Fraktalna geometrija i teorija dimenzije

Ivančić, Irena

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:654594

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-19**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Irena Ivančić

Fraktalna geometrija i teorija dimenzije

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Irena Ivančić

Fraktalna geometrija i teorija dimenzije

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2019.

Sadržaj

1 Uvod **3**

2 Povijest fraktala- pojava čudovišnih funkcija **4**
2.1 Krivulje koje popunjavaju ravninu 5
2.1.1 Peanova krivulja 5
2.1.2 Hilbertova krivulja 5
2.1.3 Drugi primjeri krivulja koje popunjavaju prostor 6

3 Karakterizacija **7**
3.1 Fraktali su hrapavi 7
3.2 Fraktali su sami sebi slični i beskonačno kompleksni 7

4 Podjela fraktala prema stupnju samosličnosti **8**

5 Podjela fraktala prema načinu konstrukcije **9**
5.1 Fraktali nastali iteracijom generatora 9
5.1.1 Cantorov skup 9
5.1.2 Trokut i tepih Sierpińskog 10
5.1.3 Mengerova spužva 11
5.1.4 Kochova pahulja 11
5.2 Kochove plohe 12
5.2.1 Pitagorino stablo 12
5.3 Sustav iteriranih funkcija (IFS) 13
5.3.1 Lindenmayer sustavi 16
5.4 Fraktali nastali iteriranjem funkcije 17
5.4.1 Mandelbrotov skup 17
5.4.2 Julijevi skupovi 20
5.4.3 Čudni atraktori 22

6 Fraktalna dimenzija **23**
6.1 Zahtjevi za dobru definiciju dimenzije 23
6.2 Dimenzija šestara 24
6.3 Dimenzija samosličnosti 27
6.4 *Box-counting* dimenzija 28
6.5 Hausdorffova dimenzija 28
6.6 Veza između dimenzija 30

7 Primjena fraktala i teorije dimenzije **31**
7.1 Fraktalna priroda geografskih fenomena 31
7.2 Fraktalna geometrija u arhitekturi 33
7.3 Fraktali korišteni u medicini i fiziologiji 34

7.4 Fraktali u računalnoj grafici 36
7.5 Fraktalni uređaji 37

8 Sažetak **38**

9 Summary **39**

10 Životopis **40**

Literatura **41**

1 Uvod

Budući da su se sve prirodne znanosti kroz povijest razvijale iz čovjekove potrebe za opisivanjem prirodnih fenomena i pojava, tako se i geometrija razvila iz potreba mjerenja zemljišta, volumena, opisivanja nebeskih tijela i slično. Danas je ona isprepletena s mnogim drugim matematičkim disciplinama kao što su algebra, analiza i topologija. Do 19. stoljeća euklidska geometrija je bila sasvim dovoljna za opisivanje prirode. Tada se, razvojem apstraktnog matematičkog mišljenja, otkriva da dotadašnja geometrija ne opisuje u potpunosti oblike poput munja, drveća, pahuljica, no i raznih sustava ljudskog tijela. Iako su mnogi matematičari sudjelovali u razvoju fraktalne geometrije, njihovi radovi nisu bili priznati te su njihova razmatranja bila potkopana jer su se neki od njihovih rezultata suprotstavljali rezultatima dotadašnje matematike. Tek je u 20. stoljeću Benoit Mandelbrot objavio poznatu knjigu *Fraktalna geometrija prirode* u kojoj objedinjuje rezultate mnogih matematičara te njih proširuje i opisuje velike mogućnosti novonastale, takozvane fraktalne geometrije.

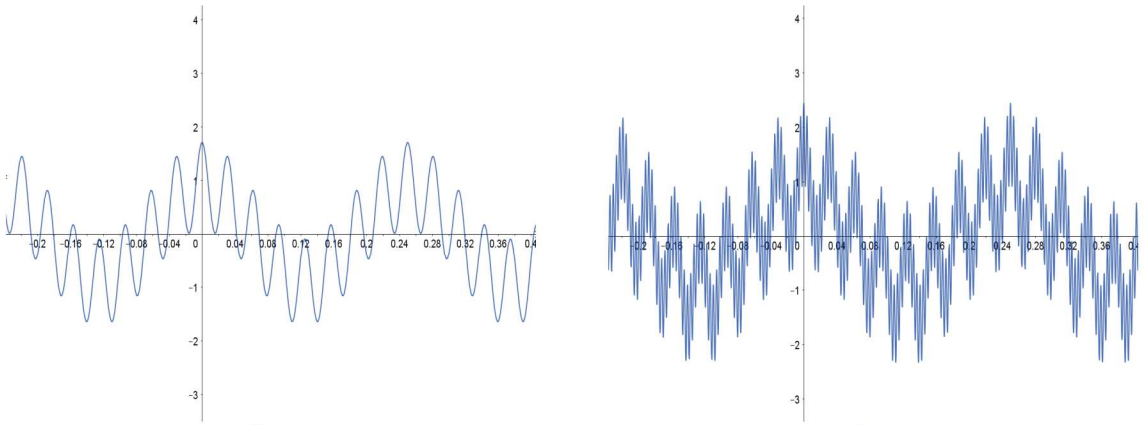
Ovaj je rad pisan prateći kronološki razvitak fraktala. U prvom poglavlju je opisana prvotna ideja fraktala te funkcije i krivulje iz kojih su se razvili. Treće, četvrto i peto poglavlje opisuju karakterizaciju fraktala te njihove osnovne podjele. Također se opisuje konstrukcija klasičnih fraktala. U šestom poglavlju je opisana fraktalna dimenzija te što ona predstavlja u terminima dimenzije. U zadnjem poglavlju se predstavlja moderan pristup fraktalnoj geometriji te u kojim se sve poljima ona može primjenjivati.

2 Povijest fraktala- pojava čudovišnih funkcija

Euklidska geometrija je bila osnova matematike do 19. stoljeća kada se javila potreba i želja za razumijevanjem prirodnih oblika i pojava koje se njome ne opisuju dovoljno precizno. Iz tih težnji se razvila fraktalna geometrija. Prvu je funkciju čiji bi graf danas mogli smatrati fraktalom definirao Karl Weierstrass 1872. godine. Generalizirani slučaj Weierstrassove funkcije glasi:

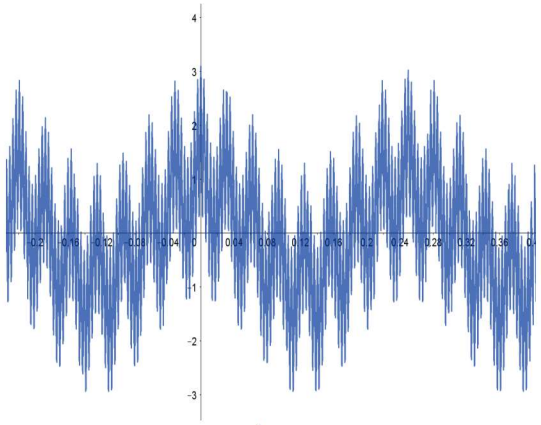
$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x) \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Weierstrass je definiranjem ove funkcije potresao temelje dotadašnje matematike. Definirana funkcija je neprekidna, no nije derivabilna ni u jednoj točki.

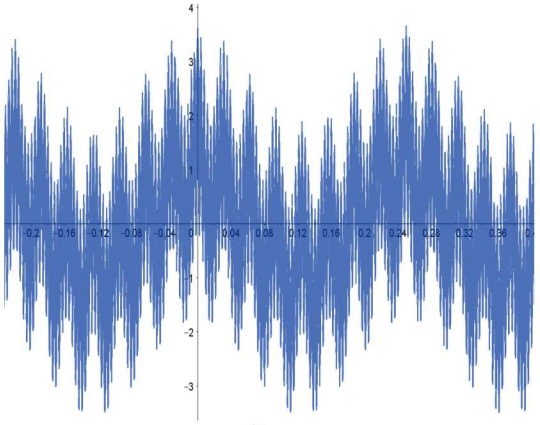


(a) $C(x) = \sum_{n=1}^{2} 0.9^n cos(8^n \pi x)$

(b) $C(x) = \sum_{n=1}^{3} 0.9^n cos(8^n \pi x)$



(c) $C(x) = \sum_{n=1}^{4} 0.9^n cos(8^n \pi x)$



(d) $C(x) = \sum_{n=1}^{5} 0.9^n cos(8^n \pi x)$

Slika 2.1: Promjena grafa Weierstrassovih funkcija prema broju funkcija u sumi za $a = 8$, $b = 0.9$.

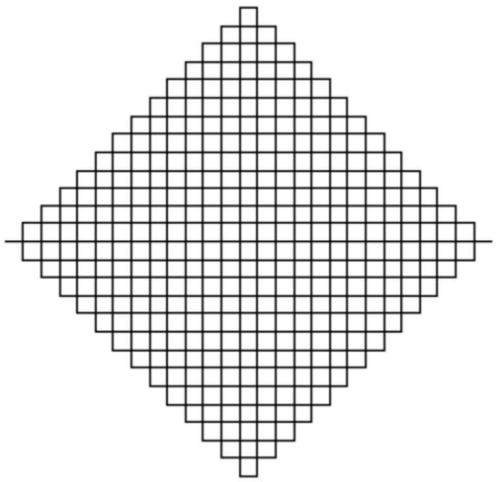
U to se vrijeme kreiranje takvih funkcija smatralo nepotrebnim i da im je jedina svrha opovrgavanje rezultata velikih matematičara. Zbog toga su ih matematičari nazvali čudovišnim funkcijama.

2.1 Krivulje koje popunjavaju ravninu

Nakon objave Weierstrassove funkcije, mnogi su matematičari razmatrali pitanje definiranja funkcija beskonačnim sumama ili iteracijama. Time su došli do takozvanih krivulja koje popunjavaju ravninu. Riječ je o krivuljama definiranim iterativnim postupkom ili funkcijom čija slika ili graf u beskonačnoj iteraciji u potpunosti popune lik unutar kojeg su definirane. Dimenzija lika kao takva nije odgovarala za krivulje poput ovih, iz razloga što jednodimenzionalna krivulja u potpunosti formira pripadni dvodimenzionalni lik. Ista se tvrdnja može poopćiti i na vezu dvodimenzionalnih likova i trodimenzionalnih tijela. Time su matematičari otkrili da dimenzija objekta ne mora nužno biti cjelobrojna.

2.1.1 Peanova krivulja

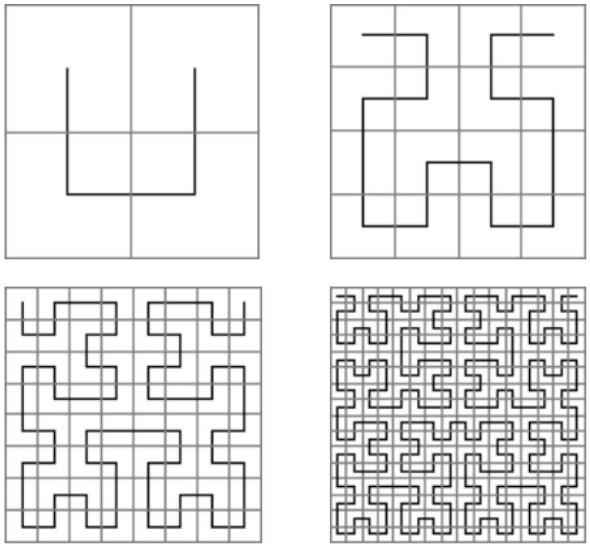
Prvu krivulju koja popunjava ravninu je 1890. otkrio Guiseppe Peano. Baza Peanove krivulje je segment. Dani se segment dijeli na tri dijela te se nad središnjim dijelom konstruira kvadrat na obje strane. Opisani postupak se nastavlja nad svakim segmentom novog oblika. Zbog manjih razlika u konstrukcijama, mnogo se i drugih krivulja koje popunjavaju ravninu nazivaju Peanovim krivuljama.



Slika 2.2: Peanova krivulja

2.1.2 Hilbertova krivulja

Ubrzo nakon opisivanja konstrukcije Peanove krivulje, 1891. godine David Hilbert je konstruirao tzv. Hilbertovu funkciju. Hilbertova funkcija je neprekidna i bijektivna funkcija čija je slika poznata pod nazivom Hilbertova krivulja. Hilbertova krivulja je jednodimenzionalna, no ima svojstvo da u potpunosti pokriva dvodimenzionalan prostor, odnosno u njenom najpoznatijem obliku, kvadrat. Njezinu konstrukciju započinjemo početnim oblikom koji nalikuje na spajalicu koja se kopira i rotira četiri puta te se krajevi kopija spoje dužinom. Isti postupak se ponavlja novonastalim likom. Završna se krivulja dobije ponavljanjem opisanog procesa beskonačno mnogo puta. Prva četiri koraka konstrukcije Hilbertove krivulje su prikazana na *slici 2.3*.

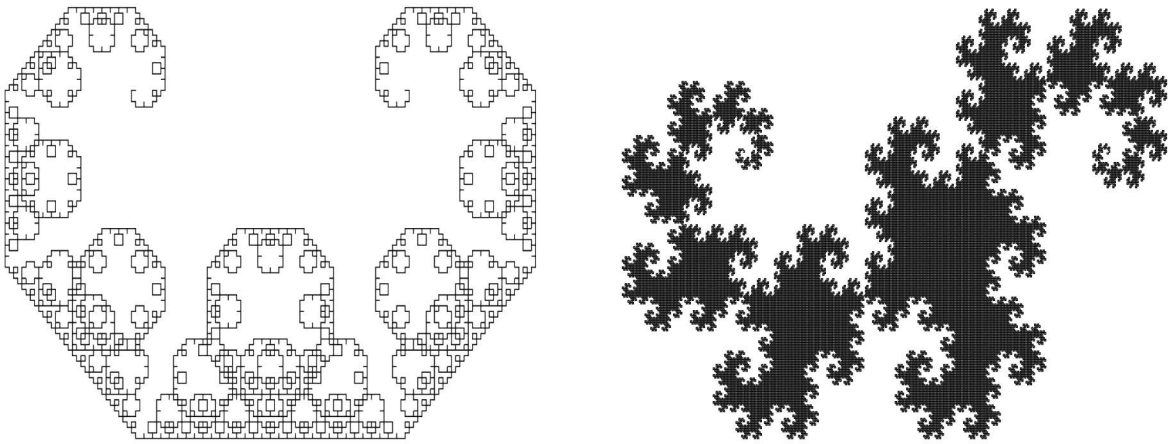


Zbog malog interesa matematičke zajednice za proučavanje fraktala radovi mnogih matematičara nisu bili poznati dok ih nije objavio Benoît Mandelbrot. On je 1960. sve poznato o fraktalima izvučeno iz radova Gastona Julie, Helga von Kocha, Wacława Sierpińskog, Pierra Fatoua, Felixa Hausdorffa i Paula Lévya ujedinio pod zajedničkim imenom fraktala.

Slika 2.3: Konstrukcija Hilbertove krivulje

2.1.3 Drugi primjeri krivulja koje popunjavaju prostor

Najpoznatiji kasniji primjeri krivulja koje popunjavaju prostor su Levyjeva krivulja i zmajolika krivulja. Početni lik Levyjeve krivulje je segment koji se u drugoj iteraciji zamijeni krakovima kuta koji stoje pod kutom od $\frac{\pi}{2}$. Zmajolika krivulja je otkrivena tek 1967. godina, crta se pomoću sustava rekurzivnih funkcija.



