaju se na konstrukciji dvaju dijagrama – plana položaja, koji prikazuje geometriju sistema i poligona sila sastavljenog od vektora. Pod pojmom geometrije sistema podrazumijevamo duljine konstrukcijskih elemenata, lokaciju unutrašnjih čvorova i ležajeva te vanjska opterećenja. Poligoni sila predstavljaju ravnotežu vanjskih i unutarnjih sila. Navedene operacije se mogu algebarski izraziti pomoću Grassmannove algebre. H. Grassmann je pokazao kako se koordinatama mogu prikazati i druge figure prostora, a ne samo točke, te tako postavio temelje geometrijskoj algebri, o kojoj će još biti riječi.

Kao što vidimo, prostorna grafostatika je opsežna tema, s velikom važnošću. Smatra se jednim od budućih trendova u građevinarstvu koji počinje nalaziti svoje mjesto u obrazovanju građevinskih inženjera i u oblikovanju vlačnih i vlačno-tlačnih prednapetih konstrukcija, stoga će u nastavku rada biti dotaknute bitne činjenice te objašnjeni osnovni principi prostorne grafostatike.

2. GRASSMANNOVA ALGEBRA

Grassmannova algebra grana je matematičke algebre koja proučava svojstva višedimenzionalnih prostora. Glavnu funkciju predstavljaju opisivanje i rad s vektorima te složenim višedimenzionalnim objektima. Grassmannova algebra ima mnoge sposobnosti, od kojih neke još nisu dovoljno poznate, a mi ćemo se fokusirati na dvije– sposobnost algebarskog razlikovanja točke i vektora te sposobnost izračunavanja presjeka geometrijskih entiteta jednostavnom operacijom. Upravo se ovdje i očituje važnost Grassmannove algebre u prostornoj gafostatici– sposobnost neposrednog prijevoda konstrukcijskogeometrijskih postupaka u algebarske izraze koje nakog toga možemo pretvoriti u programski kod.

Pravac možemo odrediti pomoću dvije točke, dok se ravnina može odrediti s tri točke ili točkom i pravcem. Osim toga, pravac se može odrediti i kao presjek dvije ravnine, a točka kao presjek triju ravnina ili pravca i ravnine. U slučaju kada se dva pravca sijeku, oni određuju točku, ali i ravninu.

Upravo navedene činjenice objašnjavaju princip Grassmannove algebre. Naime, linearni spojevi i presjeci definiraju se kao „progresivni” ili „regresivni” umnošci točaka, pravaca i ravnina.

U nastavku će se opisati upravo pojmovi točke, pravca i ravnine, ali i sile. Obzirom da smo se do sada češće susretali problemima u ravnini, prvo ćemo njih opisati, što može pomoći pri razumijevanju prostorne problematike. Prilikom opisivanja, koristit će se pojmovi homogenih koordinata, trodimenzionalnog projektivnog prostora, Plückerovih koordinata i slično, stoga će prije nastavka biti i nekoliko riječi o njima.

2.1. Homogene koordinate

Homogene ili projektivne koordinate u matematici predstavljaju sustav koordinata koji se koristi u projektivnoj geometriji. Prednost ovih koordinata je u tome što se i koordinate beskonačno dalekih točaka mogu predstaviti konačnim koordinatama. Može se reći kako su homogene točke proširenje Kartezijevog koordinatnog sustava, koji se koristi u euklidskoj geometriji, kako bi se olakšalo izvođenje geometrijskih transformacija. Upravo se transformacije poput translacije, rotacije i promjene mjerila mogu prikazati kao množenje matricama. Kod homogenih koordinata postoji dodatni parametar w , pa tako točku u prostoru zapisujemo u obliku $\mathcal{X} = (w : x : y : z)$. No o tome će biti više riječi u nastavku. Ovdje su dane osnovne informacije, kako pojam homogenih koordinata ne bi bio nepoznanica.

2.2. Trodimenzionalni projektivni prostor

Pojam projektivne geometrije već je spomenut, a motivacija za njezin nastanak bila je umjetnost. Kako je neizostavan dio brojnih renesansnih djela bilo pravilo centralne projekcije, čija je glavna karakteristika to da se paralelni pravci prostora na slici sijeku u konačnosti, ova vrsta geometrije počela se razvijati upravo u tom periodu, tj. od 15. stoljeća.

Kao i u euklidskom prostoru, osnovni elementi su točke, pravci i ravnine između kojih postoji relacija pripadnosti tj. incidencije, stoga kao primjer možemo reći kako je pravac p incidentan s točkom A ako pravac p prolazi točkom A i obratno, točka A je incidentna s pravcem p ako točka A leži na pravcu p . Osim osnovnih elemenata i relacije pripadnosti, zadan je i niz aksioma. Primjer aksioma glasi: ako su A , B i C tri nekolinearne točke (nisu sve tri incidentne s istim pravcem), tada postoji barem jedna točka D koja ne leži u ravnini određenoj točkama A , B i C (nisu sve četiri incidentne s istom ravninom). Tako definirana struktura naziva se projektivnim prostorom tj. trodimenzionalnim projektivnim prostorom. Spomenuti odnos incidencije ima trostruku interpretaciju koja uključuje tri aspekta. Možemo reći da je jedan od njih pasivan, dok su druga dva aktivna. Pasivnim smatramo onaj u kojem biti incidentan znači ležati u ili prolaziti kroz, odnosno aspekt u kojem se naglašava odnos između elemenata prostora, dok aktivne koristimo za definiranje elemenata s drugim elementima, nižih ili viših dimenzija.

Važan pojam koji vežemo s projektivnom geometrijom je dualnost. Otkrili su je u 19. st. J. V. Poncelet i J. D. Gergonne, a glasi: Zamijenimo li u nekoj istinitoj tvrdnji projektivne geometrije prostora pojam točka dualnim pojmom ravnina, i obrnuto, a pojmove pravca i incidencije ostavimo nepromijenjenima, dobit ćemo ponovno istinitu tvrdnju projektivne geometrije prostora. Takve se dvije tvrdnje nazivaju dualnim tvrdnjama. Primjer dualnosti za gore navedeni aksiom glasi: ako su α , β i γ tri ravnine koje se ne sijeku u pravcu (nisu sve tri incidentne s istim pravcem), tada postoji barem jedna ravnina δ koja ne prolazi točkom u kojoj se sijeku ravnine α , β i γ (nisu sve četiri incidentne s istom točkom).

Već smo kod homogenih koordinata spominjali pojam „proširenja“. Uobičajeni trodimenzionalni euklidski prostor ćemo proširiti dodavanjem elemenata u beskonačnosti koje ćemo nazvati beskonačno dalekim elementima. Tim postupkom ovo proširenje postaje projektivni prostor. Euklidskom prostoru dodajemo beskonačno daleku ravninu, koja sadrži pravce i točke odnosno beskonačno daleke pravce i beskonačno daleke točke. Svakoj ravnini dodajemo beskonačno daleki pravac, što znači da je proširena jednim pravcem, koji je zapravo presječnica te ravnine sa svim drugim ravninama paralelnim s njom. Također, svaki pravac sadrži, odnosno proširen je beskonačno dalekom točkom koja predstavlja presjek pravaca paralelnih s našim početnim pravcem. Ovakav prostor nazivamo proširenim euklidskim prostorom koji ima strukturu projektivnog prostora. U njemu su konačni i beskonačni elementi ravnopravni.

2.3. Plückerove koordinate

Plückerove koordinate su matematički koncept, korišten u projektivnoj geometriji, gdje se pravac u trodimenzionalnom prostoru označava sa šest brojeva koji čine tzv. Plückerov vektor, za razliku od uobičajenog predstavljanja pravca (točke na pravcu i vektora). Često možemo vidjeti i zapis u obliku antisimetrične matrice. Plückerove koordinate omogućavaju jednostavnije izraze za operacije kao što je presjek pravaca ili međusobne odnose između pravaca.

3. RAVNINA

3.1. Sila u ravnini

Silu u ravnini možemo zadati hvatištem i vrškom vektora:

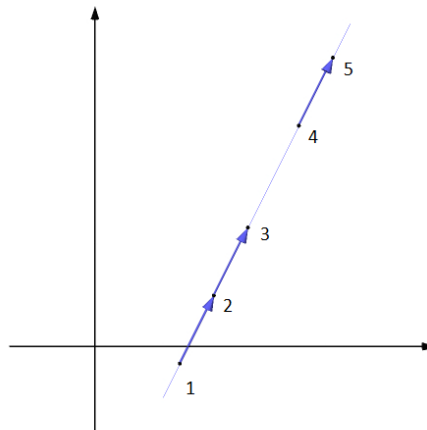
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Komponente sile u x i y smjeru te moment koji uzrokuje oko osi z iznose:

$$F_x = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_1$$

$$F_y = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot y_2 - 1 \cdot y_1$$

$$M_z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$



Slika 1.: Sila zadana hvatištem i vrškom vektora

Poznato je kako neovisno o položaju sile na pravcu, odnosno položaju hvatišta sile, uz istu udaljenost vrška, njezine komponente i moment ostaju isti, što možemo vidjeti i u sljedećem primjeru.

Primjer 1.

$$\vec{F}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F_{1,2}^x = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2 - 0 = 2$$

$$F_{1,2}^y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 3 + 1 = 4$$

$$M_{1,2}^z = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 0 + 2 = 2$$

$$\vec{F}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F_{2,3}^x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 4 - 2 = 2$$

$$F_{2,3}^y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 3 = 7 - 3 = 4$$

$$M_{2,3}^z = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 14 - 12 = 2$$

Dobivene vrijednosti nam pokazuju već navedenu činjenicu o vrijednostima neovisno o položaju na pravcu tj.

$$F_{1,2}^x = F_{2,3}^x = 2 = F_x$$

$$F_{1,2}^y = F_{2,3}^y = 4 = F_y$$

$$M_{1,2}^z = M_{2,3}^z = 2 = M_z$$

Osim hvatištem i vrškom vektora, silu u ravnini možemo zadati i njenim komponentama te momentom $\vec{F} = (F_x, F_y, M_z)$. Tako bi se sila $\vec{F}_{1,2}$ iz primjera 1. mogla zapisati kao $\vec{F}_{1,2} = (F_{1,2}^x, F_{1,2}^y, M_{1,2}^z)$, ako bismo uzeli njene vrijednosti $\vec{F}_{1,2} = (2, 4, 2)$. Na isti način možemo zapisati i silu $\vec{F}_{2,3} = (F_{2,3}^x, F_{2,3}^y, M_{2,3}^z) = (2, 4, 2)$. Samim tim i sile $\vec{F}_{1,2}$ i $\vec{F}_{2,3}$ su jednake.

Također, silu možemo zadati hvatištem i vektorom. Kako smo silu zapisivali u obliku matrice, a njene komponente računali kao determinantu, na istu možemo primijeniti svojstvo determinante : „Ako nekom stupcu ili retku dodamo linearnu kombinaciju preostalih stupaca ili redaka, onda se determinanta ne mijenja“.

Neka nam je zadana sila $\vec{F}_{4,5}$. Pri računanju iskoristit ćemo svojstvo determinante tako što ćemo prvi redak pomnožiti s -1 i dodati ga drugom retku odnosno od drugog retka oduzet ćemo prvi.

$$F_{4,5}^x = \begin{vmatrix} 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_4 \\ 1-1 & x_5 - x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_4 \\ 0 & F_x \end{vmatrix}$$

$$F_{4,5}^y = \begin{vmatrix} 1 & y_4 \\ 1 & y_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_4 \\ 1-1 & y_5 - y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_4 \\ 0 & F_y \end{vmatrix}$$

$$M_{4,5}^z = \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 - x_4 & y_5 - y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

Konačan zapis sile zadane hvatištem i vektorom je $\vec{\mathcal{F}}_{4,5} = \begin{pmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 0 & F_x & F_y \end{pmatrix}$, u općem obliku

$$\vec{\mathcal{F}}_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_j \\ 0 & F_x & F_y \end{pmatrix}$$

Primjer 2.

$$\vec{\mathcal{F}}_{4,5} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 1 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

$$F_{4,5}^x = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1-1 & 8-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$F_{4,5}^y = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 1-1 & 15-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$M_{4,5}^z = \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 8 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 8-6 & 15-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - 2 \cdot 11 = 24 - 22 = 2$$

Do sada su sile u primjerima imale jednak intenzitet odnosno duljinu tj. hvatište sile i vršak bili su na jednakim udaljenostima te su imale jednak smisao djelovanja. Sljedeći primjeri prikazuju slučajeve kada su intenzitet i smisao djelovanja promijenjeni.

