Newton - Cotesove kvadraturne formule

Marmeggi, Silvana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Silvana Marmeggi

Newton-Cotesove kvadraturne formule

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Silvana Marmeggi
Newton-Cotesove kvadraturne formule

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2019.

Newton-Cotes quadrature formulae

Sažetak

U ovom završnom radu objasnit ćemo pojam interpolacije funkcije polinomom te dokazati egzistenciju i jedinstvenost Lagrangeovog interpolacijskog polinoma. Definirat ćemo Newton-Cotesovu kvadraturnu formulu, obraditi njezine specijalne slučajeve: pravilo središnje točke, trapezno pravilo i Simpsonovo pravilo. Odredit ćemo njihove kompozitne oblike, procijeniti pogreške aproksimacije pomoću Peanove jezgre te navesti primjere.

Ključne riječi

Lagrangeov interpolacijski polinom, Newton-Cotesova kvadraturna formula, Peanova jezgra, pravilo središnje točke, trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo

Abstract

In this bachelor's thesis we will explain polynomial interpolation of a function, prove the existence and uniqueness of Lagrange polynomials. We will define the Newton-Cotes quadrature formulae and their special forms: the mid-point rule, the trapezoidal rule and Simpsons rule. For each case, we will determine the composite rule, estimate the approximation error using the Peano kernel and demonstrate an example.

Keywords

Lagrange polynomials, Newton-Cotes formula, Peano kernel, mid-point rule, trapezoidal rule, Simpsons rule

Sadržaj

1 Uvod

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te G njena primitivna funkcija. Tada se Riemannov integral funkcije f na intervalu $[a,b]$ može izračunati primjenom Newton-Leibnizove formule :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; G(b) - G(a)\,.$$

Međutim, proces računanja određenog integrala može biti znatno kompliciraniji. Primjerice, ukoliko podintegralna funkcija f nije neprekidna ili se njezina primitivna funkcija G ne može izračunati elementarnim metodama. U takvim slučajevima, često je jednostavnije aproksimirati vrijednost integrala, nego pronaći njegovu egzaktnu vrijednost. Jedne od mnogobrojnih metoda aproksimiranja određenih integrala su kvadraturne formule koje aproksimiraju određeni integral, sa ili bez ostatka (pogreške). Kvadraturne formule su općenito oblika

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k) + E(f)\,,$$

gdje su $\omega_k \geq 0$ težine, x_k čvorovi koje uglavnom odabiremo iz segmenta integracije $[a,b]$ tako da vrijedi $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$, dok je $E(f)$ pogreška aproksimacije. Kažemo da je kvadraturna formula egzaktna za polinome $p(x)$ iz $\mathcal{P}_m$, prostora svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog m, ukoliko vrijedi $E(f) = 0$, odnosno vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \sum_{k=0}^{n} \omega_k p(x_k)\,,$$

za sve polinome stupnja manjeg ili jednakog m. Red kvadraturne formule definiramo kao najveći prirodan broj m za koji je kvadraturna formula egzaktna na $\mathcal{P}_m$.

U ovom radu bavit ćemo se Newton-Cotesovim[1] kvadraturnim formulama, koje daju aproksimaciju određenog integrala za ekvidistantan skup čvorova iz segmenta integracije uz težine čija suma iznosi 1. Da bismo opisali ove metode, najprije ćemo objasniti Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji koristimo za aproksimaciju podintegralne funkcije f. Naposlijetku ćemo pojasniti neke od specijalnih oblika Newton-Cotesovih kvadraturnih formula: pravilo srednje točke, trapezno pravilo i Simpsonovo pravilo te za svaku od tih metoda odrediti pogrešku aproksimacije pomoću Peanovih jezgri i navesti primjer.

[1]Engleski matematičari Sir Isaac Newton (1642. - 1726.) i Roger Cotes (1682. - 1716.)