(a) Levyjeva krivulja (b) Zmajolika krivulja

Slika 2.4: Primjeri krivulja koje popunjavaju prostor

3 Karakterizacija

Benoît Mandelbrot u svojoj knjizi *Fraktalna geometrija prirode* iz 1982. kaže:

"Oblaci nisu sfere, planine nisu stošci, obale nisu krugovi, kora nije glatka niti munja putuje u ravnoj liniji."[1]

Da bismo precizno opisali prirodne elemente potrebno je uvesti pojam fraktala, no budući da postoji mnogo različitih vrsta fraktala, nemoguće je za njih dati jedinstvenu definiciju. Međutim, svi dijele određene karakteristike. Najbitnije od tih karakteristika su samosličnost, hrapavost i beskonačna kompleksnost.

3.1 Fraktali su hrapavi

Benoît Mandelbrot je uveo pojam hrapavosti fraktala pitanjem koliko je duga obala Velike Britanije. Kada bismo mjerenje proveli na karti s određenim mjerilom, mogli bismo izmjeriti duljinu nacrtane linije te uvećati za dano mjerilo. Međutim, kada bismo ponovili ovo mjerenje na drugoj karti manjeg mjerila, dobili bismo veću duljinu. Razlog tome je taj što će veća karta sadržavati više detalja, više poluotoka, otoka, stijena i kamenja čije će obale također biti uključene u mjerenje. Koliku god kartu uzeli, nikada nećemo vidjeti male procijepe, izbočine i utore kao što bismo vidjeli, primjerice, kada šetamo obalom. Možemo ići i dalje od toga, šetajući obalom nećemo primijetiti, primjerice, manje nepravilnosti u pijesku. Sve većim uvećavanjem dobivamo da je obala beskonačno duga i iz tog razloga pri ovakvim mjerenjima moramo postaviti određene uvjete fizičkih granica.

3.2 Fraktali su sami sebi slični i beskonačno kompleksni

Pojednostavljeno rečeno, fraktali su oblici sa svojstvom da im je svaki dio sličan cjelini. U prirodi, primjerice, možemo promatrati stablo pri čemu je svaka grana kopija cijelog drveta. Struktura je slična sama sebi ukoliko je podlegla transformaciji u kojoj su proporcije strukture promijenjene za isti faktor skaliranja. Fraktali nastali samosličnim transformacijama su tzv. pravi fraktali. To znači da koliko god uvećamo sliku, vidjet ćemo predmet koji je isti kao neuvećana slika. Ovo svojstvo dovodi do zaključka da možemo uvećavati objekt po volji puta i u svakom koraku dobijati sve kompleksniju sliku. Iako naizgled nevjerojatno, ovo je ključ razumijevanja prirodnih fenomena.

[1] eng. "Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line."- B. Mandelbrot (The Fractal Geometry of Nature (1982))

4 Podjela fraktala prema stupnju samosličnosti

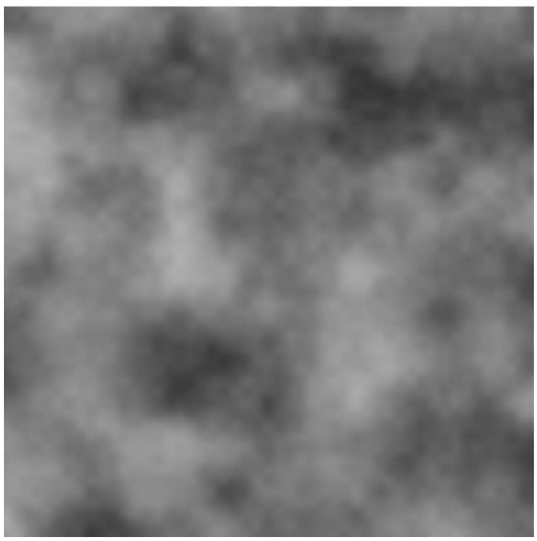
Fraktale dijelimo prema stupnju samosličnosti i prema načinu konstrukcije.

Prema stupnju samosličnosti fraktale dijelimo na potpuno samoslične fraktale, kvazi samoslične fraktale i statički samoslične fraktale.

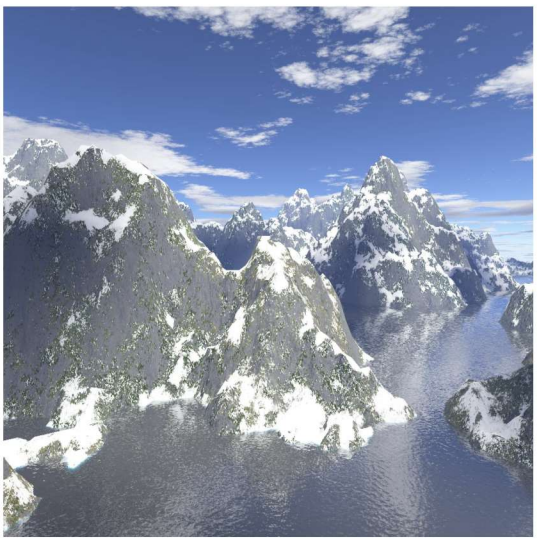
Potpuno samoslični fraktali sadrže kopije sebe koje su slične cijelom fraktalu. U ovim fraktalima razlikujemo bazu i motiv. I baza i motiv su geometrijski oblici sastavljeni najčešće od dužina. Potpuno samosličan fraktal nastaje beskonačnim nadomještavanjem baze oblikom motiva. Najpoznatiji potpuno samoslični fraktali su Kochova krivulja, Sierpinskijev trokut, Cantorov skup, čije su konstrukcije detaljno prikazane u poglavlju 5, te Hilbertova krivulja čija je konstrukcija prikazana u prvom poglavlju (*Slika 2.3*).

Kvazi samoslični fraktali su fraktali koji sadrže umanjene kopije sebe koje nisu slične cijelom fraktalu već se pojavljuju u promijenjenom obliku. Ti se fraktali također nazivaju i kaotični fraktali a najpoznatiji od njih su Mandelbrotov i Julijev skup koje ću detaljno opisati u poglavlju 5.

Statički samoslični fraktali su fraktali koji ne sadrže kopije samoga sebe, no međutim neke njegove osobine kao što je fraktalna dimenzija, objašnjena u poglavlju 6, ostaju iste. Najpoznatiji primjer statički samosličnog fraktala je Perlinov šum (*Slika 4.1*). Perlinov šum je funkcija za generiranje koherentnog šuma u prostoru. Koherentan šum znači da se šum između bilo koje dvije točke u prostoru mijenja glatko. Zbog nasumičnosti i glatkoće slike funkcije najčešće se koristi u računalnoj grafici za prikazivanje različitih tekstura.



(a) Dvodimenzionalni Perlinov šum



(b) Virtualni pejzaž generiran pomoću Perlinovog šuma

Slika 4.1: Perlinov šum i njegove primjene

5 Podjela fraktala prema načinu konstrukcije

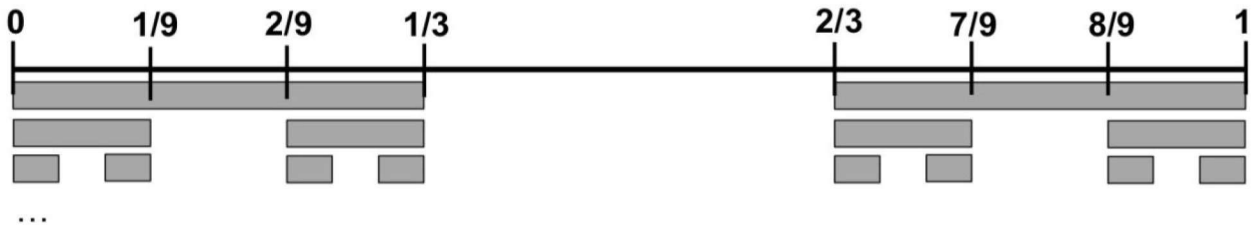
Prema načinu konstrukcije razlikujemo fraktale nastale iteracijom generatora, sustavom iteriranih funkcija i iteriranjem formule.

5.1 Fraktali nastali iteracijom generatora

Konstrukciju fraktala nastalih iteracijom generatora započinjemo oblikom koji se naziva bazom fraktala. Svaki dio baze se tada zamijeni drugim oblikom kojeg nazivamo motivom. Postupak nastavljamo na novonastalom obliku. Najpoznatiji fraktali nastali iteracijom generatora su Cantorov skup, Cantorov labirint, Cantorova prašina, trokut Sierpinskog te Kochova pahulja.

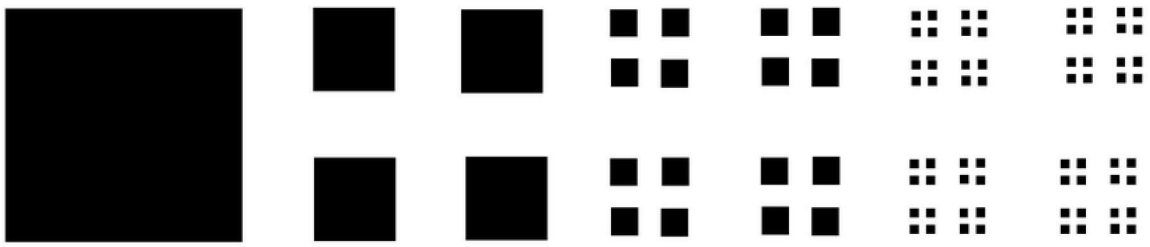
5.1.1 Cantorov skup

Cantorov skup je skup točaka segmenta $[0, 1]$ nastale uzastopnim dijeljenjem segmenta te uklanjanjem središnjeg dijela. U prvoj iteraciji segment dijelimo na tri dijela i uklanjamo srednji dio, odnosno ukljanjamo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. U drugoj iteraciji preostala dva dijela dijelimo na tri dijela te uklanjamo njihove središnje dijelove. Postupak nastavljamo beskonačno mnogo puta. Iz konstrukcije je očito da je Cantorov skup samosličan bez obzira na uvećanje.



Slika 5.1: Konstrukcija Cantorovog skupa

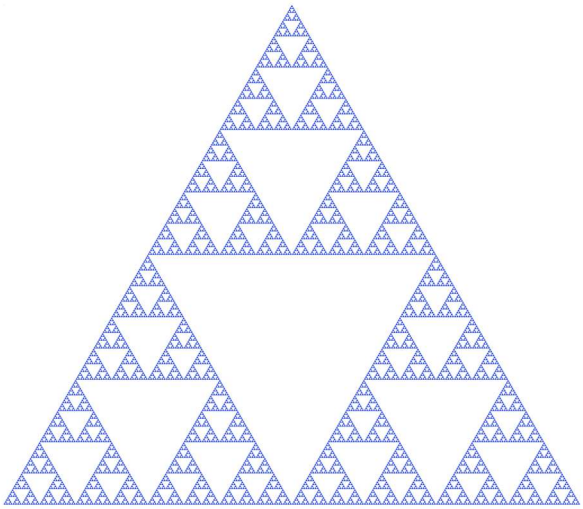
Dvodimenzionalni ekvivalent Cantorovog skupa se naziva Cantorova prašina.



Slika 5.2: Konstrukcija Cantorove prašine

5.1.2 Trokut i tepih Sierpińskog

Trokut Sierpińskog je jedan od najpoznatijih fraktala. Njega je 1915. godine opisao poljski matematičar Wacław Sierpiński. Konstrukciju trokuta Sierpińskog započinjemo jednakostraničnim trokutom. U drugom koraku početnom trokutu odredimo polovišta te ta polovišta spojimo. Na taj smo način početni trokut podijelili na četiri sukladna trokuta. Završni oblik drugog koraka dobivamo izbacivanjem središnjeg trokuta. Trokut Sierpińskog dobivamo ponavljanjem ovog postupka beskonačno mnogo puta.

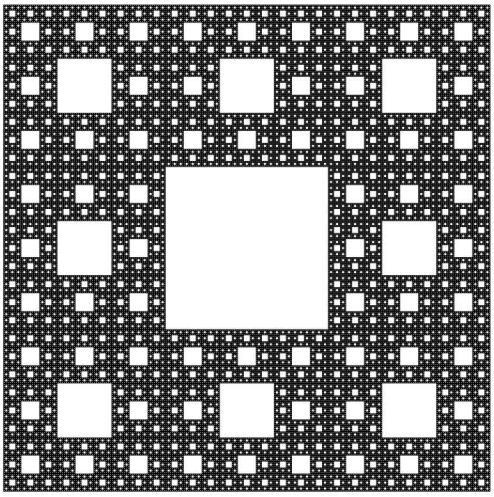


Slika 5.3: Trokut Sierpinskog

Ovaj je fraktal posebno zanimljiv zbog toga što mu je opseg beskonačno velik, a površina jednaka 0. Ukoliko je stranica početnog trokuta duljine a, a njegova površina P_0, opseg trokuta Sierpińskog u k-tom koraku iznosi $\frac{3^{k+1}}{2^k}a$, a površina $(\frac{3}{4})^k P_0$ što vodi do zaključka da je:

$$O = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}}{2^k} a = \infty$$

$$P = \lim_{k\to\infty} (\frac{3}{4})^k P_0 = 0.$$

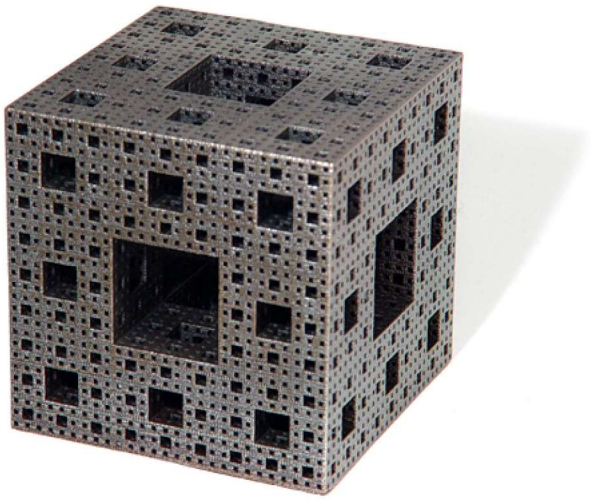


Slika 5.4: Tepih Sierpińskog

Wacław Sierpiński je 1916. opisao i drugi fraktal poznat pod nazivom tepih Sierpińskog. Konstrukcija tepiha Sierpińskog započinje kvadratom koji se podijeli na devet sukladnih kvadrata te se središnji izbacuje. Postupak se ponavlja nad preostalih osam kvadrata.

