Semiparametarska procjena VaR-a

Novak, Tajana

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:494187

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science







SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU

ODJEL ZA MATEMATIKU

Tajana Novak

Semiparametarska procjena VaR-a

Diplomski rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU ODJEL ZA MATEMATIKU

Sveučilišni diplomski studij matematike

Smjer: Financijska matematika i statistika

Tajana Novak

Semiparametarska procjena VaR-a

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2017.

Sadržaj

1 Uvod **2**
1.1 Podaci . . . 3
1.2 Osnovni pojmovi . . . 4

2 Value at Risk **6**
2.1 Rizik na financijskom tržištu i mjerenje rizika . . . 6
2.2 Općenito o VaR-u . . . 8
2.3 Definicija VaR-a . . . 9
2.4 Prednosti i nedostaci VaR-a . . . 11

3 Semiparametarska procjena VaR-a **13**
3.1 Teorija ekstremnih vrijednosti . . . 13
3.1.1 Metoda maksimuma po segmentima . . . 15
Generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti . . . 16
3.1.2 Metoda vrijednosti iznad praga . . . 21
Generalizirana Pareto distribucija . . . 21
Hillova metoda za procjenu repnog indeksa . . . 26
Pickandov procjenitelj . . . 29
3.2 Procjena VaR-a . . . 30
3.2.1 Procjena VaR-a metodom maksimuma po segmentima . . . 32
Generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti . . . 32
3.2.2 Procjena VaR-a metodom prekoračenja preko praga . . . 34
Generalizirana Pareto distribucija . . . 34
Procjena VaR-a Hillovim i Pickandovim procjeniteljem . . . 36
3.3 Nedostaci EVT . . . 38

Sažetak **39**

Summary **39**

Literatura **40**

Životopis **42**

1 Uvod

U ovom diplomskom radu govoriti ćemo o mjerama rizika i metodama njihove procjene na financijskom tržištu, konkretno o semiparametarskoj procjeni *value at risk*-a. Budući da je jedna od ključnih funkcija svih financijskih institucija aktivno kontroliranje ili predviđanje financijskog rizika, mislim da je ova tema zanimljiva i korisna meni, ali također i mnogim drugima koje zanima ili se bave nekim poslom u financijskom sektoru.

Otkada se bave financijama, ljudi žele znati koliko riskiraju pojedinim akcijama, koliko mogu izgubiti u jednom danu ili u godini i koliki je rizik određenog gubitka. Ispočetka nije postojao neki pokazatelj rizika, način čuvanja novca u slučaju krize. Tek 90-ih godina prošlog stoljeća prvi se puta spominje indikator rizika *value at risk* (VaR). Dvadesetak godina kasnije, ekonomska kriza 2007. godine pokazala nam je da taj indikator ima neka ograničenja. Tada je Basel committee dao preporuku da se kao nova, informativnija mjera rizika, koristi *expected shortfall*.

Cilj ovoga rada je upoznati teorijske definicije i semiparametarske metode procjene *value at risk*-a (VaR-a).

1.1 Podaci

Procjenu rizika VaR mjerom radili smo na primjeru cijena dionica dioničkog društva INA-Industrija nafte d.d. Koristili smo zadnje dnevne vrijednosti cijena dionica za razdoblje od 30.04.2013. do 01.05.2017. sa ukupno 847 bilježenja, preuzete sa Zagrebačke burze d.d.[1]

INA je osnovana 1. siječnja 1964. spajanjem Naftaplina Zagreb, Rafinerije nafte Rijeka i Rafinerije nafte Sisak. Prvih dana djeluje pod nazivom Kombinat nafte i plina, a 31. prosinca iste godine dobiva današnje ime. INA d.d. je srednje velika europska naftna kompanija s vodećom ulogom u naftnom poslovanju u Hrvatskoj te značajnom ulogom u regiji. INA Grupu čini više društava u potpunom ili djelomičnom vlasništvu INA d.d. [2]

Podaci su pretvoreni u dnevne log-povrate. Za zabilježene cijene dionica S_t, dnevni log-povrati definirani su sa $r_t = \log(S_t) - \log(S_{t-1})$. Tablica 1.1 sadrži neke mjere deskriptivne statistike za promatrane log-povrate, koje možemo promatrati i na slici 1.1.

Minimum	Aritmetička sredina	Medijan	Maksimum	Standardna devijacija	Koeficijent asimetričnosti	Koeficijent spljoštenosti
-0.13070	-0.0004862	0.00000	0.13070	0.02107114	-0.247603	8.04373

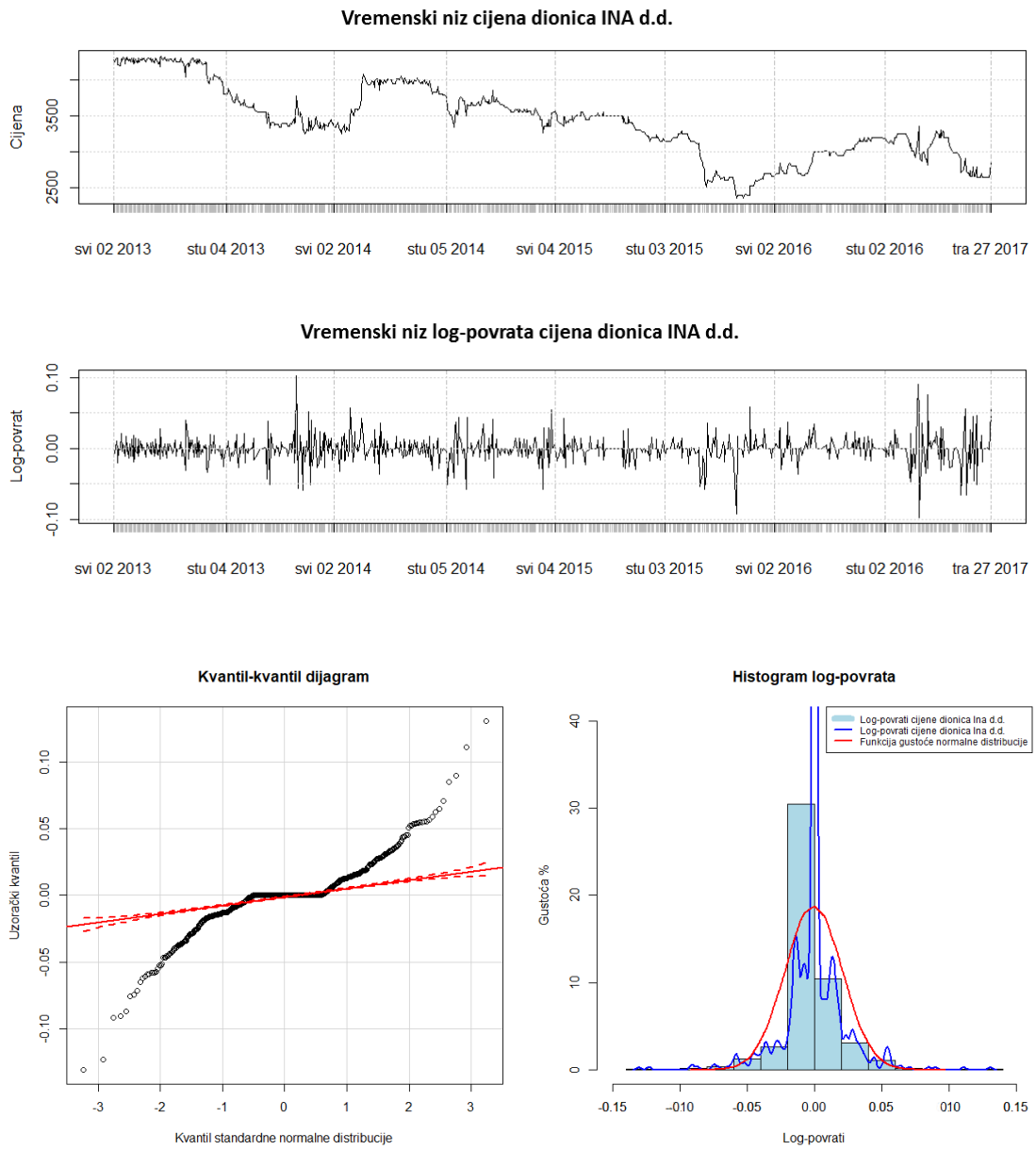
Tablica 1.1: Deskriptivna statistika log-povrata cijena dionica za Ina d.d.

Koeficijent spljoštenosti je velik i iznosi 8.04373 te ukazuje na teške repove funkcije gutoće log-povrata. Bolje rečeno, slutimo da vremenski niz log-povrata ima marginalnu distribuciju s teškim repovima. Središnji vrh je uži, no repovi su znatno duži i deblji. Ekstremni događaji kao što su velike promjene cijena imaju veću vjerojatnost da se dogode i često su mnogo veći nego u npr. slučaju kada log-povrate ima smisla modelirati normalnom distribucijom.

Na slici 1.1 prikazana su kretanja zadnjih dnevnih cijena dionica te vremenski niz log-povrata. Kvantil-kvantil dijagram i histogram raspodjele povrata podupiru slutnju o teškim repovima.

[1] http://www.zse.hr/

[2] Ina d.d. - Povijest kompanije, www.ina.hr/o-kompaniji/povijest/24



Slika 1.1: Vremenski niz, kvantil-kvantil dijagram i histogram log-povrata

1.2 Osnovni pojmovi

Kako bismo mogli pričati o procjeni mjere rizika, započeti ćemo ovim poglavljem kojim ćemo uvesti pojmove potrebne u nastavku priče.

Definicija 1. *Financijsko tržište je skup mjesta, instrumenata, osoba, tehnika i tokova koji omogućuju razmjenu novca, deviza i kapitala.*

Postoji mnogo vrsta financijskih tržišta: tržište dionica, tržište obveznica, tržište kredita itd. Na financijskom tržištu trguje se financijskim instrumentima. Financijski instrument je dokumentarni dokaz vlasništva nad nekom financijskom imovinom, primjerice dionica,

obveznica i slično, kojom se trguje na financijskom tržištu. Pomoću financijskih instrumenata moguće je modeliranje kretanja cijena i njihovih promjena na financijskom tržištu.

Financijski instrumenti dijele se na dvije kategorije, to su osnovni i izvedni financijski instrumenti. Osnovni financijski instrumenti podrazumijevaju nerizične (novac u domaćoj valuti) i rizične financijske instrumente. Rizični financijski instrumenti, zbog raznih nepredvidivih promjena i događaja na tržištu, nose sa sobom određeni rizik te je njihove buduće vrijednosti nemoguće točno odrediti, stoga njihove vrijednosti opisujemo nenegativnim slučajnim varijablama na odgovarajućem vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. U ovu kategoriju ubrajamo novac u stranoj valuti, državne i korporativne obveznice, dionice, i slično.

Izvedeni financijski instrumenti na odgovarajućem vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ služe za upravljanje rizikom, a vrijednost im se izvodi iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata.

Dionica je vlasnički vrijednosni papir koji predstavlja pravo vlasništva u određenom dioničkom društvu. Skup financijske imovine pojedinca ili nekog poduzeća zove se portfelj. Sastavljen je od različitih financijskih instrumenata, kako nerizičnih, tako i rizičnih.

Definicija 2. *Portfelj je vektor* $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$*, gdje* $\varphi_i \in \mathbb{R}$ *predstavlja broj jedinica i-te financijske imovine koju investitor posjeduje u trenutku* $t = 0$*.*

Short pozicija je usmjerena trgovačka ili investicijska strategija u kojoj investitor prodaje dionice posuđene na otvorenom tržištu dionica. Očekivanje investitora je da će se cijena dionica smanjiti tijekom vremena, kada će kupiti dionice na otvorenom tržištu po nižoj cijeni od posudbene i vratiti dionice brokeru od kojega ih je posudio. Long pozicija je kupnja vrijednosnice kao što su dionica, roba ili valuta s očekivanjima da će vrijednost imovine porasti.

U osnovi, kada se govori o dionicama, long pozicije su one koje kupuju i posjeduju, a short pozicije su one koje duguju. Investitor koji posjeduje 100 dionica u svom portfelju kaže se da je dug (long) za 100 dionica. Ovaj investitor je u cijelosti platio troškove posjedovanja dionica. S druge strane, investitor koji je prodao 100 dionica, a koji trenutno ne posjeduje te dionice, kaže se da je kratak (short) za 100 dionica.

Relativni povrat je promjena cijene financijske imovine u određenom vremenskom intervalu, često izražena kao postotak.

Definicija 3. *Jednostavni relativni povrat za financijski instrument s cijenom* S_t *u trenutku* t *je*

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1,$$

$t \in [0, T]$*. Vrijednost*

$$1 + R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

nazivamo bruto povrat. Osim relativnih povrata, često koristimo i log-poovrate. Log-povrat za financijski instrument u trenutku t definiran je kao logaritam bruto povrata,

$$r_t = log(1 + R_t).$$

Log-povrat cjelokupnog portfelja jednak je sumi log-povrata, stoga su u njihovoj statističkoj analizi primjenjive neke klasične statističke metode [15].

Distribucije s teškim repovima prirodno se pojavljuju u modeliranju rizika, financijama, osiguranju i mnogim prirodnim pojavama.