2 Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Neka je dana funkcija f čiju vrijednost poznajemo u točkama $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Želimo pronaći funkciju g koja na intervalu $[x_0, x_n]$ dobro aproksimira funkciju f, sa svojstvom

$$g(x_i) = f(x_i)\,, \text{ za } \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Geometrijski gledano, tražimo funkciju g čiji graf prolazi točkama $(x_i, f(x_i))$, za $i = 0, 1, \ldots, n$. Problem određivanja funkcije g s navedenim svojstvima nazivamo **problem interpolacije**.

Funkciju g uglavnom odabiremo iz klasa elementarnih funkcija (primjerice iz klase polinoma, trigonometrijskih funkcija, racionalnih funkcija,...), a proučit ćemo problem interpolacije polinomom.

Pretpostavimo da je funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i da je njena vrijednost poznata u $n+1$ točaka $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ i označimo $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Tražimo interpolacijski polinom g stupnja n oblika

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

sa svojstvom

$$g(x_i) = y_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

Uvrštavanjem uvjeta (1) u izraz za g dobivamo sustav linearnih jednadžbi :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Matricu sustava (2) nazivamo *Vandermondeova matrica*, koja je regularna jer vrijedi $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$ pa sustav ima jedinstveno rješenje. Za detaljnije pojašnjenje vidjeti [3].

Napomena 2.1.

1. *Kada bismo uz zadane podatke* (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \ldots, n$ *tražili polinom stupnja manjeg ili većeg od* n *došli bismo do problema jer u prvom slučaju rješenje sustava* (2) *ne postoji, dok u drugom rješenje nije jedinstveno*

2. *Matrica sustava* (2) *obično je loše uvjetovana pa za veliki broj čvorova interpolacije* n *ili po vrijednosti bliske čvorove interpolacije kod rješavanja sustava dolazi do velike greške.*

Postoje mnoge metode za rješavanje ovog problema, a nama će biti koristan Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma. Prije definicije, iskazujemo i dokazujemo teoreme koji jamče postojanje i jedinstvenost takvih interpolacijskih polinoma, a preuzeti su iz [7]. Neka su x_i , $i = 0, 1, \ldots, n$ realni brojevi takvi da vrijedi $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, te y_i , $i = 0, 1, \ldots, n$ realni brojevi.

Lema 2.1. *Pretpostavimo da je* $n \geq 1$. *Tada postoje polinomi* $L_k \in \mathcal{P}_n$, $k = 0, 1, \ldots, n$ *definirani s:*

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Nadalje, polinom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)\, y_k \tag{4}$$

zadovoljava uvjete interpolacije, odnosno vrijedi $p_n \in \mathcal{P}_n$ *i* $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dokaz. Za fiksni prirodani broj k, $0 \leq k \leq n$, L_k ima vrijednost 0 u točkama $x_i, i = 0, 1, \ldots, k-1, k, \ldots, n$. Dakle, $L_k(x)$ je oblika:

$$L_k(x) = C_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i), \tag{5}$$

gdje je C_k realna konstanta koju dobijemo uvrštavanjem $L_k(x_k) = 1$ u (5) :

$$C_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}. \tag{6}$$

Uvrstimo li dobiveni C_k u (5) imamo novi izraz za L_k:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}. \tag{7}$$

Kako je funkcija p_n definirana s (4) linearna kombinacija polinoma $L_k \in \mathcal{P}_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$ slijedi da je i $p_n \in \mathcal{P}_n$, a uvrštavanjem (3) u (4) dobivamo $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. □

Napomena 2.2. *Iako u prethodnoj lemi zahtijevamo* $n \geq 1$, *možemo uključiti i slučaj* $n = 0$, *tako da definiramo* $L_0(x) \equiv 1$. *Tada je polinom* p_0 *definiran s*

$$p_0(x) = L_0(x)\, y_0$$

jedinstven polinom u $\mathcal{P}_0$ *koji zadovoljava* $p_0(x_0) = y_0$.

