Usporedba metode sila i metode pomaka

Tomičić, Antonija

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:
University of Split, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy / Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:123:564576

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

FCEAG Repository - Repository of the Faculty of Civil Engineering, Architecture and Geodesy, University of Split







SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

ZAVRŠNI RAD

ANTONIJA TOMIČIĆ

Split, 2020.

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

ANTONIJA TOMIČIĆ

Usporedba metode sila i metode pomaka

ZAVRŠNI RAD

Split, 2020.

Usporedba metode sila i metode pomaka

Sažetak:

U ovom radu detaljno su analizirane metoda sila i metoda pomaka. Svaka metoda obrađena je zasebno, a zatim su uspoređene.
Jednim primjerom rješavanja statički neodređenog sustava prikazana je primjena obiju metoda i konačni rezultati reznih sila. Odabran je linijski element kvadratnog poprečnog presjeka. Konačni rezultati dijagrama reznih sila uspoređeni su i analizirani.

Ključne riječi:

Metoda sila, metoda pomaka

Comparation of force and displacement methods

Abstract:

The force method and displacement method are analyzed and presented in this work. Each method is presented separately and then compared.
By one example of solving statically indeterminate system, are presented the application of the methods and the final results. The task is about linear element of square cross section. Final moment diagram of both method results are compared and analyzed.

Keywords:

Force method, displacement method

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, ARHITEKTURE I GEODEZIJE

UNIVERSITY OF SPLIT
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING, ARCHITECTURE AND GEODESY

STUDIJ:	**SVEUČILIŠNI PREDDIPLOMSKI STUDIJ**
KANDIDAT:	**Antonija Tomičić**
BROJ INDEKSA:	**4517**
KATEDRA:	**Katedra za teoriju konstrukcija**
PREDMET:	**Građevna statika**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Tema: **Usporedba metode pomaka i metode sila**

Opis Zadatka: Detaljan opis metode pomaka i metode sila, te njihova usporedba i primjena.

U Splitu, rujan 2020.

Voditelj završnog rada:

Izv. prof. dr. sc. Nikolina Živaljić

Predsjednik povjerenstva za završne i diplomske ispite:

Doc. dr. sc. Ivo Andrić

SADRŽAJ

SADRŽAJ 5
1. METODA POMAKA 6
1.1. Povijesni razvoj 6
1.2. Općenito o metodi pomaka 6
1.3. Teorem o virtualnim pomacima 6
1.4. Izvorni oblik metode pomaka 7
1.5. Stanje deformiranog štapa 8
1.5.1. Uzdužno deformiran štap 9
1.5.2. Posmično deformiran štap 9
1.5.3. Savojno deformiran štap 10
1.5.4. Štap deformiran uvrtanjem 11
1.6. Stanje pune upetosti 11
1.7. Inženjerska metoda pomaka 12
2. METODA SILA 14
2.1. Općenito o metodi sila 14
2.2. Teorem o virtualnim silama 14
2.3. Koncept proračuna 14
2.3.1. Osnovni sustav 16
2.3.2. Jednadžbe ravnoteže 18
2.3.3. Vanjski utjecaji 18
2.3.4. Uvjet kompatibilnosti 19
3. USPOREDBA METODE SILA I METODE POMAKA 23
3.1. Temeljna usporedba 23
3.2. Koncept metode proračuna 23
3.3. Primjer usporedbe rješenja statički neodređenog sustava riješenog objema metodama ... 24
4. PRIMJENA METODA U RAČUNALNIM PROGRAMIMA 31
ZAKLJUČAK 31

1. METODA POMAKA

1.1. Povijesni razvoj

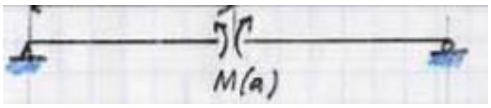
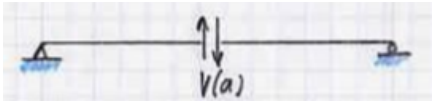
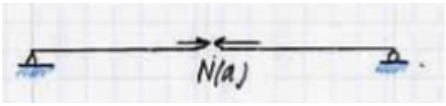
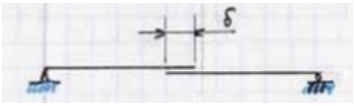
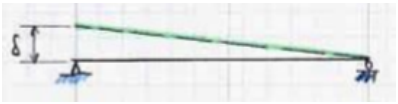
Metoda pomaka zasnovana je na postupku K. Čališeva koji je u svom članku objavio ”Pod djelovanjem vanjskih sila čvorovi nosača zaokrenut će se u općenitom slučaju za neke kutove φ i uz to pomaknuti za veličinu u, koja je za sve čvorove grede zajednička”, jer ”promatramo samo deformaciju uslijed savijanja štapova i zato ne uzimamo u obzir uslijed stlaćivanja ili rastezanja štapova”. Oblik inženjerske metode pomaka potječe iz 20.stoljeća kada ju je objavio A. Benedixen 1914.godine. Tada je prvi put i primijenjena u Munchenu za projektiranje i izvođenje čeličnih portalnih statički neodređenih konstrukcija. Matrični račun za ovu metodu objavio je Courant 1942.godine. Razvoj i potpuni oblik inženjerska metoda dobila je nakon 1955.godine i na istoj je radilo nekoliko autora.

1.2. Općenito o metodi pomaka

Metoda pomaka je metoda proračuna statičkih sustava kojima su nepoznanice translacijski i rotacijski pomaci odabranih točaka. Točke u kojima se proračunavaju nepoznanice nazivaju se čvorovima. Čvorovi su mjesta gdje se spajaju dva ili više gredna elementa ili element s podlogom pod nekim kutom. Čvor *i* u ravnini ima 3 dozvoljena pomaka, a to su dva translacijska pomaka (jedan u smjeru osi x, jedan u smjeru osi y) i jedan rotacijski pomak (oko osi okomite na ravninu). Čvorove spojene s podlogom u kojima su pomaci spriječeni ili zadani nazivamo ležajnim čvorovima, a one u kojima se spaja više elemenata, te nisu spriječeni pomaci, nazivamo slobodnim čvorovima.
Metoda pomaka pripada u metode čvorova jer uvjete ravnoteže zadovoljava izražavajući sile pomacima. Njom se mogu, osim statički neodređenih sustava, proračunavati i statički određeni sustavi. Primjena metode vrlo je široka, te je vrlo važna i za druge grane građevinarstva kao što su geomehanika i hidrotehnika. Metoda pomaka temelji se na teoremu o virtualnim pomacima.

1.3. Teorem o virtualnim pomacima

Teorem o virtualnim pomacima ili tzv. Teorem Muller-Breslaua alternativni je iskaz ravnoteže krutog ili deformabilnog tijela. Teorem kaže da je utjecajna linija jednaka progibnoj liniji zamišljenog sustava, nastaloj prekidanjem veze koja u zadanom nosaču prenosi tu veličinu, ako se na mjestu i u smjeru te veličine zada jedinični pomak. Ako je elastično tijelo pod nekim sustavom sila u ravnoteži, tada je rad stvarnih vanjskih sila na virtualnim pomacima jednak radu stvarnih unutarnjih sila ili naprezanja na odgovarajućim virtualnim deformacijama, vrijedi i obratno.
Virtualni pomaci su definirani kao zamišljeni dovoljno mali pomaci koji ne narušavaju neprekinutost tijela i uvijete na osloncima.
Tablicom je ukratko prikazan način rješavanja jednostavne grede primjenom teorema o virtualnim pomacima.

OSLOBAĐANJE VEZA	
SILA	**ODGOVARAJUĆI POMAK**
MOMENT U x=a 	ROTACIJA U x=a 
POPREČNA SILA U x=a 	VERTIKALNA TRANSLACIJA U x=a 
UZDUŽNA SILA U x=a 	HORIZONTALNA TRANSLACIJA U x=a 
REAKCIJA U x=0 	VERTIKALNA TRANSLACIJA U x=0 

Slika 1.1. Oslobađanje veza [1]

1.4. Izvorni oblik metode pomaka

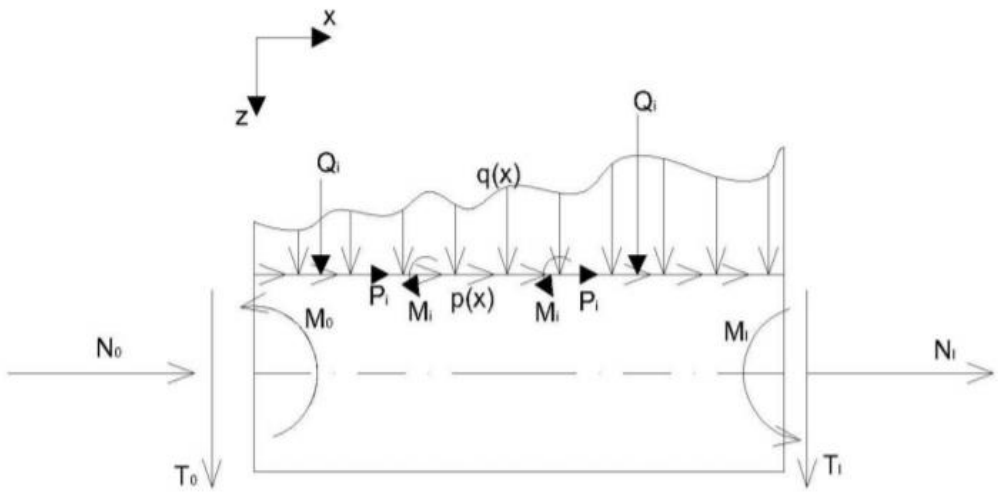
Izvorni, kanonski ili temeljni oblik metode pomaka. Proračun se provodi određenim redoslijedom:

1. Potrebno je odrediti sve nepoznate pomake.
2. Formira se stanje pune upetosti tj. sprječavaju se svi pomaci sustava fiktivnim pridržanjima i tako dobijemo sile pune upetosti koje, ovisno o položajima u čvorovima, dobivaju svoje mjesto u matrici sila pune upetosti. Te sile nisu sile reakcije nego aktivne sile.