Definicija 4. *Za slučajnu varijablu X s funkcijom distribucije F kažemo da ima distribuciju s teškim repom ako je*

$$F(x) = 1 - L(x)x^{-\alpha},$$

gdje $\alpha > 0$ nazivamo repni indeks, dok je L funkcija takva da za svaki $x > 0$ vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Parametar α određuje težinu repa distribucije. Što je vrijednost α manja, ekstremne vrijednosti su vjerojatnije. Na ovaj način moguće je modelirati rizike ekstremnih događaja koji su često i najvažniji jer mogu izazvati velike gubitke. Za distribucije sa teškim repovima vrijedi sljedeća karakterizacija koju daje Danielsson [2], a koja će nam kasnije koristiti u izračunu.
F(x) ima teške repove ako su Pareto distribuirani kad $x \to \infty$, tj.

$$F(x) \approx 1 - Ax^{-\alpha}, \quad \text{kada } x \to \infty \text{ gdje je } A > 0,\ \alpha > 0 \text{ i } \forall x > A^{1/\alpha}. \tag{1.1}$$

2 Value at Risk

2.1 Rizik na financijskom tržištu i mjerenje rizika

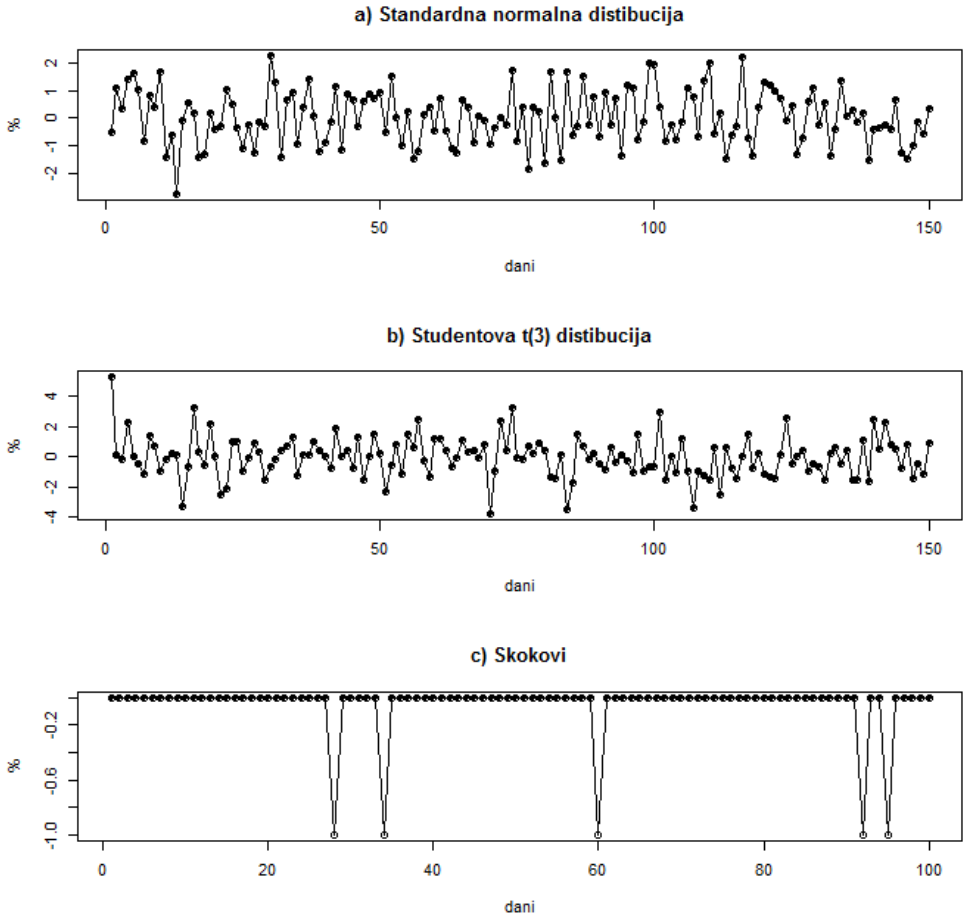
Financijski rizici se odnose na moguće gubitke na financijskim tržištima, zbog npr. promjene kamatnih stopa ili valutnih tečajeva. Mjerenje rizika značajno je napredovalo tijekom posljednjih tridesetak godina. Potraga za boljim i preciznijim načinima mjerenja rizika nije pri kraju. Svaka nova kriza ili propast pojedine financijske institucije otkriva ograničenja i pogreške najmodernijih načina upravljanja rizicima.

Rizik ne možemo direktno mjeriti jer je to latentna varijabla i treba ga procijeniti ili modelirati korištenjem cijena, povrata i njihovih numeričkih karakteristika. Ne postoji jedinstvena definicija što je i od čega se sastoji rizik.

Na vrlo općenitoj razini, Danielsson [2] kaže kako bi financijski rizik mogao biti definiran kao vjerojatnost gubitka dijela ili cijelog iznosa investicije. Kada govorimo o konceptu rizika u financijskim institucijama, potrebna je formalnija definicija jer je ovdje jedna od ključnih

funkcija aktivno kontroliranje financijskog rizika. Ovdje ćemo pretpostaviti da su funkcije distribucije povrata poznate kako bismo pojednostavili stvari i usredotočili se na koncepte financijskog rizika. Koristiti ćemo notaciju:

P	vjerojatnost
φ	portfelj
X i Y	dvije različite financijske imovine
V_φ	vrijednost portfelja



Slika 2.2: Simulirani povrati na tri različite financijske imovine

Promotrimo sliku 2.2 koja grafički prikazuje simulirane povrate na tri vrste financijske imovine, sve sa istom volatilnošću i aritmetičkom sredinom. Volatilnost je najjednostavnija mjera rizika i procjenjuje se standardnom devijacijom. Slika (a) prikazuje opservacije iz normalne distribucije, slika (b) opservacije iz Studentove t(3)-distribucije koja liči tipičnim financijskim povratima. Slika (c) pokazuje povrate koji su nula većinu vremena, ali povremeno imaju velike padove. S obzirom na volatilnost kao mjeru rizika, sve tri imovine jednako su rizične i poželjne jer su im uzoračke sredine i volatilnosti jednake. Međutim, sudionici

stvarnog tržišta vide razliku među njima i često su skloniji jednoj od ovih imovina. Zbog toga nam je važno pronaći neki objektivan način usporedbe rizika imovine s različitim distribucijama povrata.

Ne postoji jedinstven objektivan način da vidimo razliku u rizičnostima među imovinama na slici 2.2 (a) i (b). Zbog razlika u distribucijama usporedba je teško izvediva. U praksi, problem usporedbe rizika je još je i teži, jer su distribucije tržišnih cijena i povrata raznih imovina nepoznate.

U praksi je gotovo nemoguće točno utvrditi distribuciju financijskih povrata. Predviđanje financijskog rizika dodatno komplicira činjenica da se financijski rizik ne može izravno mjeriti, on je latentna varijabla i treba se zaključiti iz ponašanja promatranih tržišnih cijena i njihovih transformacija. Na primjer, na kraju dana trgovanja, povrati su poznati, no rizik nije pa ga modelirramo slučajnom varijablom čije vrijednosti ovise o intenzitetu fluktuacija cijena. Prema tome, mjerenje rizika zahtijeva statističko modeliranje, što neminovno podrazumijeva postavljanje nekih pretpostavki. Čak i ako bismo znali distribuciju povrata, sve dok je svaka imovina različito distribuirana, teško je usporediti rizik između imovina. Najčešći pristup problemu usporedbe rizika imovina koje imaju različite distribucije je taj da upotrijebimo mjeru rizika koja rizik imovine predstavlja brojem, koji je usporediv za različite imovine. Mjera rizika se odnosi na definiciju metode, a mjerenje rizika na konkretan broj koji dobijemo primjenom mjere rizika na podatke.

Svrha mjera rizika je da pomognu pri donošenju odluka. Ako dvije mjere rizika imaju istu vrijednost, u praksi se obično bira ona s kojom je lakše raditi. Ako, s druge strane, one različito rangiraju ulaganja, treba pažljivo razmisliti o tome koju ćemo koristiti [2].

2.2 Općenito o VaR-u

Početkom osamdesetih godina prošlog stoljeća, vodeće financijske institucije započele su razvoj internih modela za mjerenje tržišnih rizika. Najpoznatiji od tih sustava je RiskMetrics sustav koji je razvila investicijska banka J. P. Morgan. Dokument koji u potpunosti opisuje funkcioniranje ovog sustava javno je objavljen 1994. godine i zbog svoje široke rasprostranjenosti postao je industrijskim standardom.

VaR je mjera rizika definirana kao najveći gubitak koji se može ostvariti od određene investicije, u promatranom razdoblju, uz određenu vjerojatnost.

VaR metodologija koju primjenjuje RiskMetrics sustav temelji se na modernoj teoriji portfelja, koristeći procjene standardnih devijacija i koeficijente korelacija vrijednosnica kako bi se procijenio njihov rizik. Moderna teorija portfelja bazira se na dva principa: maksimizirati očekivane prinose te minimizirati rizik. Pretpostavlja da investitori "ne vole" rizik, odnosno ako mogu odabrati dvije investicije jednakog očekivanog prinosa, odabrat će onu manje rizičnu. Iako je teorija na kojoj se temelji RiskMetrics sustav prilično poznata u financijskim krugovima, osposobljavanje ovakvog sustava mjerenja rizika zahtjevalo je mnogo

napornog rada u smislu određivanja standarda i konvencija ulaznih podataka, sakupljanja baza podataka, usuglašavanja statističkih pretpostavki, procedura potrebnih za mjerenje volatilnosti i korelacija te rješavanje mnogih drugih tehničkih i teorijskih pitanja.

Paralelno s istraživanjima J. P. Morgana i druge institucije su razvijale svoje interne modele. Modeli koje su te tvrtke razvile međusobno se značajno razlikuju, iako se temelje na sličnim teorijskim pretpostavkama. Usporedno s ovim parametarskim pristupima procjeni VaR-a pojavili su se i modeli koji se ne temelje na modernoj teoriji portfelja, kao što je procjena VaR-a na temelju povijesnih podataka ili Monte Carlo simulacijama.

Do 1994. godine svi interni modeli bili su čuvani u strogoj tajnosti, kako konkurencija ne bi mogla koristiti rezultate istraživanja. J. P. Morgan se 1994. godine odlučio na drastičan potez i javno objavio način funkcioniranja svog sustava za mjerenje tržišnih rizika te je omogućio slobodan pristup putem interneta do svojih baza podataka i sustava. Nakon toga uslijedilo je naglo širenje VaR modela koje su osim investicijskih banaka, počele koristiti i komercijalne banke, mirovinski fondovi, osiguravajuća društva pa čak i nefinancijske organizacije.

Ova mjera bila je dio prijedloga drugog Baselskog odbora (Basel II Committee) 2004. godine kao samo jedna od mnogih preporuka, ali je postala jedna od najkorištenijih u grani financija.

2.3 Definicija VaR-a

Value at risk (VaR) ili vrijednost pod rizikom je minimalni gubitak koji se realizira s vjerojatnošću p tokom određenog vremenskog perioda.

Pretpostavimo da nas u trenutku t zanima rizičnost portfelja φ za sljedećih l vremenskih perioda. $\Delta V_\varphi(l)$ je slučajna varijabla koja označava promjenu vrijednosti portfelja čija nas rizičnost zanima u vremenskom periodu $(t, t+l]$, a F_l je njezina funkcija distribucije. Za nositelje long pozicije od interesa nam je lijevi rep funkcije gustoće log-povrata pa je VaR definiran na sljedeći način.

Definicija 5. *VaR u vremenskom intervalu $(t, t+l]$ s vjerojatnošću $p \in (0,1)$ definiramo kao vrijednost za koju vrijedi*

$$p = P(\Delta V_\varphi(l) \leq VaR(p)) = F_l(VaR(p)).$$

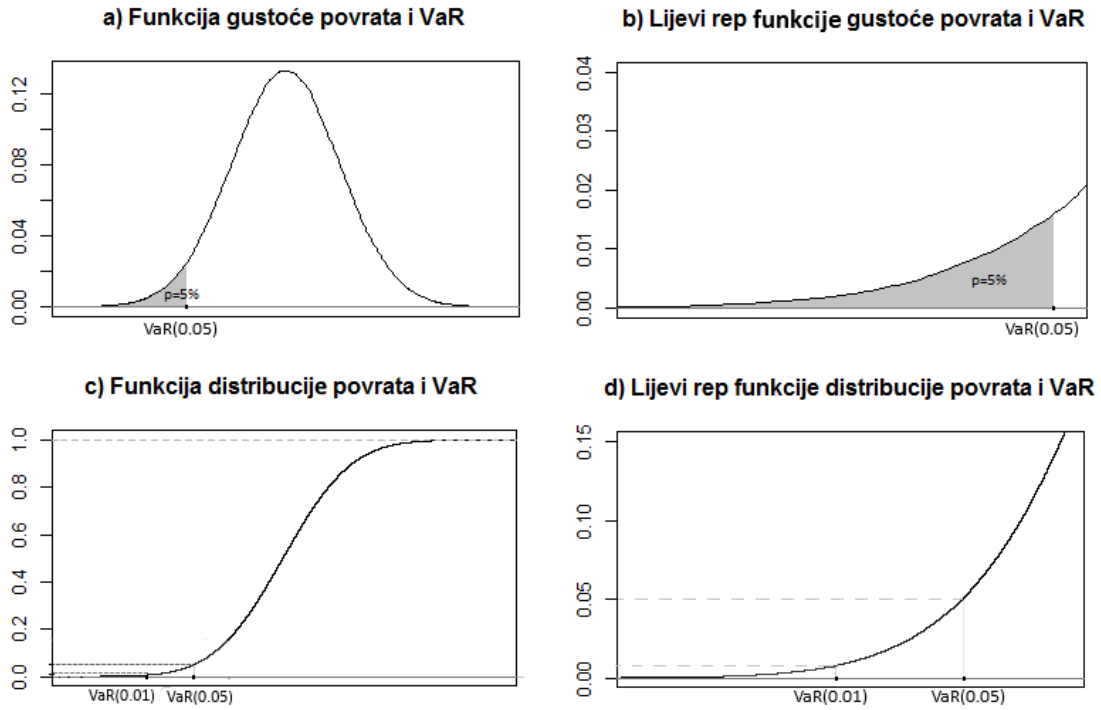
Iz definicije vidimo da VaR ovisi o p. Pri posjedovanju portfelja φ investitor u long poziciji trpi gubitak kada je $\Delta V_\varphi(l) < 0$ pa $VaR(p)$ poprima negativnu vrijednost za male vrijednosti p. Pretpostavimo da je F_l funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable $\Delta V_\varphi(l)$. Tada je $VaR(p)$ p-kvantil funkcije distribucije F_l. U praksi, za p najčešće uzimamo 0.05 ili 0.01.