Teorem 2.2. *Pretpostavimo da je* $n \geq 0$. *Tada postoji jedinstveni polinom* $p_n \in \mathcal{P}_n$ *takav da je*

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Dokaz. U slučaju $n = 0$ dokaz je trivijalan, po *Napomeni* 2.2 .
Neka je $n \geq 1$. Iz *Leme* 2.1 slijedi da polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ definiran s $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)\, y_k$ postoji. Ostaje pokazati da je p_n jedinstven polinom u $\mathcal{P}_n$.

Pretpostavimo da postoji polinom $q_n \in \mathcal{P}_n$, različit od p_n, takav da je $q_n(x_i) = y_i$, za $i = 0, 1, \ldots, n$. Tada je $p_n - q_n \in \mathcal{P}_n$ i $p_n - q_n$ ima $n + 1$ različitih nultočaka x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Kako polinom stupnja n ne može imati više od n nultočaka, osim ako je identički jednak nuli, slijedi

$$p_n(x) - q_n(x) \equiv 0, \tag{9}$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da su p_n i q_n različiti. Dakle, postoji jedinstven polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ koji zadovoljava (8) □

Definicija 2.1. *Neka je* $n \geq 0$ *. Neka je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na intervalu* $[a,b]$ *te neka su* $x_i \in [a,b],\ i = 0,1,\ldots,n$ *, različiti realni brojevi. Polinom* p_n *definiran s*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)\, f(x_k)\,, \tag{10}$$

gdje je L_k *definiran kao u* (7)*, zovemo* ***Lagrangeov interpolacijski polinom stupnja n funkcije*** f*, a brojeve* $x_i,\ i = 0,1,\ldots,n$ *zovemo* ***čvorovi interpolacije****.*

Primjer 2.1. *Konstruirajmo Lagrangeov interpolacijski polinom stupnja* 2 *funkcije* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}_+$ *dane izrazom* $f(x) = e^x$ *u čvorovima interpolacije* $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$ *.*

Kako je $n = 2$, tražimo polinom p_2 stupnja 2 oblika

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} L_k(x)\, f(x_k)\ ,$$

gdje L_k izgleda kao u (7). Sada imamo

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{2}\, x\,(x-1)\,.$$

Slično dobivamo i $L_1(x) = 1 - x^2$ te $L_2(x) = \frac{1}{2}\, x\,(x+1)$.

Uvrštavanjem izračunatih izraza u p_2 i pojednostavljivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \tfrac{1}{2}\, x\ (x-1)\ e^{-1} + (1-x^2)\, e^0 + \tfrac{1}{2}\, x\,(x+1)e^1 \\ &= \cdots = 1 + 0.0175x + 0.0001x^2. \end{aligned}$$

Iako se vrijednosti funkcije f i njenog pripadnog Lagrangeovog interpolacijskog polinoma u čvorovima interpolacije podudaraju, to često nije slučaj na ostatku domene tih funkcija. Postavlja se pitanje koliko je veliko odstupanje vrijednosti $f(x)$ od aproksimacije $p_n(x)$ kada je $x \neq x_i,\ i = 0,1,\ldots,n$. Uz pretpostavku da je funkcija f dovoljno glatka, procjena veličine **pogreške interpolacije** $f(x) - p_n(x)$ dana je idućim teoremom, preuzetim iz [5].

Teorem 2.3. *Neka je* $n \geq 0$*. Neka je nadalje* $f \in C^{n+1}([a,b])$ *funkcija čije su vrijednosti poznate u* $n+1$ *točaka* $x_i,\ i = 0,1,\ldots,n$ *,*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad y_i = f(x_i)\,,\ i = 0,1,\ldots,n,$$

i neka je p_n *odgovarajući interpolacijski polinom. Tada za svaki* $\bar{x} \in [a,b]$ *postoji* $\xi \in \langle a,b\rangle$ *takav da je*

$$f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(\bar{x})\,, \quad \textit{gdje je}\ \omega(\bar{x}) = (\bar{x}-x_0)\cdots(\bar{x}-x_n)\,.$$

Ako označimo $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$ *vrijedi i ocjena*

$$|f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\, |\omega(x)|\,.$$

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [5].