3. Zadaju se jedinični pomaci u smjerovima nepoznatih pomaka koji postaju dijelom globalne matrice krutosti. Ako se položaj štapova u lokalnom koordinatnom sustavu ne podudaraju sa globalnim koordinatnim sustavom, potrebno ih je preslikati prije slaganja globalne matrice.
4. Rješavanje globalnog sustava ravnoteže iz kojeg se određuju nepoznati pomaci.

1.5. Stanje deformiranog štapa

U nastavku su prikazana četiri deformacijska krutosti stanja štapa. Pretpostavlja se da je štap kao na prikazanoj slici.



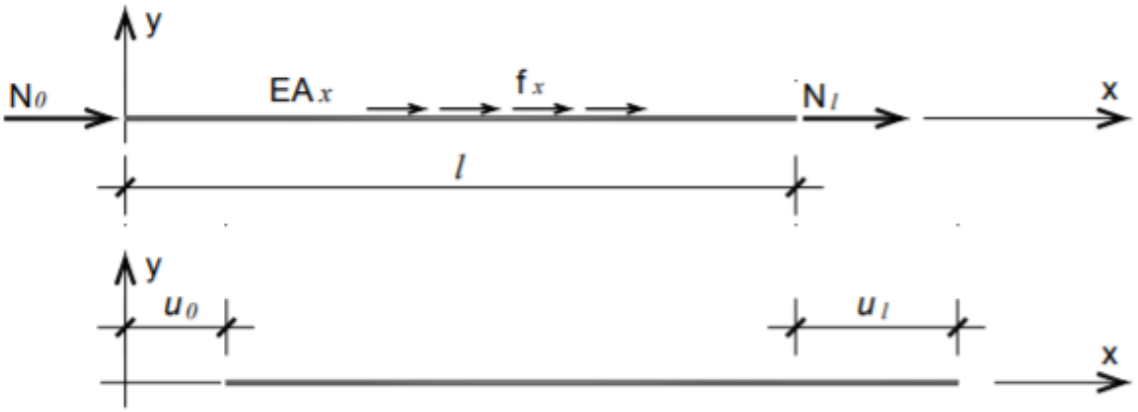
Slika 1.2. Bernoully-Eulerova greda [2]

Prikazana je Bernoulli-Eulerovu greda za koju vrijedi:

- presjeci grede će ostati ravni prilikom savijanja,
- izrađena je od Hookeovog materijala,
- prizmatična ,
- pravocrtna,
- konstantnog poprečnog presjeka.

1.5.1. Uzdužno deformiran štap

Pravocrtni štap izložen je uzdužnoj sili N. Uzdužna deformacija izazvana je pomacima krajeva štapa i djelovanjem sile N u smjeru osi štapa.



Slika 1.3. Uzdužno deformiran štap [3]

Uvjet ravnoteže prikazat ćemo upravo u matričnom obliku, te isti predstavlja poveznicu između sila na rubovima, pomaka rubova i opterećenja.

$$\begin{Bmatrix} N_0 \\ N_l \end{Bmatrix} = \frac{EA_x}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

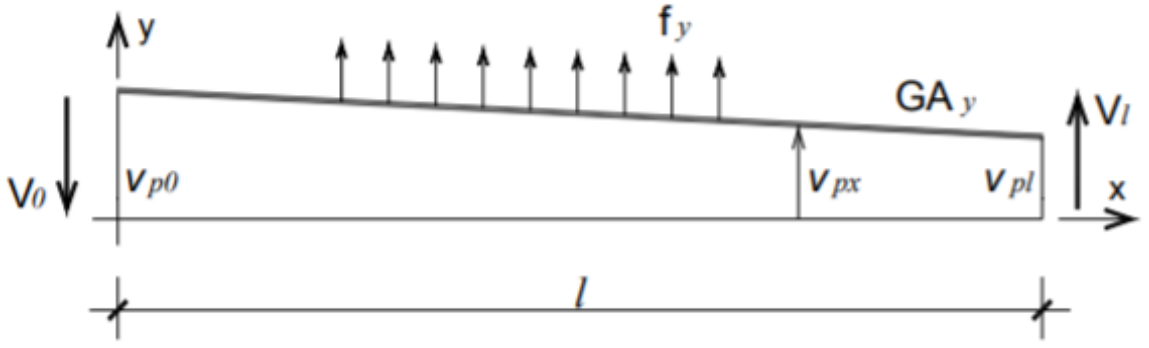
U skraćenom obliku ova matrica glasi:

$$\mathbf{s}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{f} \tag{2}$$

U ovakvom obliku, oznaka '**s**' predstavlja matricu uzdužnih sila na rubovima, oznaka '**k**' matricu krutosti štapa, oznaka '**u**' matricu pomaka rubova, a '**f**' je matrica sila pune upetosti.

1.5.2. Posmično deformiran štap

Štap deformiran posmično prikazan je na slici. Sile koje izazivaju takvo deformiranje na slici su označene oznakom 'V'. Zanemareni su ostali utjecaji na štap.



Slika 1.4. Posmično deformiran štap [3]

I ovdje ćemo uvjet ravnoteže prikazati u matričnom obliku do kojeg smo, kao i kod uzdužno deformiranog štapa, došli postupkom integracije.

$$\begin{Bmatrix} V_{y0} \\ V_{yl} \end{Bmatrix} = \frac{GA_y}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{p0} \\ v_{pl} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

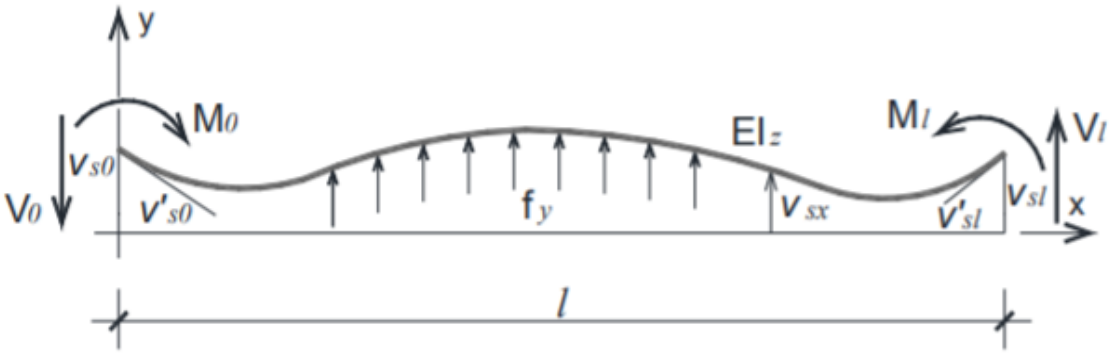
I ova matrica glasi:

$$\mathbf{s=k \cdot u - f} \tag{4}$$

U posmičnoj deformaciji, oznaka ‘s’ u jednadžbi predstavlja matricu poprečnih sila na rubovima, oznaka ‘k’ predstavlja matricu posmične krutosti štapa, oznaka ‘u’ matricu pomaka rubova, a ‘f’ je matrica sila pune upetosti.

1.5.3. Savojno deformiran štap

Štap deformiran samo savijanjem prikazan je na slici.