Primjer 3.

$$\vec{\mathcal{F}}_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F_{1,3}^x = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 0 = 4 - 0 = 4 = 2F_{1,2}^x = F_{1,2}^x + F_{2,3}^x$$

$$F_{1,3}^y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 1 \cdot (-1) = 7 + 1 = 8 = 2F_{1,2}^y = F_{1,2}^y + F_{2,3}^y$$

$$M_{1,3}^z = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot 7 - 4 \cdot (-1) = 0 + 4 = 4 = 2M_{1,2}^z = M_{1,2}^z + M_{2,3}^z$$

$$\vec{\mathcal{F}}_{1,3} = 2\vec{\mathcal{F}}_{1,2} = \vec{\mathcal{F}}_{1,2} + \vec{\mathcal{F}}_{2,3}$$

Primjer 4.

$$\vec{\mathcal{F}}_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_{3,1}^x = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 4 = 0 - 4 = -4 = -F_{1,3}^x$$

$$F_{3,1}^y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 7 = -1 - 7 = -8 = -F_{1,3}^y$$

$$M_{3,1}^z = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 0 \cdot 7 = -4 - 0 = -4 = -M_{1,3}^z$$

$$\vec{\mathcal{F}}_{3,1} = -\vec{\mathcal{F}}_{1,3}$$

3.2. Točka i vektor u ravnini

Točka je u ravnini određena dvjema koordinatama odnosno radijvektorom

$$X = (x, y) = \vec{r}_x = \vec{x}$$

$$\text{Njezine homogene koordinate su } \mathcal{X} = (1: x: y) = (m: mx: my) = (m: \bar{x}: \bar{y})$$

$$\text{Vektor možemo zapisati u obliku } \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = (m(x_2 - x_1), m(y_2 - y_1)) = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\vec{v} \neq \vec{v} \text{ za } m \neq 1$$

Homogene koordinate vektora su:

$$\vec{v} = \mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1 = (1: x_2: y_2) - (1: x_1: y_1) = (0: x_2 - x_1: y_2 - y_1)$$

Zapišemo li \mathcal{X}_1 i \mathcal{X}_2 u obliku $(m: mx: my)$, potvrdit ćemo gore navedeni izraz

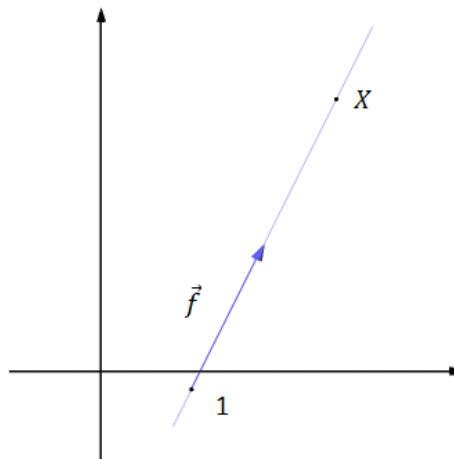
$$(m: mx_2: my_2) - (m: mx_1: my_1) = (0: m(x_2 - x_1): m(y_2 - y_1)) = m\vec{v} \neq \vec{v}$$

Homogene koordinate neizmjerne daleko točke pravca su

$$(0: x: y) = (0: mx: my) = (0: \bar{x}: \bar{y}) = \mathcal{V}_\infty$$

3.3. Pravac u ravnini

Implicitni oblik jednadžbe pravca glasi $c + ax + by = 0$



Slika 2.: Pravac zadan točkom i vektorom

Uzmemo li kao primjer pravac na kojem smo do sada promatrali sile $\vec{F}_{1,2}, \vec{F}_{2,3}, \vec{F}_{4,5}$ i druge te jednu točku na tom pravcu, nazovimo je točkom **1**, s koordinatama $(0, -1)$ i vektor $\vec{f} = (2, 4)$,

također smješten na istom pravcu, lako možemo odrediti jednadžbu pravca. Odnosno, pravac je zadan točkom i vektorom.

Primjer 5.

$$X = (x, y) = \mathbf{1} + t\vec{f} = (0, -1) + (2t, 4t)$$

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}x$$

$$y = -1 + 4t = -1 + 4 \cdot \frac{1}{2}x = -1 + 2x$$

Njen implicitni oblik glasi $1 - 2x + y = 0$

Uzmemo li bilo koju drugu točku, npr. točku **2** s koordinatama (2,3) dobit ćemo istu jednadžbu.

Primjer 6.

$$X = (x, y) = \mathbf{2} + t\vec{f} = (2, 3) + (2t, 4t)$$

$$y = 3 + 4t \Rightarrow t = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}y$$

$$x = 2 + 2t = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}y\right) = 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y$$

Njezin implicitni oblik glasi $\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}y = 0 \quad / \cdot 2$

$$1 - 2x + y = 0$$

Kako smo do sada sile zapisivali kao matrice, a njezine komponente računali kao determinante, i ovdje ćemo se poslužiti determinantom matrice. Prema teoremu tri točke $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ i (x_3, y_3) su kolinearne, odnosno leže na istom pravcu, ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Koristeći pravilo u kojem dva stupca ili dva retka zamijenivši mjesta, mijenjaju predznak determinante te uzimajući u obzir dvije točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , dolazimo do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Kada bismo razvili determinantu po prvom retku dobili bismo:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = M_z - F_y x + F_x y$$

Vidimo kako jednadžbu pravca možemo zapisati i u drugom obliku: $M_z - F_y x + F_x y = 0$

Upotrijebimo li vrijednosti iz prvog primjera, gdje je $f_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F_{1,2}^x = 2$, $F_{1,2}^y = 4$ i $M_{1,2}^z = 2$ možemo pokazati točnost gore navedene tvrdnje.

Kao točku ćemo uzeti točku **4**(6,11).

Primjer 6.

$$X = (x, y) = \mathbf{4} + t\vec{f} = (6, 11) + (2t, 4t)$$

$$x = 6 + 2t \Rightarrow t = -3 + \frac{1}{2}x$$

$$y = 11 + 4t = 11 + 4 \cdot (-3) + 4 \cdot \frac{1}{2}x = -1 + 2x$$

$$1 - 2x + y = 0$$

Uzmemo li vrijednosti dobivene u primjeru 1. dobit ćemo jednadžbu $2 - 4x + 2y = 0$, što zapravo predstavlja istu jednadžbu.

Možemo zapisati i u obliku determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot (0 + 2) - x \cdot (3 + 1) + y \cdot (2 - 0) = 2 - 4x + 2y$$

Ovakav zapis nam omogućava laku provjeru nalazi li se neka točka na pravcu.

Provjerit ćemo točku **5**(8,15).

Primjer 7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 15 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 2 \cdot 15 = 2 - 32 + 30 = 0$$

Točka **5**(8,15) nalazi se na pravcu f . Sada i pravac možemo označiti njegovim koordinatama $f(F_x: F_y: M_z)$.

Sjecišta s osi x, odnosno osi y redom zapisana su:

$$\mathcal{F}_x = (-F_y: -M_z: 0) = (F_y: M_z: 0) = (1: M_z/F_y: 0)$$

$$\mathcal{F}_y = (-F_x: 0: M_z) = (F_x: 0: M_z) = (1: 0: M_z/F_x)$$

$$\text{Neizmjerne daleku točku možemo zapisati kao } \mathcal{F}_\infty = (0: F_x: F_y) = \vec{f}$$

Kao primjer, iskoristit ćemo pravac $1 - 2x + y = 0$ odnosno $f(1: 2: 1)$ te ćemo ispisati sjecišta s osi x i y te neizmjerne daleku točku ovog pravca.

Primjer 8.

$$f(1:2:1)$$

$$\mathcal{F}_x = (-2:-1:0) = (2:1:0) = (1:1/2:0)$$

$$\mathcal{F}_y = (-1:0:1) = (1:0:1) = (1:0:1/1)$$

$$\mathcal{F}_\infty = (0:1:2)$$

Izračunamo li determinantu pomoću ove tri točke, dobit ćemo 0, što znači da točke pripadaju istom pravcu.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot (0 + 1) - 1 \cdot (0 + 2) + 2 \cdot (1 + 0) = 0$$

Priča može ići i obrnutom smjeru. U slučaju da nam je zadano $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ odnosno sjecište s osi y i beskonačno daleka točka pravca, vrlo jednostavno možemo doći do F_x, F_y i M_z .

$$\text{Odnosno } f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1:2:1).$$

U nastavku se prikazane različite matrice koje nam daju isti pravac.

$$f = \begin{pmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_y & M_z & 0 \end{pmatrix} = (-F_x F_y: -F_y^2: -F_y M_z) = (F_x: F_y: M_z)$$

$$f = \begin{pmatrix} F_y & M_z & 0 \\ 0 & F_x & F_y \end{pmatrix} = (F_x F_y: F_y^2: F_y M_z) = (F_x: F_y: M_z)$$

$$f = \begin{pmatrix} F_x & 0 & -M_z \\ F_y & M_z & 0 \end{pmatrix} = (F_x M_z: F_y M_z: M_z^2) = (F_x: F_y: M_z)$$

Zapišemo li matricu u obliku $\begin{pmatrix} w & \bar{x} & \bar{y} \\ w_1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ w_2 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{pmatrix}$ i izračunamo njenu determinantu dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} w & \bar{x} & \bar{y} \\ w_1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ w_2 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix} &= w \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix} - \bar{x} \cdot \begin{vmatrix} w_1 & \bar{y}_1 \\ w_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix} + \bar{y} \cdot \begin{vmatrix} w_1 & \bar{x}_1 \\ w_2 & \bar{x}_2 \end{vmatrix} \\ &= w \cdot \begin{vmatrix} w_1 \bar{x}_1 & w_1 \bar{y}_1 \\ w_2 \bar{x}_2 & w_2 \bar{y}_2 \end{vmatrix} - w \bar{x} \cdot \begin{vmatrix} w_1 & w_1 \bar{y}_1 \\ w_2 & w_2 \bar{y}_2 \end{vmatrix} + w \bar{y} \cdot \begin{vmatrix} w_1 & w_1 \bar{x}_1 \\ w_2 & w_2 \bar{x}_2 \end{vmatrix} \\ &= w w_1 w_2 \cdot \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix} - w w_1 w_2 \bar{x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \bar{y}_1 \\ 1 & \bar{y}_2 \end{vmatrix} + w w_1 w_2 \bar{y} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \bar{x}_1 \\ 1 & \bar{x}_2 \end{vmatrix} = w w_1 w_2 (M_z - F_y \bar{x} + F_x \bar{y}) \end{aligned}$$

U slučaju kada bismo imali

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ -F_1^y & F_1^x & M_1^z \\ -F_2^y & F_2^x & M_2^z \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} F_1^x & M_1^z \\ F_2^x & M_2^z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} -F_1^y & M_1^z \\ -F_2^y & M_2^z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} -F_1^y & F_1^x \\ -F_2^y & F_2^x \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} F_1^x & M_1^z \\ F_2^x & M_2^z \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} F_1^y & M_1^z \\ F_2^y & M_2^z \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} F_1^y & F_1^x \\ F_2^y & F_2^x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= a \begin{vmatrix} F_1^x & M_1^z \\ F_2^x & M_2^z \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} F_1^y & M_1^z \\ F_2^y & M_2^z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} F_1^x & F_1^y \\ F_2^x & F_2^y \end{vmatrix}$$

dobili bismo jednadžbu točke

$$= a\bar{x} + b\bar{y} + cw$$

pri čemu je

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} F_1^x & M_1^z \\ F_2^x & M_2^z \end{vmatrix} \quad \bar{y} = \begin{vmatrix} F_1^y & M_1^z \\ F_2^y & M_2^z \end{vmatrix} \quad w = \begin{vmatrix} F_1^x & F_1^y \\ F_2^x & F_2^y \end{vmatrix}$$

Iskoristimo li pravila pri računanju determinante, možemo doći do zapisa

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -F_1^y & F_1^x & M_1^z \\ -F_2^y & F_2^x & M_2^z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ -F_1^y & M_1^z & F_1^x \\ -F_2^y & M_2^z & F_2^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & b \\ M_1^z & -F_1^y & F_1^x \\ M_2^z & -F_2^y & F_2^x \end{vmatrix} = cw + a\bar{x} + b\bar{y}$$

Uzmemo li u obzir jednadžbu pravca, lako dolazimo do zaključka

$$ax + by + c = 0$$

$$a \frac{\bar{x}}{w} + b \frac{\bar{y}}{w} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\bar{x}}{w} ; \quad y = \frac{\bar{y}}{w}$$

Sada možemo primijeniti i drugi zapis tj.

$$X = (w: \bar{x}: \bar{y}) = (w: wx: wy) = \begin{pmatrix} F_1^x & F_1^y & M_1^z \\ F_2^x & F_2^y & M_2^z \end{pmatrix}$$

$$X = (x, y) = \left(\frac{\bar{x}}{w}, \frac{\bar{y}}{w} \right)$$

Primjer 9.