3 Newton-Cotesove kvadraturne formule

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$ te $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ integral čiju vrijednost želimo aproksimirati. Kao što znamo, kvadraturne formule su općenito oblika

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k) + E(f)\,, \tag{11}$$

gdje su $\omega_k \geq 0$ težine, x_k čvorovi koje uglavnom odabiremo iz segmenta integracije $[a,b]$ tako da vrijedi $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$, dok je $E(f)$ pogreška aproksimacije.

Odaberimo u ovom slučaju čvorove x_i, $i = 0,1,\ldots,n$ tako da budu ekvidistantni, odnosno da vrijede jednakosti $x_i = a + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, gdje je $h = \frac{b-a}{n}$. Funkciju f aproksimirajmo Lagrangeovim interpolacijskim polinomom p_n tako da vrijedi

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)\, f(x_k)\ \text{, za}\quad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Ako za težine ω_k uzmemo

$$\omega_k = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b L_k(x)\,dx\,, \quad k = 0,1,\ldots,n\,,$$

tada vrijedi $\sum_{k=0}^{n} \omega_k = 1$, a kvadraturnu formulu (11) možemo zapisati na sljedeći način

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b L_k(x)\,dx\right) f(x_k) + E(f) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} \omega_k\, f(x_k) + E(f).$$

Uzmemo li dodatno $x = a + (b-a)\,t$, dobivamo jednostavniji izraz za ω_k:

$$\omega_k = \int\limits_0^1 \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{nt - i}{k - i}\,dt, \quad k = 0,1,\ldots,n. \tag{12}$$

Sada formulu

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} \omega_k\, f(x_k) + E(f) \tag{13}$$

zovemo **Newton-Cotesova kvadraturna formula**.

Razlikujemo Newton-Cotesove kvadraturne formule otvorenog i zatvorenog tipa. U slučaju zatvorenog tipa za $n+1$ čvor, pri interpolaciji uključujemo obje rubne točke segmenta integracije $[a,b]$ te su čvorovi interpolacije oblika $x_i = a + \frac{i\,(b-a)}{n}$, $0 \leq i \leq n$.
U slučaju otvorenog tipa za $n+1$ čvor, pri interpolaciji ne uključujemo obje ili jednu rubnu točku segmenta integracije $[a,b]$, a tada su čvorove interpolacije oblika $x_i = a + \frac{i\,(b-a)}{n+1}$, $1 \leq i \leq n$.

S ciljem određivanja pogreške aproksimacije $E(f)$ Newton-Cotesovih kvadraturnih formula, u nastavku iskazujemo i dokazujemo Peanov teorem o jezgri, preuzet iz [8] .

Teorem 3.1. *Neka je* $E(p) = 0$ *za sve polinome* $p \in \mathcal{P}_n$ *i neka je* $f \in C^{n+1}([a,b])$ *. Tada se ostatak* $E(f)$ *može reprezentirati kao*

$$E(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t)\, K(t)\, dt\,,$$

gdje je K ***Peanova jezgra*** *definirana izrazom*

$$K(t) = \frac{1}{n!} E_x\left((x-t)_+^n\right)\,,$$

uz

$$(x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n\,, & x > t \\ 0\,, & x \leq t \end{cases}\,,$$

a indeks "x" označava da je x *varijabla od* E *.*

Dokaz. Razvoj funkcije f u Taylorov red oko točke $x = a$ u integralnom obliku glasi:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\, dt\,.$$

E je linearan operator ($E(\alpha f + \beta g) = \alpha E(f) + \beta E(g)$, za funkcije f i g te skalare α i β) i vrijedi $E\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) = 0\,,\ k = 0, 1, \ldots, n$ jer su $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ polinomi stupnja manjeg ili jednakog n pa pogrešku možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} E(f(x)) &= \sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) + E\left(\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\, dt\right) \\ &= \frac{1}{n!} E\left(\int_a^b f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_+^n\, dt\right)\,. \end{aligned}$$

Pokažimo sada da operatori E i $\int$ komutiraju.