Slika 1.5. Savojno deformiran štap [3]

Uvjet ravnoteže u matričnom obliku kod savojnog deformiranja izgleda kompleksnije nego u prije izvedenim matricama za uzdužno i posmično deformiranje. Matrica savojnog deformiranja je matrica četvrtog reda.

$$\begin{Bmatrix} V_{y0} \\ M_{z0} \\ V_{yl} \\ M_{zl} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_{s0} \\ V'_{s0} \\ V_{sl} \\ V'_{sl} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

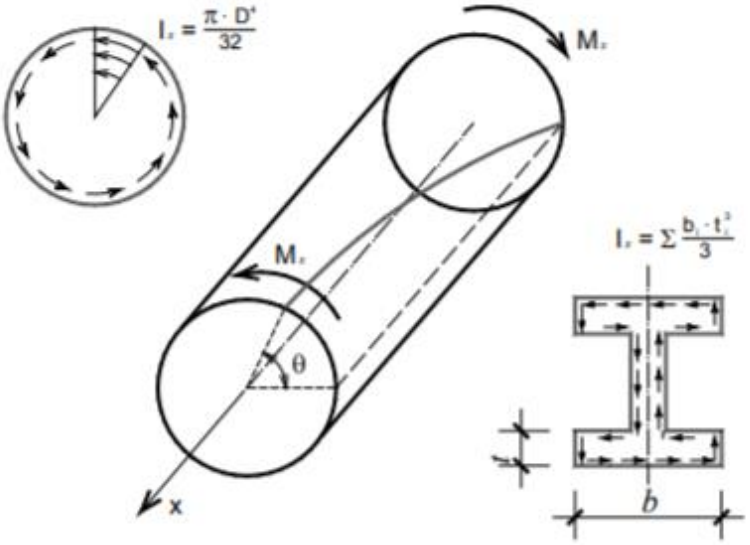
I ova matrica glasi:

$$\mathbf{s=k \cdot u - f} \tag{6}$$

U savojnoj deformaciji, oznaka ‘s’ u jednadžbi predstavlja matricu sila na rubovima, oznaka ‘k’ predstavlja matricu savojne krutosti štapa, oznaka ‘u’ matricu pomaka rubova, a ‘f’ je matrica sila pune upetosti.

1.5.4. Štap deformiran uvrtanjem

Uvrtanje štapa može biti jednoliko i nejednoliko. To ovisi o obliku poprečnog presjeka i rubnim uvjetima. Štap deformiran uvrtanjem prikazan je na slici.



Slika 1.6. Štap deformiran uvrtanjem [3]

Uvjet ravnoteže prikazat ćemo u matričnom obliku.

$$\begin{Bmatrix} M_{x0} \\ M_{xl} \end{Bmatrix} = \frac{GI_x}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0_0 \\ 0_l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

I ova matrica glasi:

$$\mathbf{s=k \cdot u - f} \tag{8}$$

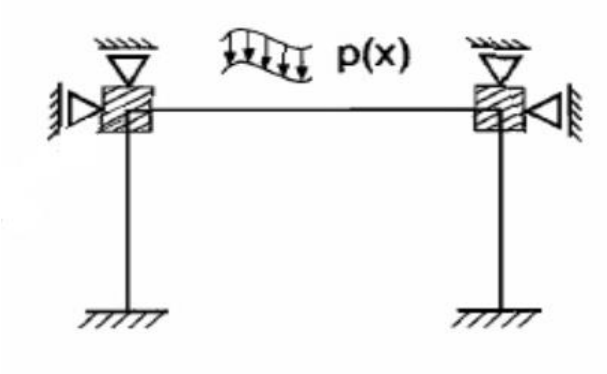
U ovoj matrici oznaka ‘s’ predstavlja matricu sila na rubovima, oznaka ‘k’ predstavlja matricu torzijske krutosti, ‘u’ matricu odgovarajućih pomaka krajeva štapa i ‘f’ je matrica pune upetosti.

1.6. Stanje pune upetosti

Stanje pune upetosti formira se kada na sustavu spriječimo sve neovisne pomake. Na sustav djeluje neko vanjsko opterećenje. Svi čvorovi tada su pridržani fiktivnim vezama. Tako se održava ravnoteža samog sustava, osigurava se njegova kompatibilnost, te omogućava da se svaki štap u sustavu može posebno proračunati. U fiktivnim vezama nastaju sile koje se nazivaju sile pune upetosti. Veličina neke sile pune upetosti u smjeru i-tog pridržanja, na štapu m, iznosila bi:

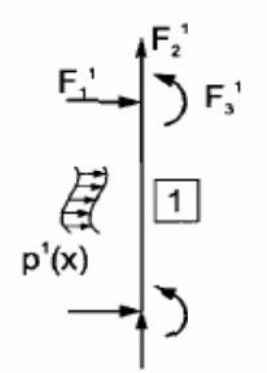
$$F_{i=} \sum_{m} F_i^m \tag{9}$$

Ako imamo zadan sustav, svaki element možemo izdvojiti, te za njemu odrediti sile na rubovima. Zbrajanjem svih sila na rubovima tj. u čvorovima, dobije se matrica ‘f’ pune upetosti za cijeli sustav.
Slika prikazuje jedan okvirni sustav.



Slika 1.7. Okvirni sustav [4]

Na jednom izdvojenom štapu prikazano je stanje pune upetosti.



Slika 1.8. Stanje pune upetosti [4]

Izdvajajući tako svaki štap dobijemo sile pune upetosti u čvorovima, Njihovim sumiranjem nastaje matrica sila pune upetosti.

1.7. Inženjerska metoda pomaka

Ako se štap promatra dvodimenzionalno tj. u ravnini, onda njegov svaki čvor ima tri pomaka (translacijski u smjeru x,y i zaokret okomito na ravninu). Zanemari li se jedan pomak, onaj translacijski, u smjeru osi štapa, dobije se smanjen broj nepoznanica potrebnih za određivanje sila u štapovima. Time se ne mijenja razmak krajnjih čvorova tj. duljina štapa u konstrukciji kojeg promatramo. Duljina štapa će se ipak promijeniti ako postoji temperaturno djelovanje duž štapa. Metoda funkcionira zanemarivanjem uzdužnih deformacija ako identificiramo neovisne translacijske pomake sustava.

Inženjerska metoda pomaka najčešće se koristi kod konstrukcija u kojima je dominantno savojno deformiranje, pa se za uvjet ravnoteže koriste jednadžbe momenata u čvorovima jer su nepoznanice kutovi zaokreta i neovisni translatorni pomaci. Smanjenje broja nepoznanica olakšava i 'ručni' proračun.

Postupak rješavanja inženjerske metode pomaka:

1. Određivanje nepoznanica,
2. Plan pomaka - proračun krutosti i kutova zaokreta štapova,
3. Momenti upetosti na krajevima elementa od vanjskog opterećenja,
4. Postavljanje jednadžbi momenata na krajevima štapova,
5. Sustav jednadžbi ravnoteže iz kojih određujemo vrijednosti nepoznanica,
6. Konačni momentni dijagram.

Konvencija o predznacima momenata kod ove metode definirana je obzirom na pravilo vrtnje momenata (pravilo desne ruke).



Slika 1.9. Konvencija o predznacima momenata [5]

2. METODA SILA

2.1. Općenito o metodi sila

Metoda sila jako je često korištena metoda za rješavanje statički neodređenih sustava. To je metoda proračuna statički neodređenih sustava u kojoj su nepoznanice sile i momenti. Uvjeti ravnoteže nisu dovoljni za proračun nepoznatih veličina, pa se postavljaju dodatni rubni uvjeti koji se izražavaju jednadžbama. Ove jednadžbe nazivaju se jednadžbama kompatibilnosti ili kontinuiteta.
Temelj metode je transformacija zadanog sustava u statički određen osnovni sustav. Osnovni sustav nastaje tako što se zadanom sustavu prekine određen broj veza koje se nadomještaju odgovarajućim silama ili momentima. Osnovni sustav mora biti geometrijski nepromjenjiv. Broj nepoznatih sila tj. dodatnih uvjeta proporcionalan je stupnju statičke neodređenosti. Proračunavaju se prekobrojne sile potrebne za povrat pomaka sustava u početno stanje sustavom n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica nekom matematičkom metodom. Kao rješenje se dobiju veličine sila na mjestu prekinutih veza.

2.2. Teorem o virtualnim silama

Teorem o virtualnim silama alternativni je iskaz uvjeta kompatibilnosti pomaka i deformacija. Ako polja pomaka i deformacija konstrukcije zadovoljavaju sve kinematičke odnose, onda je komplementarni rad odabranih vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomaka jednak komplementarnom radu unutarnjih virtualnih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja. Vrijedi i obrnuto, ako je komplementarni rad odabranih vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomaka jednak komplementarnom radu unutarnjih virtualnih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja, polja pomaka i deformacija konstrukcije zadovoljavaju sve kinematičke odnose.
Komplementarni rad virtualnih sila na stvarnim pomacima naziva se komplementarnim virtualnim radom, pa se teorem može pronaći i kao teorem o komplementarnom virtualnom radu. Ovaj teorem, kao i teorem o virtualnim pomacima, neovisan je o konstruktivnim stvojstvima gradiva.