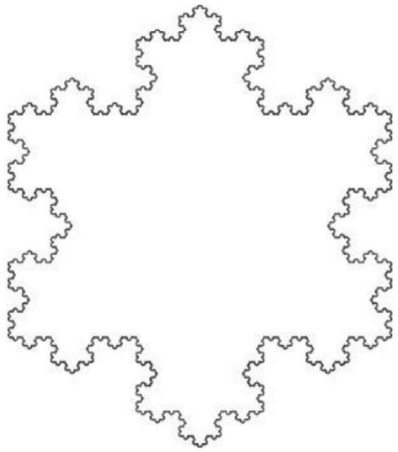
5.1.3 Mengerova spužva

Mengerova spužva je trodimenzionalni fraktal kojeg je 1926. godine opisao austrijski matematičar Karl Menger. Svaka strana Mengerove spužve je tepih Sierpińskog, a dijagonale strana Cantorovi skupovi. Konstruira se na način da se početna kocka podijeli na 27 manjih kocki pri čemu se izbacuje središnja kocka početne kocke i središnja kocka svake strane. Postupak se beskonačno mnogo puta ponavlja nad svakom od manjih kocki.



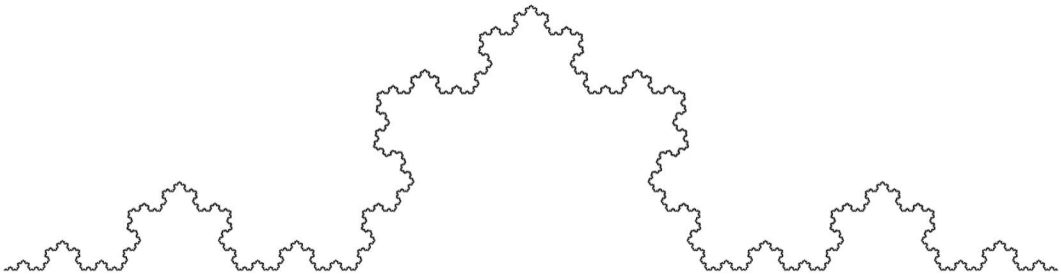
Slika 5.5: Mengerova spužva

5.1.4 Kochova pahulja



Slika 5.6: Kochova pahulja

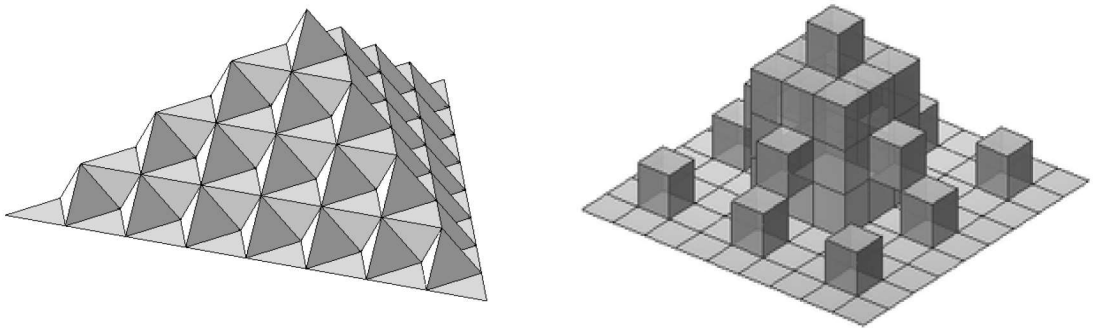
Kochova pahulja je jedan od najranije opisanih fraktala. Temelji se na Kochovoj krivulji koju je 1904. godine opisao švedski matematičar Helge von Koch. Početni oblik Kochove pahulje je jednakostranični trokut. Svaka stranica danog trokuta se tada podijeli na tri dijela te se nad središnjim dijelom konstruira jednakostraničan trokut. Duljine stranica konstruiranog trokuta su tada trećina duljine početnog trokuta. Stranica konstruiranog trokuta koja leži na početnom trokutu se tada ukloni. Kochovu pahulju dobijemo ponavljanjem opisanog procesa nad preostalim stranicama.



Slika 5.7: Kochova krivulja

5.2 Kochove plohe

Kochova ploha je trodimenzionalni ekvivalent Kochove krivulje. Konstrukciju započinjemo trokutom koji se povezivanjem središnjica dijeli na četiri sukladna trokuta. Nad središnjim se trokutom tada konstruira tetraedar te se postupak ponavlja nad svakim od postojećih trokuta. Postoji mnogo varijacija Kochovih ploha, ovisno o početnom obliku.



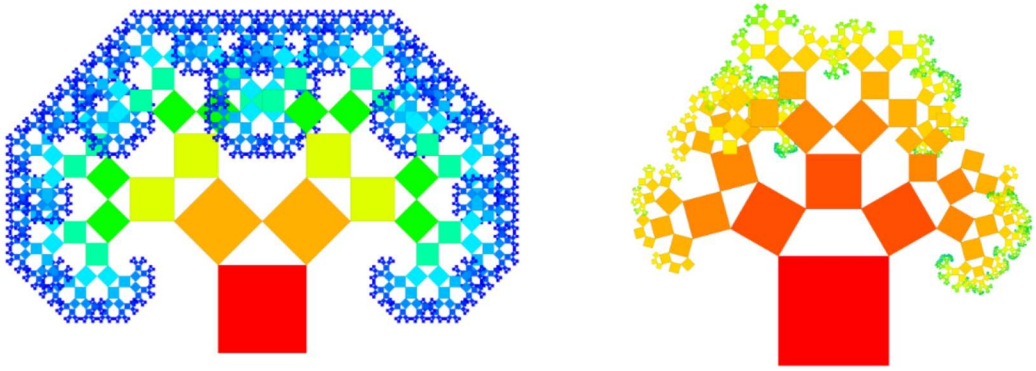
(a) Početni oblik trokut

(b) Početni oblik kvadrat

Slika 5.8: Kochove plohe

5.2.1 Pitagorino stablo

Tradicionalno Pitagorino stablo je fraktal nastao rekurzivnim crtanjem kvadrata. Konstrukcija Pitagorinog stabla započinje kvadratom. Tada se nad gornjom stranicom kvadrata konstruira pravokutni trokut kome je stranica kvadrata hipotenuza. U drugoj se iteraciji nad katetama pravokutnog trokuta konstruira kvadrat. Iterativni postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta. Pitagorino stablo se također može konstruirati na način da se nad gornjom stranicom, umjesto dva kvadrata, konstruira više njih. Zbog toga se Pitagorina stabla koriste pri vizualizaciji hijerarhijskih podataka.



(a) Klasično Pitagorino stablo

(b) Varijacija Pitagorinog stabla

Slika 5.9: Pitagorina stabla

5.3 Sustav iteriranih funkcija (IFS)

IFS (Iterated Function System) je konačan skup funkcija definiranih na metričkom prostoru. Te funkcije su rotacija, translacija, kontrakcija i zrcaljenje. IFS teoriju je predstavio i razvio australski matematičar John Hutchinson 1981. godine. Ubrzo zatim, Michael Barnsley uvodi Collage teorem koji je postavio osnovu za pretvaranje prirodnih slika u IFS. On kaže da se svaka slika može aproksimirati sustavom iteriranih funkcija s definiranom vjerojatnošću djelovanja danih funkcija bez obzira na početni skup točaka. U dvije dimenzije afina transformacija ima oblik:

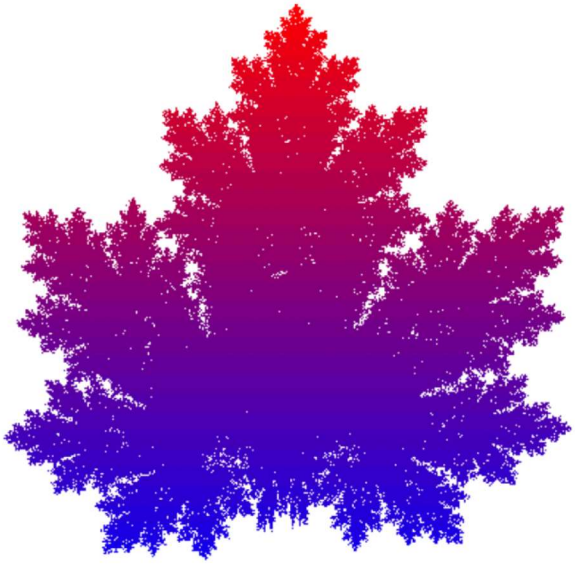
$$x_{n+1} = ax_n + by_n + e$$

$$y_{n+1} = cx_n + dy_n + f$$

Koeficijenti a, b, c, d, e, f, p predstavljaju IFS kod pri čemu p predstavlja vjerojatnost primjenjivanja pripadne funkcije. Izabir početnih točaka ne utječe mnogo na izgled fraktala. Fraktal nastao pomoću IFS u pravilu zahtijeva više transformacija pa za konstrukciju Javorovog lista koristimo četiri transformacije čiji su koeficijenti dani u tablici 1.

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**p**
0.14	0.01	0.00	0.51	-0.08	-1.31	0.1
0.43	0.52	-0.45	0.50	1.45	-0.75	0.35
0.45	-0.94	0.47	0.47	-1.62	-0.74	0.35
-0.15	0.28	0.26	0.24	0.00	0.07	0.20

Tablica 1: Koeficijenti za IFS konstrukciju Javorovog lista



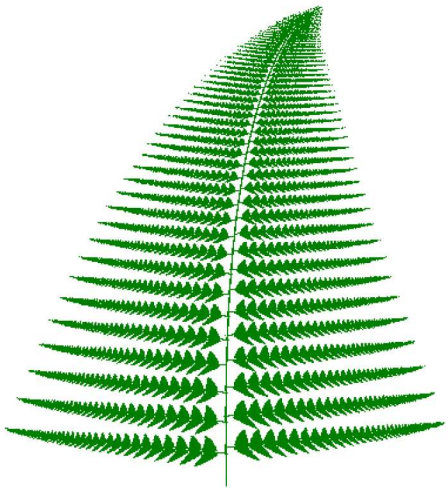
Slika 5.10: Javorov list

Najpoznatiji IFS fraktal je Barnsleyeva paprat nazvan po britanskom matematičaru Michaelu Barnsleyu koji ga je prvi put opisao u knjizi *Fractals Everywhere*. Paprat je jedan od osnovnih primjera samosličnih skupova. Kao i Trokut Sierpinskog, Barnsleyeva paprat pokazuje kako se predivne strukture mogu izgraditi uzastopnim ponavljanjem matematičkih formula. Barnsleyev rad je inspirirao mnoštvo matematičara i grafičkih dizajnera koji su pokušali imitirati prirodu matematičkim modelima jer je koristio fraktale za modeliranje širokog spektra fenomena u znanosti i tehnologiji ali najviše u strukturama biljaka. Konstrukciju Barnsleyeve paprati započinjemo s četiri osnovna lika te na njih primjenjujemo četiri transformacije. Transformacije se biraju nasumično s različitim vjerojatnostima čije su vrijednosti dane u tablici 2. Koeficijenti za konstrukciju Barnsleyeve paprati su dani u tablici 2.

Slika 5.11: Barnsleyeva paprat

a	b	c	d	e	f	p
0.00	0.00	0.00	0.16	0.00	0.00	0.01
0.85	0.04	-0.04	0.85	0.00	1.60	0.85
0.20	-0.26	0.23	0.22	0.00	1.60	0.07
-0.15	0.28	0.26	0.24	0.00	0.44	0.07

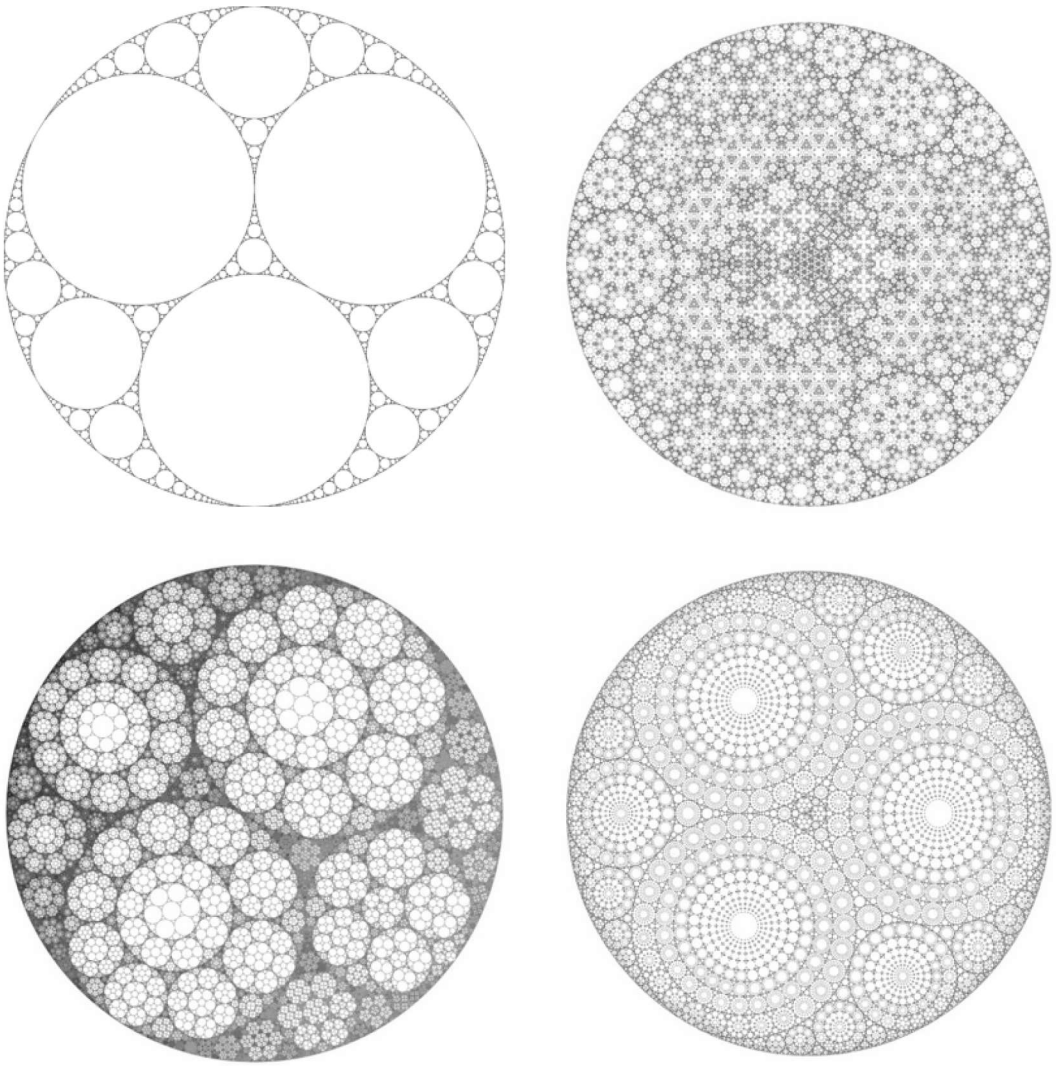
Tablica 2: Koeficijenti za IFS konstrukciju Barnsleyeve paprati



Slika 5.12: Varijacija Barnsleyeve paprati

Manjom promjenom koeficijenata, mogu se kreirati varijacije paprati. Te varijacije se nazivaju mutantske varijacije paprati. Očigledno, IFS fraktali iznimno dobro opisuju prirodne oblike. Iz tih su razloga ovi fraktali među najprimjenjivijima u računalnoj grafici i umjetnosti.