Kvadraturnu formulu možemo definirati i općenitije

$$I^*(f) = \sum_{k=0}^{m_0} a_{k0} f(x_{k0}) + \sum_{k=0}^{m_1} a_{k1} f'(x_{k1}) + \cdots + \sum_{k=0}^{m_n} a_{kn} f^{(n)}(x_{kn}) = E(f) + I(f).$$

Tada je

$$\begin{aligned} E\left(\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\, dt\right) &= \int_a^b \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\, dt\, dx - \\ &\left(\sum_{k=0}^{m_0} a_{k0} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x_{k0}-t)_+^n\, dt + \ldots\right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{m_n} a_{kn} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x_{kn}-t)_+^n\, dt\right) \end{aligned}$$

i vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_a^b E_x\left(f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\right)dt \;=\; & \int_a^b\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dt\,dx- \\
& \int_a^b f^{(n+1)}(t)\Bigg(\sum_{k=0}^{m_0} a_{k0}\int_a^b (x_{k0}-t)_+^n\,dt+\dots \\
& +\sum_{k=0}^{m_n} a_{kn}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^b (x_{kn}-t)_+^n\Bigg)\,dt.
\end{aligned}$$

Sada je dovoljno pokazati $\frac{d^k}{dx^k}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dt = \int_a^b \left(f^{(n+1)}(t)\frac{d^k}{dx^k}(x-t)_+^n\right)dt$, $k=0,1,\dots,n$. Gornja relacija vrijedi za sve $k<n$ jer je funkcija $(x-t)_+^n$ neprekidno diferencijabila $n-1$ puta. Naposlijetku dokažimo još slučaj $k=n$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dt &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dt\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(n!\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+\,dt\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(n!\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)\,dt\right) \\
&= n!\frac{d}{dx}\left(x\int_a^x f^{(n+1)}(t)dt-\int_a^x t\,f^{(n+1)}(t)\,dt\right) \\
&= n!\left(\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,dt+xf^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(x)\,x\right) \\
&= n!\int_a^x f^{(n+1)}(t)dt \\
&= \int_a^x \left(f^{(n+1)}(t)\frac{d^n}{dx^n}(x-t)_+^n\right)dt.
\end{aligned}$$

$\square$

4 Specijalni slučajevi Newton-Cotesovih kvadraturnih formula

U prethodnom poglavlju upoznali smo se s Newton-Cotesovom formulom, koja zapravo obuhvaća široku klasu formula. Može se pokazati da će za svaki izbor $n+1$ čvorova interpolacije postojati barem jedna Newton-Cotesova kvadraturna formula reda n, što možemo vidjeti u [4]. U ovom poglavlju detaljnije ćemo objasniti neke specijalne slučajeve ove formule.

Prvi specijalan slučaj koji ćemo razmotriti je i najjednostavniji, a to je pravilo središnje točke, koje je i primjer formule otvorenog tipa. Nakon toga, bavimo se trapeznim pravilom i zadnje Simpsonovim pravilom, koji su zatvorenog tipa. Za svaki od navedenih slučajeva navest ćemo i generalizirani oblik, kojeg dobijemo podjelom segmenta integracije na podsegmente jednake duljine, zasebnom primjenom kvadraturne formule te zbrajanjem dobivenih rezultata. Također ćemo procijeniti pogrešku aproksimacije svake formule primjenom *Teorema* 3.1 , a naposlijetku demonstrirati sve slučajeve na istom primjeru radi bolje usporedbe.