Za nositelje short pozicije, koji su na gubitku kada $\Delta V_\varphi(l) > 0$, od interesa je desni rep distribucije log-povrata pa se VaR definira na sljedeći način.

Definicija 6. *VaR u vremenskom intervalu* $(t, t+l]$ *s vjerojatnošću* $p \in (0,1)$ *definiramo kao vrijednost za koju vrijedi*

$$p = P(\Delta V_\varphi(l) \geq VaR(p)) = 1 - P(\Delta V_\varphi(l) < VaR(p)) = 1 - F_l(VaR(p)).$$

Za malu vrijednost p, VaR za short poziciju uobičajeno poprima pozitivnu vrijednost. Uočimo da je VaR za short poziciju, kojeg promatramo na desnom repu distribucije, zapravo $(1-p)$-kvantil distribucije log-povrata.
Za short poziciju koja se fokusira na desni rep distribucije, možemo primjeniti definiciju 5., koja se temelji na lijevom repu distribucije jednostavno promatrajući negativnu promjenu vrijednosti imovine, $-\Delta V_\varphi(l)$. Stoga je dovoljno koristiti definiciju 5. (pogledati [15]).



Slika 2.3: Primjer funkcije gustoće i distribucije log-povrata i VaR

F_l je najčešće nepoznata pa se procjena VaR-a svodi na procjenu funkcije distibucije F_l i njenih kvantila. Tako dobivena procjena VaR-a se najčešće izražava u postocima, a izražava se često i u novčanim jedinicama. Za usporedivost rizičnosti dvaju i više financijskih imovina ili portfelja, VaR se treba temeljiti na istom vremenskom intervalu i na istoj vjerojatnosti p.

Neparametarska procjena VaR-a

U neparametarskoj procjeni nam distribucija log-povrata nije unaprijed pretpostavljena niti sugerirana. $VaR(p)$ procjenjujemo kao p-ti kvantil empirijske funkcije distribucije log-povrata.

Primjer 1. *Pretpostavimo da posjedujemo INA-ine dionice u vrijednosti 10000kn. Zanima nas jednodnevni VaR za* $p = 0.05$*, tj. koja je najveća vrijednost pada cijena uz vjerojatnost 5%.*
$VaR(0.05)$ *procjenjujemo kao 0.05-kvantil empirijske funkcije distribucije log-povrata. Dnevni log-povrat manji od -0.03573933 realizira se s vjerojatnošću 0.05. Neparametarska procjena VaR-a nam daje informaciju da, uz vjerojatnost od 5%, cijena dionice u jednom danu neće pasti za više od 7.89977% tj. za ukupnu vrijednost dionica 10000kn,* $VaR(0.05)$ *iznosi -789.97 kn.*

Parametarska procjena VaR-a

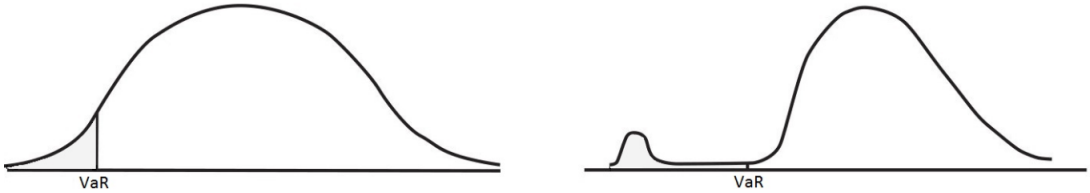
U ovakvoj procjeni VaR-a se pretpostavlja parametarska familija distribucija kojoj pripada distribucija log-povrata. Najčešće se pretpostavlja da su log-povrati normalno distriburani. Iz log-povrata se npr. metodom momenata procijene očekivanje μ i varijanca σ^2 te se $VaR(p)$ procjenjuje kao broj za koji vrijedi $p = P(\mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) \leq VaR(p))$.

Primjer 2. *Pretpostavimo da posjedujemo INA-ine dionice u vrijednosti 10000kn. Zanima nas jednodnevni VaR za* $p = 0.05$*.* $VaR(0.05)$ *procjenjujemo kao 0.05-kvantil normalne distribucije za čije parametre uzimamo uzoračko očekivanje i varijancu log-povrata. Dnevni log-povrat manji od -0.03514511 realizira se s vjerojatnošću 0.05. Dakle, uz vjerojatnost 5%, procjenjujemo da cijena jedne dionice u jednom danu neće pasti za više od 7.7736% tj. za ukupnu vrijednost dionica 10000kn,* $VaR(0.05)$ *procjenjujemo sa -777.36 kn.*

2.4 Prednosti i nedostaci VaR-a

VaR je kao mjera financijskog rizika privlačna i rasprostranjena zahvaljujući tome što nudi jednostavnu mjeru rizika za različite pozicije i faktore rizika. Na ovaj način omogućuje se usporedba rizika vezanih uz investiranje u npr. obveznice i dionice. VaR predstavlja mjeru rizika koja omogućuje usporedbu instrumenata koji do primjene VaR-a nisu bili usporedivi, što vodi cjelokupnom boljem i sigurnijem poslovanju.

Tri su glavna problema koja se pojavljuju kod primjene VaR-a. Prvi problem je taj da je VaR zapravo samo kvantil distribucije povrata. VaR je minimalni gubitak koji portfelj može pretrpjeti uz određenu vjerojatnost. Slobodnijim riječima, VaR daje "najbolje u najgorem scenariju" i kao takav, VaR nerijetko podcjenjuje potencijalne gubitke uz zadanu vjerojatnost. Na primjer, dnevni VaR uz vjerojatnost 5% nam govori da će se u približno 95 od 100 dana realizirati pad cijene promatrane imovine manji od $VaR(0.05)$, a u 5 od 100 dana pad će premašiti $VaR(0.05)$. VaR je samo kvantil distribucije log-povrata pa oblik repa poslije VaR-a nema utjecaj na stvarni iznos VaR-a. Na slici 2.4 vidimo dva slučaja gdje je VaR jednak, ali repno ponašanje distribucije vezane uz drugu imovinu sugerira njezinu veću rizičnost.



Slika 2.4: Utjecaj repne distribucije na $VaR(p)$

Drugi problem je koherentnost VaR-a. Prvo definiramo svojstvo koherentnosti mjere rizika.

Definicija 7. *Promatramo dvije realne slučajne varijable X i Y. Realnu funkciju ϕ za koju su dobro definirane kompozicije $\phi(cX)$, $\phi(Y)$, $\phi(X+Y)$, $\phi(X+c)$ za $c>0$, zovemo koherentna mjera rizika ako za X, Y i konstantu c zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

monotonost	$X \leq Y \;\Rightarrow\; \phi(X) \leq \phi(Y)$
subaditivnost	$\phi(X+Y) \leq \phi(X) + \phi(Y)$
pozitivna homogenost	$c>0 \;\Rightarrow\; \phi(cX) = c\phi(X)$
invarijantnost na translacije	$c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \phi(X+c) = \phi(X) - c.$

Od četiri zahtjeva, subaditivnost je u slučaju VaR-a diskutabilna. Ako vrijedi, mjera rizičnosti cijelog portfelja manja je ili jednaka od zbroja istih mjera rizika pojedinih imovina iz portfelja. Za mjere rizika za koje ne vrijedi ovaj zahtjev, može se pogrešno doći do zaključka da povećanja portfelja rezultiraju u povećanju rizika. VaR nije koherentna mjera rizika jer ne zadovoljava uvijek zahtjev subaditivnosti, ali je subaditivan u slučaju normalne distribuiraniosti log-povrata. Jednostavan primjer kako VaR ne zadovoljava subaditivnost daje nam Danıellson: *Financial risk forecasting* [2].

Primjer 3. *Subaditivnost*
Razmotrimo dvije imovine X i Y koje su jednako distribuirane

$$X, Y = \begin{cases} 0 & s\ vjerojatnošću \quad 0.951 \\ -100 & s\ vjerojatnošću \quad 0.049 \end{cases}.$$

U ovom slučaju uz vjerojatnost $p = 0.05$ VaR(X) i VaR(Y) iznose 0, a uz vjerojatnost $p = 0.01$ VaR(X)i VaR(Y) iznose -100. Formuliramo jednoliko ponderirani portfelj imovina X i Y.

$$X+Y = \begin{cases} 0 & s\ vjerojatnošću \quad 0.904401 \\ -100 & s\ vjerojatnošću \quad 0.093198 \\ -200 & s\ vjerojatnošću \quad 0.002401 \end{cases}$$

Za portfelj te dvije imovine u ovom primjeru VaR(X + Y) uz vjerojatnost $p = 0.01$ iznosi -100. Budući da je

$$VaR(X+Y) = -100 \quad > \quad VaR(X) + VaR(Y) = -200,$$

VaR u ovom primjeru nije subaditivna mjera rizika.

Treći problem je taj što je VaR-om lako manipulirati. Jednostavan način da se smanji VaR je smanjiti udjele u rizične imovine. Jednako dobro se može spustiti pomoću jednostavne strategije trgovanja koja uključuje opcije. U tom slučaju, VaR se može spustiti na štetu ukupne profitabilnosti. Dakle, smanjenje vrijednosti rizika implicirano nižim VaR-om je ipak samo prividno. [2]

3 Semiparametarska procjena VaR-a

U skorije vrijeme predložene su alternativne metode za procjenu VaR-a, kao što je semiparametarska procjena koja se temelji na primjeni teorije ekstremnih vrijednosti (*extreme values theory*, EVT).

U ovom poglavlju raspravljamo o pristupu procjeni VaR-a pomoću teorije ekstremnih vrijednosti. Raspravu dijelimo u dva dijela. Prvi dio se bavi procjenom parametra primjenom teorije ekstremnih vrijednosti. Drugi dio fokusira se na izračun VaR-a pomoću procjene parametara distribucije kojom smo modelirali repove distribucije povrata.

3.1 Teorija ekstremnih vrijednosti

Često kada gledamo neke podatke, događa se da nam nisu svi podaci jednako važni ili korisni, nego nas zanimaju samo neki vrlo malo vjerojatni slučajevi i ekstremni ishodi. Postoje okolnosti u kojima nam je bitnije kako se ponašaju ekstremnije kategorije, kao na primjer za upravljanje rizikom mirovinskih fondova. Može nas interesirati $VaR(0.01)$, vjerojatnost pada cijena za 25% na tržištu dionica ili drugi važni, ali rijetki događaji.

Ekstremni ishodi su vezani uz rep funkcije gustoće log-povrata. Kod financijskih podataka, log-povrati vrlo često pokazuju da ih ima smisla modelirati distribucijama s teškim repovima. Baš kod slučajeva gdje funkcija gustoće ima teške repove koristimo teoriju ekstremnih vrijednosti (EVT).

Mnogi statistički modeli temelje se na modeliranju cijele distribucije povrata, gdje opažanja bliže centru distribucije dominiraju. Prema tome, možemo dobiti dobru procjenu vjerojatnosti događaja oko centra distribucije, no lošu procjenu vjerojatnosti nekih ekstremnih događaja. Međutim, mnoge potrebe u financijama ovise o manje vjerojatnim, ekstremnijim ishodima.

EVT se, s druge strane, izričito fokusira na repnu funkciju distribucije pa prema tome i na vjerojatnost ekstremnih događaja. Privlačan aspekt EVT pristupa je to da ne zahtijeva prethodnu pretpostavku o distribuciji povrata. EVT se i ranije pokazivala uspješnom u područjima kao što je inženjerstvo, gdje je korištena pri dizajniranju zidova i nasipa za obranu od poplava.

Zapis koji ćemo koristiti u ovom poglavlju je:

α	Repni index
$\xi = 1/\alpha$	Parametar oblika
u	Vrijednost praga prekoračenja
k	broj podataka iza praga

EVT je obično opisana u terminima desnog repa funkcije gustoće log-povrata (pozitivnih opažanja) i ovdje ćemo pratiti tu konvenciju. Naravno, u većini analiza rizika nas više brine lijevi rep (negativna opažanja). Budući da vrijedi $\min\{X_1, ..., X_n\} \stackrel{d}{=} -\max\{-X_1, ..., -X_n\}$ (vidi [9]), možemo se uvijek baviti maksimumom, imajući na umu da se metode jednostavno mogu primjeniti za minimum.