Druga vrsta transformacija koja se može koristiti za konstruiranje IFS fraktala se naziva Moebiusova transformacija. Najpoznatiji Mobiousov fraktal je Apollonijeva mreža. Apolonije iz Perge je bio veliki grčki matematičar koji je živio u 3. i 2. st. pr. Kr. On je navodno bio prvi matematičar koji je ozbiljno razmatrao pitanje crtanja kružnice koja dodiruje tri već zadane kružnice. Većina njegovih knjiga je nestalo, međutim jedna koja je opstala- *Conic Sections* je bila prva knjiga u kojoj je su proučavane elipse, hiperbole i parabole. Apolonije je prvi koji je riješio probleme crtanja kružnice koju istovremeno tangiraju tri pravca, dva pravca i kružnica, dvije kružnice i pravac te tri kružnice. Njegovi su rezultati izgubljeni te je navedeni problem ostao poznat pod nazivom Apolonijev problem. Njega je u 17. stoljeću, iako netočno dokazao, ispravno riješio francuski matematičar i filozof René Descartes. Apollonijeve mreže se geometrijski konstruiraju rekurzivnim popunjavanjem praznina između kružnice tako da se svake dvije dodiruju u jednoj točki. Različite Apolonijeve mreže možemo dobiti postavljanjem krugova različitih radijusa i položaja ili ponavljanjem postupka nad novokonstruiranim kružnicama.

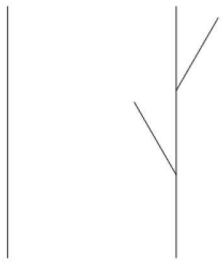


Slika 5.13: Varijacije Apolonijeve mreže

5.3.1 Lindenmayer sustavi

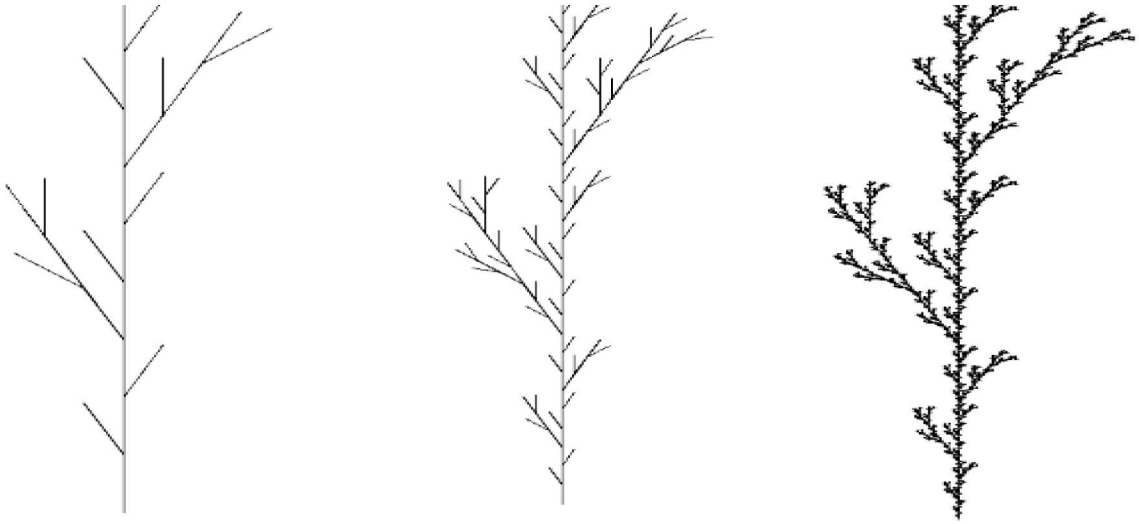
Lindenmayer sustave, ili kraće L- sustave je 1968. razvio biolog Aristid Lindenmayer da bi opisivao rast organizama. Početni testni subjekt je bila alga *Anabaena Catenula* koja formira dugačke niti perli. Tehnika koju je razvio Lindenmayer je iznimno fleksibilna i snažna te se može koristiti za modeliranje različitih objekata, uključujući fraktale. Jednostavno rečeno, L- sustav je metoda za kreiranje niza objekata prema određenom skupu pravila koja opisuju kako se određeni objekti u nizu zamjenjuju s drugim objektima. Na jednostavnom primjeru, ukoliko konstruiramo niz koji se sastoji od 0 i 1, s pravilom da 0 mijenjamo za 1, a 1 mijenjamo s 01, tada kreiramo niz:

$$0, 1, 01, 101, 01101, 10101101, ...$$



Slika 5.14: Oblik dobiven pravilom $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$

Ukoliko za početni oblik odaberemo ravnu liniju, s F označimo kretanje po objektu, s $+$ označimo odmak za kut α i s $-$ označimo odmah za kut $-\alpha$ tada pravilom $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$ kreiramo jednostavan razgranjan oblik. Postupak nastavljamo nad svakom linijom na novonastalom liku.



(a) $n = 2$ (b) $n = 3$ (c) $n = 4$

Slika 5.15: Oblici dobiveni iteracijom pravila $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$

5.4 Fraktali nastali iteriranjem funkcije

Najpoznatiji fraktali nastali iteriranjem funkcije su Mandelbrotov skup i Julijevi skupovi. Iako su Pierre Fatou i Gaston Julia proučavali Julijeve skupove još početkom 20. stoljeća, ti radovi nisu objavljivani niti im je struktura detaljno proučavana zbog nedostatka računala u to vrijeme. Kada je Benoit Mandelbrot počeo proučavati šum koji je ometao prijenos zvuka preko telefonskih linija, primijetio je da šum dolazi u valovima, ponekad je šum bio izrazito jak, a ponekad ga uopće nije bilo. Htio je na neki način modelirati taj šum vizualiziranjem podataka. Primijetio je da taj šum ima svojstvo samosličnosti. Ovaj fraktal danas znamo pod nazivom Cantorova prašina.

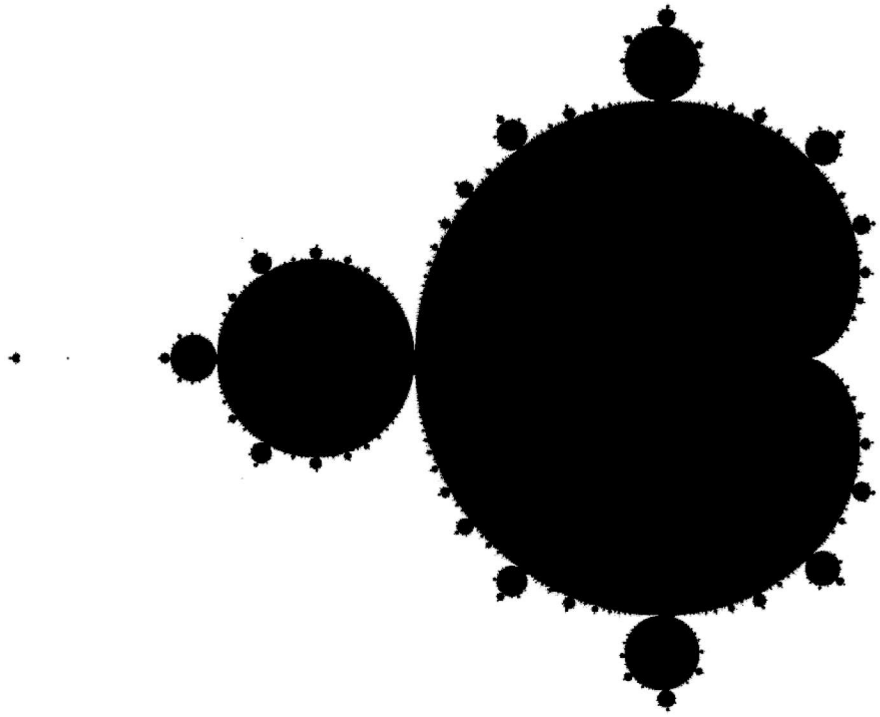
5.4.1 Mandelbrotov skup

Mandelbrotov skup je skup svih kompleksnih brojeva koji imaju određeno svojstvo. Mandelbrotov skup je jedan od poznatijih fraktala u područjima izvan matematike zbog mogućnosti vrlo lijepog predočavanja. On je također vrlo bitan u poljima kompleksne dinamike i teoriji kaosa kao i u fraktalnoj geometriji. Precizno definirano, Mandelbrotov skup je skup svih točaka $c \in \mathbb{C}$ takvih da za $z_0 = 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |z_{n+1}| \nrightarrow \infty,$$

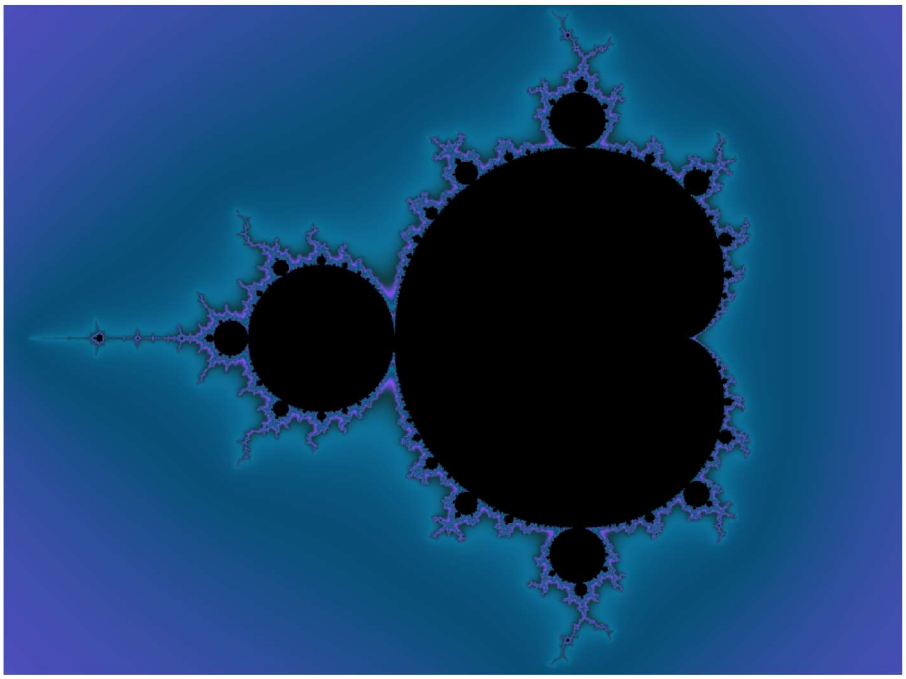
pri čemu je $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Najjednostavniji geometrijski prikaz Mandelbrotovog skupa jest da točku koja se nalazi u skupu obojamo u crno, a točku koja nije u skupu obojamo u bijelo.

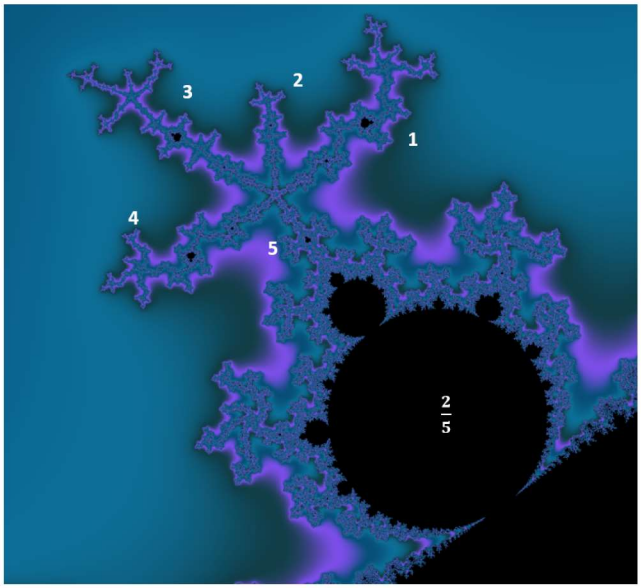


Slika 5.16: Mandelbrotov skup

Da bismo prikazali Mandelbrotov skup na umjetnički privlačniji način, potrebna nam je funkcija bojanja. Najčešća funkcija bojanja boja točke izvan Mandelbrotovog skupa, tzv. auru skupa, a sam skup prikazuje u jednoj boji, najčešće crnoj. Najčešći algoritam za bojanje aure skupa se zove *escape time* algoritam. Algoritam se bazira na vrijednosti n, broju potrebnih iteracija potrebnih da z_n izađe izvan ruba skupa. Svakom se pikselu dodijeljuje boja koja odgovara broju n.

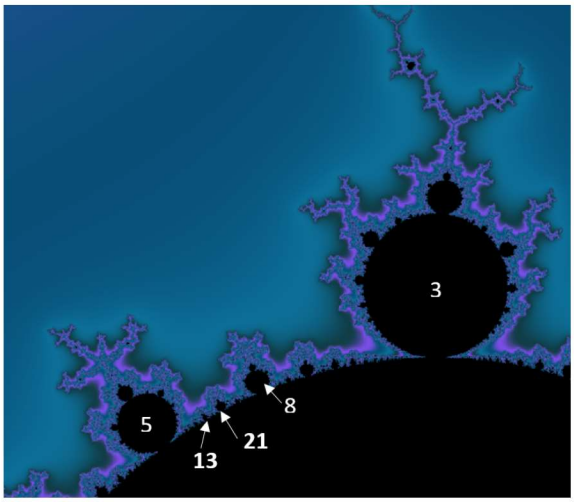


Slika 5.17: Mandelbrotov skup uz funkciju bojanja



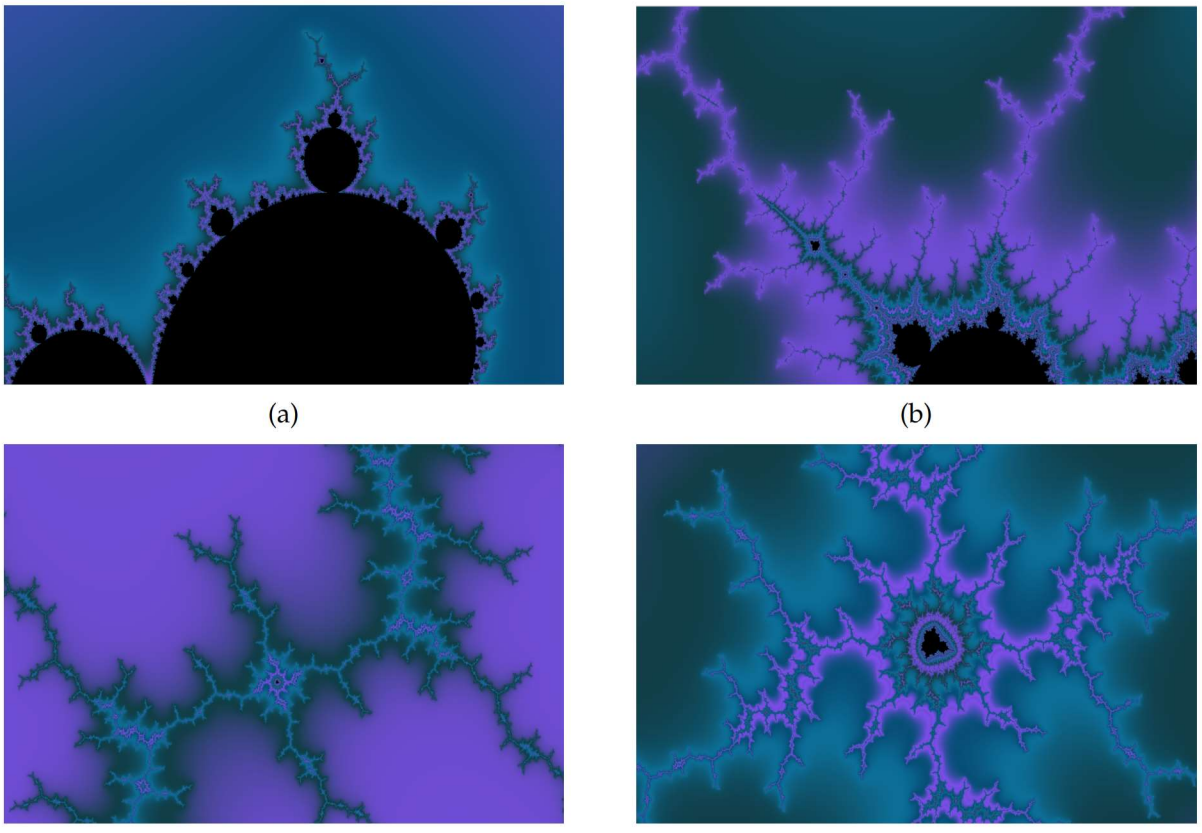
Slika 5.18: Pupoljak karakterističnog broja $\frac{2}{5}$

Jedno od najistaknutijih svojstava Mandelbrotovog skupa je to da mu rub tvori fraktal, a unutrašnjost mu je omeđena glavnom kardioidom s nekoliko pupoljaka. Linije koje se nadovezuju na pupoljke se nazivaju antene Mandelbrotovog skupa. Svaki pupoljak ima svoj karakteristični broj koji se označava kao razlomak $\frac{p}{q}$, pri čemu q označava period pupoljka odnosno broj grana koje proizlaze iz glavne antene, uključujući glavnu antenu. Ukoliko suprotno od kazaljke na satu brojimo antene pupoljka počevši od glavne antene, p je pozicija najkraće grane.