4.1 Pravilo središnje točke

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i nenegativna funkcija na $[a,b]$ čija je vrijednost poznata u središnoj točki, odnosno u $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Kako bismo izračunali integral $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ primijenit ćemo Newton-Cotesovu kvadraturnu formulu (13) za jedan čvor interpolacije, i to središnji, pa vidimo da će ova formula biti otvorenog tipa. Pronađimo težinu ω_0 :

$$\omega_0 \;=\; \int\limits_0^1 1\,dx \;=\; 1$$

Ako označimo $I^* = (b-a)\,\omega_0 f(x_0)$ i s $E(f)$ pogrešku aproksimacije, onda je

$$I(f) \;=\; (b-a)\,\omega_0\, f\,(x_0) + E(f) \;=\; I^*(f) + E(f)$$

i formulu $\int\limits_a^b f\,(x)\,dx \;=\; (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + E(f)$ nazivamo **pravilo središnje točke**. Ovo pravilo često se naziva i pravilo pravokutnika jer produkt $(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ predstavlja površinu pravokutnika visine $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ i širine $(b-a)$.

Kako kvadraturnim formulama ipak samo aproksimiramo integrale, bitno je voditi računa o grešci aproksimacije $E(f)$. Za njezino određivanje koristit ćemo Peanov teorem o jezgri 3.1.Za formulu reda n Peanovu jezgru K_{n+1} definiramo s

$$K_{n+1}(t) \;=\; \frac{1}{n!}\,E_x((x-t)_+^n)\,,\ \text{gdje je}\ \ (x-t)_+^n \;=\; \begin{cases} (x-t)^n\,, & x \,>\, t \\ 0\,, & x \,\leq\, t \end{cases}.$$

Pravilo središnje točke je egzaktno za polinome prvog stupnja. Odredimo sada Peanovu jezgru K_2.

$$\begin{aligned}
K_2(t) \;=\; E_x((x-t)_+) \;&=\; \int\limits_a^b (x-t)_+\,dx - I^*((x-t)_+) \\
&= \left.\frac{(x-t)^2}{2}\right|_t^b - (b-a)\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+ \\
&= \frac{(b-t)^2}{2} - (b-a)\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+
\end{aligned}$$

Daljnjim raspisom dobijemo da je Peanova jezgra K_2 pravila središnje točke jednaka

$$K_2(t) \;=\; \begin{cases} \frac{(t-a)^2}{2}, & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \frac{(t-b)^2}{2}, & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

Integriranjem K_2 dobivamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b K_2(t)\,dt \;&=\; \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(t-a)^2}{2}\,dt - \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(t-b)^2}{2}\,dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{24}
\end{aligned}$$

Sada možemo izračunati pogrešku aproksimacije $E(f)$. Iz *Teorema* 3.1 slijedi

$$E(f) \;=\; \int\limits_a^b f''(t)K_2(t)\,dt$$

Navedimo sada integralni teorem srednje vrijednosti s težinama, preuzet iz [2], koji će biti koristan u nastavku.

Teorem 4.1. *Neka su funkcije* g *i* w *integrabilne na* $[a,b]$ *i neka su*

$$m \;=\; \inf_{x\in[a,b]} g(x)\,, \quad M = \sup_{x\in[a,b]} g(x)\,.$$

Neka je, nadalje, $w(x) \;\geq\; 0$ *na* $[a,b]$. *Tada postoji broj* $\mu\,, m \;\leq\; \mu \;\leq\; M$ *takav da vrijedi*

$$\int\limits_a^b w(x)g(x)dx \;=\; \mu\int\limits_a^b w(x)dx\,.$$

Posebno, ako je g *neprekidna na* $[a,b]$, *onda postoji broj* ξ *takav da je*

$$\int\limits_a^b w(x)g(x)\,dx \;=\; g(\xi)\int\limits_a^b w(x)\,dx\,.$$

Kako je $K_2(t) \geq 0$, po *Teoremu* 4.1 postoji $\xi \in [a,b]$ takav da je

$$E(f) = \int\limits_a^b f''(t)K_2(t)\,dt = f''(\xi)\int\limits_a^b K_2(t)\,dt = f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$$

i dobivamo konačni izraz za pravilo središnje točke

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}.$$

Označimo li $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, tada vrijedi ocjena za grešku

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24}M_2\,.$$

U nastavku se bavimo kompozitnim pravilom središnje točke, a u izvodu poslužit će nam iduća lema iz [8] koju navodimo bez dokaza.