Budući da se EVT fokusira na desni rep funkcije gustoće log-povrata, ukoliko želimo procijeniti parametre teorijske repne distribucije za ekstreme među minimumima (vezane uz lijevi rep funkcije gustoće log-povrata) transformiramo vremenski niz log-povrata tako da pomnožimo cijeli niz sa -1. Na taj način minimume promatramo u terminima maksimuma i procjenjujemo parametre repne distribucije, ali uz napomenu da se radi o maksimumima transformiranih log-povrata i da se takva procjena teorijske repne distribucije odnosi na lijevi rep funkcije gustoće log-povrata, tj. minimume. Kada budemo procjenjivali VaR za takve transformirane log-povrate, moramo imati na umu da je to zapravo VaR za long poziciju te ga ponovo množimo sa -1. Ovakav princip procjene VaR-a za lijevi rep funkcije gostoće log-povrata može se vidjeti u literturi [15] i [8].

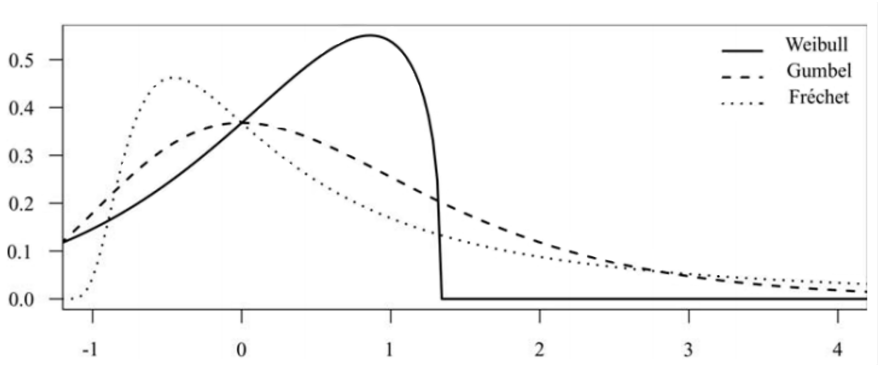
Minimum je vrlo bitan za izračun VaR-a za nositelja long pozicije (onaj koji posjeduje i prodaje financijsku imovinu), dok je maksimalni povrat relevantan za nositelja short financijske pozicije (onaj koji ne posjeduje i kupuje financijsku imovinu).

Teško je odrediti parametarsku distribuciju kojom bi modelirali log-povrate neke vrijednosnice ili portfelja. Međutim, ne trebamo se usredotočiti na cijelu distribuciju log-povrata jer su nam najbitniji rizici od velikih gubitaka, koji obično pripadaju repovima. U tom slučaju, glavni rezultat EVT navodi da, bez obzira na cjelokupni oblik distribucije, repovi pripadaju jednoj od tri klase distribucija. Slikom 3.5 su prikazane te tri klase distribucija.

Ključni parametar pri modeliranju i analizi pomoću EVT je repni indeks obilježen sa α, ili njemu recipročan parametar oblika ξ. Vrijedi pravilo da što je manji repni indeks, deblji su repovi. Za Studentovu t-distribuciju, repni indeks odgovara broju stupnjeva slobode. Za veliki broj stupnjeva slobode Studentovu distribuciju možemo dobro aproksimirati normalnom distribucijom.

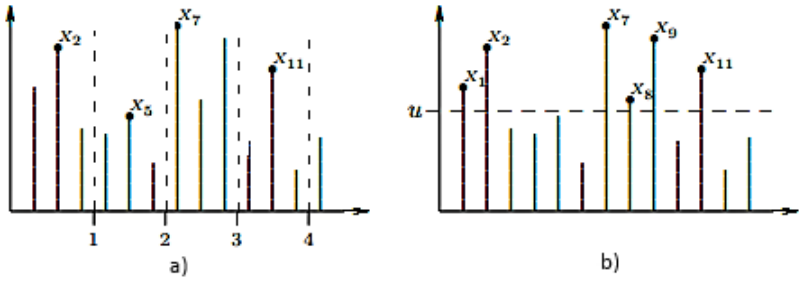
Teorija ekstremnih vrijednosti razvila se paralelno sa centralnom graničnom teorijom i između te dvije teorije postoje određene sličnosti. Prema centralnoj graničnom teoremu normalna distribucija predstavlja graničnu distribuciju standardiziranih uzoračkih prosjeka. Slična je ideja i kada govorimo o uzoračkim ekstremima.

Unutar konteksta teorije ekstemnih vrijednosti, postoje dvije osnovne metode za procjenu



Slika 3.5: Tri granične distribucije ekstrema

repnog indeksa i procjenu VaR-a. Prva se zove metoda maksimuma po segmentima (block maxima models, BMM). Ovaj tradicionalni pristup temelji se na generaliziranoj distribuciji ekstremnih vrijednosti (generalized extreme values distribution, GEV), a u obzir se uzima samo maksimum svakog segmenata u koje smo podijelili podatke. Druga je metoda vrijednosti iznad praga (peaks over treashold, POT), koja promatra samo podatke koji prelaze dani visoki prag. Ova metoda se smatra boljom, budući da bolje odabire ekstremne podatke. Metoda vrijednosti iznad praga ima nekoliko pristupa procjeni repnog indeksa tj. parametra oblika. Može se temeljiti na generaliziranoj Pareto distribuciji (generalized Pareto distribution, GPD), Hillovom ili Pickandovom procjenitelju repnog indeksa [8].



Slika 3.6: Odabir ekstrema za metodu maksimuma po segmentima (a) i metodu vrijednosti iznad praga (b)

3.1.1 Metoda maksimuma po segmentima

Neka su $(X_1, X_2, X_3...)$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable. Neka je F je funkcija distribucije slučajne varijable X_i i neka je x^* krajnja desna točka te funkcije distribucije, tj.

$$x^* = \sup\{x : F(x) < 1\}, \qquad x^* \leq \infty.$$

Tada

$$\max\{X_1, ..., X_n\} \xrightarrow{P} x^*, \quad n \to \infty,$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} P(|\max\{X_1, ..., X_n\} - x^*| \geq \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

jer

$$= P(\max\{X_1, ..., X_n\} \leq x) = P(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) = F^n(x),$$

što konvergira u 0 ako je $x < x^*$, a u 1 ako je $x \geq x^*$, kad $n \to \infty$. $F^n(x)$ je funkcija distribucije slučajnog vektora $(X_1, ..., X_n)$.

Kod ove metode n podataka podijelimo u jednake kategorije, pri čemu su kategorije segmenti jednake duljine. Točnije podjelimo podatke u k segmenata duljine T. Uzimamo u obzir samo najveći podatak iz svakog segmenta. Neka je $M_j = \max\{X_{j+1}, ..., X_{j+T}\}$, $j = \{1, \cdots, k\}$, maksimum j-tog segmenta. Duljine segmenata obično se biraju tako da odgovaraju nekom vremenskom periodu npr. mjesecu ili godini.

Generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti

Glavni rezultat za M_j, $j = \{1, \cdots, k\}$ dali su Fisher i Tippett (1928.). Taj rezultat kaže da maksimumi jednostavnog slučajnog uzorka iz pravilno normalizirane distribucije konvergiraju po distribuciji prema jednoj od tri moguće distribucije: Gumbelovoj, Fréchetovoj ili Weibullovoj. Drugim riječima odredili su oblik granične distribucije za normalizirane maksimume. Normalizacija je potrebna da bismo dobili nedegeneriranu funkciju distribucije kao limes.

Teorem 1 (Fisher i Tippet(1928.), Gnedenko(1943.))**.** *Neka je* $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih i jednako distrbuiranih slučajnih varijabli. Ako postoje konstante* $b_n > 0$ *,* $a_n \in \mathbb{R}$ *i neka nedegenerirana funkcija distribucije* H *takva da je*

$$\frac{M_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} H, \quad n \to \infty$$

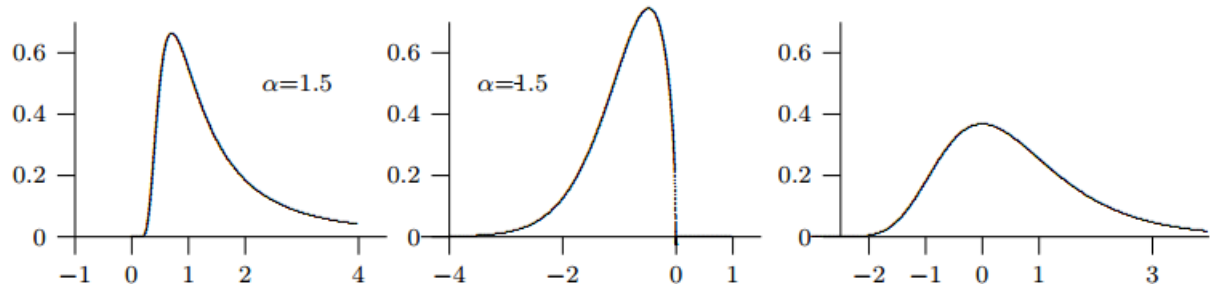
onda H *pripada jednoj od tri standardne distribucije ekstremih vrijednosti sa pripadnim funkcijama distribucije:*

$$\textit{Fréchet} \qquad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0$$

$$\textit{Weibull} \qquad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} exp(-(-x)^{\alpha}), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0$$

$$\textit{Gumbel} \qquad \Lambda(x) = exp(-exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Izgled grafa funkcije gustoće za Fréchetovu, Weibullovu i Gumbleovu distribuciju možemo promotriti na slici 3.1.1.



Slika 3.7: Primjeri grafova f-ja gustoće za Fréchetovu, Weibullovu i Gumbleovu distribuciju

Jenkinson i von Mises su predložili jednoparametarsku reprezentaciju za te tri distribucije (vidi [2], (9.2))

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\}, & \xi \neq 0 \\ \exp\Big(-\exp(-x)\Big), & \xi = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ova generalizacija je poznata kao generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti (GEV), a dobijemo ju ako postavimo $\xi = 1/\alpha$ za Fréchetovu distribuciju, $\xi = -1/\alpha$ za Weibullovu distibuciju te $\xi = 0$ za Gumbelovu distribuciju. ξ je važan parametar koji određuje oblik GEV distribucije.

Definicija 8. *Domena atrakcije ili domena privlačnosti ($\mathcal{D}$) za bilo koju distribuciju G je skup svih distribucija koje imaju G za graničnu distribuciju normaliziranog maksimuma $\frac{M_n - a_n}{b_n}$, gdje su (a_n) i (b_n) nizovi standardizirajućih konstanti, kada $n \to \infty$.*

Distribucije koje pripadaju domeni privlačnosti GEV, $\mathcal{D}(H_\xi)$ za $\xi > 0$, jesu distribucije s teškim repovima, a primjeri su Studentova t-distribucija i Pareto distribucija. Normalna i log-normalna distribucija primjeri su distribucija koje pripadaju $\mathcal{D}(H_0)$, a distribucije sa ograničenim nosačem, kao što su uniformna i beta distribucija, pripadaju $\mathcal{D}(H_\xi)$ za $\xi < 0$ (za više pogledati [8] i [15]).

S obzirom da u praksi ne znamo pravu distribuciju log-povrata i kao rezultat toga nemamo nikakvu ideju o nizovima normirajućih konstanti a_n i b_n, koristimo troparametarsku specifikaciju za nenormalizirane maksimume zadanu kako slijedi:

$$H_{\xi,\sigma,\mu}(x) = H_\xi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \quad x \in \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} = \begin{cases} (-\infty, \mu - \frac{\sigma}{\xi}], & \xi < 0 \\ (-\infty, \infty), & \xi = 0 \\ [-\mu - \frac{\sigma}{\xi}, \infty), & \xi > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dva dodatna parametra μ i σ su parametri koji predstavljaju nepoznate normalizirajuće konstante.

Neka je $\theta = (\xi, \mu, \sigma)$ iz parametarskog prostora $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ i $h(\cdot;\theta)$ funkcija gustoće od $H(\cdot;\theta)$. Za procjenu θ koristimo metodu maksimalne vjerodostojnosti kako je opisano u [11].

Procjena za θ, temeljena na maksimumima $\{M_1, \ldots, M_k\}$ dana je sa

$$\hat{\theta}_k = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta), \quad \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

gdje je

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{k} h(X_i; \theta) \mathbb{I}_{\{(1+\xi(X_i-\mu)/\sigma)>0\}},$$

$$h(x;\theta) = \frac{1}{\sigma} H(x;\theta)(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}} \ .$$

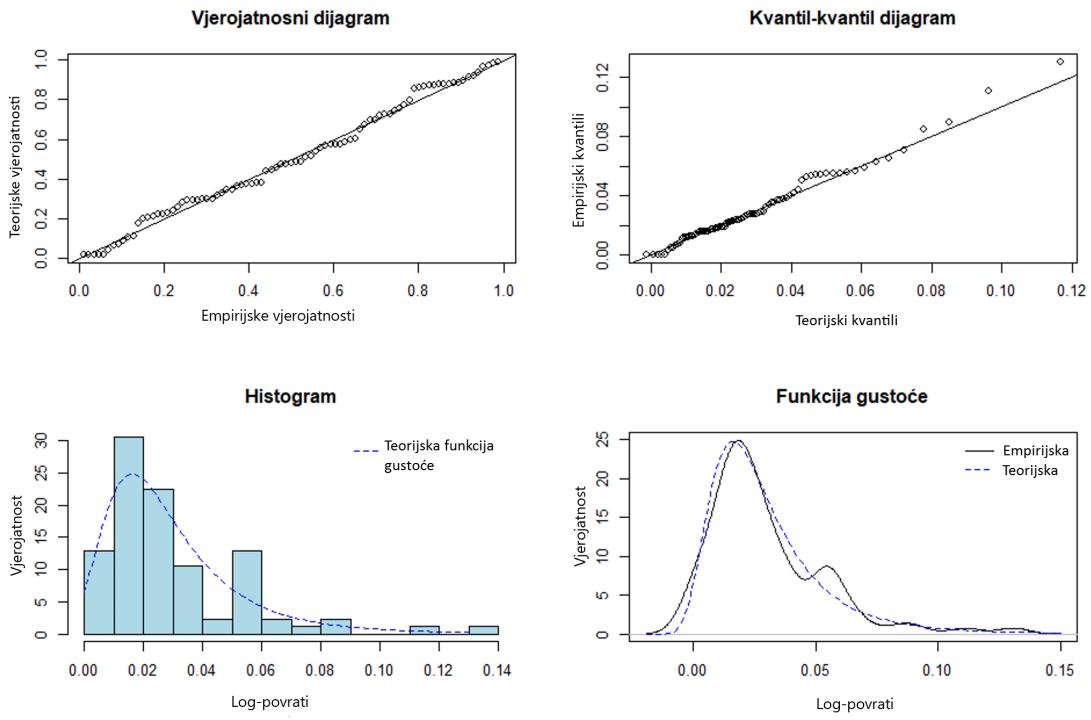
Dostupnost numeričkih optimizacijskih metoda čini daljnji postupak jednostavnim. Sljedeći rezultat jamči nam da u većini slučajeva ovaj procjenitelj ima dobra svojstva (za dokaz vidjeti *R. L. Smith, Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases*).