2.3. Koncept proračuna

Proračun se provodi određenim redoslijedom:

1. Prvo je potrebno odrediti stupanj statičke neodređenosti (SSN) zadanog linijskog sustava. Ovisno o stupnju statičke neodređenosti, ukida se broj prekobrojnih veza prema izrazu:

$$SSN = -SSK = -[2 \cdot n - (s + c + r)] \tag{10}$$

SSN je stupanj statičke neodređenosti, SSK je stupanj slobode kretanja, oznaka ‘n’ ukupan je broj čvorova promatranog sustava, ‘s’ je ukupan broj štapova, ‘c’ je ukupan broj krutih veza, a ‘r’ predstavlja ukupan broj reakcija.

2. U drugom koraku kreira se statički određen osnovni sustav. Osnovni sustav dobijemo presijecanjem prekobrojnih vanjskih ili unutarnjih veza. Pri kreiranju osnovnog sustava ne smijemo dobiti statički neodređen sustava li mehanizam. Prekinute veze nadomještaju se s odgovarajućim generaliziranim silama unutarnjih ili vanjskih veza. Na mjestu i u smjeru prekinute vanjske veze postavlja odgovarajuća nepoznata generalizirana sila Xi. Za prekid unutarnjih veza, na mjestu i u smjeru prekinute veze postavljaju se u paru odgovarajuće nepoznate generalizirane sile X_i. Druga sila djeluje na nepomičnu podlogu, te ju izostavljamo iz proračuna. Iznosi sile biti će takvi da osiguraju podudaranje progibnih linija ili neprekinutost polja pomaka. Ako smo oslobodili translacijski pomak, vezu ćemo nadomjestiti silom na mjestu i u smjeru oslobođenog pomaka, a ako smo oslobodili zaokret vezu ćemo nadomjestiti momentom.

3. Vrijednosti prekobrojnih sila X_i izračunat ćemo iz uvjeta pomaka njihovih hvatišta. Uvjeti kompatibilnosti pomaka ne mogu se zadovoljavati pojedinačno, jer svaka prekobrojna sila utječe na pomake hvatišta svih prekobrojnih sila, pa se rješenje dobiva rješavanjem sustava jednadžbi.

4. Na mjestu prekinutih veza postavljaju se jedinične sile X_i=1.0, koje na osnovnom sustavu izazivaju dijagrame M ,V i N. Izračunavaju se pomaci zbog ovih jediničnih sila na mjestima prekinutih veza.

5. Računaju se vrijednosti sila u prekinutim vezama pomoću uvjeta kompatibilnosti koji osnovni sustav vraćaju početnoj statički neodređenoj konstrukciji. Rješava se sustav n linearnih jednadžbi sa n nepoznatih sila.

$$\begin{aligned}
&\delta_{1,0} + X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_2 \cdot \delta_{1,2} + \ldots + X_n \cdot \delta_{1,n} = 0 \\
&\delta_{2,0} + X_1 \cdot \delta_{2,1} + X_2 \cdot \delta_{2,2} + \ldots + X_n \cdot \delta_{2,n} = 0 \\
&\delta_{3,0} + X_1 \cdot \delta_{3,1} + X_2 \cdot \delta_{3,2} + \ldots + X_n \cdot \delta_{3,n} = 0 \\
&\ldots \\
&\delta_{n,0} + X_1 \cdot \delta_{n,1} + X_2 \cdot \delta_{n,2} + \ldots + X_n \cdot \delta_{n,n} = 0
\end{aligned} \qquad (11)$$

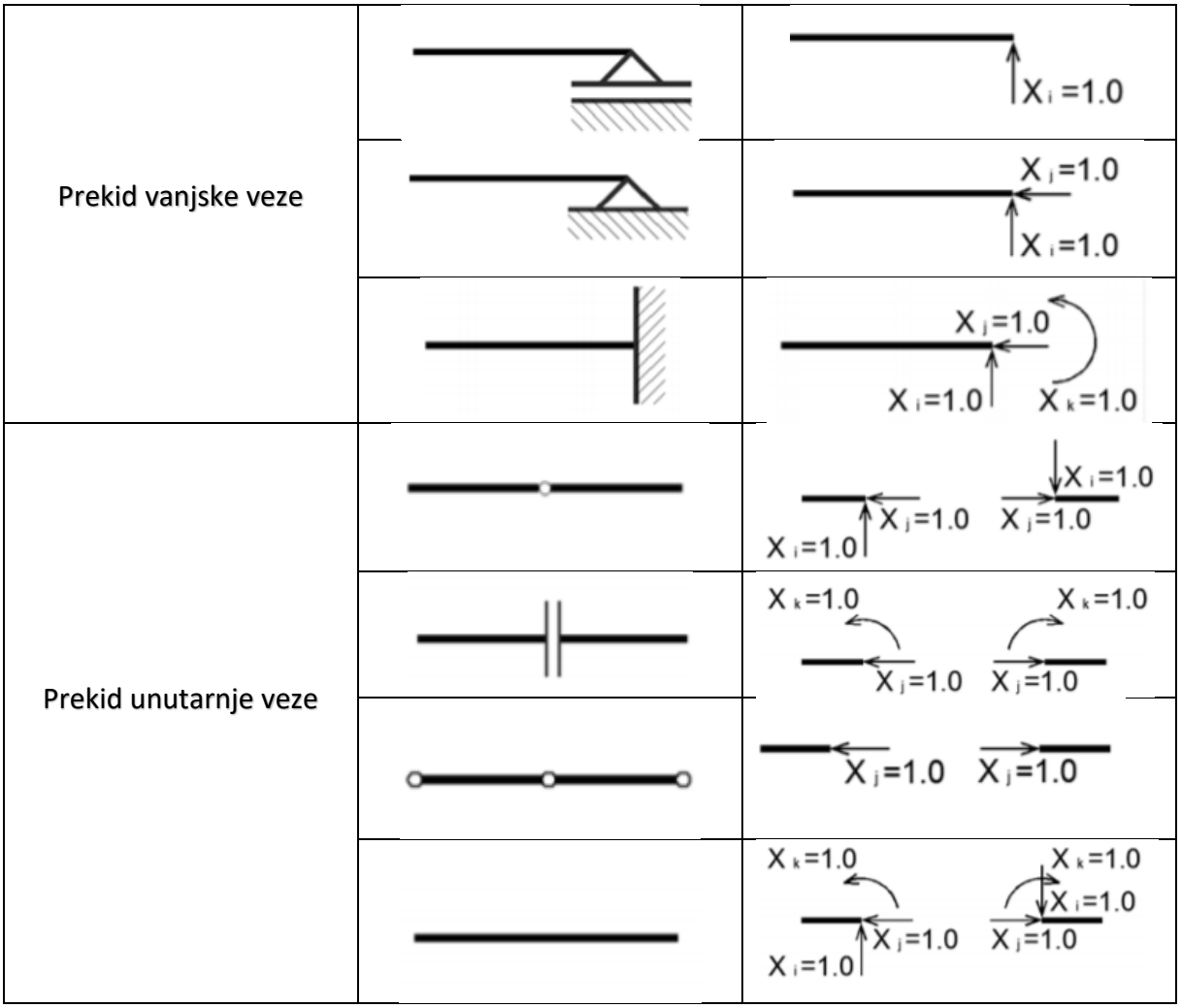
6. Računaju se sile ‘S’ na statički neodređenoj konstrukciji.

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + X_2 \cdot S_2 + \ldots + X_n \cdot S_n \qquad (12)$$

‘S_0’ označava silu uslijed zadanog opterećenja ili pomaka na osnovnom sustavu. ‘S_n’ je sila uslijed jediničnih sila na osnovnom sustavu, a ‘X’ je veličina izračunata iz sustava jednadžbi iz prethodnog koraka.

2.3.1. Osnovni sustav

Osnovni sustav kreira se prvenstveno po vlastitom odabiru zato uvijek postoji više načina izgleda statički određenog sustava. Izbor osnovnog sustava utječe na složenost i trajanje proračuna metodom sila zato ga se treba odabrati tako da integracijski izrazi budu što kraći. Otpuštanjem vanjskih veza tj. ležajeva ili kreiranjem unutarnjih zglobova transformira se sustav u statički određen koji nazivamo osnovni sustav. Osnovni sustav mora biti geometrijski nepromjenjiv.



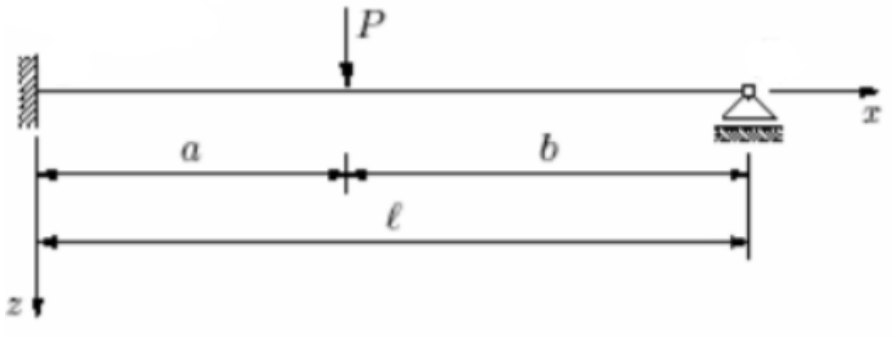
Slika 2.1. Prekid unutarnjih i vanjskih veza [6]

U tablici je shematski prikazan primjer prekidanja jedne unutarnje i jedne vanjske veze.