Kao primjer možemo uzeti dva pravca, $x = 4$ i $y = 6$.

Zapišemo li jednadžbe pravaca u implicitnom obliku dobit ćemo, $x - 4 = 0$ i $y - 6 = 0$.

Znamo da jednadžba pravca može biti zapisana i u obliku $M_z - F_y x + F_x y = 0$, stoga ćemo to i iskoristiti. : $f_1 = (0: -1: -4)$ i $f_2 = (1: 0: -6)$

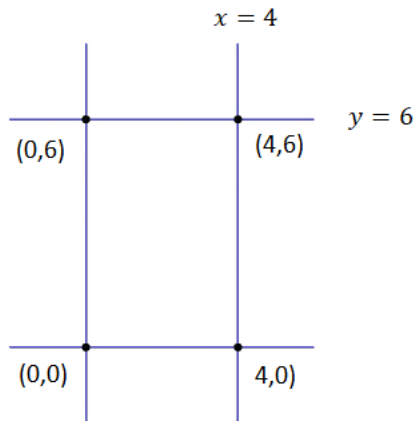
$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 4 \quad \bar{y} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 6 \quad w = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$X = (1: 4: 6)$$

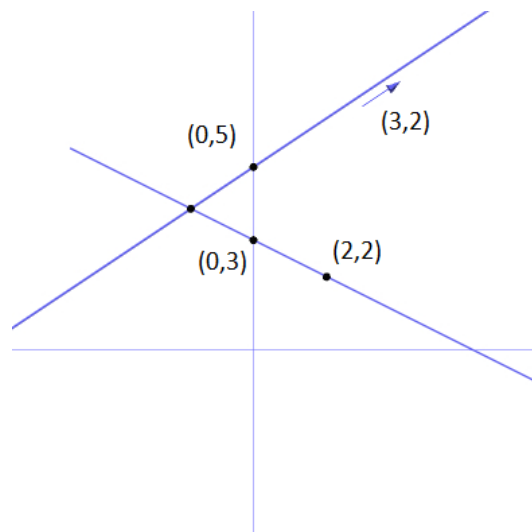
$$X = (4, 6)$$

Točka (4,6) sjecište je dvaju pravaca, što je bilo i očito.



Slika 3.: Točka kao sjecište pravaca

Kao drugi primjer možemo uzeti dva nova pravca koja nisu paralelna s koordinatnim osima. Prvi je zadan točkama (0,3) i (2,2), dok je drugi zadan točkom (0,5) i vektorom (3,2).



Slika 4.: Točka kao sjecište pravaca

Primjer 10.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (2: -1: -6) \Rightarrow -6 + x + 2y = 0$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (3: 2: -15) \Rightarrow -15 - 2x + 3y = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & -15 \end{pmatrix} = (7: -12: 27) = (1: -12/7: 27/7) = (1: -1,71429: 3,85714)$$

Točka sjecišta dvaju pravaca f_1 i f_2 odnosno njihova zajednička točka je

$$X = \left(-\frac{12}{7}, \frac{27}{7}\right) = (-1,71429; 3,85714)$$

Primjer se može riješiti i pomoću Cramerovog postupka.

$$x + 2y = 6$$

$$-2x + 3y = 15$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

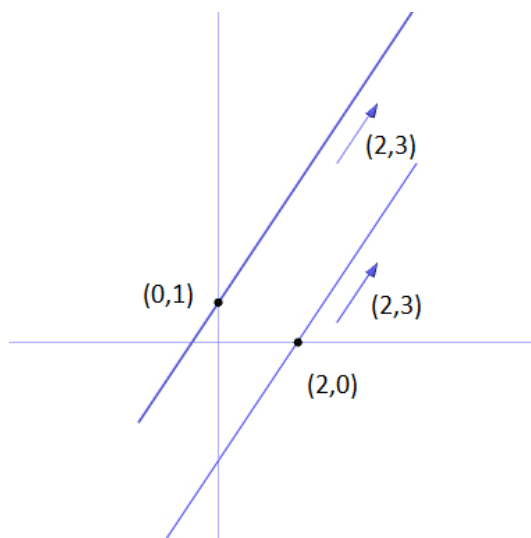
$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 30 = -12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 15 \end{vmatrix} = 15 + 12 = 27$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-12}{7} = -1,71429 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{27}{7} = 3,85714$$

Vidimo da smo dobili isto rješenje.

Osim pravaca koji se sijeku, pokazat ćemo i primjer paralelnih pravaca. Oba pravca su zadana točkom i vektorom. Točka prvog pravca neka bude točka s koordinatama (0,1) a točka drugog pravca (2,0). Neka vektor oba pravca bude (2,3)



Slika 5.: Paralelni pravci

Primjer 11.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2:3:-2) \Rightarrow -2 - 3x + 2y = 0$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2:3:6) \Rightarrow 6 - 3x + 2y = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (0: 16: 24) = (0: 2: 3) = \mathcal{V}_\infty = \vec{v}$$

$$\vec{v} = (2,3)$$

Kada pogledamo jednadžbe

$$-3x + 2y = 2$$

$$-3x + 2y = -6$$

vidimo kako sustav nema rješenja, odnosno matrica sustava je singularna, a slobodni članovi su različiti.

Posljednji slučaj koji ćemo razmatrati u ravnini jest kada se dva pravca podudaraju. Poslužit ćemo se pravcem f_1 iz prethodnog primjera, dok ćemo pravac f_2 zadati s dvije točke. Neka to budu točke $(2,4)$ i $(4,7)$.

Primjer 12.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2: 3: -2) \Rightarrow -2 - 3x + 2y = 0$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (2: 3: -2) \Rightarrow -2 - 3x + 2y = 0$$

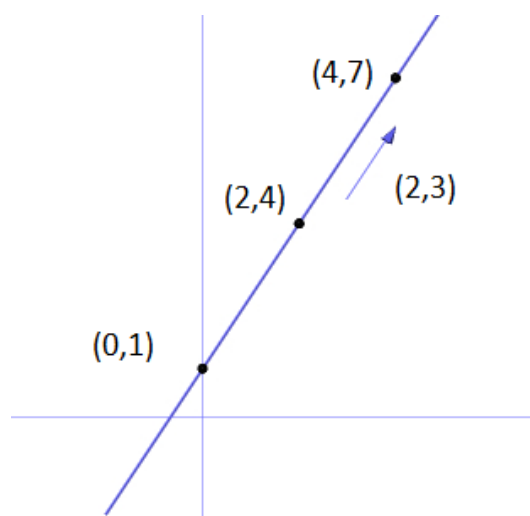
$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = (0: 0: 0)$$

Opet, gledajući jednadžbe

$$-3x + 2y = 2$$

$$-3x + 2y = 2$$

vidimo kako „sustav“ ima bezbroj rješenja.



Slika 6.: Pravci koji se podudaraju

Nakon što smo obradili pojmove u ravnini, vraćamo se u prostor.

4. PROSTOR

4.1. Točka u prostoru

Položaj točke u prostoru određen je s tri Kartezijeve koordinate $X = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Razlog tomu je što u trodimenzionalnom euklidskom prostoru postoji ∞^3 točaka. Osim toga, točku možemo definirati pomoću vektora položaja odnosno radijvektora, koji sada, za razliku od ravnine, ima i treću komponentu tj. $\vec{r}_X = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \vec{x}$. Točku ovako poistovjećujemo u linearnoj algebri, pri čemu vektore $\bar{x}\vec{i}$, $\bar{y}\vec{j}$ i $\bar{z}\vec{k}$ zovemo vektorskim, a brojeve \bar{x} , \bar{y} i \bar{z} skalarnim komponentama vektora.

Za razliku od euklidskog prostora, u trodimenzionalnom projektivnom prostoru točku opisujemo s četiri homogene koordinate

$\mathcal{X} = (w : x : y : z) = \left(1 : \frac{x}{w} : \frac{y}{w} : \frac{z}{w}\right) = (1 : \bar{x} : \bar{y} : \bar{z})$ za $w \neq 0$, pri čemu su \bar{x} , \bar{y} i \bar{z} Kartezijeve koordinate točaka u projektivnom proširenju euklidskog prostora.

U slučaju kada je $w = 0$, onda je

$\mathcal{X}_\infty = \mathcal{V}_\infty = (0 : x : y : z) = (0 : mx : my : mz)$ za $m \neq 0$ neizmjereno daleka točka pravaca usporednih s euklidskim vektorom $\vec{v} = (x, y, z)$. Broj točaka u projektivnom prostoru ostaje ∞^3 , iako imamo i četvrtu koordinatu. Četvrtom koordinatom dodano je samo ∞^2 neizmjereno dalekih točaka.

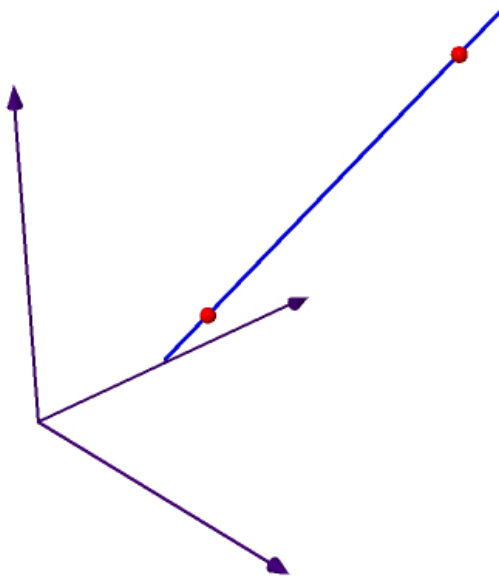
Točku možemo zapisivati i kao $\mathcal{X} = (w : \vec{x})$, gdje je $\vec{x} = (x, y, z)$. Tada, uzmemo li da je $w = 0$, $\mathcal{X} = \mathcal{V}_\infty$.

Usporedimo li ravninu, gdje smo zaključili da $m\vec{v} \neq \vec{v}$ za $m \neq 1$ odnosno $m\vec{v}$ i \vec{v} nisu zapis istog vektora, i prostor, gdje razlikujemo euklidski vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ sa svojim homogenim komponentama $(0 : x : y : z)$ te vektor $m\vec{v} = (0 : mx : my : mz)$ za $m \neq 1$, možemo doći do istog zaključka.

4.2. Pravac u prostoru

Pravac možemo promatrati kao spojnicu dviju točaka. Uzmemo li dvije točke \mathcal{X}_1 i \mathcal{X}_2 s njihovim homogenim komponentama, matricu koju dobijemo zapisivajući točke kao retke smatramo jednim od mogućih zapisa pravca

$$f = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \quad [1]$$



Slika 7.: Pravac kao spojnica dviju točaka

Plückerove koordinate pravca f determinante su drugog reda

$$f = \left(\begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$f = (w_1x_2 - w_2x_1 : w_1y_2 - w_2y_1 : w_1z_2 - w_2z_1 : y_1z_2 - y_2z_1 : z_1x_2 - z_2x_1 : x_1y_2 - x_2y_1)$$

Označimo li stupce matrice indeksima 0,1,2 i 3 te determinantu kao $f_{i,j}$, gdje su i i j stupci, onda možemo kraće zapisati

$$f = (f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2})$$

Točke smo, osim zapisa $\mathcal{X}_1 = (w_1 : x_1 : y_1 : z_1)$ i $\mathcal{X}_2 = (w_2 : x_2 : y_2 : z_2)$, mogli zapisati i kao $\mathcal{X}_1 = (w_1 : \vec{x}_1)$ i $\mathcal{X}_2 = (w_2 : \vec{x}_2)$. Tada bismo dobili

$$f = (w_1\vec{x}_2 - w_2\vec{x}_1 : \vec{x}_1 \times \vec{x}_2) = (\vec{f} : \vec{f}_{m/o})$$

Već je navedeno da u prostoru postoji ∞^3 točaka. Svakom točkom prolazi ∞^2 pravaca, što bi dovelo do zaključka da u prostoru postoji $\infty^3 \cdot \infty^2 = \infty^5$ pravaca, no to nije istina. Osim ove činjenice, zbunjujuća je i ona iz zapisa tj. u zapisu postoji šest Plückerovih koordinata. Kako bismo došli do konačnog broja pravaca, bitna je činjenica da svaki pravac prolazi kroz ∞ točaka. Upravo iz tog razloga, pravaca u trodimenzionalnom prostoru ima ∞^4 tj. ∞^5 / ∞ .