Slika 5.19: Pojava Fibonnacijevih brojeva kao perioda pupoljaka Mandelbrotovog skupa

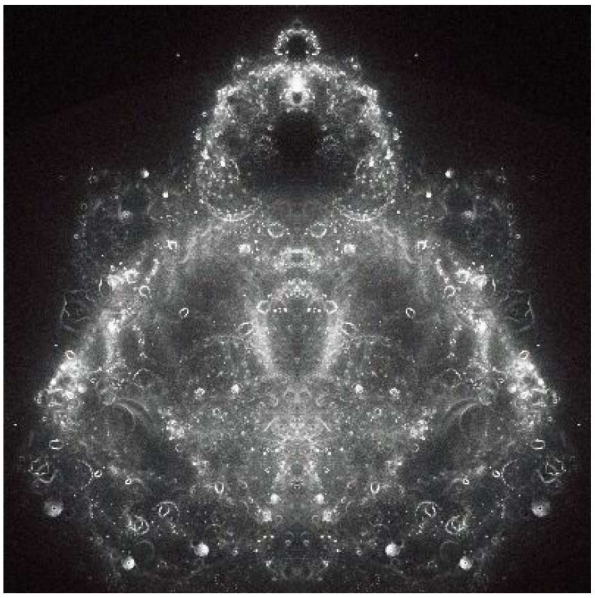
Postoji nekoliko izuzetnih svojstava Mandelbrotovog skupa vezanih uz karakteristične brojeve pupoljaka. Za jedno od spomenutih svojstava potrebno je uvesti Fareyev zbroj. Fareyev zbroj je operacija koja dva razlomka zbraja tako da se zasebno zbrajaju brojnik i nazivnik bez određivanja zajedničkog nazivnika. Koristeći Fareyev zbroj za karakteristične brojeve osnovnih pupoljaka moguće je konstruirati bilo koji element skupa racionalnih brojeva. Drugo zanimljivo svojstvo je pojava Fibonaccijevih brojeva kod perioda pupoljaka. Za bilo koja dva pupoljka vrijedi da je suma njihovih perioda jednaka periodu najvećeg pupoljka između njih. Također, kretajući se po glavnoj kardioidi i uzimajući period sljedećeg najvećeg pupoljka, generira se skup prirodnih brojeva. Također je izuzetno zanimljiva beskonačna kompleksnost i kvazi samosličnost Mandelbrotovog skupa koja se do neke razine može primijetiti na slici 5.20.



(a) (b)

(c) (d)

Slika 5.20: Uvećani prikazi različitih dijelova Mandelbrotovog skupa

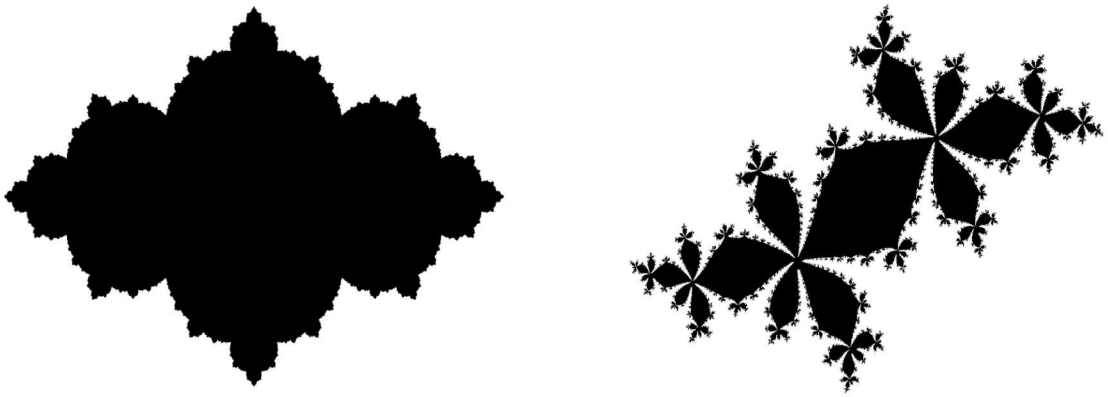


Slika 5.21: Buddhabrot

Različite funkcije bojanja mogu na fascinantne načine djelovati na ispis Mandelbrotovog skupa. Posebni prikaz Mandelbrotovog skupa, Buddhabrot skup, je prvi put objavila Melinda Green 1993. Umjesto odabira početnih točaka u kompleksnoj ravnini, početne točke se odabiru nasumično. Tada se svaka početna točka iterira Mandelbrotovom funkcijom da bismo testirali nalazi li se ona unutar Mandelbrotovog skupa ili ne. Za novu iteraciju dolaze u obzir samo točke za koje nismo sigurni jesi li unutar Mandelbrotovog skupa ili ne. Prilikom nove iteracije, povećava se brojač za svaki piksel. Nakon mnogo iteracija, slika se boja sukladno s distribucijom vrijednosti brojača po pikselima. Rezultat je slika gustoće pri čemu su najsvjetliji dijelovi regije gdje $|z_n|$ najsporije raste prema beskonačnosti.

5.4.2 Julijevi skupovi

Julijevi skupovi, nazvani po Gastonu Juliji- poznatom francuskom matematičaru, su usko vezani uz Mandelbrotov skup zbog toga što su definirani pomoću iste formule. Julijev skup je skup svih točaka z_n kompleksne ravnine za koje je niz $(|zn|)$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$, konvergira nekoj točki pri čemu je c kompleksan broj koji određuje specifičan Julijev skup. Julijev skup se može pojaviti u dva osnovna oblika- može biti povezan i nepovezan. Konstanta c se nalazi u Mandelbrotovom skupu ako i samo ako je pripadni Julijev skup povezan.



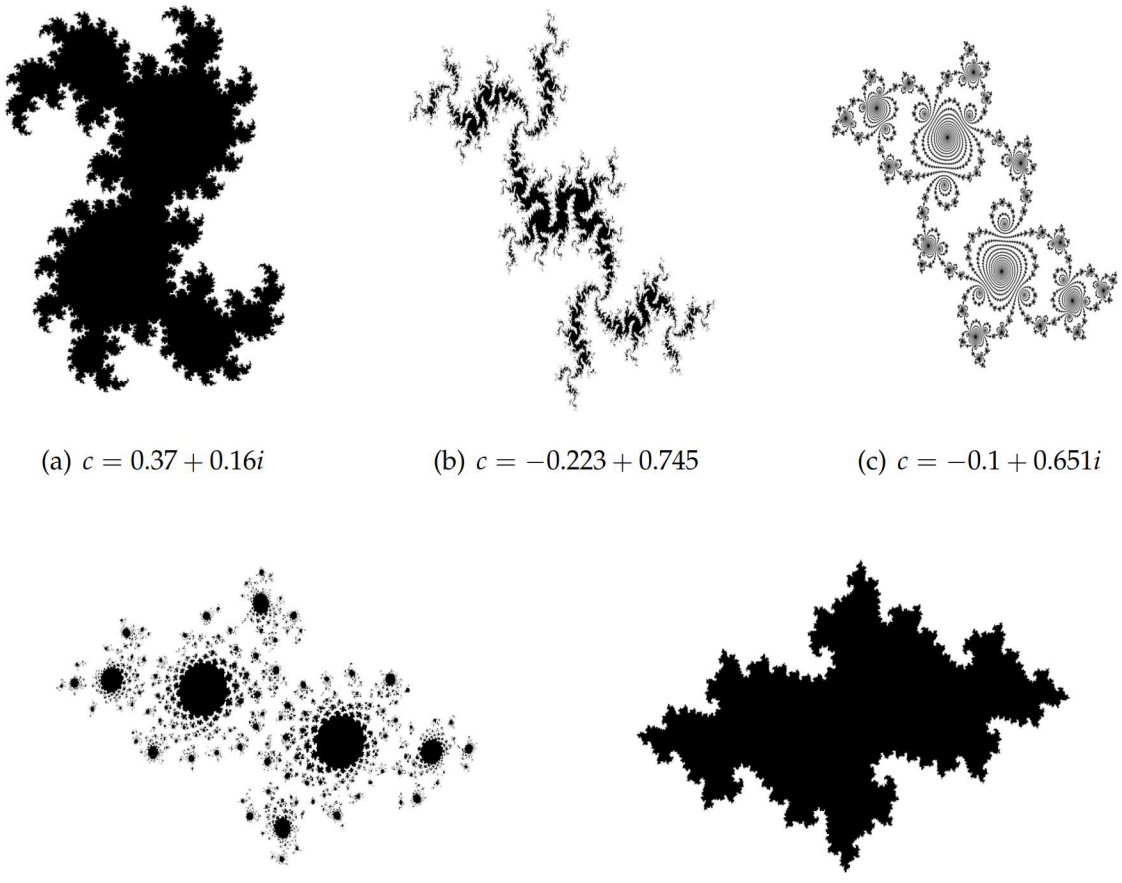
(a) $c = 0.6$ (b) $c = -0.5 - 0.56i$

Slika 5.22: Promjena Julijevog skupa za različit izbor konstante c

Za svaki izbor konstante $c \in \mathbb{C}$ Julijev skup je neprazan, kompaktan centralno simetričan skup s obzirom na ishodište. Za svaku realnu konstantu c Julijev skup koji pripada toj konstanti je također osnosimetričan s obzirom i na x i na y os.

Definicija 1 *Skup je potpuno nepovezan ukoliko za svake dvije točke tog skupa postoji okolina koja sadrži jednu točku i ne sadrži drugu.*

Jedno od najzanimljivijih svojstava Julijevog slupa je taj što je Julijev skup ili povezan ili potpuno nepovezan.



(a) $c = 0.37 + 0.16i$ (b) $c = -0.223 + 0.745$ (c) $c = -0.1 + 0.651i$

(d) $c = -0.96 + 0.3i$ (e) $c = -0.7 - 0.2i$

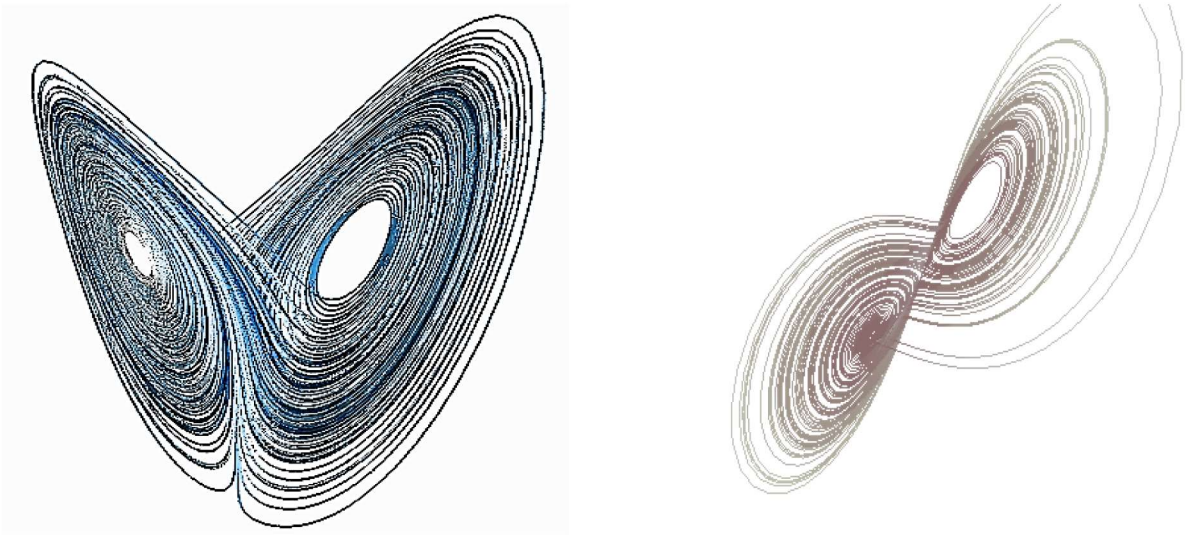
Slika 5.23: Promjena Julijevog skupa za različit izbor konstante c

Mnogo nepovezanih Julijevih skupova ima strukturu nalik na Cantorov skup ili Cantorovu prašinu kao npr. Julijev skup koji pripada konstanti $c = 1$.