Najjednostavniji primjer oslobađanja veza bio bi kada bi se pomični oslonac zamijenimo silom X_i.
Na jednostavnom primjeru prikazano je kako se jedan osnovni sustav zapravo formira.
Zadana je slobodno oslonjena greda opterećena kao na slici. Za gredu vrijede sve karakteristike Bernoulli-Eulerove grede.

1. Određujemo stupanj statičke neodređenosti sustava.

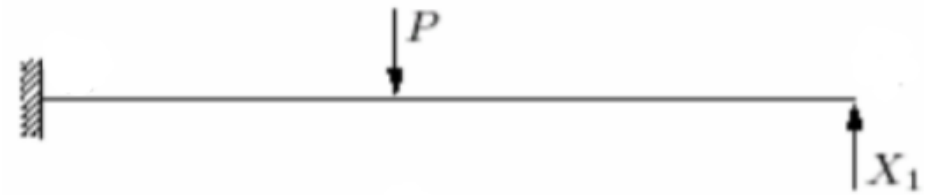
$$SSN = -SSK = -[2 \cdot n - (s + c + r)] \tag{13}$$



Slika 2.2. Statički neodređen sustav [7]

SSN=1

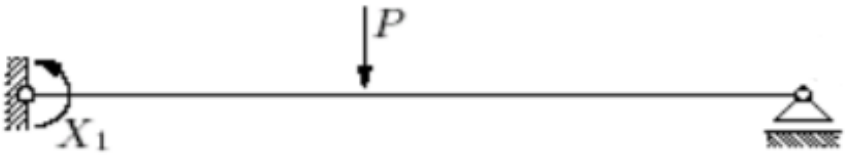
2. Statički neodređen sustav zamjenjuje se osnovnim sustavom.



Slika 2.3. Osnovni sustav 1 [7]

3. Na mjestu oslobođenih veza postavljaju se nepoznate sile. Osnovni sustav je konzola opterećena silom P kao početni sustav, a klizni ležaj sa desnog ruba zamijenjen je silom X_1.

   Ima nekoliko načina za formiranje osnovnog sustava, pa se tako i ovaj zadani sustav može na više načina formirati u statički stabilan osnovni sustav nakon određivanja SSN.



Slika 2.4. Osnovni sustav 2 [7]

2.3.2. Jednadžbe ravnoteže

Za rješavanje sustava metodom sila potrebno je formirati uvjet kompatibilnosti. Jednadžbe za određivanje nepoznatih veličina Xi statički neodređenih veličina formalni su zapis uvjeta kompatibilnosti pomaka. Sustav jednadžbi kompatibilnosti u matričnom obliku izgleda:

$$\delta \cdot X + \Delta = 0 \tag{14}$$

U ovakvom zapisu 'δ' je matrica fleksibilnosti ili popustljivosti sustava, 'X' je vektor prekobrojnih sila, a Δ je vrijednost pomaka od zadanog opterećenja.

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \cdots & \delta_{1,n} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \cdots & \delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m,1} & \delta_{m,2} & \cdots & \delta_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1,0} \\ \delta_{2,0} \\ \vdots \\ \delta_{n,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

U oznaci δ_{ij} broj redaka označen je slovom i=1,2,…,m, a broj stupaca i j=1,2,…,n. Matrica fleksibilnosti je simetrična oko glavne osi dijagonale. Koeficijent $\delta_{i,j}$ naziva se koeficijent fleksibilnosti i označava pomak hvatišta sile X_i u smjeru njenog djelovanja uslijed vanjskih utjecaja. Tip matrice pokazuje koliko matrica ima elemenata i na koji način su ti elementi poredani (u m redaka i n stupaca).

2.3.3. Vanjski utjecaji

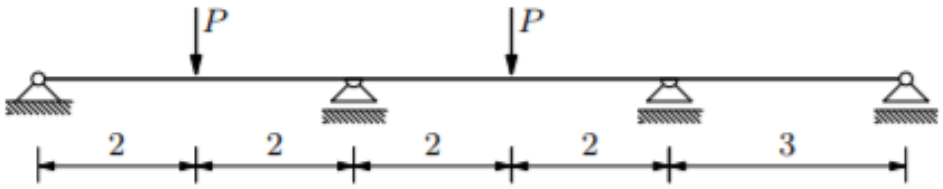
Vanjski utjecaji na statički neodređenom sustavu su zapravo opterećenja koja djeluju na sustav. Uz zadana opterećenja u skupinu vanjskih utjecaja spadaju i pomaci oslonaca te izloženost utjecaju temperature.
Izraz za vanjski utjecaj, u formuli označen sa 'Δ_{i0}' , na sustav pišemo:

$$\Delta_{i0} = \Delta_{iP} + \Delta_{iT} - \Delta_{iS} \tag{16}$$

Oznaka $'\Delta_{iP}'$ u izrazu označava pomak u točki i,u pravcu sile X_i = 1.0 uslijed djelovanja vanjskog opterećenja, $'\Delta_{iT}'$ označava pomak u točki i, u pravcu sile X_I = 1.0 uslijed djelovanja temperature i $'\Delta_{iS}'$ označava pomak u točki I, u pravcu sile X_i = 1.0 uslijed slijeganja oslonca.

2.3.4. Uvjet kompatibilnosti

Zadan je sustav prikazan na slici. Opterećenje P iznosi 100 kN.



Slika 2.5. Gredni nosač opterećen silama P [8]

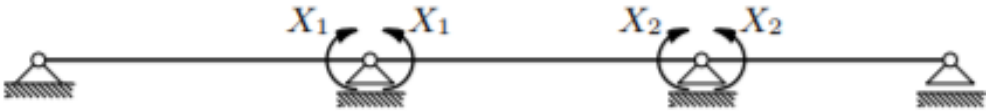
Osnovni sustav prikazat ćemo na dva primjera.

a) Jedan je mogući osnovni sustav je prosta greda koja nastaje uklanjanjem drugoga i trećeg ležaja koje zamjenjujemo silama X_1 i X_2.



Slika 2.6. Osnovni sustav 1 [8]

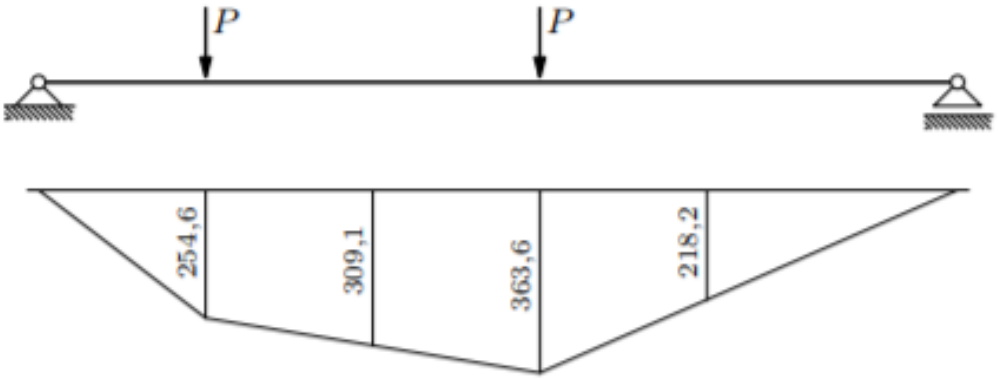
b) Drugi mogući osnovni sustav dobijemo oslobađajući kutove zaokreta na mjestima drugog i trećeg ležaja.



Slika 2.7. Osnovni sustav 2 [8]

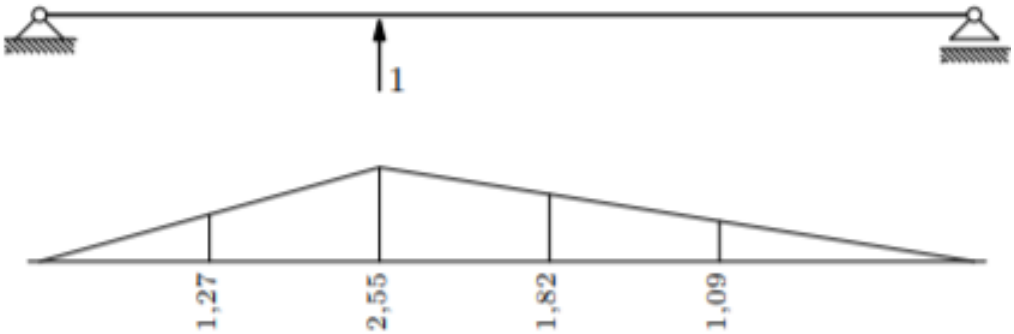
Na primjeru osnovnog sustava prikazanog pod a) nastaviti ćemo proračun.