Budući da istu točku možemo zapisati pomoću homogenih koordinata $(w : x : y : z)$ odnosno $(mw : mx : my : mz)$,

$$f = (f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}) = (mf_{0,1} : mf_{0,2} : mf_{0,3} : mf_{2,3} : mf_{3,1} : mf_{1,2})$$

$$= m(f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}) = mf,$$

Plückerove koordinate pravca su homogene.

Iz ove činjenice možemo zaključiti da je $\infty^6 / \infty = \infty^5$.

Nakon uvrštavanja može se pokazati da je

$$f_{0,1}f_{2,3} + f_{0,2}f_{3,1} + f_{0,3}f_{1,2} = 0$$

Ovu jednakost nazivamo Plückerovom. Naime, uzmemo li šest „slučajno“ odabranih brojeva a, b, c, d, e i f te ih svrstamo u koordinatni zapis $(a:b:c:d:e:f)$, smatram ćemo ih Plückerovim koordinatama pravca samo ako zadovoljavaju jednakost $ad + be + cf = 0$.

Uvjetom jednakosti, broj se neovisnih koordinata pravca svodi na četiri.

4.3. Sila u prostoru

Neka sila \vec{F} djeluje u točki $X = (x, y, z)$ i neka je njen vektor $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, onda je

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = (1 \cdot F_x : 1 \cdot F_y : 1 \cdot F_z : yF_z - zF_y : zF_x - xF_z : xF_y - yF_x)$$

$$\vec{F} = (F_x : F_y : F_z : M_x : M_y : M_z)$$

Ovako izračunate koordinate zovemo Plückerovim koordinatama sile. Vidimo kako su prve tri koordinate skalarne komponente vektora sile \vec{F} , dok su preostale tri koordinate vrijednosti momenata oko osi x, y i z .

Nadalje, uzmemo li kao vektor sile \vec{F}_m , koja djeluje u istoj točki, $\vec{F}_m = m\vec{F} = (mF_x, mF_y, mF_z)$, možemo vidjeti kako je

$$\vec{F}_m = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & mF_x & mF_y & mF_z \end{pmatrix} = (mF_x : mF_y : mF_z : mM_x : mM_y : mM_z) = m\vec{F}$$

Također, vidjeli smo kako su \vec{F} i $m\vec{F}$ Plückerovi koordinatni zapisi istog pravca. Osim toga Plückerove koordinate sile ujedno su i Plückerove koordinate pravca njezina djelovanja. No za razliku od pravca, sile se razlikuju ako je $m \neq 1$. Na pravcu može biti ∞ sila, što znači da je broj sila u prostoru ∞^5 .

Uzmemo li sada pravac f i koordinatne ravnine π_1, π_2 i π_3 , pri čemu je $\pi_1 = xy$ ($z = 0$); $\pi_2 = zx$ ($y = 0$) i $\pi_3 = yz$ ($x = 0$), homogene koordinate neizmjerne daleke točke pravca i probodišta tog pravca s koordinatnim ravnina su

$$\mathcal{F}_\infty = (0 : f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3})$$

$$\mathcal{F}_{yz} = (-f_{0,1} : 0 : f_{1,2} : f_{3,1})$$

$$\mathcal{F}_{zx} = (-f_{0,2} : -f_{1,2} : 0 : f_{2,3})$$

$$\mathcal{F}_{xy} = (-f_{0,3} : f_{3,1} : -f_{2,3} : 0).$$

Ako je f pravac djelovanja sile \vec{F} , onda su

$$\mathcal{F}_\infty = (0: F_x: F_y: F_z)$$

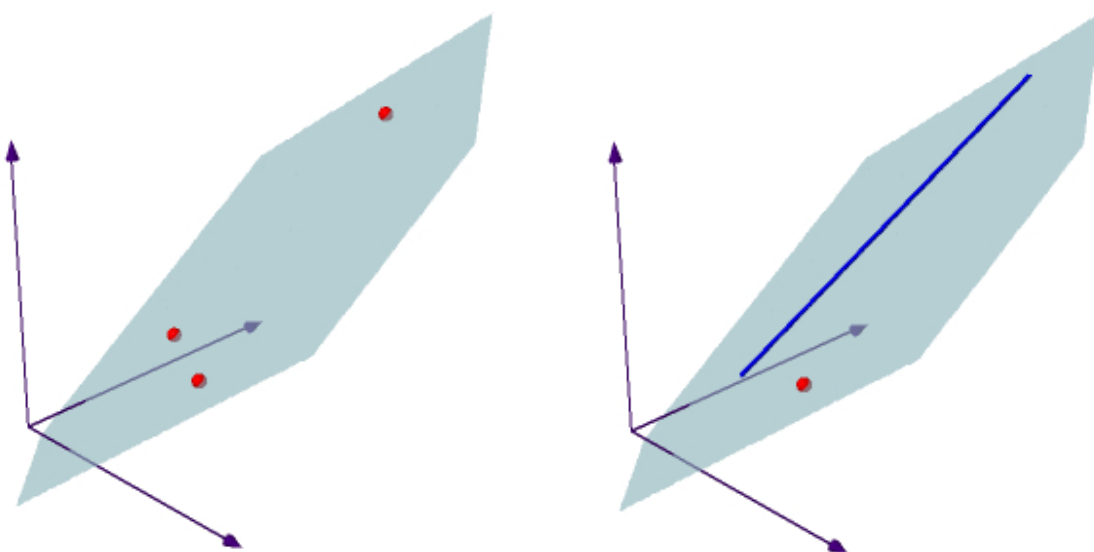
$$\mathcal{F}_{yz} = (-F_x: 0: M_z: -M_y) = \left(1: 0: -\frac{M_z}{F_x}: \frac{M_y}{F_x} \right)$$

$$\mathcal{F}_{zx} = (-F_y: -M_z: 0: M_x) = \left(1: \frac{M_z}{F_y}: 0: -\frac{M_x}{F_y} \right)$$

$$\mathcal{F}_{xy} = (-F_z: M_y: -M_x: 0) = \left(1: -\frac{M_y}{F_z}: \frac{M_x}{F_z}: 0 \right)$$

4.4. Ravnina

Ravninu možemo odrediti pomoću tri točke ili točkom i pravcem.



Slika 8. : Ravnina zadana s tri točke i ravnina zadana točkom i pravcem

U euklidskom prostoru, izražen u Kartezijevom koordinatnom sustavu, implicitni oblik jednadžbe ravnine glasi :

$$d + a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} = 0.$$

Pomnožimo li jednadžbu s w , dobit ćemo:

$$dw + aw\bar{x} + bw\bar{y} + cw\bar{z} = 0,$$

što nam daje homogenu jednadžbu ravnine u projektivnom prostoru:

$$dw + ax + by + cz = 0$$

Kao i do sad, poslužit ćemo se determinantom. Ovog puta bit će to determinanta četvrtog reda u čije retke ćemo upisati koordinate varijabilne točke \mathcal{X} te homogene komponente triju zadanih točaka $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ i \mathcal{X}_3 .

$$\begin{vmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = w \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ + y \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Izjednačimo li dobiveni razvoj s nulom, dobit ćemo jednadžbu ravnine.

$$w \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Sažeti zapis jednadžbe ravnine određene trima točkama glasi

$$\begin{vmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad [2]$$

Također, analogno koordinatnom zapisu točke, možemo uvesti i koordinatni zapis ravnine tako što ćemo u jednadžbi ravnine koeficijente a, b, c i d smatrati homogenim koordinatama:

$$\alpha = (d : a : b : c) = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \\ = \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right).$$

Razvijemo li navedene determinante trećeg reda po prvom retku, dobit ćemo:

$$\alpha = \left(x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right. \\ : - \left[w_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} w_2 & z_2 \\ w_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} w_2 & y_2 \\ w_3 & y_3 \end{vmatrix} \right] \\ : w_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_1 \cdot \begin{vmatrix} w_2 & z_2 \\ w_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} w_2 & x_2 \\ w_3 & x_3 \end{vmatrix} \\ \left. : - \left[w_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_1 \cdot \begin{vmatrix} w_2 & y_2 \\ w_3 & y_3 \end{vmatrix} + y_1 \cdot \begin{vmatrix} w_2 & x_2 \\ w_3 & x_3 \end{vmatrix} \right] \right)$$

Poznato nam je kako su determinante drugog reda koordinate pravca određenog točkama X_1 i X_2 , pa možemo zapisati:

$$\alpha = \left(x_1 f_{2,3}^{(2,3)} - y_1 f_{1,3}^{(2,3)} + z_1 f_{1,2}^{(2,3)} \right. \\ : - \left[w_1 f_{2,3}^{(2,3)} - y_1 f_{0,3}^{(2,3)} + z_1 f_{0,2}^{(2,3)} \right] \\ \left. : w_1 f_{1,3}^{(2,3)} - x_1 f_{0,3}^{(2,3)} + z_1 f_{0,1}^{(2,3)} \right)$$

$$: -\left[w_1 f_{1,2}^{(2,3)} - x_1 f_{0,2}^{(2,3)} + y_1 f_{0,1}^{(2,3)} \right]$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(x_1 f_{2,3}^{(2,3)} + y_1 f_{3,1}^{(2,3)} + z_1 f_{1,2}^{(2,3)} \right. \\ &: -w_1 f_{2,3}^{(2,3)} + y_1 f_{0,3}^{(2,3)} - z_1 f_{0,2}^{(2,3)} \\ &: -w_1 f_{3,1}^{(2,3)} + z_1 f_{0,1}^{(2,3)} - x_1 f_{0,3}^{(2,3)} \\ &: \left. -w_1 f_{1,2}^{(2,3)} + x_1 f_{0,2}^{(2,3)} - y_1 f_{0,1}^{(2,3)} \right) \end{aligned}$$

Točku i pravac smo zapisivali i na drugi način. Zapišemo li točku kao $\mathcal{X}_1 = (w_1 : \vec{x}_1)$ i pravac određen točkama \mathcal{X}_2 i \mathcal{X}_3 kao $f_{(2,3)} = (\vec{f}_{(2,3)} : \vec{f}_{m/o}^{(2,3)})$, onda je

$$\alpha = \left(\vec{x}_1 \cdot \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} : -w_1 \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} + \vec{x}_1 \times \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} \right).$$

Koordinate a, b i c skalarne su komponente vektora okomitog na ravninu, pa sažeto pišemo

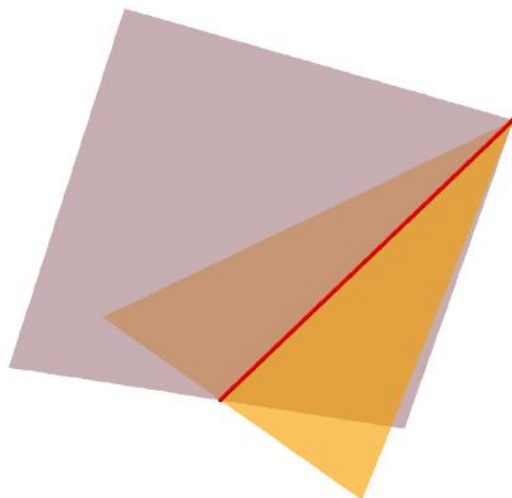
$$\alpha = (d : a : b : c) = (d : \vec{n}_o).$$

Za točku $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (w : x : y : z)$ možemo reći da leži u ravnini $(d : a : b : c)$, kao što možemo reći kako ravnina $(d : a : b : c)$ prolazi točkom $(w : x : y : z)$, ako je $d + a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} = dw + ax + by + cz = dw + \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x} = 0$

Za točku $\mathcal{X} = (w : x : y : z)$ kažemo da leži na pravcu $f = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$, odnosno pravac f prolazi točkom \mathcal{X} ako je

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{array} \right| : - \left| \begin{array}{ccc} w & y & z \\ w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccc} w & x & z \\ w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \end{array} \right| : - \left| \begin{array}{ccc} w & x & y \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{array} \right| \end{array} \right) \\ &= (x f_{2,3} + y f_{3,1} + z f_{1,2} : -w f_{2,3} + y f_{0,3} - z f_{0,2} : \\ &\quad -w f_{3,1} + z f_{0,1} - x f_{0,3} : -w f_{1,2} + x f_{0,2} - y f_{0,1}) \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{f}_{m/o} : -w \vec{f}_{m/o} + \vec{x} \times \vec{f}) = (0 : \vec{0}) = (0 : 0 : 0 : 0) \end{aligned}$$