Propozicija 1. *Ako je $\xi > -1/2$ onda je $\hat{\theta}_k$ konzistentan, asimptotski normalan i asimptotski efikasan procjenitelj za θ.*

Primjer 4. *Da bismo pokazali prikladnost teorijske distribucije GEV metodom maksimuma po segmentima za modeliranje ekstremnih vrijednosti promatramo log-povrate cijena dionica INA d.d. u razdoblju od 30.04.2013. do 01.05.2017. uz* $T = 20$. *Za procjenu parametara i izradu grafičkih prikaza koristiti ćemo programski jezik* R *i dodatne pakete fExtremes, evd, podatke usklađujemo teorijskom distribucijom pomoću funkcije BlockMaxima. Tablica 3.2 sadrži procjene parametara lokacije, skaliranja i oblika GEV distribucije metodom maksimalne vjerodostojnosti za model koji gradimo te standardne greške.*

	μ	σ	ξ
Procjena parametara	0.02865754	0.01834714	0.08567153
Standardna greška	0.003131249	0.002301002	0.111128617

Tablica 3.2: Procjena parametara i standardne greške za GEV distribuciju temeljeno na maksimumima log-povratima

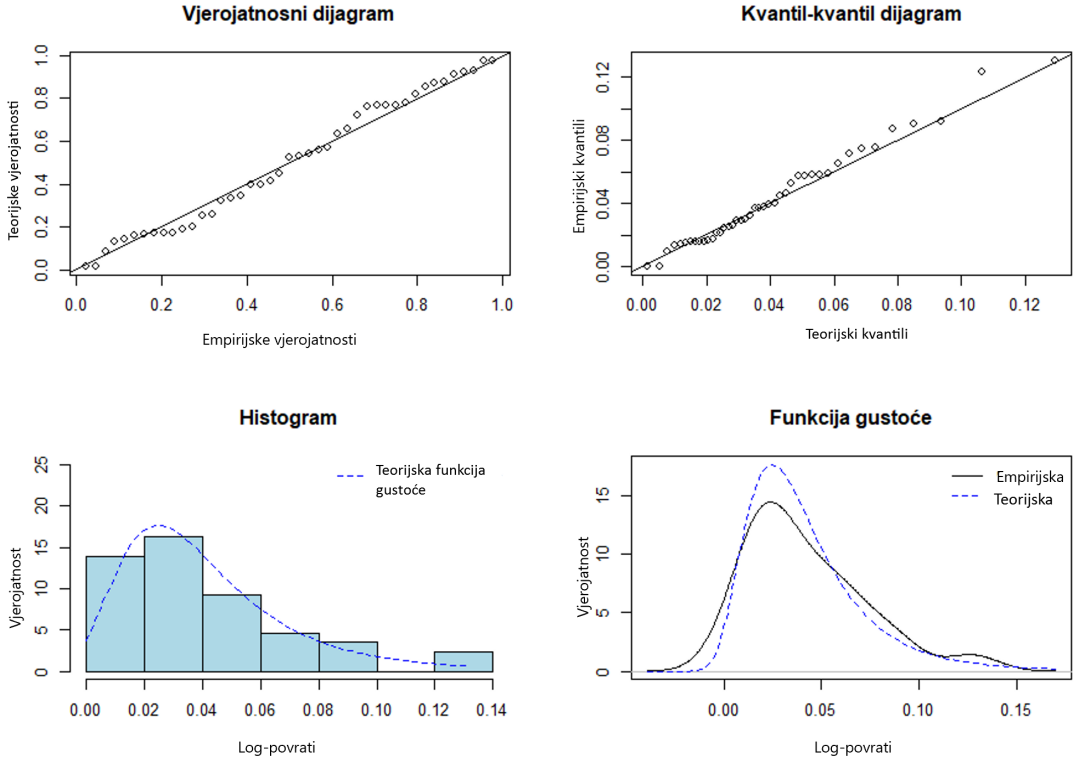


Slika 3.8: Dijagnostički dijagrami za GEV teorijsku distribuciju metodom maksimuma po segmentima temeljeno na maksimumima log-povratima

Slika 3.8 prikazuje standardne dijagnostičke dijagrame. Empirijska distribucija približno prati teorijsku, stoga usklađujemo podatke sa teorijskom distribucijom GEV. Tablica 3.3 sadrži procjene parametara lokacije, skaliranja i oblika teorijske distribucije koju gradimo te standardne greške za ekstreme među negativnim log-povratima.

	μ	σ	ξ
Procjena parametara	0.02729346	0.02096833	0.12970561
Standardna greška	0.003708509	0.002843423	0.140685421

Tablica 3.3: Procjena parametara i standardne greške za GEV distribuciju temeljeno na minimumima log-povrata



Slika 3.9: Dijagnostički dijagrami za metodu maksimuma po segmentima za minimume

Slika 3.9 prikazuje standardne dijagnostičke dijagrame za minimume log-povrata. Dakle, mjesečne maksimume možemo modelirati distribucijom koja ima funkciju gustoće $H_{\xi,\sigma,\mu}(x) = exp\Big[-\Big(1+\frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\Big)^{-1/\xi}\Big]^{-\frac{1}{\xi}}$, *gdje su* $\xi = 0.08567153$, $\sigma = 0.01834714$ *i* $\mu = 0.02865754$. *Mjesečne minimume možemo modelirati istom distribucijom, imajući na umu da se pozitivne vrijednosti odnose na veličinu gubitaka, uz parametre* $\xi = 0.12970561$, $\sigma = 0.02096833$ *i* $\mu = 0.02729346$.

3.1.2 Metoda vrijednosti iznad praga

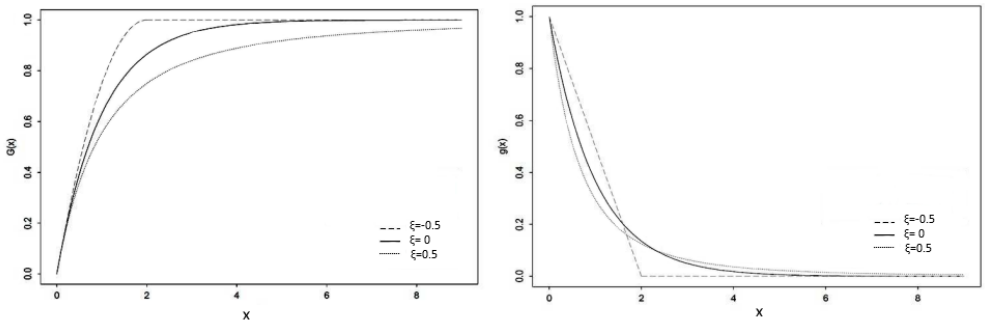
Generalizirana Pareto distribucija

Ova distribucija ima važnu ulogu u modeliranju repova distribucija u teoriji ekstremnih vrijednosti.

Generalizirana Pareto distribucija (GPD) ima sljedeću funkciju distribucije (vidi [2], (9.6)):

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{x}{\beta}\right), & \xi = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

gdje je $\beta > 0$ parametar skaliranja. Nosač funkcije gustoće je $x \geq 0$ kada je $\xi \geq 0$ te $x \in [0, -(\beta/\xi)]$ kada je $\xi < 0$.



Slika 3.10: Funkcija distribucije i funkcija gustoće generalizirane Pareto distribucije

Parametar ξ je parametar oblika i određuje tip distribucije:

- ako je $\xi < 0$ radi se o ograničenj distribuciji na intervalu $[0, -\beta/\xi]$
- za $\xi = 0$ to je eksponencijalna distribucija
- za $\xi > 0$ radi se o Pareto distribuciji sa parametrom $\alpha = 1/\xi$.

GPD se može koristiti za modeliranje repova distribucija, tj. za podatke koji prelaze određeni prag. Generalizirana funkcija ekstremnih vrijednosti (GEV) je granična distribucija normaliziranih maksimuma, dok je GPD granična distribucija normaliziranih podataka iznad nekog visokog praga (vidi [2], str. 172).

Označimo sa X slučajnu varijablu koja opisuje log-povrate te odaberemo prag u. Slučajna varijabla $(X - u)$ predstavlja vrijednosti prekoračenja preko praga u, uz uvijet da je prag prekoračen. Funkcija distribucije ove slučajne varijable je funkcija distribucije prekoračenja F_u i određuje se na sljedeći način:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{P(X - u \leq x, X > u)}{P(X > u)} = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}. \tag{3.5}$$

Jedan od ključnih rezultata teorije ekstremnih vrijednosti kaže da se funkcija distribucije prekoračenja može aproksimirati generaliziranom Pareto distribucijom.

Teorem 2 (Balkema i de Haan (1974.), Pickand(1975.))**.** *Za klasu distribucija koje pripadaju domeni privlačnosti GEV, postoji funkcija $\beta(u)$ takva da*

$$\lim_{u \to x^*} \sup_{0 \leq x < x^* - u} |F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)}| = 0,$$

gdje je x^* krajnja desna točka distribucije koja može biti i beskonačna, u prag, a F_u funkcija distribucije prekoračenja.

Opisno rečeno, teorem kaže da se uvjetna distribucija prekoračenja preko praga u može asimptotski modelirati sa GPD, tj. ako je F iz domene privlačnosti generalizirane distribucije ekstremnih vrijednosti, $F \in \mathcal{D}(H_\xi)$, tada generalizirana Pareto distribucija postaje preciznija aproksimacija funkcije distribucije prekoračenja F_u, kako se prag u približava x^*.

Klasa distribucija za koje vrijedi ovaj teorem uključuje većinu klasičnih distribucija (to su npr. normalna, log-normalna, χ^2 , t, F, beta, gama, eksponencijalna, uniformna, itd.)

Nakon što je utvrđen prag, parametri generalizirane Pareto distribucije mogu se procijeniti metodom maksimalne vjerodostojnosti. Pretpostavimo da su vrijednosti $x_1, ..., x_k$ prekoračenja granice u. Za $\xi \neq 0$ logaritam funkcije vjerodostojnosti izvodi se iz (3.4) i dan sljedećim izrazom

$$l(\xi, \beta) = -k \log(\beta) - (1 + 1/\xi) \sum_{i=1}^{k} \log(1 + \xi y_i/\beta), \tag{3.6}$$

ako je $(1 + \beta^{-1}\xi x_i) > 0$ za $i = 1, ..., k$, a inače

$$l(\xi, \beta) = -\infty.$$

U slučaju da je $\xi = 0$, logaritam funkcije vjerodostojnosti dobije se iz $G(x) = 1 - \exp(-x/\beta),\ x > 0$, kao

$$l(\beta) = -k \log(\beta) - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

Analitička maksimizacija logaritma funkcije vjerodostojnosti nije moguća pa su potrebne numeričke tehnike, pazeći da se izbjegavaju numeričke nestabilnosti kada je $\xi \approx 0$ u $l(\beta, \xi)$.

Koristeći ovaj pristup, važno je obratiti pažnju na to kako odrediti prag u.
Određivanje praga bazira se na takozvanoj ME funkciji (*Mean Excess function*).