Momentni dijagram ’M_0’ na sustavu nastao djelovanjem opterećenja P.



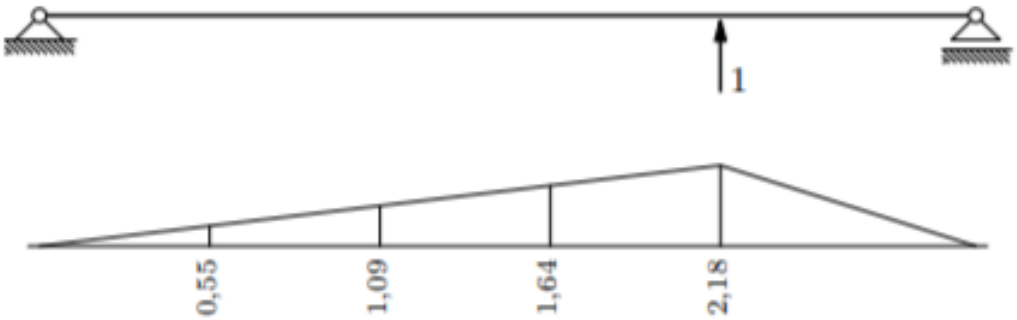
Slika 2.8. Momentni dijagram uslijed P [8]

Momentni dijagram ‘m_1’ uslijed X_1.



Slika 2.9. Momentni dijagram uslijed X_1 [8]

Momentni dijagram ‘m_1’ uslijed X_2.



Slika 2.10. Momentni dijagram uslijed X_2 [8]

Vrijednosti pomaka hvatišta sila po pravcima izračunavamo uz pomoć iznosa momentnih dijagrama od opterećenja. Pa tako vrijednost pomaka '$\delta_{1,0}$' na ovom primjeru dobivamo izrazom:

$$\delta_{1,0} = \int_0^l \frac{M_0(x)m_1(x)}{EI(x)} \quad dx \tag{17}$$

Drugi pomak računamo na isti način.

$$\delta_{2,0} = \int_0^l \frac{M_0(x)m_2(x)}{EI(x)} \quad dx \tag{18}$$

Vrijednosti pomaka tih točaka zbog djelovanja jedinične sile X_1 i X_2:

$$\delta_{1,1} = \int_0^l \frac{m_1^2(x)}{EI(x)} \quad dx \tag{19}$$

$$\delta_{1,2} = \int_0^l \frac{m_1(x)m_2(x)}{EI(x)} \quad dx \tag{20}$$

$$\delta_{2,1} = \int_0^l \frac{m_2(x)m_1(x)}{EI(x)} \quad dx \tag{21}$$

$$\delta_{2,2} = \int_0^l \frac{m_2^2(x)}{EI(x)} \quad dx \tag{22}$$

Na pomak hvatišta sile X_1 utječe sama sila, sila P i sila X_2. Isto tako ukupna vrijednost pomaka hvatišta sile X_2 dobiva se uslijed djelovanja nje same, sile P i sile X_1.

Uvjeti kompatibilnosti :

$$\delta_1 = 0 \tag{23}$$

$$\delta_2 = 0 \tag{24}$$

Iz ovog uvjeta dobijemo sustav jednadžbi iz kojeg dobijemo vrijednosti sila X_1 i X_2 za koje će se 'preklopiti' progibna linije osnovnog i zadanog sustava.

$$\delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 + \delta_{1.0} = 0 \quad (25)$$

$$\delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 + \delta_{2.0} = 0 \quad (26)$$

Tako izračunamo vrijednost pomaka hvatišta prekobrojne sile Xi po pravcu njezina djelovanja zbog zajedničkoga djelovanja svih prekobrojnih sila Xj , j = 1, . . . , n, i svih zadanih vanjskih utjecaja u n puta statički neodređenom sustavu.

3. USPOREDBA METODE SILA I METODE POMAKA

3.1. Temeljna usporedba

Temeljna ideja kod obje metode je diskretizacija matematičkog modela radi jednostavnijeg proračuna. Zajedničko objema metodama je da formiramo zamjenski sustav za onaj zadani, zatim uz pomoć uvjeta ravnoteže i rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo rješenja sustava. Obje metode rješavaju rubne zadaće. Umetanjem rubnih uvjeta pričvršćujemo konstrukciju u prostoru. Tako definiranu zadaću zovemo rubna zadaća.
Kod rješavanja sustava metodom pomaka važni su parametri vezani uz pomake konstrukcije, za razliku od metode sila gdje je za rješavanje sustava najvažniji intenzitet sile koja djeluje na konstrukciju. Pa tako kod rješavanja nekog grednog modela koji ima beskonačno mnogo nepoznanica, točnije u svakoj točki grede, model u metodi sila postaje konačno puta statički određen, a u metodi pomaka ima konačan broj nepoznatih stupnjeva slobode.

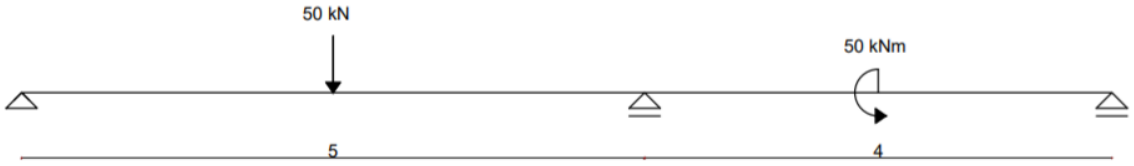
3.2. Koncept metode proračuna

METODA POMAKA	**KONCEPT PRORAČUNA**	METODA SILA
Prekobrojne sile	**nepoznanice**	Pomaci
Pomak zbog sile		Sila zbog pomaka
Kinematička neodređenost	**vrsta neodređenosti**	Statička neodređenost
Ukidanje prekobrojnih veza	**zamjenski sustav**	Dodavanje veza na mjesto nepoznatih pomaka
Matrica fleksibilnosti	**matrica**	Matrica krutosti
Ravnoteža sila	**jednadžbe**	Kompatibilnost pomaka
Prekobrojne sile	**rješenje**	Pomaci

Slika 3.1. Usporedba koncepta proračuna metodom sila i metodom pomaka

3.3. Primjer usporedbe rješenja statički neodređenog sustava riješenog objema metodama

Na jednostavnom primjeru usporediti ćemo rezultate proračuna momentnog dijagrama i dijagrama poprečnih sila metodom sila i metodom pomaka.
Sljedećim primjerom prikazat će se i postupak rješavanja te primjena dosada objašnjenih metoda.
Zadan je statički neodređen sustav na slici kojeg djeluje vanjska sila P= 50 kN i moment M= 50 kNm. Poprečni presjek grede je zadan b/h=40/40 cm. Modul elastičnosti iznosi $3 \cdot 10^7$ kN/m^2.



Slika 3.2. Statički neodređen sustav

METODA SILA

Statička neodređenost:

$$SSN = -1$$

Geometrijske i materijalne karakteristike:

$$EI = E_0 I_0 = 64000(kNm^2)$$

$$EA = 4800000\ (kN)$$

Koeficijenti:

$$M = \frac{E_0 I_0}{EI} = 1$$

$$N = \frac{E_0 I_0}{EA} = 1$$

Odabir osnovnog sustava:



Slika 3.3. Osnovni sustav

Reakcije za X_1=1 kN:



Slika 3.4. Reakcije uslijed X_1

$$\sum M_A = 0$$

$$V_B = 0{,}56\ kN$$

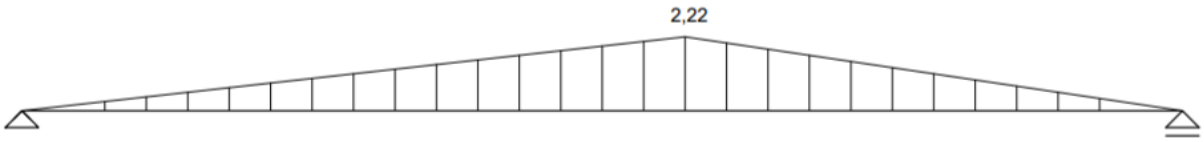
$$\sum M_B = 0$$

$$V_A = 0{,}44\ kN$$

$$\sum F_y = 0$$

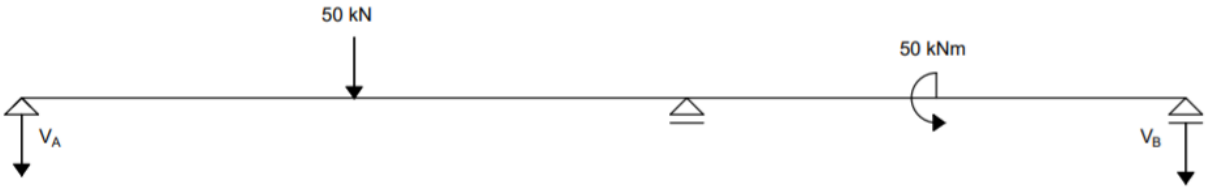
$$1 - 0{,}44 - 0{,}56 = 0$$

Momentni dijagram za X_1= 1 kN:



Slika 3.5. Momentni dijagram uslijed X_1

Reakcije za vanjsko opterećenje:



Slika 3.6. Reakcije uslijed vanjskog opterećenja

$$\sum M_A = 0$$

$$V_B = 8{,}33\ kN$$

$$\sum M_B = 0$$

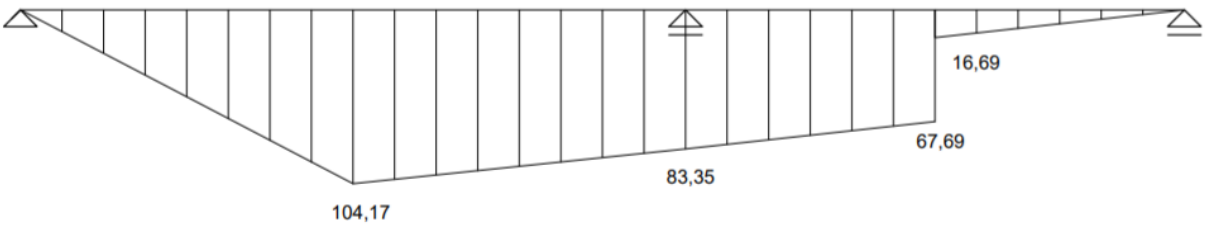
$$V_A = 41{,}67\ kN$$

$$\sum F_y = 0$$

$$P - V_A - V_B = 0$$

$$50 - 8{,}33 - 41{,}67 = 0$$

Momentni dijagram za vanjsko opterećenje:



Slika 3.7. Momentni dijagram uslijed vanjskog opterećenja

Koeficijenti fleksibilnosti:

$$\delta_{11} = +1 * \frac{1{,}11 * 2{,}5}{2} * \frac{2}{3} * 1{,}11 + 1 * \frac{2{,}22 * 2{,}5}{2} * \left(\frac{2}{3} * 2{,}22 + \frac{1}{3} * 1{,}11\right) + 1 * \frac{1{,}11 * 2{,}5}{2} * \left(\frac{2}{3} * 1{,}11 + \frac{1}{3} * 2{,}22\right) + 1 * \frac{2{,}22 * 2}{2} * \left(\frac{2}{3} * 2{,}22 + \frac{1}{3} * 1{,}11\right) + 1 * \frac{1{,}11 * 2}{2} * \left(\frac{2}{3} * 1{,}11 + \frac{1}{3} * 2{,}22\right) + 1 * \frac{1{,}11 * 2}{2} * \frac{2}{3} * 1{,}11$$

$$= 1{,}026 + 5{,}13 + 2{,}05 + 4{,}107 + 1{,}643 + 0{,}822$$

$$= 14{,}78$$

$$\delta_{10} = 1 * \frac{1{,}11 * 2{,}5}{2} * \frac{2}{3} * 104{,}17 - 1 * \frac{2{,}22 * 2{,}5}{2} * \left(\frac{2}{3} * 83{,}35 + \frac{1}{3} * 104{,}17\right) - 1 * \frac{1{,}11 * 2{,}5}{2} * \left(\frac{2}{3} * 104{,}17 + \frac{1}{3} * 83{,}35\right) - 1 * \frac{2{,}22 * 2}{2} * \left(\frac{2}{3} * 83{,}35 + \frac{1}{3} * 67{,}69\right) - 1 * \frac{1{,}11 * 2}{2} * \left(\frac{2}{3} * 67{,}69 + \frac{1}{3} * 83{,}35\right) - 1 * \frac{1{,}11 * 2}{2} * \frac{2}{3} * 16{,}69$$

$$= -96{,}36 - 250{,}55 - 114{,}09 - 173{,}45 - 80{,}201 - 12{,}24$$

$$= -726{,}89$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = 49{,}18\ kNm$$

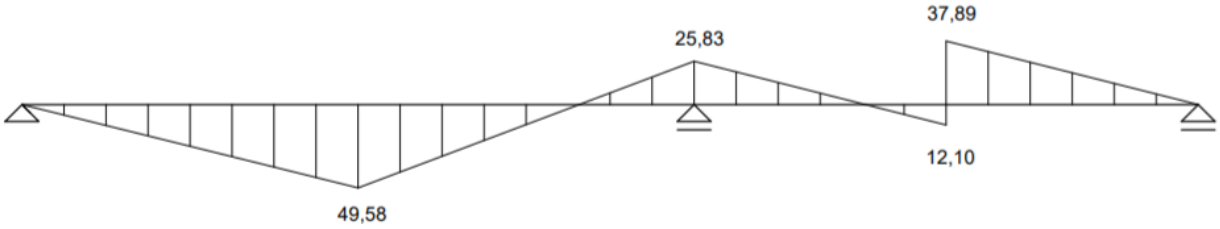
Konačni momentni dijagram:

$$M_1 = 104{,}17 - (1{,}11 \cdot 49{,}18) = 49{,}58\ kNm$$

$$M_C = 83{,}35 - (2{,}22 \cdot 49{,}18) = -25{,}83\ kNm$$

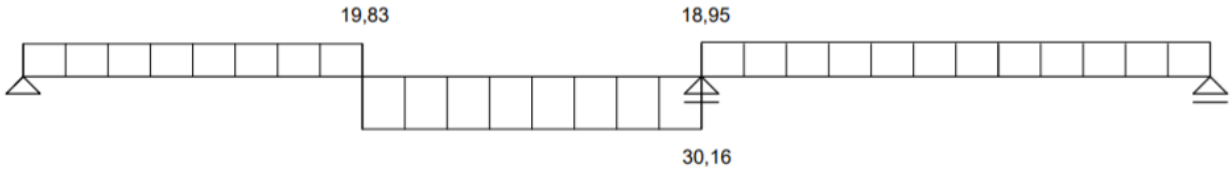
$$M_{CB}^{L} = 66{,}69 - (1{,}11 \cdot 49{,}18) = 12{,}10\ kNm$$

$$M_{CB}^{D} = 12{,}10 - 50 = 37{,}89\ kNm$$



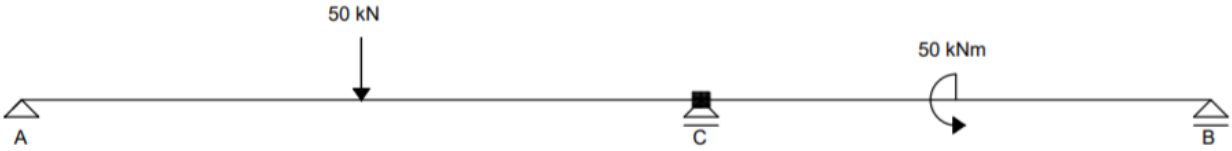
Slika 3.8. Konačni momentni dijagram

Konačni dijagram poprečnih sila:



Slika 3.9. Konačni dijagram poprečnih sila

METODA POMAKA



Slika 3.10. Statički neodređen sustav

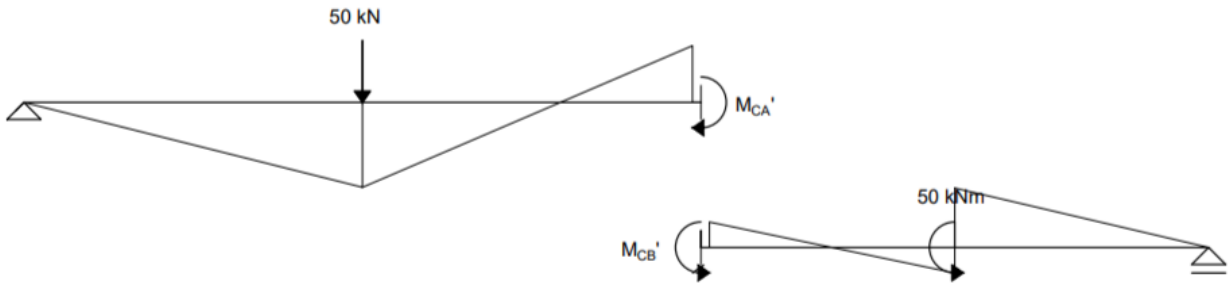
Krutost elementa:

$$EI_G = E_0 I_0 = 64000(kNm^2)$$

$$k_A = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

$$k_B = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Momenti upetosti:



Slika 3.11. Momenti upetosti

$$M'_{AC} = M'_{BC} = 0$$

$$M'_{CA} = \frac{3 \cdot P \cdot l}{16} = -46{,}87\ kNm$$

$$M'_{CB} = \frac{M}{8} = 6{,}25\ kNm$$

Jednadžba momenata na krajevima:

$$M_{AC} = k_A \cdot \left(3\varphi_B - 3\Psi_{AB} \cdot \mathrm{u}\right) + M'_{CA} = 0{,}6\varphi_B - 46{,}87$$

$$M_{CB} = k_B \cdot \left(3\varphi_B - 3\Psi_{AB} \cdot \mathrm{u}\right) + M'_{BC} = 0{,}75\varphi_B + 6{,}25$$