Pravac možemo odrediti i kao presječnicu dviju ravnina



Slika 9.: Pravac kao presječnica dvije ravnine

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} && [3] \\ &= \left(\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (d_1 \vec{n}_{\alpha_2} - d_2 \vec{n}_{\alpha_1} : \vec{n}_{\alpha_1} \times \vec{n}_{\alpha_2}) \\ &= (\bar{f}_{0,1} : \bar{f}_{0,2} : \bar{f}_{0,3} : \bar{f}_{2,3} : \bar{f}_{3,1} : \bar{f}_{1,2}) \end{aligned}$$

$\bar{f}_{0,1}, \bar{f}_{0,2}, \bar{f}_{0,3}, \bar{f}_{2,3}, \bar{f}_{3,1}$ i $\bar{f}_{1,2}$ nazivamo osnim (dualnim) koordinatama. Veza je „običnih” i dualnih koordinata

$$f = (\bar{f}_{2,3} : \bar{f}_{3,1} : \bar{f}_{1,2} : \bar{f}_{0,1} : \bar{f}_{0,2} : \bar{f}_{0,3})$$

Sljedeći zapisi predstavljaju ravninu određenu pravcem i ishodištem te projicirajuće ravnine kroz pravac:

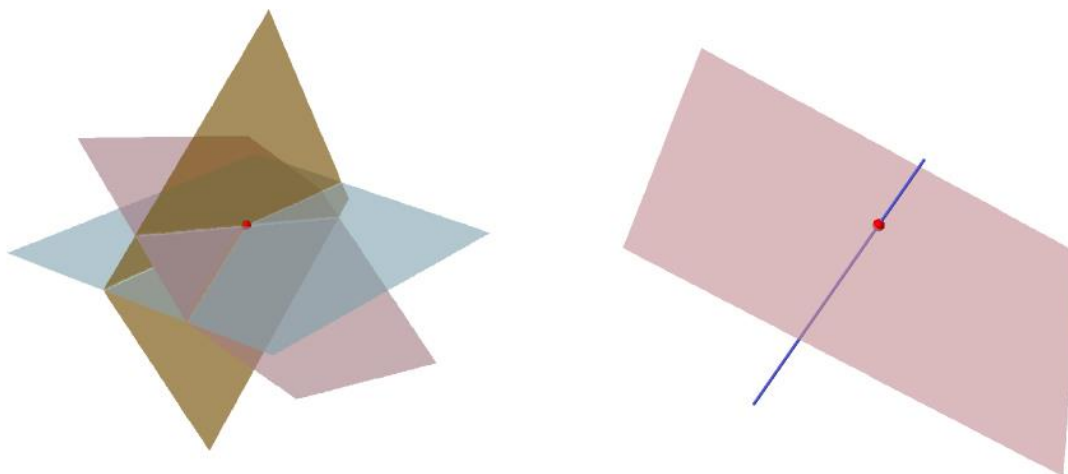
$$\alpha_0 = (0 : \bar{f}_{0,1} : \bar{f}_{0,2} : \bar{f}_{0,3}) = (0 : \bar{f}_{2,3} : \bar{f}_{3,1} : \bar{f}_{1,2})$$

$$\alpha_{yz} = (-\bar{f}_{0,1} : 0 : \bar{f}_{1,2} : -\bar{f}_{3,1}) = (-\bar{f}_{2,3} : 0 : \bar{f}_{0,3} : -\bar{f}_{0,2})$$

$$\alpha_{zx} = (-\bar{f}_{0,2} : -\bar{f}_{1,2} : 0 : \bar{f}_{2,3}) = (-\bar{f}_{3,1} : -\bar{f}_{0,3} : 0 : \bar{f}_{0,1})$$

$$\alpha_{xy} = (-\bar{f}_{0,3} : \bar{f}_{3,1} : -\bar{f}_{2,3} : 0) = (-\bar{f}_{1,2} : \bar{f}_{0,2} : -\bar{f}_{0,1} : 0)$$

Točku možemo zapisati kao sjecište triju ravnina ili kao probodište pravca i ravnine



Slika 10.: Točka kao sjecište tri ravnine i točka kao sjecište pravca i ravnine

$$\begin{vmatrix} d & a & b & c \\ d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

[4]

$$d \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$dw + ax + by + cz = 0$$

$$X = (w : x : y : z)$$

$$X = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$: -d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$: -d_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$: -d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(a_1 \bar{f}_{2,3}^{(2,3)} + b_1 \bar{f}_{3,1}^{(2,3)} + c_1 \bar{f}_{1,2}^{(2,3)} \right. \\
&\quad : -d_1 \bar{f}_{2,3}^{(2,3)} + b_1 \bar{f}_{0,3}^{(2,3)} - c_1 \bar{f}_{0,2}^{(2,3)} \\
&\quad : -d_1 \bar{f}_{3,1}^{(2,3)} + c_1 \bar{f}_{0,1}^{(2,3)} - a_1 \bar{f}_{0,3}^{(2,3)} \\
&\quad \left. : -d_1 \bar{f}_{1,2}^{(2,3)} + a_1 \bar{f}_{0,2}^{(2,3)} - b_1 \bar{f}_{0,1}^{(2,3)} \right) \\
&= \left(\vec{n}_{\alpha 1} \cdot \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} : -d_1 \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} + \vec{n}_{\alpha 1} \times \vec{f}_{(2,3)} \right) = (w: \bar{x}) \\
&= \left(a_1 f_{0,1}^{(2,3)} + b_1 f_{0,2}^{(2,3)} + c_1 f_{0,3}^{(2,3)} \right. \\
&\quad : -d_1 f_{0,1}^{(2,3)} + b_1 f_{1,2}^{(2,3)} - c_1 f_{3,1}^{(2,3)} \\
&\quad : -d_1 f_{0,2}^{(2,3)} + c_1 f_{2,3}^{(2,3)} - a_1 f_{1,2}^{(2,3)} \\
&\quad \left. : -d_1 f_{0,3}^{(2,3)} + a_1 f_{3,1}^{(2,3)} - b_1 f_{2,3}^{(2,3)} \right) \\
&= \left(\vec{n}_{\alpha 1} \cdot \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} : -d_1 \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} + \vec{n}_{\alpha 1} \times \vec{f}_{(2,3)} \right) = (w: \bar{x}) \\
&= \left(\vec{n}_{\alpha 1} \cdot \vec{f}_{(2,3)} : -d_1 \vec{f}_{(2,3)} + \vec{n}_{\alpha 1} \times \vec{f}_{m/o}^{(2,3)} \right) = (w: \bar{x})
\end{aligned}$$

Pravac $f = (f_{0,1}:f_{0,2}:f_{0,3}:f_{2,3}:f_{3,1}:f_{1,2})$ leži u ravnini $\alpha = (d:a:b:c)$ odnosno ravnina α prolazi pravcem f ako je

$$\begin{aligned}
&(a\bar{f}_{2,3} + b\bar{f}_{3,1} + c\bar{f}_{1,2} : -d\bar{f}_{2,3} + b\bar{f}_{0,3} - c\bar{f}_{0,2} \\
&\quad : -d\bar{f}_{3,1} + c\bar{f}_{0,1} - a\bar{f}_{0,3} : -d\bar{f}_{1,2} + a\bar{f}_{0,2} - b\bar{f}_{0,1}) \\
&= (af_{0,1} + bf_{0,2} + cf_{0,3} : -df_{0,1} + bf_{1,2} - cf_{3,1} \\
&\quad : -df_{0,2} + cf_{2,3} - af_{1,2} : -df_{0,3} + af_{3,1} - bf_{2,3}) \\
&= (\vec{n}_{\alpha} \cdot \vec{f} : -d_1 \vec{f} + \vec{n}_{\alpha} \times \vec{f}_{m/o}) = (0: \vec{0}) = (0: 0: 0: 0)
\end{aligned}$$

Pravci $f = (f_{0,1}:f_{0,2}:f_{0,3}:f_{2,3}:f_{3,1}:f_{1,2})$ i $g = (g_{0,1}:g_{0,2}:g_{0,3}:g_{2,3}:g_{3,1}:g_{1,2})$ se sijeku ako je

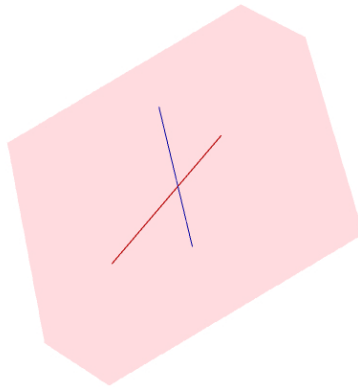
$$\begin{aligned}
&f_{0,1}g_{2,3} + f_{0,2}g_{3,1} + f_{0,3}g_{1,2} + f_{2,3}g_{0,1} + f_{3,1}g_{0,2} + f_{1,2}g_{0,3} = 0 \\
&\vec{f} \cdot \vec{g}_{m/o} + \vec{f}_{m/o} \cdot \vec{g} = 0
\end{aligned}$$

Ravninu možemo odrediti pravcima f i g koji se sijeku

$$\begin{aligned}
\alpha &= (f_{0,1}g_{2,3} + f_{0,2}g_{3,1} + f_{0,3}g_{1,2} \tag{5} \\
&\quad : f_{0,2}g_{0,3} - f_{0,3}g_{0,2} : f_{0,3}g_{0,1} - f_{0,1}g_{0,3} : f_{0,1}g_{0,2} - f_{0,2}g_{0,1}) \\
&= (g_{0,1}f_{2,3} + g_{0,2}f_{3,1} + g_{0,3}f_{1,2} \\
&\quad : g_{0,2}f_{0,3} - g_{0,3}f_{0,2} : g_{0,3}f_{0,1} - g_{0,1}f_{0,3} : g_{0,1}f_{0,2} - g_{0,2}f_{0,1})
\end{aligned}$$

$$= (\vec{f} \cdot \vec{g}_{m/o} : \vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \vec{f}_{m/o} : \vec{g} \times \vec{f})$$

Nije primjenjivo kada su pravci usporedni tj. $\vec{f} \parallel \vec{g}$.

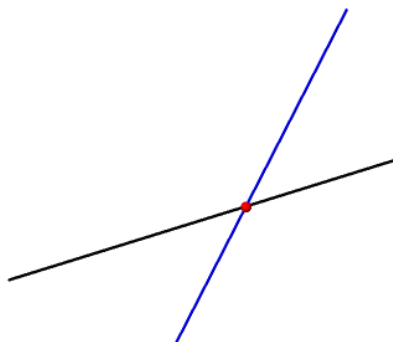


Slika 11.: Ravnina određena s dva pravca

Točku također možemo odrediti pomoću dva pravca tj. kao sjecište pravaca $f = (f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2})$ i $g = (g_{0,1} : g_{0,2} : g_{0,3} : g_{2,3} : g_{3,1} : g_{1,2})$

$$\begin{aligned} X &= (f_{2,3}g_{0,1} + f_{3,1}g_{0,2} + f_{1,2}g_{0,3} \\ &\quad : f_{3,1}g_{1,2} - f_{1,2}g_{3,1} : f_{1,2}g_{2,3} - f_{2,3}g_{1,2} : f_{2,3}g_{3,1} - f_{3,1}g_{2,3}) \\ &= (g_{2,3}f_{0,1} + g_{3,1}f_{0,2} + g_{1,2}f_{0,3} \\ &\quad : g_{3,1}f_{1,2} - g_{1,2}f_{3,1} : g_{1,2}f_{2,3} - g_{2,3}f_{1,2} : g_{2,3}f_{3,1} - g_{3,1}f_{2,3}) \\ &= (\vec{f}_{m/o} \cdot g : \vec{f}_{m/o} \times \vec{g}_{m/o}) = (\vec{g}_{m/o} \cdot \vec{f} : \vec{g}_{m/o} \times \vec{f}_{m/o}) \end{aligned}$$

Nije primjenjivo ako su oba pravca u istoj ravnini kroz ishodište tj. $\vec{f}_{m/o} \parallel \vec{g}_{m/o}$.