Definicija 9. *ME funkcija definirana je s*

$$e(u) = E(X - u | X > u).$$

Ova funkcija je važna iz razloga što je linearna u varijabli u, kada su podaci GPD distribuirani:

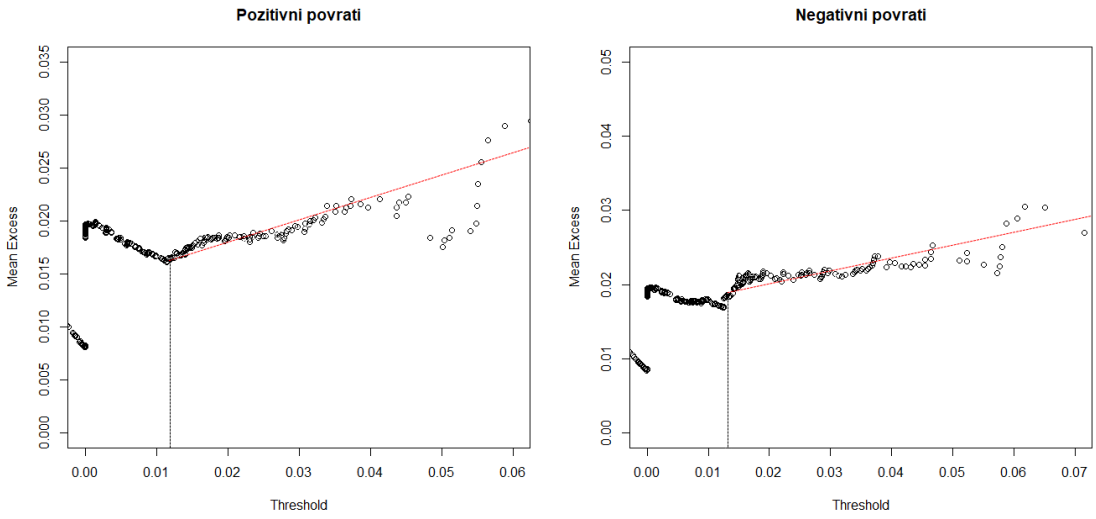
$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}. \tag{3.7}$$

Stoga se ME funkcija promatra za različite vrijednosti praga u i traži se da je linearna u varijabli u. Na temelju definicije, za dani prag u ME funkcija procjenjuje se prosjekom opažanja koja prelaze u umanjenih za u:

$$\hat{e}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \max(X_i - u, 0)}{\sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i > u\}}}.$$

U praksi je ova funkcija često linearna za velike vrijednosti u. Stoga se vrijednost praga može odrediti empirijski na način da nacrtamo graf točaka $(x_i, \hat{e}(x_i))$ i postavimo $u := x_i$, za i za koji vrijedi da je funkcija nakon x_i približno linearna. Ovaj graf naziva se graf ME funkcije (*Mean Excess function*). Ukoliko GPD ima teške repove sa konačnim očekivanjem (tj. $\xi \in (0, 1)$), onda je $e(u)$ rastuća u vrijabli u.

Primjer 5. *Da bismo ilutrirali procjenu parametara GPD teorijske distribucije za procjenu ekstremnih vrijednosti promatramo log-povrate cijena dionica INA d.d. u razdoblju od 30.04.2013. do 01.05.2017. Za procjenu parametara i izradu grafičkih prikaza koristiti ćemo programski jezik* R *i dodatni paket fExtremes, podatke usklađujemo teorijskom distribucijom pomoću funkcije gpdFit. Najprije određujemo prag u.*



Slika 3.11: Graf ME funkcije za maksimalne i minimalne log-povrate

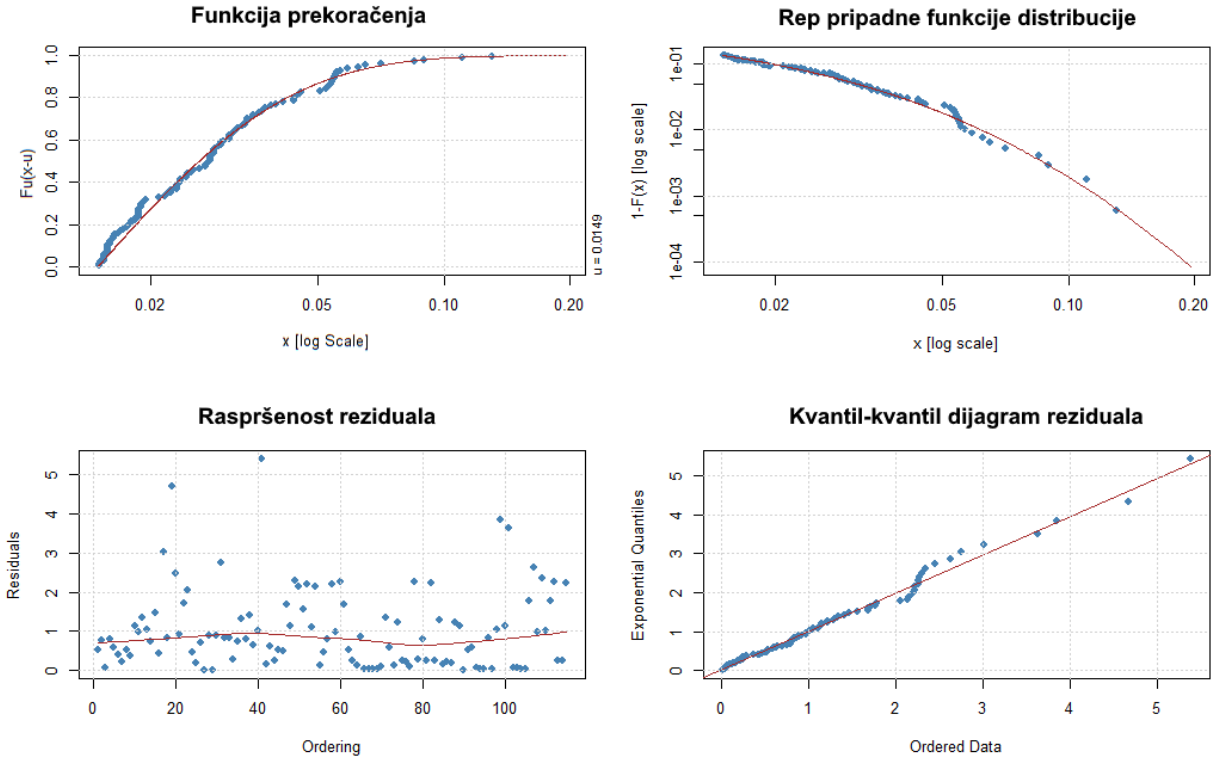
Slika 3.11 prikazuje graf ME funkcije pozitivnih i negativnih dnevnih log-povrata. Pozitivni trend na grafu ME funkcije sugerira repnu distribuciju s teškim repovima. Konkretno, približno rastuća linearna funkcija iza nekog praga sugerira Pareto repnu distribuciju. Negativni trend iza nekog praga sugerira light-tailed repnu distibuciju, dok graf bez trenda ukazuje na eksponencijalnu repnu distribuciju (ova karakterizacija je dana u članku Extreme Value Theory as a Risk Management Tool [6], str.35).

Prag $u \approx 0.015$ *izgleda kao dobar izbor za desni rep i također* $u \approx 0.015$ *za lijevirep funkcij gustoće log-povrata.*

	Desni rep	Lijevi rep
Prag	0.01491676	0.01490999
Kvantil praga	0.8641 (86,41%)	0.8736 (87,36%)
Udio podataka koje prelaze prag u	13.59%	12.64%
Procjena za ξ	0.12363491	0.04992456
Standardna greška za procjenu ξ	0.114491476	0.113342590
Procjena za β	0.01523735	0.01983247
Standardna greška za procjenu β	0.002217387	0.002930918

Tablica 3.4: Procjena parametara teorijske GPD distribucije za desni i lijevi rep funkcije gustoće log-povrata

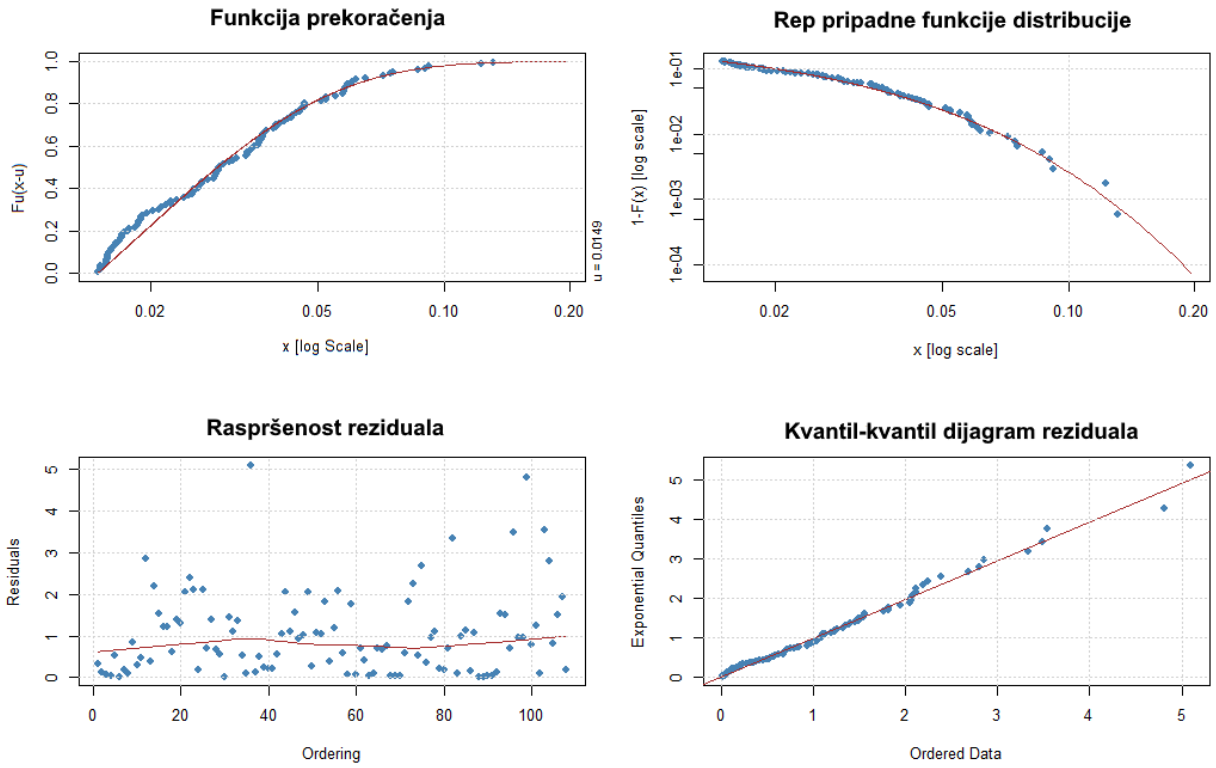
Prikladnost teorijske GPD distribucije usklađene sa našim maksimumima i minimumima log-povrata možemo promatrati u dijagnostičkim grafičkim prikazima na slikama 3.12 i 3.13.



Slika 3.12: Dijagnostički grafički prikazi prikladnosti procjenjene teorijske GPD distribucije za pozitivne log-povrate

Za pozitivne log-povrate, grafovi funkcije distribucije prekoračenja i pripadna repna funkcija distribucija dobro slijede odgovarajuće teorijske modele, što sugerira da GPD teorijska distribucija dobro odgovara prekoračenjima u desnom repu funkcije gustoće naših log-povrata. To se dodatno vidi u približnoj linearnosti u kvantil-kvantil dijagramu. Pozitivne ekstremne vrijednosti iznad praga 0.015 modeliramo pomoću $G_x = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$ *gdje procjenjujemo* $\xi = 0.12325841$ *i* $\beta = 0.01524658$.

Na slici 3.13 oblik grafa funkcije distribucije prekoračenja dobro prati model GPD, a kvantil-kvantil dijagram je približno linearan. Negativne ekstremne vrijednosti, manje od -0.015, u terminima maksimuma modeliramo sa $G_x = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$ *gdje procjenjujemo* $\xi = 0.04977596$ *i* $\beta = 0.01983510$.



Slika 3.13: Dijagnostički grafički prikazi prikladnosti procjenjene teorijske GPD distribucije za negativne log-povrate

Hillova metoda za procjenu repnog indeksa

Ova metoda temelji se na Hillovom procjenitelju. Taj način je pogodan samo za distribucije sa teškim repovima jer zahtjeva pripadnost distribucije log povrata Fréchetovoj domeni privlačnosti, $\mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ (vidi [2], 9.3.2 na str. 173). U ovoj metodi koriti se semiparametarski Hillov procjenitelj za parametar oblika :

$$\xi_H := \frac{1}{\alpha_H} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log \frac{X_{(i)}}{u}, \tag{3.8}$$

gdje je k broj podataka iza praga u, $2 \leq k \leq n$ dok $n/k \to \infty$ te $k/n \to 0$. $X_{(1)} \geq \cdots \geq X_{(k)}$ su uređajne statitike, a $x_{(i)}$ sortirani podaci, gdje je $x_{(1)}$ maksimalan podatak. Tada je Hillova procjena parametra oblika na temelju podataka dana sa

$$\hat{\xi_H} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log \frac{x_{(i)}}{u}.$$

Teorem 3. *Neka su* $(X_1, X_2, ...)$ *nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable sa funkcijom distribucije* F. *Pretpostavimo da je* $F \in D(H_\xi)$ *za* $\xi > 0$. *Tada ako* $n \to \infty$, $k \to \infty$, $k/n \to 0$, *Hillov procjenitelj* $\hat{\xi}_H$ *je konzistentan procjenitelj:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\xi}_H - \xi| > \epsilon) = 0, \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Dokaz ovog teorema dao je Sidney I. Resnick u knjizi *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling* (vidi poglavlje 4.4.1), a također možemo naći i u [10].