5.4.3 Čudni atraktori

Nepredvidljivo ponašanje sustava se oduvijek nazivalo kaotičnim te je provociralo maštu znanstvenika i umjetnika. Čudni atraktori su se prvi put pojavili 1971. u radu pod nazivom *O prirodi turbulencije* Davida Ruellea i Florisa Takensa. Neki ljudi preferiraju naziv kaotični atraktor, jer to što se činilo čudno u vrijeme kada je otkriveno je sada uvelike razjašnjeno. Jednadžbe koje predstavljaju kaos imaju rješenja koja su nestabilna, ali ograničena. To znači da se nikada ne stabiliziraju oko jedne točke niti ponavljaju određeni uzorak, ali ni ne odskaču u beskonačnost. Na drugi način to možemo reći da su točke lokalno nestabilne, ali je sustav globalno stabilan. U slučaju kojeg ćemo promatrati, početni uvjeti su vezani uz poseban tip atraktora koji se naziva čudni atraktor, koji nije niti točka niti čak konačan skup točaka, već kompliciran geometrijski objekt s određenim svojstvima. Dakle, matematička rješenja kaotičnih procesa proizvode čudne atraktore. Konstrukciju započinjemo koordinatama inicijalne točke te svaku iduću točku određujemo upotrebom danih formula. Najpoznatiji atraktor je Lorenzov atraktor određen jednadžbama:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$



Slika 5.24: Lorenzovi atraktori

6 Fraktalna dimenzija

Intuitivno dimenziju nekog objekta shvaćamo kao broj realnih brojeva potrebnih kako bismo identificirali svaku točku na promatranom objektu. Razvojem matematike, odnosno pojavom prvih krivulja koje popunjavaju prostor kao što je Hilbertova krivulja ili Peanova krivulja takva definicija nije bila dovoljno dobra. Obje krivulje se sastoje od dužina, dimenzije 1, koje popunjavaju dio ravnine, dimenzije 2. Upravo njihove konstrukcije su pokazale da se dimenzija objekta može promijeniti neprekidnim preslikavanjem i time se suprotstavljale intuitivnoj definiciji dimenzije. Otprilike u isto vrijeme, Georg Cantor je definiranjem bijekcije između pravca i ravnine pokazao da pravac i ravnina imaju istu kardinalnost. Iz ovih rezultata i Henri Lebesgueovog pristupa problemu razlikovanja euklidskih prostora različitih dimenzija, Felix Hausdorff je formulirao egzaktan način mjerenja skupa. To znači da je prije mjerenja skupa potrebno odrediti prikladnu mjeru. Na primjer, ukoliko promatramo interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$:

- U smislu kardinalnosti, ima mjeru ∞ (s obzirom na dimenziju 0)
- U smislu duljine, ima mjeru $b - a$ (s obzirom na dimenziju 1), a
- U smislu površine, ima mjeru 0 (s obzirom na dimenziju 2).

Hausdorffova ideja je bila naći vrijednost u kojoj se mjera mijenja iz beskonačnosti do 0. Također je u ovoj ideji bio problem definirati mjeru na način da joj je vrijednost jedinstvena.

6.1 Zahtjevi za dobru definiciju dimenzije

Postoji mnogo različitih dimenzija, uključujući topološku, Hausdorffovu, dimenziju samosličnosti, *box-counting* dimenziju, euklidsku i druge. U ovisnosti o danom problemu, nekad je korisnije promatrati problem u drugačijoj dimenziji. Prije definiranja različitih dimenzija potrebno je odrediti zahtjeve koji su poželjni za svojstva dimenzije. Intuitivno, možemo očekivati da će dimenzija objekta biti povezana s njegovom mjerom. Na primjer, kada je objekt skaliran za faktor 2, mjera segmenta bi se povećala za $2^1 = 2$, mjera pravokutnika za $2^2 = 4$, a mjera paralelepipeda za $2^3 = 8$ pri čemu eksponent u danim jednakostima smatramo dimenzijom objekta. Preciznije:

$$dim(F) = \frac{log\Delta\mu(F)}{log\frac{1}{p}}$$

pri čemu je $\Delta\mu(F)$ promjena u mjeri F pri skaliranju za faktor $\frac{1}{p}$.

Da bismo odredili neke zahtjeve definicije dimenzije, definiramo potrebne pojmove.

Definicija 2 *Topološka mnogostrukost M dimenzije n, $dimM = n$, je topološki prostor M koji zadovoljava iduće uvjete:*

- *M je Hausdorffov tj. za svaki par točaka $p, q \in M$ postoje disjunktni otvoreni podskupovi $U, V \subset M$ takvi da je $p \in U, q \in V$;*
- *Postoji prebrojiva baza za M*
- *M je lokalno euklidski dimenzije n, tj. za svaki točku iz M postoji okolina koja je homeomorfna otvorenom podskupu od $\mathbb{R}^n$*

Definicija 3 *Za funkciju $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je Lipschitz neprekidna s konstantom $L > 0$ ukoliko za svaki $x, y \in E$ vrijedi:*

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||.$$

Neki zahtjevi za dimenziju:

1. Ukoliko je F bilo koja n-dimenzionalna mnogostrukost, tada je $dimF = n$.
2. Za otvoren podskup $F \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi $dimF = n$.
3. Ukoliko je F prebrojiv, vrijedi $dimF = 0$.
4. Ukoliko je $E \subset F \Rightarrow dimE \leq dimF$.
5. $dim(E \cup F) = max(dimE, dimF)$.
6. $dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = max_i\{dimF_i\}$.
7. Ukoliko je $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzova, tada je $dimf(E) \leq dim(E)$.

Prva tri svojstva na popisu zahtjeva su formalizacije povijesnih ideja koje su matematičari iznijeli koje osiguravaju da je klasična definicija očuvana.

6.2 Dimenzija šestara

Motivacija za novi koncept dimenzije je proizašla iz poznatog rada "Koliko je duga obala Britanije?" već spomenutog pri razmatranju svojstva hrapavosti fraktala. Bit ovog problema je ta što se duljina obale povećava eksponencijalno profinjenjem mjere koju koristimo. Npr. kada bismo pokušali izmjeriti glatku krivulju kao što je kružnica promjera 1000 kilometara, dobili bismo podatke slične podacima prikazanima u *Tablici 3*. Možemo primijetiti da se ukupna duljina stabilizira oko 3141 kilometara što je i približno točna udaljenost.

p- razmak šestara	n- broj zareza šestarom	Ukupna duljina
500.00 km	6	3000 km
259.82 km	12	3106 km
131.53 km	24	3133 km
65.40 km	48	3139 km
32.72 km	96	3141 km
16.36 km	192	3141 km

Tablica 3: Podaci dobiveni mjerenjem duljine kružnice pomoću šestara

Ukoliko promotrimo podatke dobivene na isti način dane u *tablici 4*, međutim nad kartom Britanije, primjetit ćemo da se ovdje duljina ne stabilizira već se konstantno eksponencijalno povećava.

p- razmak šestara	Ukupna duljina
500.00 km	2600 km
100 km	3800 km
54 km	5770 km
17 km	8640 km

Tablica 4: Podaci dobiveni mjerenjem duljine obale Britanije pomoću šestara

Zbog velikih veličina koje se mjere i malih duljina razmaka šestara, ovakve podatke je prikladno prikazati pomoću log/log grafa.

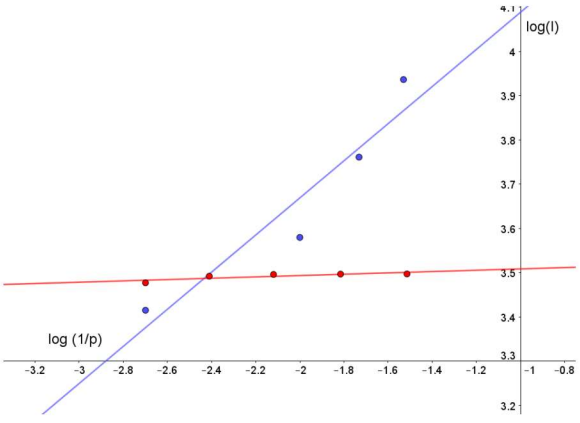
Pravac koji najbolje opisuje podatke za obalu ima nagib približno 0.36, dok je pravac koji opisuje podatke za kružnicu horizontalan pravac. Ukoliko analitički želimo pronaći vezu između l i p, možemo zapisati:

$$log(l) = dlog\frac{1}{p} + b$$

odnosno,

$$l = cp^{-d}$$

za neku konstantu c. Tada, za duljinu obale Britanije vrijedi:



Slika 6.1: log/log graf za obalu i kružnicu

$$l \propto \frac{1}{p^{0.36}}$$

Iz čega možemo zaključiti da ukoliko razmak šestara $p \to 0$, $l \to \infty$, odnosno da je prava duljina obale u nekom smislu beskonačna.

Ovi se rezultati odnose na teorijski smisao karte zbog toga što je preciznost praktičnog mjerenja uvijek uvjetovana rezolucijom i veličinom. Iako ovo pravilo nema praktičnih primjena za mjerenje duljina, ono nam daje druge bitne podatke poput kompleksnosti krivulje. Neka je $D = 1 + d$ mjera kompleksnosti. Tada je kompleksnost kružnice jednaka 1, a za većinu obala između 1 i 2 te ove vrijednosti intuitivno možemo povezati s dimenzijom. Proširujući ovu ideju određivanja dimenzije na fraktal odrediti ćemo dimenziju Kochove krivulje. Neka je razmak šestara $p = \frac{1}{3^k}$ kao i u konstrukciji u k-tom koraku.

Razmak šestara	**Ukupna duljina**
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{9}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{3^n}$	$(\frac{4}{3})^n$

Tablica 5: Podaci dobiveni mjerenjem duljine Kochove pahulje pomoću šestara

Preko jednakosti $l = \frac{1}{p^d}$ dolazimo do toga da je $d = 0.26$ odnosno tražena dimenzija $D = 1.26$. Budući da je dimenzija Kochove pahulje manja od dimenzije koju smo odredili za obalu Britanije, možemo zaključiti da je obala razvedenija, odnosno kompleksnija je.

Iz pokazanog možemo zaključiti da, iako mjera kao što je duljina može biti beskonačna ili nedefinirana za fraktale, moguće je definirati mjeru za stupanj kompleksnosti. Dimenzija šestara je jedna od dimenzija kojom možemo izraziti traženo.

(a) p = 100 km (b) p = 50 km

Slika 6.2: Aproksimacija duljine obale Velike Britanije

6.3 Dimenzija samosličnosti

Nakon mjerenja duljine Kochove krivulje šestarom, očito je da svojstvo samosličnosti daje druge mogućnosti mjerenja na direktniji način. Kao i sve samoslične krivulje, Kochova krivulja se može prikazati kao unija smanjenih kopija same sebe za faktor $s = \frac{1}{3}$. Promotrimo prvo liniju, kvadrat i kocku. Ukoliko liniju skaliramo za faktor $s = \frac{1}{3}$, u početni oblik možemo smjestiti 3 dijela, ukoliko ju skaliramo za faktor $s = \frac{1}{6}$, tada u početni oblik možemo smjestiti 6 dijelova. Ukoliko kvadrat skaliramo za $s = \frac{1}{3}$, tada u početni oblik možemo smjestiti 9 umanjenih dijelova, ukoliko ga skaliramo za faktor $\frac{1}{n}$ tada u početni oblik možemo smjestiti n^2 umanjenih dijelova. Na sličan način možemo zaključiti da i ukoliko kocku skaliramo za faktor $\frac{1}{n}$, u početni oblik ćemo moći smjestiti n^3 umanjenih kocki. Odavdje je očita relacija:

$$a = \frac{1}{s^D}$$

pri čemu je a broj skaliranih dijelova koji stanu u početni oblik, a s faktor skaliranja. Ukoliko reduciramo n-dimenzionalni euklidski prostor za faktor k, tada će u svakom linearno nezavisnom smjeru objekt u tom prostoru biti smanjen za faktor k. Tada u svakom smjeru, objekt može upasti u sebe $\frac{1}{k}$ puta. To se događa n puta, čime dobijamo $a = \frac{1}{k^n}$. Promotrimo sada ovo za Kochovu krivulju. Ukoliko se Kochova krivulja skalira za faktor $\frac{1}{3}$, u sebe može upasti 4 puta. Prema tome, iz $a = \frac{1}{s^D}$ dobivamo

$$D = \frac{log(4)}{log(3)} \approx 1.26$$

što se poklapa s dimenzijom šestara Kochove krivulje.

Iz ovih rezultata možemo zaključiti da je dimenzija samosličnosti u srži isto što i dimenzija šestara. Dalje iz tog zaključujemo da se dimenzije vrlo nepravilnih objekata mogu izračunati pomoću dimenzije šestara. Odnosno, vrlo nepravilne objekte smatramo samosličnima.

Fraktal	**Faktor skaliranja**	**Broj dijelova**	**Dimenzija samosličnosti**
Cantorov skup	$\frac{1}{3^n}$	2^n	0.609
Trokut Sierpinskog	$\frac{1}{2^n}$	3^n	1.5850
Tepih Sierpinskog	$\frac{1}{3^n}$	8^n	1.8928
Mengerova spužva	$\frac{1}{3^n}$	20^n	2.7268
Peanova krivulja	$\frac{1}{3^n}$	9^n	2

Tablica 6: Dimenzije samosličnosti klasičnih fraktala

6.4 *Box-counting* dimenzija

Dosada smo dimenziju određivali fraktalima koji su sastavljeni od jedne linije, međutim, isti se postupak ne može primjenjivati za određivanje dimenzije nepravilnih, raštrkanih fraktala u kojima se ne primjećuje dovoljan stupanj samosličnosti. Umjesto toga, potrebno je definirati novi način određivanja dimenzije koji je primjenjiv i kod spomenutih fraktala. Za takve potrebe postoji *Box-counting* dimenzija. Ova je metoda određivanja dimenzije primjenjiva u generalnim slučajevima bez uvjeta samosličnosti ili povezanosti te je kao takva vrlo korisna u praktičnim primjenama.

Box-counting dimenzija se određuje na način da se objekt kojemu želimo odrediti dimenziju postavi u mrežu linija koje tvore kvadrate stranice δ. Broj kvadrata koji pokrivaju odnosno sadrže dio fraktala se označuje s N_δ. Nakon određivanja N_δ potrebno je odrediti log/log graf pri čemu na y osi postavljamo vrijednosti $log(N_\delta)$ a na x os postavljamo vrijednosti $log(\frac{1}{\delta})$ te označimo točke pripadnih vrijednosti. Nagib pravca koji najbolje opisuje dobivene točke predstavlja dimenziju fraktala. Odnosno, za neku konstantu b vrijedi:

$$log(N_\delta) = Dlog(\frac{1}{\delta}) + b$$

Ovim postupkom za samo jednu promjenu vrijednosti δ dobivamo da je dimenzija obale Velike Britanije $D \approx 1.31$ što je približno jednako vrijednosti 1.36 koju smo dobili za dimenziju šestara.

6.5 Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova dimenzija daje sveobuhvatnu definiciju fraktalne dimenzije i može se koristiti kao mjera za metričke prostore. Kao takva može se koristiti samo za metričke prostore jer koristi koncepte kao što su duljina i volumen. Ovo je shvaćanje dimenzije, iako vrlo bitno s teorijskog stajališta, teško upotrebljivo za praktične probleme.