Slika 12.: Točka kao sjecište dva pravca

5. PRIMJENA GRAFOSTATIKE U PROSTORU

5.1. Načela geometrijske konstrukcije

Geometrijske konstrukcije temelje se na dva načela:

Prvo načelo glasi: *Silu u prostoru možemo rastaviti u dvije komponente na zadanim pravcima ako i samo ako su ti pravci i pravac njezina djelovanja konkurentni i komplanarni, odnosno ako se sijeku u jednoj točki i ako su u jednoj ravnini.*

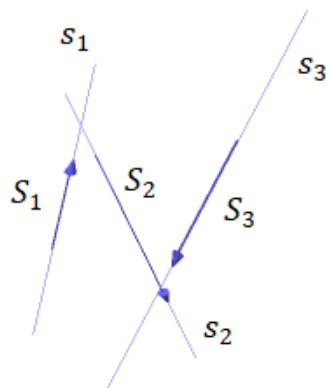
Drugo načelo je: *Pri sastavljanju verižnog poligona, dvije sile rastavljamo u po dvije komponente tako da jedna komponenta jedne sile poništi jednu komponentu druge sile. Te dvije komponente moraju djelovati na istom pravcu, imati jednak intenzitet i suprotan smisao djelovanja.*

5.2. Zamjena triju mimosmjernih sila dvjema mimosmjernim silama

Opće rezultirajuće djelovanje tj. silu i moment možemo zamijeniti statički ekvivalentnim dvjema mimosmjernim silama obzirom da su one pogodnije za grafostatiku.

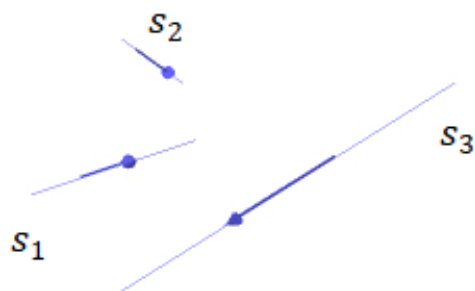
Kako bismo olakšali razumijevanje postupka, zamjenu triju mimosmjernih sila dvjema prikazat ćemo pomoću slika. Programski kod pisan je u Sageu te se temelji na izrazima iz teorijskog dijela.

Tri zadane mimosmjerne sile u prostoru \vec{S}_1 , \vec{S}_2 i \vec{S}_3 djeluju na pravcima s_1, s_2 i s_3 .



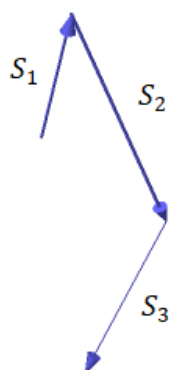
Slika 13.: Plan položaja sila

Iako na slici izgleda kao da se pravci sila sijeku, zarotiramo li sliku i pogledamo iz drugog kuta, vidjet ćemo da su sile zaista mimosmjjerne.



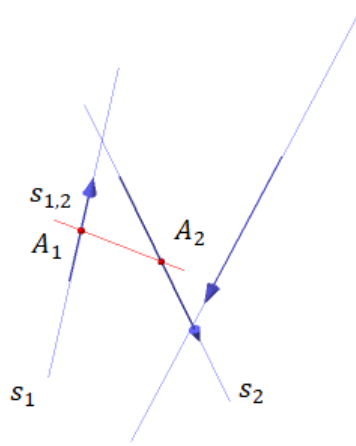
Slika 13.: Plan položaja sila

Prethodne slike predstavljaju plan položaja zadanih sila. Iste sile možemo prikazati i u poligonu sila.



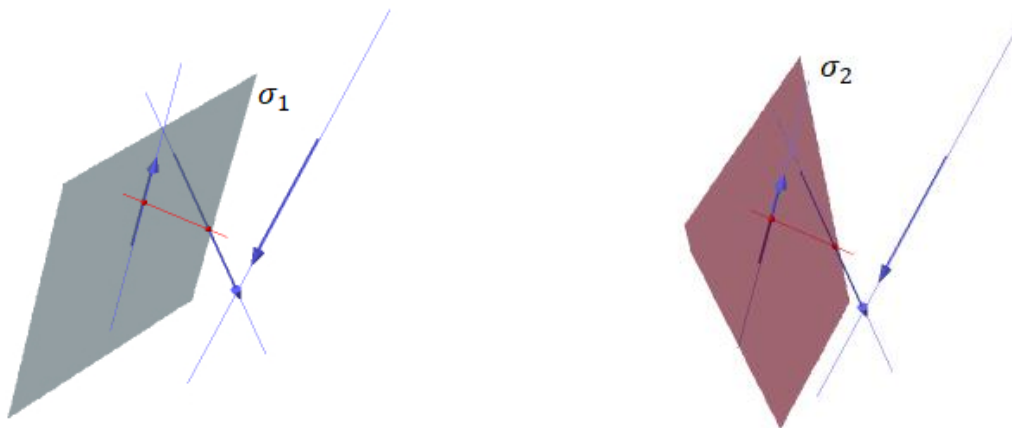
Slika 14.: Poligon sila

Prvi korak pri zamjeni triju mimosmjernih sila dvjema mimosmjernim silama je odabir dviju točaka, A_1 i A_2 , na pravcima s_1 i s_2 , te njihovo spajanje pravcem $s_{1,2}$. Pravac kao spojnica dviju točaka određen je prema izrazu [1].



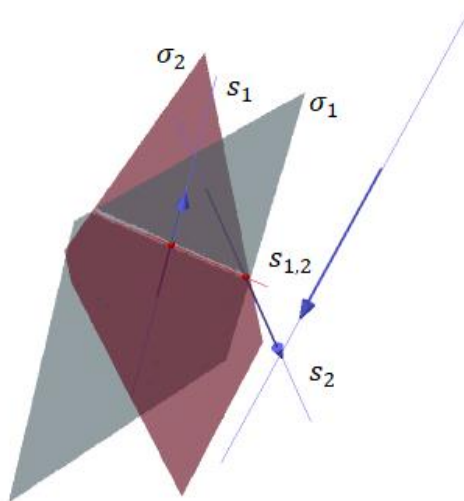
Slika 15.: Pravac kao spojnica dvije točaka

Pravcima s_1 i $s_{1,2}$ postavljamo ravninu σ_1 , a pravcima s_2 i $s_{1,2}$ postavljamo ravninu σ_2 . Ravnine određene pomoću dva pravca dobili smo koristeći izraz [5].



Slika 16.: Ravnine σ_1 i σ_2

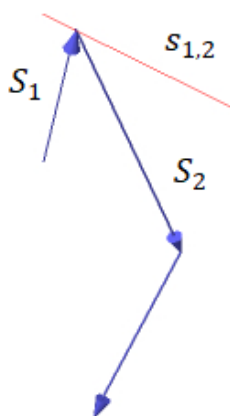
Presječnica ravnina σ_1 i σ_2 je pravac $s_{1,2}$. Ovu činjenicu možemo iskoristiti i kao kontrolu. Pravac kao presječnica dviju ravnina određen je izrazom [3].



Slika 17.: Pravac kao presječnica dvije ravnine

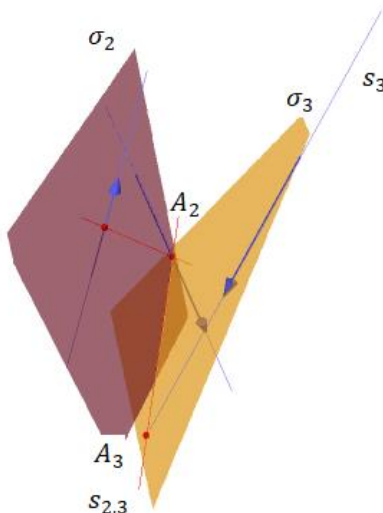
U dobivenim ravninama rastavljamo sile \vec{S}_1 i \vec{S}_2 u po dvije komponente, pri čemu je po jedna komponenta svake sile na pravcu $s_{1,2}$. Odnosno $\vec{S}_1 = \vec{S}_{1,1} + \vec{S}_{1,2}$ i $\vec{S}_2 = \vec{S}_{2,1} + \vec{S}_{2,2}$, a komponente $\vec{S}_{1,2}$ i $\vec{S}_{2,1}$ su na pravcu $s_{1,2}$.

Za sada ćemo u poligon sila prebaciti pravac $s_{1,2}$.



Slika 18.: Pravac $s_{1,2}$ u poligonu sila

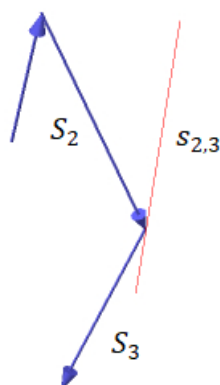
Sljedeći korak je točkom A_2 i pravcem s_3 postaviti ravninu σ_3 . Ravnina određena točkom i pravcem opisana je izrazom [2]. Presječna ravnina σ_2 i σ_3 je pravac $s_{2,3}$, koji je ujedno i spojnica točke A_2 i probodišta A_3 pravca s_3 i ravnine σ_2 . Probodište pravca i ravnine određeno je izrazom [4].



Slika 19.: Ravnina zadana točkom i pravcem

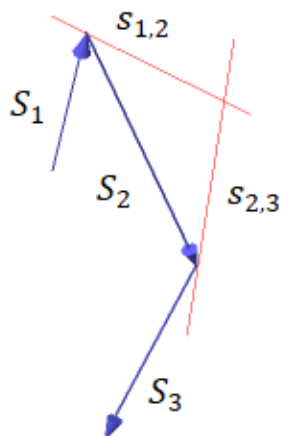
Kao i u prethodnom dijelu sile, sada \vec{S}_2 i \vec{S}_3 , rastavljamo u po dvije komponente, pri čemu je po jedna komponenta svake sile na pravcu $s_{2,3}$.

Sada i pravac $s_{2,3}$ možemo prebaciti u poligon sila.



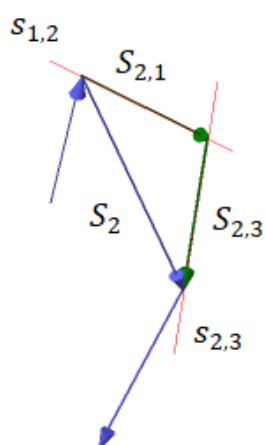
Slika 20.: Pravac $s_{2,3}$ u poligonu sila

Uzmemo li u obzir oba pravca, tj. pravce $s_{1,2}$ i $s_{2,3}$, dobit ćemo sljedeće



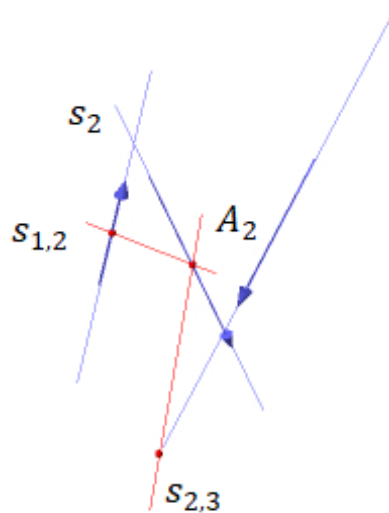
Slika 21.: Pravci $s_{1,2}$ i $s_{2,3}$ u poligonu sila

Kako smo već rekli, silu \vec{S}_2 rastavljamo na dvije komponente, jedna je na pravcu $s_{1,2}$, a druga na pravcu $s_{2,3}$. Kako su pravci $s_{1,2}$ i $s_{2,3}$ presječnice ravnine σ_2 ravninama σ_1 i σ_3 , oni leže u ravnini σ_2 kao i pravac s_2 na kojem se nalazi sila \vec{S}_2 stoga, po načelu 1. imamo $\vec{S}_2 = \vec{S}_{2,1} + \vec{S}_{2,3}$.



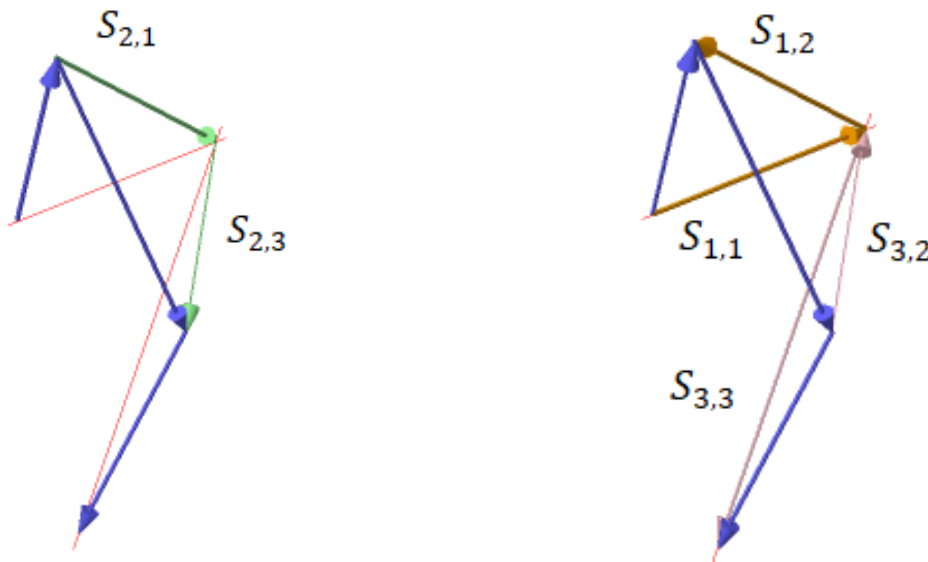
Slika 22.: Komponente sile \vec{S}_2

Sva tri pravca se sijeku u točki A_2 .