Hillov procjenitelj dostiže Cramer-Rao donju granicu kada uzorak potječe iz Pareto distribucije, stoga je efikasan i ne može se dalje poboljšati u ovom slučaju [2].
U praksi, Hillova procjena dobiva se iz Hillovog grafa za $\alpha := 1/\xi > 0$, tj. grafa koji prikazuje uređene parove

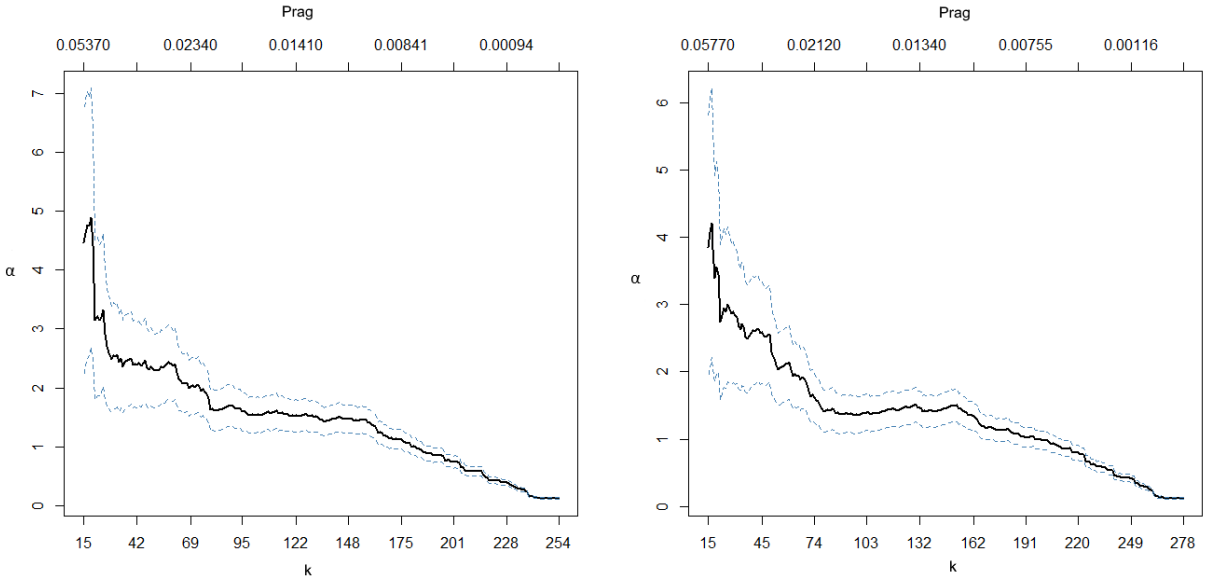
$$(k, H_k^{-1}), \qquad 1 \leq k \leq n,$$

gdje je $H_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log\left(\frac{x_{(i)}}{x_{(k+1)}}\right)$. Općenito, Hillov graf je prilično nestabilan za mali broj k, nakon čega slijedi kratko stabilno i približno linearno područje. Sa dijela grafa koji je stabilan i linearan oko neke vrijednosti repnog indeksa očitamo vrijednost za α s grafa kao prosječnu vrijednost iz stabilnog područja (opisano u [9] i [13]). Ponekad to možemo napraviti, a ponekad grafovi ne otkrivaju puno.

Hillov procjenitelj ima neke nedostatke:

- Hillov graf može pokazivati značajnu volatilnost pa se dobar rezultat možda ne vidi iz grafa
- Hillov procjenitelj ima optimalna svojstva samo ako je pripadna funkcija distribucije podataka blizu Pareto distribuciji, inače može dati veće greške u procjeni
- nije lokacijski invarijantan
- procjenu gledamo kao vrijednost na grafu, nije sigurno koji prag u je najbolje odabrati.

Primjer 6. *Promatramo log-pvrate cijena dionica INA d.d. u razdoblju od 30.04.2013. do 01.05.2017. Da bismo odabrali odgovarajući broj uređajnih statistika na temelju kojih ćemo procjeniti xi, treba promatrati stabilni dio na Hillovom grafu kako je opisano u [9] i u [13]. Na temelju tako odabranog k tada se s grafa očitava procjena za α. [5].*



Slika 3.14: Hillovi grafovi za pozitivne i negativne log-povrate

Hillov graf na slici 3.14. se pokazuje stabilniji za k veći od 100 za pozitivne povrate te za k veći od 95 u slučaju negativnih povrata. Graf je nestabilan kada se koristi manje uređajnih statistika. U programskom jeziku R *procijenili smo parametar oblika Hillovom metodom uz broj uređajnih statistika k koji smo odredili sa grafa, a procjene su dane tablicom.*

	Desni rep	Lijevi rep
Prag u	0.01491676	0.01490999
Kvantil praga	0.8817967 (88,18%)	0.8877069 (88,78%)
k	90	98
Procjena za ξ	0.6592225	0.7452789
Standardna greška za procjenu ξ	0.066012	0.076464

Tablica 3.5: Procjena parametara ξ Hillovom metodom

Pickandov procjenitelj

Najjednostavniji i najstariji procjenitelj za ξ je Pickandov procjenitelj i predstavlja poboljšanje Hillovog procjenitelja. Pickandov procjenitelj je konzistentan procjenitelj za $\xi \in \mathbb{R}$ i ne zahtijeva pretpostavku da je $\xi > 0$. Za razliku od Hillovog procjenitelja, lokacijski je invarijantan. Često je dobar jer upozorava na to kada je modeliranje distribucijom s teškim repom neprimjereno, ukazujući na $\xi \leq 0$.

Pickandov procjenitelj parametra oblika ξ koristi razlike kvantila i baziran je na uređajnim statistikama n-tog reda $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$:

$$\hat{\xi_p} := \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{(n-k)} - X_{(n-2k)}}{X_{(n-2k)} - X_{(n-4k)}}. \tag{3.9}$$

Teorem 4. *Neka su* $(X_1, X_2, ...)$ *nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable sa funkcijom distribucije F. Pretpostavimo da je* $F \in D(H_\xi)$ *za* $\xi \in \mathbb{R}$. *Tada ako* $n \to \infty$, $k \to \infty$, $k/n \to 0$,

$$\hat{\xi}_P \xrightarrow{P} \xi.$$

Dokaz ovog teorema također je dao Sidney I. Resnick u knjizi *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling.*

3.2 Procjena VaR-a

Nakon procjene repnog indeksa ili parametra oblika, sljedeći je korak procjena mjere rizika. U predviđanju rizika, postoji izbor između dva opća pristupa. Prognoza rizika može biti uvjetovana trenutnim tržišnim uvjetima ili se može temeljiti na bezuvjetnom tržišnom riziku. Oba pristupa imaju prednosti i nedostatke te odabir metodologije ovisi o situaciji.

McNeil i Frey (2000.) [12] predlažu metodu u dvije faze koja se sastoji u modeliranju uvjetne distribucije povrata imovine naspram trenutne volatilnosti i pretpostavlja GPD na repove reziduala. S druge strane, Danielsson i de Vries (2000.) [4] tvrde da je bolji izbor bezuvjetni pristup i može se opravdati činjenicom da pruža stabilne procjene kroz vrijeme. Mi ćemo promatrati bezuvjetne procjenitelje za VaR koje predlažu Danıelsson i de Vries (1997.) [3].

Poznavanje preciznosti i točnosti procjene je važno. Neke financijske institucije koriste VaR kako bi procijenile koliko novca treba rezervirati za pokriće potencijalnih gubitaka. Velike nepreciznosti u VaR modelu mogu značiti da institucija ne drži dovoljno sredstava. To može dovesti do značajnih gubitaka za instituciju, njene štediše, pojedinačne investitore i korporativne klijente. U ekstremnim tržišnim uvjetima, gubici mogu biti dovoljno veliki da uzrokuju čak i bankrot.

Provjera kvalitete VaR modela bazira se na analizi događaja kada su stvarni gubici veći od procjenjene VaR vrijednosti. Takve događaje nazivamo odstupanjima. Dva su bitna svojstva koja karakteriziraju adekvatne procjene VaR-a:

- Proporcija odstupanja
  Broj odstupanja trebao bi odgovarati zadanoj vjerojatnosti VaR modela. Npr. ako je zadana vjerojatnost procjene $p = 0.05$, udio odstupanja podataka od procjene bi trebao biti približno 5%. Ukoliko je taj udio veći, procjena VaR-a podcjenjuje rizik. U suprotnom ukoliko je taj udio manji, onda procjena VaR-a precjenjuje rizik.

- Nezavisnost odstupanja
  Ukoliko je proporcija odstupanja dobra, također je važno da su ta odstupanja jednoliko raspoređena tijekom vremena kroz uzorak. Sva grupiranja odstupanja ukazuju na manjkavost modela. Drugim riječima, pojave prekoračenja ne bi trebale biti povezane.

Kako bismo provjerili adekvatnost naših procjena, koristili smo se metodama opisanim u nastavku. Segment za procjenu dio je uzorka na temelju kojega radimo procjenu rizika za buduće razdoblje, npr. idući dan. Taj se segment u svakoj iteraciji pomiče za jedan dan i tako nastaje vektor procjene VaR vrijednosti koji duljinom odgovara segmentu za testiranje. Segment za testiranje je dio uzorka za koji smo procjenili rizik (oni dani u uzorku za koje smo napravili VaR prognozu). Na uzorku log-povrata cijena dionica INA d.d., za razdoblje od 30.04.2013. do 01.05.2017., radili smo procjenu VaR vrijednosti na segmentu

za procjenu duljine 596 radnih dana i pritom stvorili VaR vektor duljine 250 radnih dana. Ovaj postupak opisan je u [2], a također je lijepo objašnjeno u članku *S. D. Campbell: A review of backtesting and backtesting procedures.* U kontekstu ovog rada, vektor procijene VaR vrijednosti procijenjivali smo metodama koje ćemo opisati u ovom poglavlju.

U svrhu dijagnostike VaR modela programskim jezikom *R* na podacima korišten je dodatni paket *„rugarch“* i funkcija *VaRTest* koja provodi Christoffersenov test. To je statistički test koji ispituje oba svojstva, bezuvjetnu proporciju odstupanja i neovisnost odstupanja. Hipoteza kaže da je proporcija odstupanja jednaka vjerojatnosti p uz koju se VaR(p) procjenjuje te da su ta odstupanja nezavisna. Detalji o tom testu mogu se pogledati u *Christoffersen, P. F. : Evaluating Interval Forecasts, Internal Economic Review, November 1998.*

3.2.1 Procjena VaR-a metodom maksimuma po segmentima

Generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti

Nakon što smo procijenili parametre za generaliziranu distribuciju ekstremnih vrijendosti na temelju k maksimuma blokova duljine T, $\{M_1, \ldots, M_k\}$, gdje je $M_j = \max\{X_{(j-1)T+1}, ..., X_{jT}\}$, $j \in \{1, \cdots, k\}$, procjenjujemo VaR(p) (za detalje izvoda vidi [11]).

Budući da smo procjenjivali parametre za desni rep distribucije, računati ćemo VaR(p) za short poziciju.

$$p = P(X > VaR(p)) = 1 - P(X \leq VaR(p)) = 1 - F(VaR(p))$$

$$F(VaR(p)) = 1 - p.$$

$VaR(p)$ moramo gledati kao $(1-p)$-kvantil distibucije povrata. Uz pretpostavku da su $\{M_1, \ldots, M_k\}$ nezavisne i F u domeni atrakcije GEV sa funkcijom distribucije $H_\xi(x)$, $F \in \mathcal{D}(H_\xi)$, imamo da je $P(X_1 \leq x_p) = 1 - p$ ako i samo ako je $P(M_1 \leq p) = (1-p)^T$. Stoga je $x_p = H^{-1}((1-p)^T)$. Prema formuli (3.2), VaR uz vjerojatnost p može se procjeniti s

$$VaR(p) = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi}\left(1 - \Big(-T\ln(1-p)\Big)^{-\xi}\right), & \text{za } \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \ln\Big(-T\ln(1-p)\Big), & \text{za } \xi = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Parametre iz formule (3.10) procjenjujemo metodom maksimalne vjerodostojnosti i procjenjujemo VaR(p) tako da umjesto ξ, σ i μ koristimo njihove procjene $\hat{\xi}$, $\hat{\sigma}$ i $\hat{\mu}$.

Primjer 7. *Procjenu VaR(p) metodom maksimuma po segmentima radili smo na temelju log-povrata cijena dionica INA d.d. za razdoblje 30.04.2013. do 01.05.2017. Tablica 3.6 sadrži procjene VaR(p) za lijevi i desni rep funkcije gustoće log-povrata tj. za maskimume i minimume log-povrata, uz različite vjerojatnosti p. U tablici su prikazane procjene izvedene iz odgovarajuće GEV teorijske distibucije.*

		Desni rep	Lijevi rep
Metoda	Vjerojatnost	Procjena VaR(p)	
GEV	0.1	0.002690406	0.001475358
	0.05	0.01461688	-0.01152989
	0.01	0.04453366	-0.04587762

Tablica 3.6: Procjena VaR(p) u okviru metode maksimuma po segmentima

Uz vjerojatnost $p = 0.1$*, procijenjeni VaR(p) metodom maksimuma po segmentima je 0.0027 za desni rep i 0.0015 za lijevi rep funkcije gustoće log-povrata. VaR(p) uz vjerojatnost* $p = 0.01$ *procjenjujemo sa 0.0445 za desni rep, a za lijevi rep funkcije gustoće log-povrata VaR(p) procjenjujemo sa -0.0458.*

Testirali smo kvalitetu procjene VaR-a metodom maksimuma po segmentima Christoffersenovim testom, a p-vrijednosti su dane tablicom 3.7.

Desni rep		
Vjerojatnost	p-vrijednost	udio odstupanja
0.01	0.3842548	0.016
0.05	0.01293689	0.088
0.1	2.558073e-08	0.228
Lijevi rep		
Vjerojatnost	p-vrijednost	udio odstupanja
0.01	0.0603781	0.024
0.05	0.01888456	0.092
0.1	0.006136066	0.148

Tablica 3.7: Christoffersenov test za procjene VaR(p) metodom maksimuma po segmentima

Hipotezu da je proporcija odstupanja jednaka vjerojatnosti p uz koju se VaR(p) procjenjuje te da su ta odstupanja nezavisna ne odbacujemo na razini značajnosti 0.05 u slučaju kada je vjerojatnost $p = 0.01$.