Definicija 4 *Udaljenost između bilo koje dvije točke $x, y \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ jednaka je*

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Definicija 5 *Dijametar skupa $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se definira kao*

$$diam\ U = sup\{d(x,y) : x, y \in U\}$$

Definicija 6 *Otvoreni pokrivač skupa $A \subset \mathbb{R}^n$ je prebrojiva familija otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ čija unija sadrži A.*

Označimo li s $h^s_\epsilon(A)$ izraz:

$$h^s_\epsilon(A) = inf\{\sum_{i=1}^{\infty} diam(U_i)^s : \{U_1, U_2, ..\} \text{ otvoreni pokrivač skupa A takav da je } diam\, U_i < \epsilon\}$$

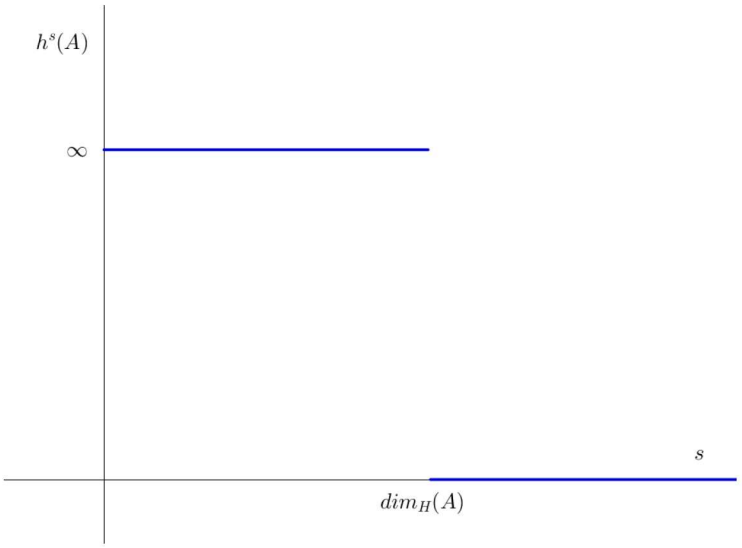
Puštajući $\epsilon \to 0$ dobivamo Hausdorffovu mjeru skupa A:

$$h^s(A) = \lim_{\epsilon \to 0} h^s_\epsilon(A)$$

Za određivanje Hausdorffove mjere skupa potrebno je, dakle, pronaći pokrivač skupa kome je suma dijametara elemenata minimalna. Za $\mathbb{R}^n$ ovo je ekvivalentno pokrivanju skupa s n-dimenzionalnim kuglama. Hausdorff je također dokazao da za $t > s$ ukoliko je $h^s(A) < \infty$ tada je $h^t(A) = 0$. Nadalje, postoji $n \in \mathbb{R}, n \neq \infty, 0$ takav da:

$$h^s(A) = \begin{cases} \infty, & \text{za } s < dim_H(A) \\ n, & s = dim_H(A) \\ 0, & \text{za } s > dim_H(A) \end{cases}$$

pri čemu je $dim_H(A)$ Hausdorffova dimenzija skupa A.



Slika 6.3: Graf Hausdorffove mjere

Da bismo razvili intuitivnije razumijevanje Hausdorffove dimenzije, promotrimo krivulju u $\mathbb{R}$ duljine L. Cilj je pokriti danu krivulju s kuglama tako da je suma dijametara potenciranih na s minimizirana. Pretpostavimo da je moguće da su dijametri svih kugli pokrivača jednaki te ga označimo s δ. Broj kugli u pokrivaču će tada iznositi $\frac{L}{\delta}$. Tada je za $\delta < \epsilon$ Hausdorffova mjera dana izrazom:

$$h^s_\epsilon(A) = \frac{L}{\delta}\delta^s = L\delta^{s-1}$$

$$h^s(A) = \lim_{\delta \to 0} L\delta^{s-1}$$

Odnosno:

$$h^s(A) = \begin{cases} \infty, & \text{za } s < 1 \\ L, & \text{za } s = 1 \\ 0, & \text{za } s > 1 \end{cases}$$

Prema tome, vrijedi da je $dim_H(A) = 1$. Promotrimo sada kvadrat stranice duljine L. Pretpostavimo da postoji pokrivač koji se sastoji od prebrojivo mnogo kugli. Tada suma površina kugli mora biti jednaka L^2, odnosno

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi \frac{\delta_i^2}{4} = L^2.$$

Neka je $s = 2$ očekivana dimenzija.

$$h^2(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{4}{\pi} L^2 = \frac{4}{\pi} L^2$$

Budući da je $h^2(A) \neq 0, \infty$ slijedi da je $dim_H(A) = 2$.

6.6 Veza između dimenzija

Hausdorffova dimenzija je snažno vezana uz dimenziju samosličnosti. Ukoliko je $F \subset \mathbb{R}^n$ i $\lambda > 0$ tada vrijedi:

$$h^s(\lambda F) = \lambda^s h^s(F)$$

pri čemu je $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$. Odnosno, ukoliko povećamo fraktal za faktor λ, s-dimenzionalna Hausdorffova mjera se poveća za λ^s. Uzmimo da je $s = D$ pri čemu je D Hausdorffova dimenzija,

$$\frac{h^D(F)}{h^D(\lambda F)} = \frac{1}{\lambda^D}.$$

Ukoliko λ promatramo kao faktor smanjivanja, D-dimenzionalna Hausdorffova dimenzija će dati D- dimenzionalan volumen skupa, odnosno, $\frac{h^D(F)}{h^D(\lambda F)}$ je broj kopija smanjenog skupa koje može stati u originalni skup. Prema tome je $a = \frac{1}{\lambda^D}$ dimenzija samosličnosti skupa F.

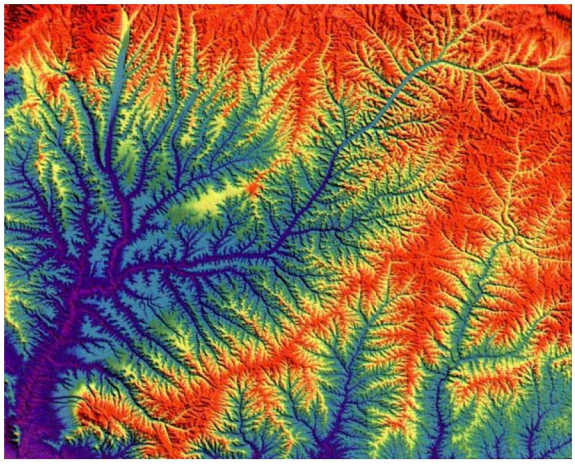
Hausdorffova dimenzija također može opravdati *box-counting* dimenziju, iako se ne poklapaju za sve skupove. *Box-counting* dimenzija izbjegava problematiku određivanja najmanjih dijametara skupa te za pokrivač uzima skup kvadrata duljine δ.

7 Primjena fraktala i teorije dimenzije

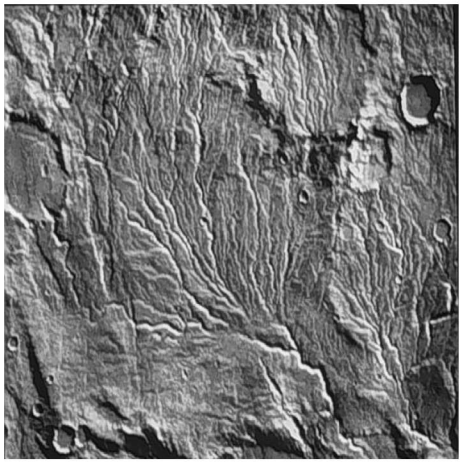
Kao što je ranije spomenuto, fraktalna se geometrija razvila iz težnje za razumijevanjem i opisivanjem prirodnih fenomena. Budući da je priroda kroz godine evolucije razvila savršene ekološke sustave koji su optimalni u stvaranju energije i iskorištavanju resursa kojima raspolažu, ljudi pokušavaju imitirati prirodne pojave u svom životu, arhitekturi i tehnologijama poput računalne grafike i raznih uređaja. Mnoge ideje za moderne tehnologije su se razvile iz prirodnih izvora zbog sve veće potrebe za minimizacijom prostora i optimizacijom brzine. Također, zbog toga što je ljudsko tijelo u suštini prirodna tvorevina, mnogi ljudski organi su fraktalne prirode te to vodi do mnogih potencijalnih primjena fraktala u medicini, biologiji i patologiji. Zbog suštinski jednostavne implementacije no kompleksnog rezultata, fraktali su našli svoju primjenu i u kriptografiji te financijskim znanostima.

7.1 Fraktalna priroda geografskih fenomena

Fraktali su ključni geografski alati za mjerenje i modeliranje. Leonardo da Vinci je već u 15. stoljeću zamijetio samosličnо grananje rijeka. Slično kao krvožilni sustav u tijelu, planet Zemlja ima fraktalnu mrežu rijeka. Obrasci riječnih korita se formiraju riječnim tokom te erozijom tijekom vremena. Fascinantno svojstvo riječnih mreža je to da skupljaju velike količine vode s vrlo velike površine zemlje te ju pohranjuju u kompresirano područje.



(a) Bruce D. Malamund, Kings College London- riječna mreža u Kini



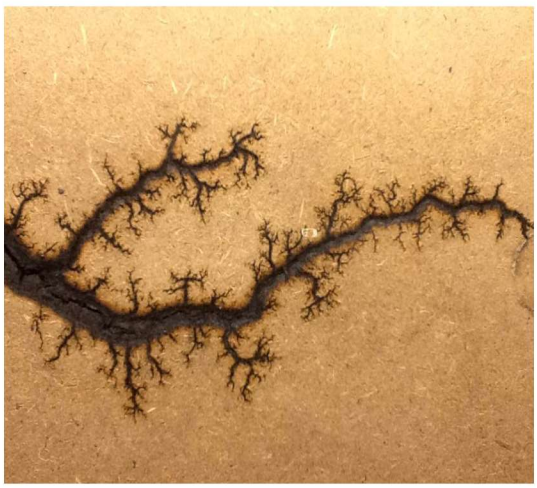
(b) Brian Fessler, Lunar and Planetary Institute- korito drevne rijeke na Marsu

Slika 7.1: Fraktalna priroda riječnih korita

Drugi prirodni fenomen fraktalne prirode su munje. Munje, zbog svoje prirode da umjesto traženja najkraćeg puta, traže najbrži put pražnjenja. Iz tog razloga prate kaotičan, nazubljen put. Grmljavina je zvuk nastao prezagrijavanjem zraka koji prati fraktalni uzorak munje. Ukoliko drvo premažemo zasićenom otopinom sode i vode te kroz dva

čavla zabijena na krajevima daske provedemo struju, na drvu će se pojaviti uzorak nalik na munju. Takvi se uzorci nazivaju Lichtenbergove figure ili Lichtenbergovi fraktali.

(a) Jef Duncan- munja u Albequerque, Meksiko



(b) Lichtenbergov fraktal

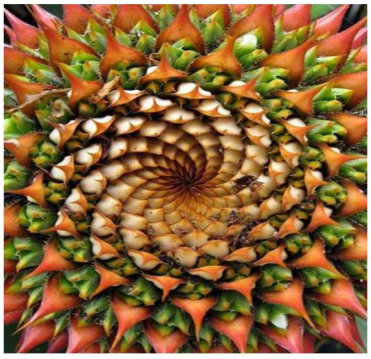
Slika 7.2: Fraktalna priroda elektriciteta

Također, temeljeno na Benoit Mandelbrotovom istraživanju, može se pokazati da se distribucija kišnih oblaka u Zemljinoj atmosferi može fraktalno modelirati. Može se pokazati i da sami oblaci, kao i mnoge druge prirodne pojave imaju fraktalnu strukturu.

(a) Paprat

(b) Led na staklu

(c) Drvo



(d) Ananas

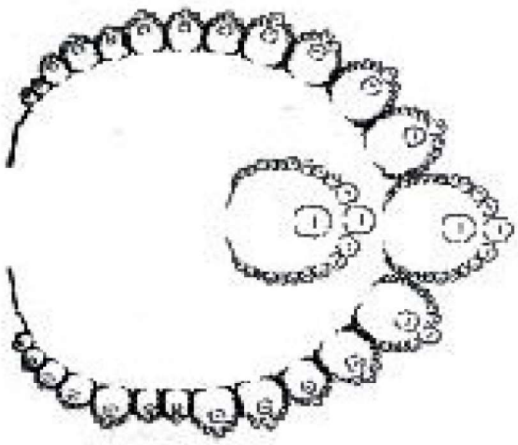
(e) Aloe vera

(f) Romanesco brokula

Slika 7.3: Fraktali u prirodi

7.2 Fraktalna geometrija u arhitekturi

U današnje je vrijeme, više nego ikada, naglašena ne samo funkcionalnost već i dizajn prostora u kojima živimo i radimo. Također, iznimno je bitna iskoristivost prostora i materijala kojima raspolažemo, efikasnost i energetska učinkovitost. Ljudi su u gradnji svojih nastambi pribjegavali masivnim, pravilnim oblicima i u tom su procesu nastajale glomazne zgrade i kuće pravilnih, euklidskih oblika. Promatrajući pobliže prirodu i životinjske nastambe, ljudi su primijetili ljepotu matematičkih oblika te veliku efikasnost pri očuvanju energije i manjem utrošku materijala.



Slika 7.4: Tlocrt nastambe Ba- lla

Arhitekti prostora Europe su većinom pribjegavali rješenjima koje uključuju ravne linije, stabilnost i masivnost pri čemu su gubili na efikasnosti te koristili velike količine materijala. Međutim, dolaskom u Afriku su primijetili drugačije nastambe. Većina drevnih afričkih nastambi prikazuju kompliciranа fraktalna svojstva. Europljani su takav način gradnje smatrali primitivnim. Jedan od primjera afričke fraktalne gradnje se nalazi u južnoj Zambiji poznat pod nazivom "Ba-lla". Indijski stil gradnje je rijetko pribjegavao čistim, ravnim linijama u gradnji. Većina hramova se sastojala od kula od kojih se svaka sastojala od vlastitih kula.

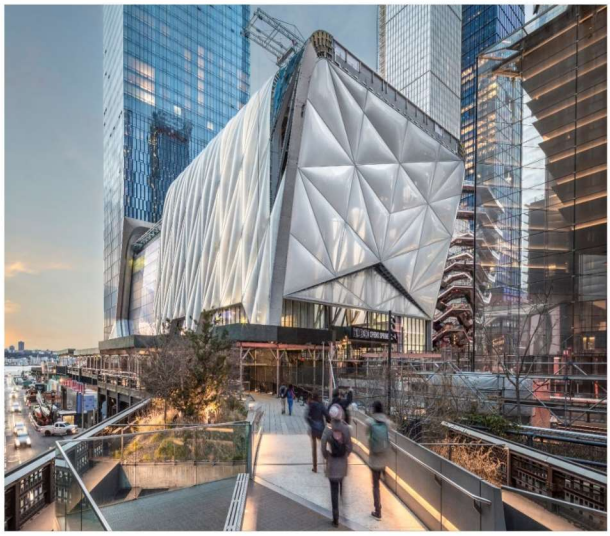
(a) Brihadeshwara hram, Thanjavur

(b) Kandariya Mahadeva hram, Khajuraho

Slika 7.5: Indijska arhitektura

U Europi i Americi, osim katedrala u gotičkom razdoblju, fraktalna arhitektura tek nalazi svoje mjesto u modernom okruženju.