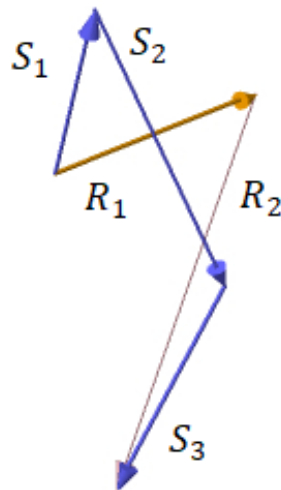
Slika 23.: Sjecište tri pravca

Nakon što smo rastavili silu \vec{S}_2 , odredili smo i po jednu komponentu rastava sila \vec{S}_1 i \vec{S}_3 , a one su $\vec{S}_{1,2} = -\vec{S}_{2,1}$ i $\vec{S}_{3,2} = -\vec{S}_{2,3}$. Kako se komponenta $\vec{S}_{1,2}$ nalazi na pravcu $s_{1,2}$, koji je sjecište ravnina σ_1 i σ_2 , a sila \vec{S}_1 na pravcu s_1 , koji je u σ_1 ravnini, i druga će komponenta rastava biti u σ_1 ravnini. Drugu komponentu možemo dobiti kao $\vec{S}_{1,1} = \vec{S}_1 - \vec{S}_{1,2}$. Na sličan način dobijemo i komponentu $\vec{S}_{3,3}$ sile \vec{S}_3 .



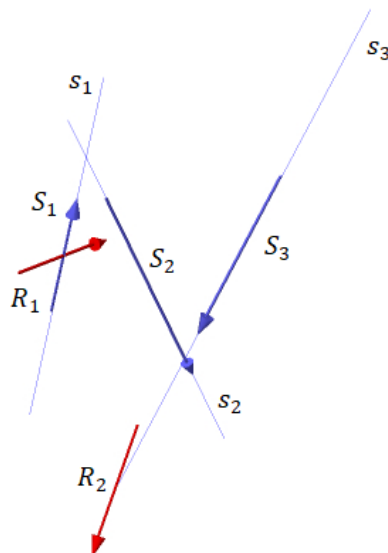
Slika 24.: Komponente sila \vec{S}_1 i \vec{S}_3

Kao što vidimo, verižni poligon smo sastavili tako da se sile $\vec{S}_{2,1}$ i $\vec{S}_{1,2}$ te sile $\vec{S}_{2,3}$ i $\vec{S}_{3,2}$ međusobno poništavaju, po načelu 2.. Preostaju samo sile $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{3,3}$. Uzmemo li druge oznake tj. $\vec{S}_{1,1} = \vec{R}_1$ i $\vec{S}_{3,3} = \vec{R}_2$, možemo reći kako su sile \vec{S}_1 , \vec{S}_2 i \vec{S}_3 zamijenjene silama \vec{R}_1 i \vec{R}_2 .



Slika 25.: Poligon sila

Sile \vec{R}_1 i \vec{R}_2 možemo vratiti u plan položaja.



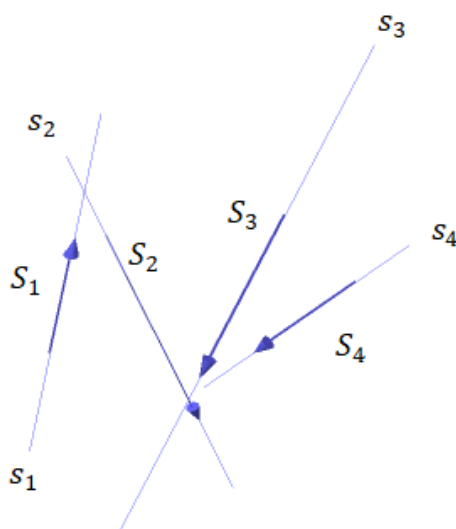
Slika 26.: Sile \vec{R}_1 i \vec{R}_2 u planu položaja

5.3. Zamjena četiri mimosmjerne sila dvjema mimosmjernim silama

U slučaju kada imamo više od tri zadane sile „klasični“ postupak sastavljanja verižnog poligona u ravnini se u općem slučaju neće moći nastaviti. Poslužiti ćemo se prethodnim primjerom uz dodatak četvrte sile te tako opisati postupak zamjene četiri sile dvjema.

Opis zamjene četiri mimosmjerne sile dvjema će, kao i prethodni primjer, biti slikovit. Također, izrazi opisani u teorijskom dijelu, a korišteni su u prethodnom primjeru, koristit će se i u ovom.

Četiri ćemo zadane mimosmjerne sile označiti sa $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ i \vec{S}_4 a njihove pravce djelovanja s_1, s_2, s_3 i s_4 .

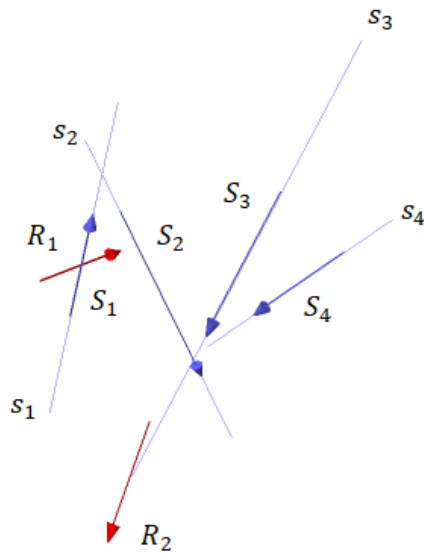


Slika 27.: Plan položaja

Kako smo sile \vec{S}_1, \vec{S}_2 i \vec{S}_3 uzeli iz prethodnog primjera, poznato nam je da su one mimosmjerne.

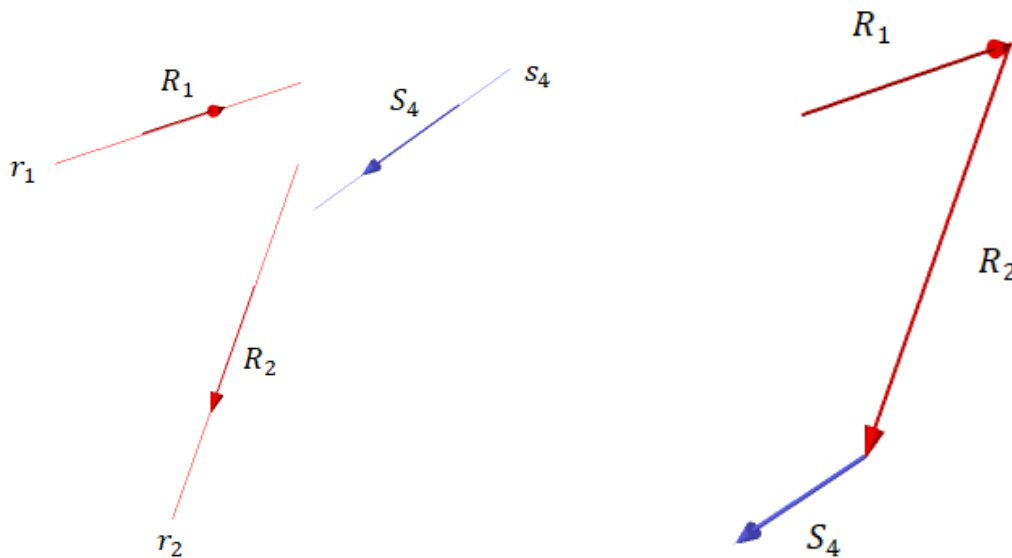
Već je rečeno kako se „klasični“ postupak verižnog poligona ne može nastaviti. Razlog tomu je što pravci djelovanja sila $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{3,3}$ odnosno \vec{R}_1 i \vec{R}_2 (u prethodnom primjeru) neće sjeći pravac djelovanja neke četvrte sile. Međutim, postoji rješenje i za zamjenu četiri sile dvjema. Četvrtu silu možemo pridružiti silama $\vec{S}_{1,1}$ i $\vec{S}_{3,3}$ tj. \vec{R}_1 i \vec{R}_2 te ponoviti postupak zamjene triju mimosmjernih sila dvjema. Ova tvrdnja nam pokazuje kako zapravo bilo koji opći sustav sila možemo svesti na dvije rezultante na recipročnim pravcima.

U našem primjeru, silu \vec{S}_4 i pravac njezina djelovanja s_4 možemo „zanemariti“ u početnom dijelu obzirom da će se prvo sile \vec{S}_1, \vec{S}_2 i \vec{S}_3 zamijeniti s \vec{R}_1 i \vec{R}_2 . Zapravo, postupak iz prethodnog primjera ponavljamo sve do kraja.



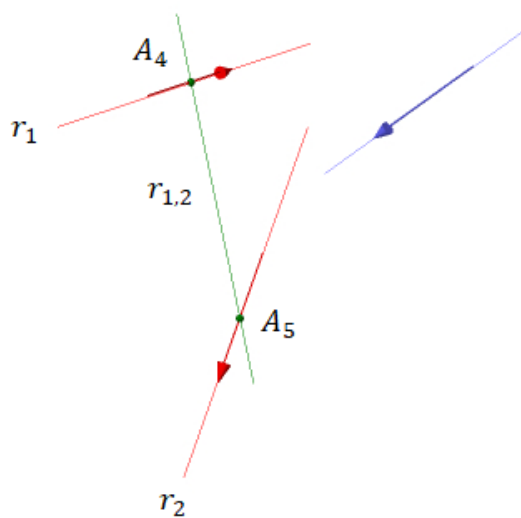
Slika 28.: Sile \vec{R}_1 i \vec{R}_2 u planu položaja

Nakon što smo sile \vec{S}_1, \vec{S}_2 i \vec{S}_3 zamijenili silama s \vec{R}_1 i \vec{R}_2 preostaju nam samo sile \vec{R}_1, \vec{R}_2 i \vec{S}_4 za koje ponavljamo postupak.



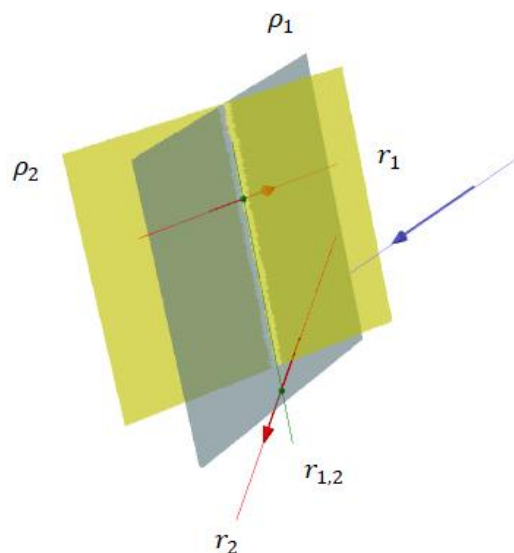
Slika 29.: Sile u planu položaja i u poligonu sila

Na pravcima r_1 i r_2 odabiremo dvije točkama, A_4 i A_5 te ih spajamo pravcem $r_{1,2}$.



Slika 30.: Pravac kao spojnica dvije točke

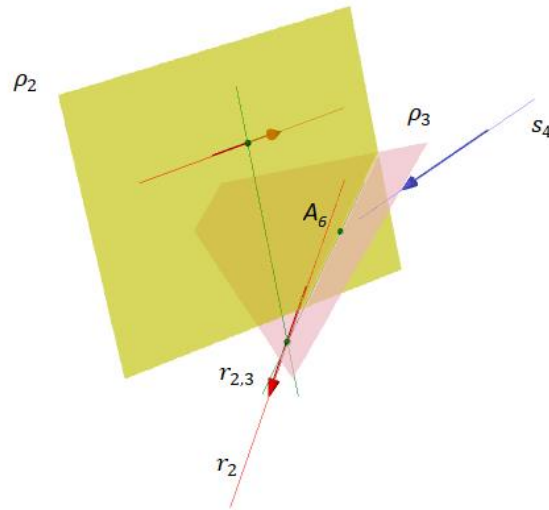
Nakon toga postavljamo ravnine ρ_1 i ρ_2 . Ravninu ρ_1 postavljamo pravcima r_1 i $r_{1,2}$, a ravninu ρ_2 pravcima $r_{1,2}$ i r_2 .