Jednadžba ravnoteže čvora:

$$\sum M_C = 0$$

$$M_{AC} + M_{CB} = 0$$

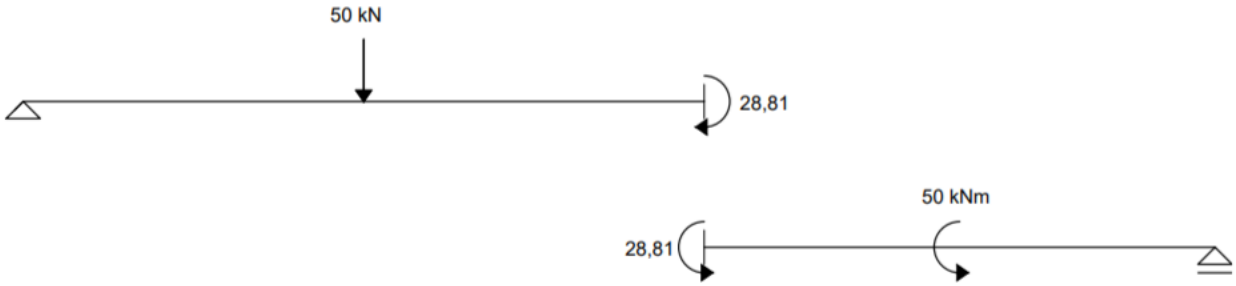
$$0{,}6\varphi_B - 46{,}87 + 0{,}75\varphi_B + 6{,}25 = 0$$

$$\varphi_B = 30{,}01$$

Momenti:

$$M_{AC} = 0{,}6 \cdot 30{,}01 - 46{,}87 = -28{,}81\ kNm$$

$$M_{CB} = 0{,}75 \cdot 30{,}01 + 6{,}25 = 28{,}81\ kNm$$



Slika 3.12. Momenti

Reakcije:

$$\sum M_C = 0$$

$$-V_A \cdot 5 + 50 \cdot 2{,}5 - 28{,}81 = 0$$

$$V_A = 19{,}25\ kN$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-V_B \cdot 4 + 50 + 28{,}81 = 0$$

$$V_B = \ 19{,}70\ kN$$

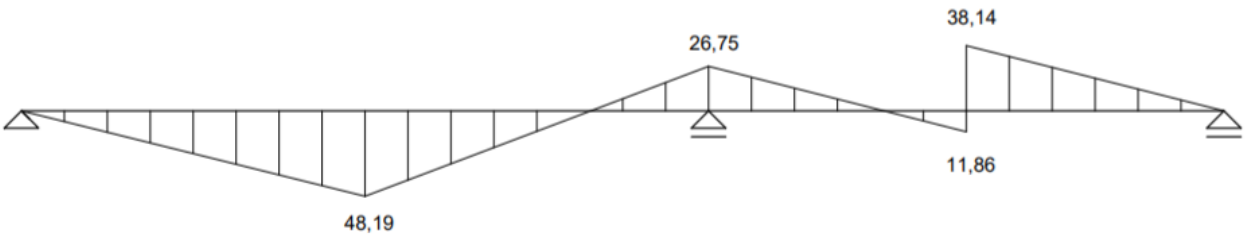
Konačni momentni dijagram:

$$M_1 = V_A \cdot 2{,}5 = 48{,}9\ kNm$$

$$M_C = -V_A \cdot 5 + 50 \cdot 2{,}5 = 26{,}75\ kNm$$

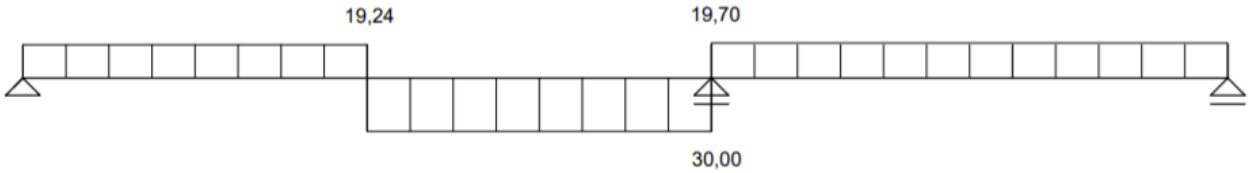
$$M_{CB}^{D} = V_B \cdot 2 = -38{,}14\ kNm$$

$$M_{CB}^{L} = -38{,}14 + 50 = 11{,}86\ kNm$$



Slika 3.13. Konačni momentni dijagram

Konačni dijagram poprečnih sila:



Slika 3.14. Konačni dijagram poprečnih sila

MOMENTI (kNm)	METODA SILA	METODA POMAKA
M_1	49,58	48,19
M_2	-25,83	-26,75
M_{CB}^D	12,10	11,16
M_{CB}^L	37,89	38,14

Slika 3.15. Usporedba rezultata momentnog dijagrama

POPREČNE SILE (kN)	METODA SILA	METODA POMAKA
V_A	19,83	19,24
V_C	-30,16	-30,00
V_B	18,95	19,70

Slika 3.16. Usporedba rezultata dijagrama poprečnih sila

Izračunom momentnih dijagrama, te dijagrama poprečnih sila ovog statički neodređenog sustava metodom sila i metodom pomaka, može se zaključiti da su dobiveni rezultati odgovarajući. Odstupanja u rješenjima postoje, ali su se dogodila zbog zaokruživanja brojeva nakon decimalne točke kroz proračun u svrhu lakšeg dobivanja konačnog rješenja. Odstupanja su manja od 5%, što je dopušteno odstupanje. Dakle, obje metode mogu se primijeniti pri izračunima reznih sila statički neodređenih sustava.

4. PRIMJENA METODA U RAČUNALNIM PROGRAMIMA

U prijašnje vrijeme, računalnim programima za rješavanje zadaća koristili su se inžinjeri koji su se bavili istraživanjima. S vremenom i razvojem tehnologije računalni program postali su sastavni dio rješavanja zadaća statike u svim područjima primjene. Naravno kontrola 'ručnim' proračunom uvijek je poželjna kao i praćenje rezultata i njihovog ponašanja u računalnim programima.
Razvojem matematičke fizike i teorije elastičnosti postavljene su diferencijalne jednadžbe za razne fizikalne procese. Kao dio toga, u teoriji konstrukcija pojavljuje se teorija elastičnosti i pripadni matematički modeli.
Metoda pomaka pogodnija je za računalne programe od metode sila. Osnovni kriterij po kojem se to može zaključiti je da se kod metode sila definiranje nepoznatih veličina radi na osnovi osnovnog sustava kojeg smo izabrali što kod metode pomaka nije slučaj. Naime, kada kod metode pomaka definiramo model statičkog sustava, njime definiramo i nepoznanice. Algoritme potrebne za provedbu metode u nekom programu znatno je jednostavnije postaviti po metodi pomaka.

ZAKLJUČAK

Detaljno prikazan opis rješavanja dovodi do zaključka da se metodom pomaka mogu rješavati statički određeni i statički neodređeni sustavi, dok se metodom sila rješavaju samo statički neodređeni sustavi. Koncept rješavanja potkrijepljen jednostavnim primjerom na statički neodređenom prikazuje kako se metode vrlo lako primjenjuju i 'ručnim' načinom rješavanja. Može se uočiti da metode daju jednake rezultate pri rješavanju takvih sustava. Ako odstupanja u rezultatima i postoje najčešće se događaju nakon decimalne točke pa se stoga mogu i zanemariti.

LITERATURA

[1] Silvija Lozančić – ''Utjecajne linije'', nastavni materijali, Sveučilište u Osijeku**,** Građevinski fakultet

[2] Andrej Sečkar - završni rad ''Metoda jedinične sile''

[3] Vlaho Akmadzic, Hrvoje Smoljanović, Ivan Balić – ''Građevna statika 2 - Metoda pomaka kroz primjere'', Sveučilište u Mostaru, Mostar 2018.

[4] Ahmet Hadrović – ''Statika konstrukcija 2'', Sveučilište u Sarajevu, Arhitektonski fakultet

[5] Tanja Kalman Šipoš – ''Metoda pomaka – postupak i objašnjenje'', nastavni materijali,Građevinski materijali 2, Sveučilište u Osijeku**,** Građevinski fakultet

[6] Vlaho Akmadzic, Boris Trogrlić, Kristina Prusac – ''Građevna statika 2 - Metoda sila kroz primjere'' Sveučilište u Mostaru, Mostar 2016.

[7] Silva Lozančić – ''Metoda sila'', nastavni materijali, Sveučilište u Osijeku**,** Građevinski fakultet