3.2.2 Procjena VaR-a metodom prekoračenja preko praga

Generalizirana Pareto distribucija

Nakon što smo procijenili parametre GPD, možemo ih koristiti da procijenimo VaR(p)(vidi [2]). Ponovno, i u ovom slučaju smo procjenjivali parametre za desni rep distribucije, stoga ćemo računati VaR(p) za short poziciju.

$$p = P(X > VaR(p)) = 1 - P(X \leq VaR(p)) = 1 - F(VaR(p))$$

$$F(VaR(p)) = 1 - p$$

$VaR(p)$ gledamo kao $(1-p)$-kvantil teorijske distibucije povrata. Procjene dobivene ovom metodom imaju tendenciju da budu stabilnije nego druge procjene, ovisno o izboru praga. Promatramo uzoračku funkciju gustoće povrata i promatramo desni rep, pretpostavljamo $u \geq 0$. Krećemo od činjenice da je GPD dobra aproksimacija funkcije distribucije prekoračenja, dakle:

$$G_{\xi,\beta}(x) \approx F_u(x) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

Uz to, $F(u)$ se može numerički aproksimirati sa

$$F(u) = \frac{N_u}{N},$$

gdje je N ukupan broj podataka, a N_u broj prekoračenja preko praga u. Stoga je

$$F(x+u) = (1 - F(u))G_{\xi,\beta}(x) + F(u) = \frac{N - N_u}{N} G_{\xi,\beta}(x) + \frac{N_u}{N}.$$

Označimo sa p vjerojatnost uz koju nas zanima procjena za VaR, tj. želimo procijeniti VaR(p). Budući da X predstavlja jednodnevne povrate, imamo

$$P(X > VaR(p)) = p \quad \Rightarrow \quad F(VaR(p)) = 1 - p.$$

Dodatno, neka je x_p takav da je $x_p + u = VaR(p)$. Stoga je

$$1 - p = F(x_p + u) = \frac{N - N_u}{N} G_{\xi,\beta}(x_p) + \frac{N_u}{N},$$

iz čega slijedi

$$x_p = G^{-1}_{\xi,\beta}\left(\left((1-p) - \frac{N_u}{N}\right)\frac{N}{N - N_u}\right) = \frac{\beta}{\xi}\left[\left(p\frac{N}{N - N_u}\right)^{-\xi} - 1\right].$$

Konačno,

$$VaR(p) = u + x_p = u + \frac{\beta}{\xi}\left[\left(p\frac{N}{N - N_u}\right)^{-\xi} - 1\right].$$

Primjer 8. *Tablica 3.8 sadrži procjene za VaR(p) na temelju pozitivnih i negativnih log-povrata cijena dionica INA d.d. za razdoblje od 30.04.2013. do 01.05.2017., uz različite vjerojatnosti p. U tablici su prikazane procjene izvedene iz odgovarajućeg GPD modela.*

		Desni rep	Lijevi rep
Metoda	Vjerojatnost	Procjena VaR(p)	
GPD	0.1	0.05292877	-0.02671938
	0.05	0.139221	-0.06162195
	0.01	0.3431376	-0.144538

Tablica 3.8: Procjena VaR(p) metodom GPD

Za zadanu vjerojatnost $p = 0.1$ *procijenjeni VaR metodom GPD je 0.05292877 za desni i -0.02671938 za lijevi rep funkcije gustoće log-povrata.*

VaR(p) metodom GPD procjenjujemo sa 0.3431376 za vjerojatnost $p = 0.01$ *za desni rep funkcije gustoće log-povrata. Za lijevi rep funkcije gustoće log-povrata VaR(p) metodom prekoračenja preko praga procjenjujemo sa -0.144538 uz vjerojatnost* $p = 0.01$.

Testirali smo kvalitetu procjene VaR-a metodom GPD Christoffersenovim testom, a p-vrijednosti su dane tablicom 3.9.

Desni rep		
Vjerojatnost	p-vrijednost	udio odstupanja
0.01	0	0.124
0.05	0	0.112
0.1	0.0001158203	0.036
Lijevi rep		
Vjerojatnost	p-vrijednost	udio odstupanja
0.01	0	0.48
0.05	0	0.436
0.1	0.005715869	0.144

Tablica 3.9: Christoffersenov test kvalitete procjene VaR(p) metodom GPD

Iako se često ova metoda spominje kao najpreciznija, naše procjene se nisu pokazale dobrima. Hipotezu Christoffersenovog testa odbacujemo na razini značajnosti 0.05 u slučaju ove metode.

Procjena VaR-a Hillovim i Pickandovim procjeniteljem

Budući da smo i ove procjenitelje promatrali za procjenu repnog indeksa, želimo procijeniti VaR(p) takav da je $P\Big(X > VaR(p)\Big) = p$ pa je

$$F(VaR(p)) = P\Big(X \leq VaR(p)\Big) = 1 - P\Big(X > VaR(p)\Big) = 1 - p,$$

za vjerojatnost p, gdje je $F(u)$ vjerojatnost da će slučajna varijabla X prekoračiti prag u. Neka je G repna funkcija distribucije povrata. Prema Pareto pretpostavci iz definicije 1.1 vrijedi

$$G(x_p) = 1 - \Big(\frac{x_p}{u}\Big)^{-\alpha}. \tag{3.11}$$

Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti je

$$G(x_p) \approx F_u(x_p) = \frac{F(x_p) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{(1-p) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

Budući da se $F(u)$ može procjeniti relativnom frekvencijom podataka iza praga u sa $n-k/n$, imamo:

$$G(x_p) \approx \frac{(1-p) - \frac{n-k}{n}}{1 - \frac{n-k}{n}} = 1 - \frac{n}{k}p. \tag{3.12}$$

Izjednačavanjem izraza (3.11) i (3.12) dobivamo izraz za procjenu $\hat{x_p}$:

$$\hat{x_p} = u\Big(\frac{k}{np}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{3.13}$$

Stoga procjenu za VaR(p) procjenjujemo sa (3.13) za zadanu vjerojatnost p.

Primjer 9. *Tablica 3.10 sadrži procjene VaR(p) za pozitivne i negativne log-povrate cijena Ininih dionica, za različite vjerojatnosti. U tablici su prikazane procjene izračunate pomoću Hillovog procjenitelja.*

		Desni rep	Lijevi rep
Metoda	Vjerojatnost	Procjena VaR(p)	
Hillov procjenitelj	0.1	0.01793752	-0.01749531
	0.05	0.0283275	-0.02932737
	0.01	0.08184365	-0.09731967

Tablica 3.10: Procjena VaR(p) temeljena na Hillovom procjenitelju

Uz vjerojatnost $p = 0.1$*, procijenjeni VaR(p) Hillovom metodom je 0.01793752 za desni i -0.01749531 za lijevi rep funkcije gustoće log-povrata.*

VaR(p) za desni rep funkcije gustoće log-povrata Hillovom metodom procjenjujemo sa 0.08184365 uz vjerojatnost $p = 0.01$*. Za lijevi rep funkcije gustoće log-povrata VaR(p) uz vjerojatnost* $p = 0.01$ *Hillovom metodom procjenjujemo sa -0.09731967.*

Testirali smo kvalitetu procjene VaR-a Hillovom metodom Christoffersenovim testom, a p-vrijednosti su dane tablicom 3.11.

Desni rep		
Vjerojatnost	p-vrijednost	udio odstupanja
0.01	0.7373115	0.008
0.05	0.02498797	0.084
0.1	0.1030493	0.132
Lijevi rep		
Vjerojatnost	p-vrijednost	udio odstupanja
0.01	0.3842548	0.016
0.05	0.06727541	0.084
0.1	0.6934718	0.108

Tablica 3.11: Christoffersenov test kvalitete procjene VaR-a Hillovom metodom

Procjena koju smo napravili ovom metodom pokazala se dobrom kada smo ju testirali statističkim testom. Hipotezu Christoffersenovog testa odbacujemo na razini značajnosti 0.05 samo u slučaju kada procjenjujemo VaR(p) na desnom repu log-povrata uz zadanu vjerojatnost $p = 0.05$*.*

3.3 Nedostaci EVT

EVT se čini kao vrlo općeniti pristup procjeni repne distribucije. Parametrizacija repne distribucije upotrebom GEV distribucije nije vrlo ograničavajuća pretpostavka jer pokriva većinu najčešće korištenih distribucija, što je velika prednost EVT teorije. S druge strane, postoji nekoliko problema koje treba uzeti u obzir.

Prvo, pretpostavka da su zapažanja nezavisna i jednako distibuirana u suprotnosti je sa čestim obilježjima financijskih podataka. Drugo, teško je odrediti točku praga koja određuje broj uređajnih statistika koje će se koristiti u postupku procjene. Ako je prag previsok, ima premalo podataka, a rezultat je visoka varijanca procjenitelja. S druge strane, prenizak prag dovodi do pristrane procjene. Nažalost, do danas ne postoji statistička metoda egzaktog odabira u i obično se oslanja na simulacije i grafičke instrumente.

Kako je VaR konačni predmet interesa, njegova loša procjena može imati velike posljedice na profitabilnost neke financijske institucije.

Sažetak

VaR je mjera rizika koja pruža najbolji omjer dobre teorijske podloge i korisnosti implementacije. Njene slabosti su nedostatak subaditivnosti za neke vrste imovine te činjenica da je samo kvantil distribucije povrata i referira samo minimalni gubitak uz zadanu vjerojatnost.

Teorija ekstremnih vrijednosti može se koristiti za modeliranje mjera rizika kao što je value at risk, a primjenjujemo ju na povrate. Takva procjena VaR-a jest semiparametarska. EVT može biti korisna za procjenu veličine ekstremnih događaja, pritom možemo koristiti metodu maksimuma po segmentima ili metodu vrijednosti iznad praga. Metoda vrijednosti iznad praga, koja se oslanja na GPD teorijsku repnu funkciju distribucije, nije se pokazala dobra na promatranim podacima.

Ključne riječi: VaR, teorija ekstremnih vrijednosti, generalizirana distribucija ekstremnih vrijednosti, generalizirana Pareto distribucija, Hillov procjenitelj

Summary

VaR is a risk measure that provides the best ratio of good theoretical background and usefulness of implementation. It's weaknesses are the lack of subadditivity or some types of assets and the fact that it is only a quantile and refers only to a minimum loss with a given probability.

Extreme value theory can be used to model risk measures such as value at risk and we apply it to returns. Such value at risk estimation is semiparametric. EVT can be useful for estimating the size of extreme events, while we can use block maxima or peaks over threshold method. The peaks over threshold method, which relies on fitted GPD tail distribution, didn't proved to be good on the observed data.

Key words: VaR, extreme values theory (EVT), generalised extreme values distribution (GEV), generalized Pareto distribution (GPD), Hill estimator

Literatura

[1] P. ARTZNER, F. DELBAEN, J. EBER, *Mathematical Finance: Coherent mesures of Risk*, vol. 9, issue 3, 1999 .

[2] J. DANIELSSON, *Financial Risk Forecasting*, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, United Kingdom, 2011.

[3] J. DANIELSSON, C. G. DE VRIES, *Tail index and quantile estimation with very high frequency data* , Journal of Empirical Finance 4, 1997.

[4] J. DANIELSSON, C. G. DE VRIES, *Value at risk and extreme returns (Annales D'Economie et de Statistique)*,Risk Books, October 2000.

[5] P. EMBRECHTS, C. KLUPPELBERG, T. MIKOSCH, *Modelling Extremal Events, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability*, Springer, 1997.

[6] P. EMBRECHTS, S. I. RESNICK, G. SAMORODNITSKY, *Extreme Value Theory as a Risk Management Tool*, North American Actuarial Journal, Volume 3, Number 2, April 1999

[7] A. FERREIRA, L. de HAAN, *On the block maxima method in extreme value theory: PWM estimators*, Institute of Mathematical Statistics, 2015.

[8] M. GILLI, E. KËLLEZI, *An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk* , Department of Econometrics, University of Geneva and FAME, Switzerland, 2006.

[9] I. D. ILIĆ, *Ocenjivanje indeksa repa raspodele korišćenjem nekompletnih uzoraka*, doktorska disertacija, Beograd, 2012.

[10] M. KICHBAUER, *Procjena indeksa ekstremnih vrijednosti*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[11] C. MARINELLI, S. D'ADDONA, S. RACHEV, *A Comparison of Some Univariate Models for Value-at-Risk and Expected Shortfall* , March 2006

[12] A. J. McNEIL, R. FREY, *Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach*, Journal of Empirical Finance, Vol. 7, 2000.

[13] A.J. McNeil, R. FREY, P. EMBRECHTS: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, 2005.

[14] A. K. SINGH, D. E. ALLEN, R. J. POWELL, *Value at Risk Estimation Using Extreme Value Theory*, Edith Cowan University Research Online, ECU Publications 2011.

[15] R. S. TSAY, *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005., drugo izdanje.

Životopis

Zovem se Tajana Novak i rođena sam 25. ožujka 1993. godine u Našicama. Osnovnu školu Josipa Kozarca u Slatini sam upisala 1999. godine. Tijekom osnovnoškolskog, a kasnije i srednjoškolskog obrazovanja, sudjelovala sam na natjecanjima iz matematike, fizike i informatike. Osnovnu školu završila sam izvrsnim uspjehom pa 2007. godine upisujem opću gimnaziju u Srednjoj školi Marka Marulića u Slatini. 2011. godine upisala sam preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Nakon završenog preddiiplomskog studija, 2014. godine upisujem diplomski studij matematike, smjer financijske matematike i statitike, također na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.