Slika 31.: Ravnine ρ_1 i ρ_2

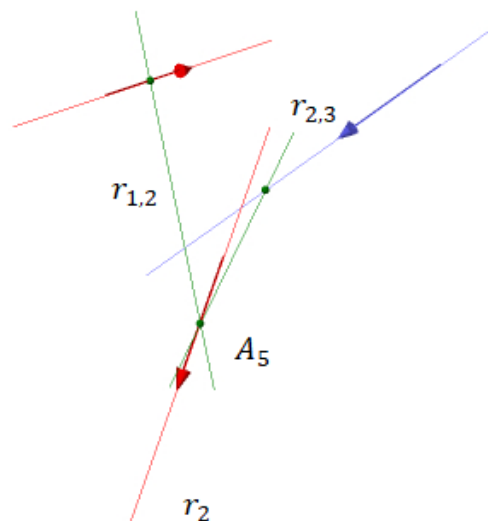
U ravninama ρ_1 i ρ_2 rastavljamo sile \vec{R}_1 i \vec{R}_2 u po dvije komponente pri čemu je jedna komponenta svake sile na pravcu $r_{1,2}$.

Točkom A_5 i pravcem s_4 postavljamo ravninu ρ_3 . Presječna $r_{2,3}$ ravnina ρ_2 i ρ_3 spojnica je točaka A_5 i A_6 . Točka A_6 probodište je pravca s_4 i ravnine ρ_2 .



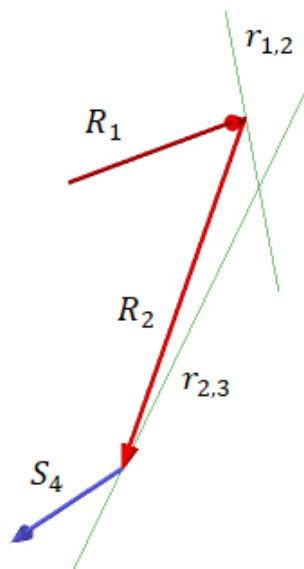
Slika 32.: Ravnina ρ_3

U ravninama ρ_2 i ρ_3 rastavljamo sile \vec{R}_2 i \vec{S}_4 u po dvije komponente pri čemu je jedna komponenta svake sile na pravcu $r_{2,3}$. Možemo vidjeti kako se pravci $r_{1,2}$, $r_{2,3}$ i r_2 sijeku u jednoj točki tj. u točki A_5 .



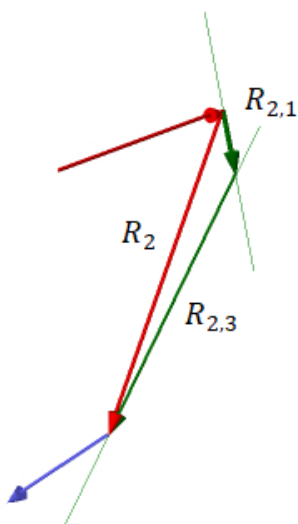
Slika 33.: Sjecište tri pravaca

Postupak i dalje nastavljamo kao i prethodnom primjeru. U poligon sila prenosimo pravce $r_{1,2}$ i $r_{2,3}$.



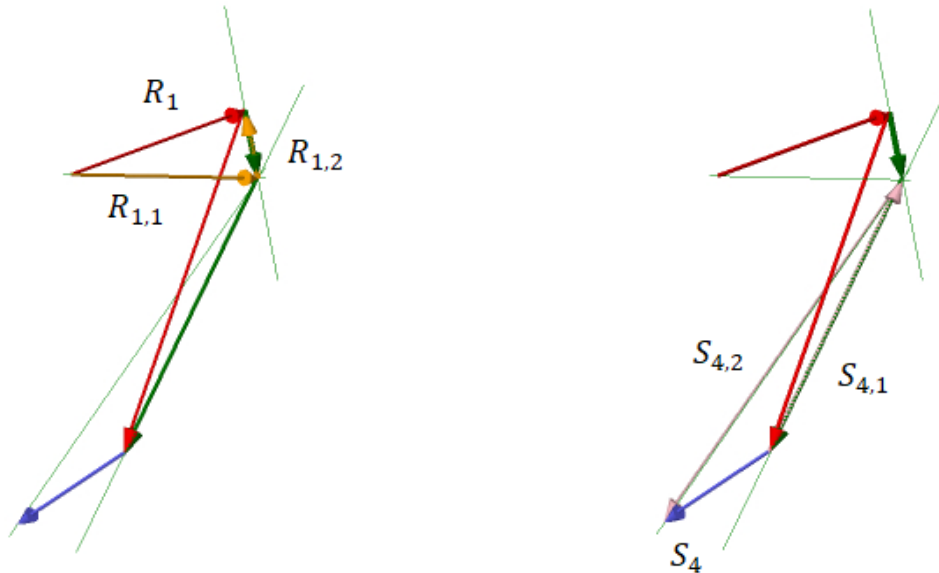
Slika 34.: Pravci $r_{1,2}$ i $r_{2,3}$ u poligonu sila

Silu \vec{R}_2 rastavljamo na dvije komponente na poznatim pravcima $r_{1,2}$ i $r_{2,3}$ tj. $\vec{R}_2 = \vec{R}_{2,1} + \vec{R}_{2,3}$



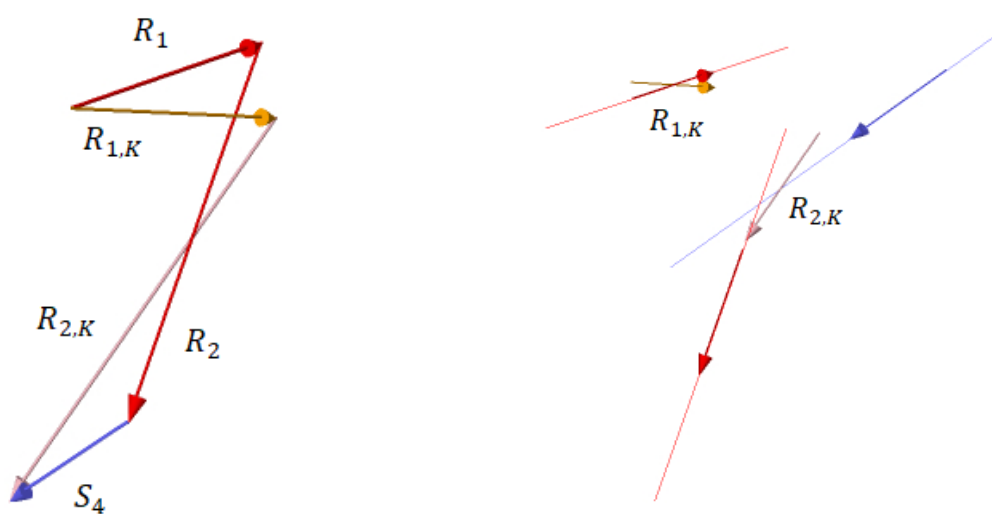
Slika 35.: Komponente sile \vec{R}_2

Nakon toga rastavljamo sile \vec{R}_1 i \vec{S}_4 tako da se jedna komponenta sile \vec{R}_1 nalazi na pravcu $r_{1,2}$, jednakog je intenziteta kao i $\vec{R}_{2,1}$, ali suprotnog smjera te jedna komponenta sile \vec{S}_4 nalazi na pravcu $r_{2,3}$, jednakog je intenziteta kao i $\vec{R}_{2,3}$, ali suprotnog smjera.



Slika 36.: Komponente sile \vec{R}_1 i \vec{S}_4

Kao što nam je već poznato, komponente $\vec{R}_{2,1}$ i $\vec{R}_{1,2}$ te komponente $\vec{R}_{2,3}$ i $\vec{S}_{4,1}$ se ponište te nam preostaju samo $\vec{R}_{1,1}$ i $\vec{S}_{4,2}$ tj. kao konačno rješenje zamjene četiri sile dvjema silama imamo $\vec{R}_{1,K}$ i $\vec{R}_{2,K}$.



Slika 37.: Sile u poligonu i planu položaja

6. ZAKLJUČAK

Koristeći teorijsku podlogu te mogućnost prenošenja izraza u programski kod, opisana su i vizualno prikazana dva primjera trodimenzionalne statičke ekvivalencije. Grassmannova algebrama problematika se prenijela u algebarski oblik koji je lako prenesen u programski kod. Primjeri su, ispunjavajući poznate činjenice tj. načela geometrijske konstrukcije pokazali kako prostornom grafostatikom na efikasan i brz način dolazimo do rješenja odnosno do zamjene postojećeg sustava sila statički ekvivalentnim, jednostavnijim i pogodnijim sustavom.

Na kraju, iako prostorna grafostatika u građevinarstvu tek pronalazi svoje mjesto, neupitan je njen potencijal i mogućnosti koje donosi. U budućnosti, obzirom da je jedan od trendova, bismo češće mogli susretati njenu primjenu, osobito u oblikovanju vlačnih i vlačno-tlačnih prednapetih konstrukcija.

7. POPIS LITERATURE

1. Baniček, M., Fresl, K., Kodrnja, I.: Grassmann Algebra and Graphic Statics, Scientific Symposium FUTURE TRENDS IN CIVIL ENGINEERING, October 2019 [online] <https://doi.org/10.5592/CO/FTCE.2019.14>
2. Baniček, M., Fresl, K., Kodrnja, I.: Line geometry and 3D graphic statics, GRADEVINAR, 71 (2019) 10, <https://doi.org/10.14256/JCE.2725.2019>
3. Baniček, M., Fresl, K., Kodrnja, I.: Some examples of static equivalency in space using descriptive geometry and Grassmann algebra, Proceedings of the IASS Annual Symposium 2018: Creativity in Structural Design, Boston, pp. 341-349, 2018.
4. Došlić, T., Sandrić, N.: Matematika 1, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet
5. Lewis, A.C., Liesen, A., Petsche, H.J., Russ, S.: From Past to Future: Graßmann's Work in Context, Graßmann Bicentennial Conference, September 2009
6. Sage URL: <http://sage.grad.hr:1234/>

8. POPIS SLIKA

Slika 1.: Sila zadana hvatištem i vrškom vektora	4
Slika 2.: Pravac zadani točkom i vektorom	7
Slika 3.: Točka kao sjecište pravaca	12
Slika 4.: Točka kao sjecište pravaca	12
Slika 5.: Paralelni pravci.....	13
Slika 6.: Pravci koji se podudaraju	14
Slika 7.: Pravac kao spojnica dviju točaka	16
Slika 8. : Ravnina zadana s tri točke i ravnina zadana točkom i pravcem.....	18
Slika 9.: Pravac kao presječnica dvije ravnine	21
Slika 10.: Točka kao sjecište tri ravnine i točka kao sjecište pravca i ravnine.....	22
Slika 11.: Ravnina određena s dva pravca	24
Slika 12.: Točka kao sjecište dva pravca.....	24
Slika 13.: Plan položaja sila.....	25
Slika 13.: Plan položaja sila.....	26
Slika 14.: Poligon sila	26
Slika 15.: Pravac kao spojnica dvije točaka	27
Slika 16.: Ravnine σ_1 i σ_2	27
Slika 17.: Pravac kao presječnica dvije ravnine	28
Slika 18.: Pravac $s_{1,2}$ u poligonu sila	28
Slika 19.: Ravnina zadana točkom i pravcem	29
Slika 20.: Pravac $s_{2,3}$ u poligonu sila	29
Slika 21.: Pravci $s_{1,2}$ i $s_{2,3}$ u poligonu sila.....	30
Slika 22.: Komponente sile S_2	30
Slika 23.: Sjecište tri pravca	31
Slika 24.: Komponente sila S_1 i S_3	31
Slika 25.: Poligon sila	32
Slika 26.: Sile R_1 i R_2 u planu položaja	32
Slika 27.: Plan položaja	33
Slika 28.: Sile R_1 i R_2 u planu položaja	34

Slika 29.: Sile u planu položaja i u poligonu sila	34
Slika 30.: Pravac kao spojnica dvije točke	35
Slika 31.: Ravnine ρ_1 i ρ_2	35
Slika 32.: Ravnina ρ_3	36
Slika 33.: Sjecište tri pravaca	36
Slika 34.: Pravci $r_{1,2}$ i $r_{2,3}$ u poligonu sila	37
Slika 35.: Komponente sile R_2	37
Slika 36.: Komponente sile R_1 i S_4	38
Slika 37.: Sile u poligonu i planu položaja	38