(a) Lideta Mercato, Xavier Vilalta



(b) The Shed, New York

(c) Bates Smart, Federation Square, Melbourne

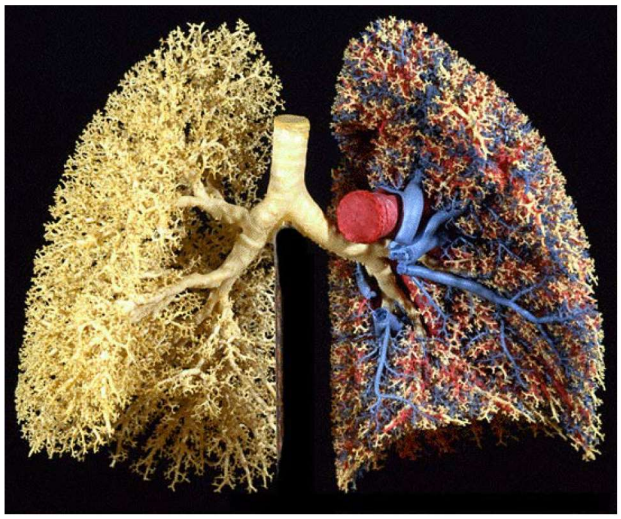
(d) Elytra Filament Paviljon, Roland Halbe

Slika 7.6: Moderna arhitektura

7.3 Fraktali korišteni u medicini i fiziologiji

Pogreške u modeliranju ljudskih funkcijskih karakteristika su došle do izražaja u drugoj polovici 20. stoljeća kada je Edwald Weibel predstavio ideju da su ljudska tijela fraktalnog dizajna. Također je pokazao da je fraktalni dizajn strukturno i funkcionalno učinkovit jer koristi vrlo malo energije da bi se održavao. Iz te tvrdnje nije iznenađujuće da se fraktalne strukture nalaze posvuda u prirodi. Fizički sustavi kao stabla krvnih stanica, pluća, DNK, otkucaji srca pokazuju određene fraktalne karakteristike. U živućim organizmima možemo promatrati tri vrste fraktala: geometrijski, statistički i dinamički. Geometrijske fraktale možemo pronaći u strukturi pluća sisavaca, arterijskim i venskim

sustavima. Statistički fraktali određuju svojstva distribucije intervala u otkucajima srca sisavaca, disanju, hodanju i ispaljivanju neurona. Dinamički fraktali opisuju nelinearna dinamička svojstva mreža koje provode određene operacije u točno određenim vremenskim razmacima. Potpuno samoslične strukture egzaktno matematički ne postoje već se samosličnim objektima smatraju figure koje pokazuju samosličnost na više, međutim konačno, razina.



Slika 7.7: Prikaz ljudskih pluća s prikazanim krvnim žilama na desnoj strani, Ewald Weibel

Najintuitivniji geometrijski fraktal u našem tijelu su pluća. Pluća imaju tipičnu razgranatu strukturu. Grane variraju u duljini i promjeru te nakon određenog broja generacija grananja završavaju alveolama. U prosjeku, pluća odraslog čovjeka imaju 23 generacije grananja pri čemu su zadnjih 8-10 alveole. Isti uzorak prikazuje i plućna arterija koja u prosjeku ima 28 generacija grananja. Mjerenja su pokazala da opisana grananja i njihova struktura maksimalno smanjuju otpor protoka u granama, pružaju uvjete za miran i jednoličan protok te optimalne uvjete za miješanje zraka i krvi.

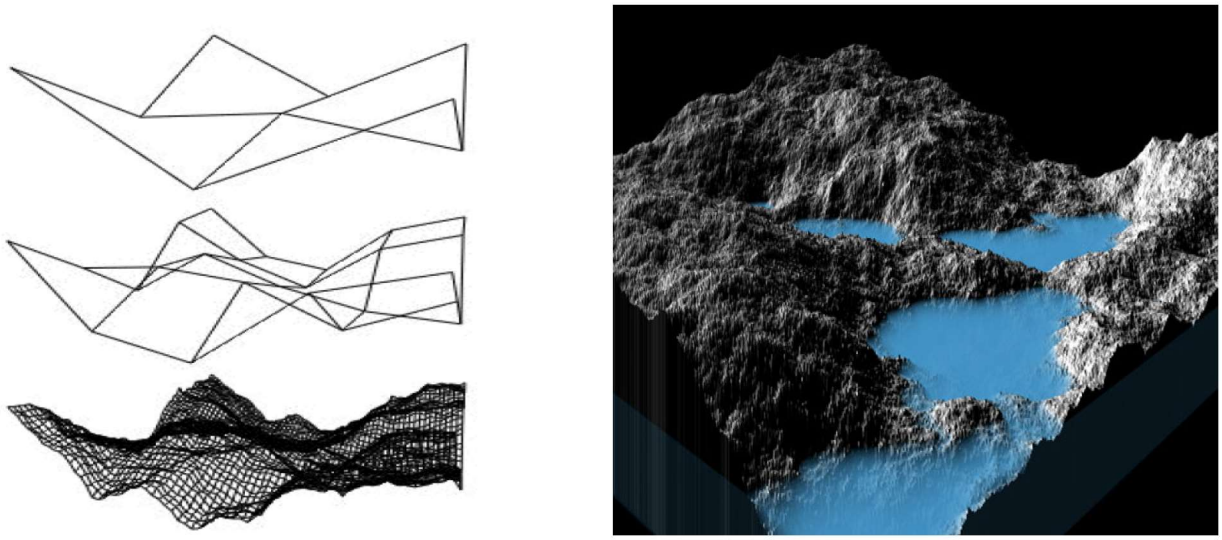
Bitne strukture srca- koronarni sustav, HisPurkinje sustav i srčane niti pokazuju fraktalne karakteristike. Prikazana struktura srca omogućuje minimalni gubitak energije pri trenju. Prema tome, nelinearnost ljudskih sastavnih dijelova je ključan dio normalne fiziološke funkcije. Gubitak te nelinearnosti ili povećanje kompleksnosti strukture sustava, odnosno smanjenje dimenzije iste, upućuje na određene bolesti promatranih sustava. Starenje organizma također utječe na gubitak kompleksnosti. Bioinžinjeri su proučavanjem fraktalnih struktura istražili spektar mogućnosti 3D- printanja zamjenskih organa.

Slika 7.8: Prikaz krvnih žila unutar srca, Hans van Beek i James B.Bassingthwaighte, Sveučilište u Washingtonu

Nadalje, od praktičnih primjena fraktalne dimenzije izdvajaju se izuzetne primjene u neinvazivnoj karakterizaciji zloćudnosti tumora, također pružaju brzu i iskoristivnu metodu mjerenja nepravilne distribucije kolagena u jetri. Nadalje, neuronska je mreža promatrana kao fraktal, također se pretpostavlja da je cijeli mozak fraktalne strukture te da se takav razvio kao produkt evolucije. Na sličan način se promatraju stanice. Iako se prednosti fraktalne geometrije tek počinju proučavati, u medicini postoji velik potencijal za rast. U budućnosti će fraktalna geometrija i procesiranje slika te modeliranje pomagati pri klasificiranju različitih bolesti, razlikovanju između benignih i malignih stanica, određivanju težine bolesti i slično.

7.4 Fraktali u računalnoj grafici

Računalna grafika je sveprisutna u današnjoj tehnologiji. Modeliranje i renderiranje realnih prirodnih figura i terena se najviše koristi u računalnim igrama, no prisutno je i u različitim programima za modeliranje te simuliranje, profesionalnim arhitektonskim i inženjerskim softverima. Fraktalno modeliranje pruža mogućnost brzog i realističnog modeliranja prirodnih pojava. Kroz rad se može vidjeti nekoliko primjera kao što je modeliranje oblaka i planina pomoću Perlinovog šuma *(Slika 4.1)*, modeliranje drveća i grmova. Zbog realističnosti, no i brzine kojom bismo željeni generirati različite teksture, pogodno je koristiti računalni program koji razvija traženu strukturu od početnog jednostavnog lika što je točno to što se postiže fraktalnom geometrijom. Tako se danas u računalnoj grafici fraktalna geometrija koristi za generiranje različitih tekstura tla, vodenih tijela i njihovih gibanja, oblaka, rijeka, kretanja fluida, vegetacije, kože i krzna i slično.

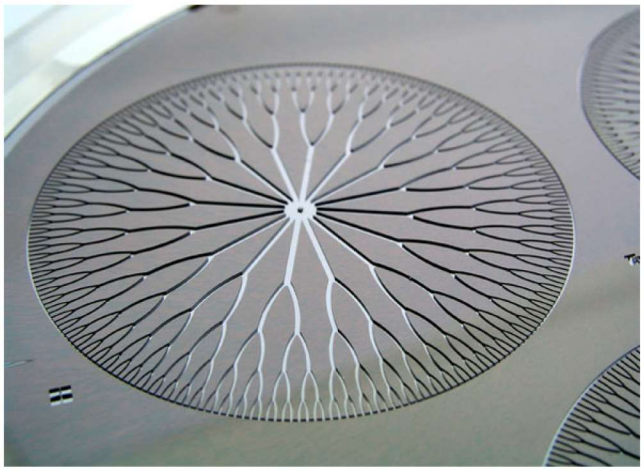


Slika 7.9: Generiranje grafičkih terena pomoću fraktala

7.5 Fraktalni uređaji

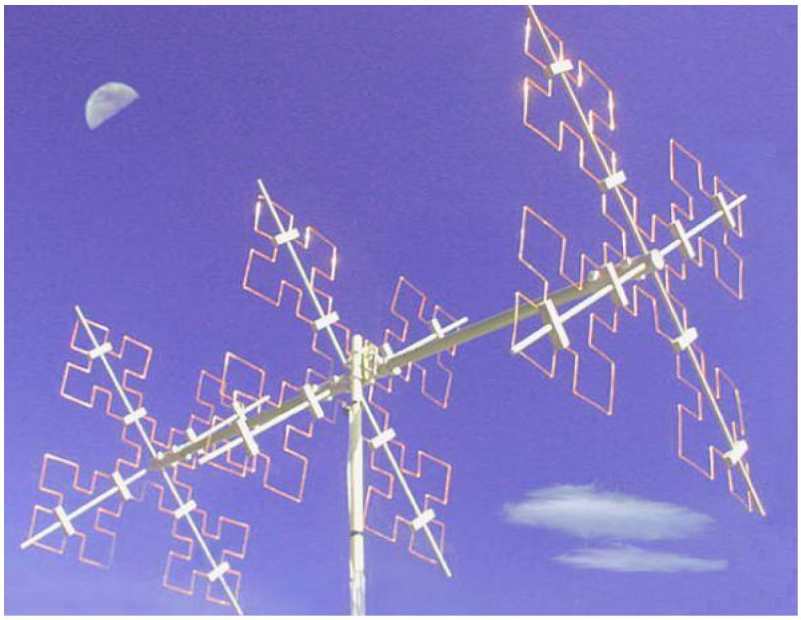
Često se u životu susrećemo s problemima za koje je priroda već našla rješenje. Iz tih se razloga fraktalne strukture sve više implementiraju u inženjerstvu te uključuju u različite tehnološke uređaje. Zbog njihovog oblika i efikasnosti, uređaji mogu biti manji i kompaktniji.

Kako računala postaju sve manja i brža, generalno proizvode više topline što može dovesti do neželjenih komplikacija. Inžinjeri na sveučilištu u Oregonu su razvili fraktalni uzorak koji se ugravira na silikonski čip te time dopušta rashladnoj tekućini da se uniformno rasporedi preko površine čipa te ga time maksimalno rashlađuje.



Slika 7.10: Fraktalno rješenje dizajna čipova za izmjenu topline

Druga česta uporaba fraktala je dizajniranje antena. Fraktalna antena koristi samosličan dizajn zbog maksimiziranja duljine materijala pri minimiziranju površine. Pri dizajnu antena za mobilne uređaje koriste se klasični geometrijski fraktali poput trokuta Sierpinskog ili Kochove pahulje.



Slika 7.11: Primjena fraktala u dizajnu antena

8 Sažetak

Od početka razvijanja znanosti, ljude je fascinirao svijet oko njih i pojašnjavanje načina na koji on funkcionira. Iako su s početkom uvođenja teorije dimenzije- dimenzije koja bi pobliže opisivala prirodni svijet, matematičari naišli na velik otpor tadašnje matematičke zajednice, fraktalna geometrija je našla svoje mjesto u modernom svijetu. Fraktali nam omogućuju lako modeliranje različitih prirodnih fenomena, kako prirode, tako i strukture ljudskog i životinjskog tijela. Zbog prirode fraktala, naročito toga što se računalno iznimno lako generiraju, fraktali uvelike olakšavaju modeliranje svijeta. Priroda, nastala milijunima godina evolucije, pronašla je načine optimizacije svojih funkcija što ljudi i danas pokušavaju otkriti. Fraktalna geometrija nam pomaže stvoriti most između prirodnih struktura i elektroničkih uređaja čije performanse želimo optimizirati. Iz fraktalne geometrije se također razvila i fraktalna dimenzija, novi način promatranja prirodnih fenomena. Ova otkrića u nedavno vrijeme su otvorila vrata mnogim mogućnostima.

Ključne riječi: fraktali, fraktalna dimenzija, teorija dimenzije, primjena

9 Summary

From the beginnings of exploring science, people were fascinated by the world around them as well as explaining the way in which it functions. Even though people who started studying new dimension theory came to resistance of mathematical community, fractal geometry found its place in modern world. Fractals give us a way of easier modelling different natural phenomena, nature as well as human and animal bodies. Because of the fractal nature, especially they are easily computer generated, they are used for easy world modelling. Nature originated from millions of years of evolution, found ways for optimization for its functions which people to this day try to recreate. Fractal geometry gives a bridge between natural structures and electronic devices whose performances we want to optimize. Fractal geometry was also the ground for development of fractal dimension, new way of observing natural phenomena. These discoveries recently opened the door to many possibilities.

Key words: fractals, fractal dimension, dimension theory, application

10 Životopis

Rođena sam 15.8.1994. u Vinkovcima. Spajanjem interesa prema matematici i umjetnosti, 2009. upisujem se u Tehničku školu Ruđera Boškovića u Vinkovcima i 2013. stječem zvanje arhitektonskog tehničara. Nakon završene srednje škole 2013. upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku.

Literatura

[1] S. Avalos- Bock, *Fractal Geometry: The Mandelbrot and Julia Sets*, Chicago, 2009.

[2] I. Bodiš, *Fraktali*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Diplomski rad, Osijek 2012.

[3] C. A. Boiangiu, *Fractal Objects in Computer Graphics*, Polytechnic University of Bucharest, 2015

[4] F. de Comite *Circle Packing Explorations*, Bridges 2013: Mathematics, Music, Art, Archi-tecture, Culture, 2013

[5] B. Fredriksson, *An introduction to the Mandelbrot set*, The Royal University of Technology, 2015

[6] M. Green, *The Buddhabrot Technique*, url: `http://superliminal.com/fractals/bbrot/bbrot.htm`

[7] J. Kitchley, *Fractals in architecture*, Thiagarajar College of Engineering, 2003

[8] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, New York, 1983.

[9] M. J. Turner, *The origins of fractals*, De Montfort sveučilište, 1998.

[10] E. Pearse, *An introduction to dimension theory and fractal geometry: fractal dimensions and measures* Cornell Universiy, 2005.

[11] J. C. Sprott, *Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos* University of Wisconsin-Madison,2000.

[12] J. Sturmberg, B. J. West, *Fractals in Physiology and Medicine* The Drug Prescription Process: A Network Medicine Approach, str. 171-192, 2013