Lema 4.2. *Neka je* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija i* $x_i \in [a,b]$, $i = 1,\ldots,n$. *Tada postoji* $\xi \in [a,b]$ *takav da je*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_i) = g(\xi).$$

Izvedimo sada kompozitno pravilo središnje točke.

Prvo podijelimo segment integracije $[a,b]$ na n podsegmenata koji su jednake duljine i primijenimo pravilo središnje točke na svaki od njih. Neka su $h = \frac{b-a}{n}$ te $x_i = a + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$ svi rubovi podsegmenata. Označimo li $y_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$, $i = 1,2,\ldots,n$, i primjenimo pravilo središnje točke na segmentu $[x_{i-1},x_i]$, dobivamo:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = h\,y_i + f''(\xi_i)\,\frac{(b-a)^3}{24}\,,$$

gdje $\xi_i \in \langle x_{i-1},x_i\rangle$ postoje, po *Teoremu* 4.1. Zbog neprekidnosti funkcije f'' na intervalu $\langle a,b\rangle$, po *Lemi* 4.2 postoji $\xi \in \langle a,b\rangle$ takav da vrijedi $n\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = nf''(\xi)$. Vidimo da je i $h^2 = \frac{(b-a)^2}{n^2}$. Sada vrijedi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = h\sum_{i=1}^{n} y_i + \frac{(b-a)h^2}{24}f''(\xi)$$

i tu formulu nazivamo **Kompozitno pravilo središnje točke**.

Apsolutna pogreška aproksimacije $E_n(f)$ kompozitnog pravila središnje točke za n podsegmenata i $\varepsilon > 0$, uz oznaku $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, može se ocijeniti idućim izrazom:

$$|E_n(f)| \leq \frac{b-a}{24}h^2M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2}M_2 < \varepsilon.$$

Tada za zadanu točnost $\varepsilon > 0$ možemo procijeniti i broj potrebnih podsegmenata n :

$$n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon}\cdot\frac{(b-a)}{24}}.$$

Naposlijetku, proučimo definirane pojmove na primjeru.

Primjer 4.1. *Neka je* $I(f) = \int\limits_0^1 e^{x^2}dx$.

a) *Aproksimirajmo integral* $I(f)$ *pomoću pravila središnje točke*

$$I^*(f) = I(f) - E(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.284025$$

b) *Izračunajmo broj potrebnih podsegmenata kako bi se primjenom kompozitnog pravila središnje točke odredila približna vrijednost integrala* $I(f)$ *s točnošću* $\varepsilon = 0.0005$

$$\text{Jer je } M_2 = \max_{x\in[a,b]} |\, f''(x)\,| \approx 16.31, \text{ slijedi } \quad n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon}\cdot\frac{(b-a)}{24}}$$
$$= \sqrt{\frac{16.31\cdot 1}{0.0005\cdot 24}} \approx 36.866878$$

Dakle, broj potrebnih podsegmenata je $n = 37$.

c) *Aproksimirajmo integral I pomoću kompozitnog pravila središnje točke koristeći* $n = 4$ *podsegmenta*

Duljina svakog podsegmenta h jednaka je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$. Nakon što izračunamo $y_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$, gdje su $x_i = ih$, $i = 1,\ldots,4$, dobivamo podatke:

i	x_{i-1}	x_i	y_i
1	0	0.25	1.015748
2	0.25	0.5	1.150993
3	0.5	0.75	1.477904
4	0.75	1	2.150338

Sada možemo izračunati aproksimaciju $I^*(f) = I(f) - E(f)$:

$$I^*(f) = h\sum_{i=1}^{4} y_i = 1.470202$$

4.2 Trapezno pravilo

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija čije su vrijednosti poznate u čvorovima $x_0 = a$ te $x_1 = b$ i želimo izračunati integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Tada možemo primijeniti Newton-Cotesovu kvadraturnu formulu (13) za dva čvora interpolacije. Izračunajmo težine ω_0 i ω_1 :

$$\omega_0 = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1}\,dt = \frac{1}{2}$$

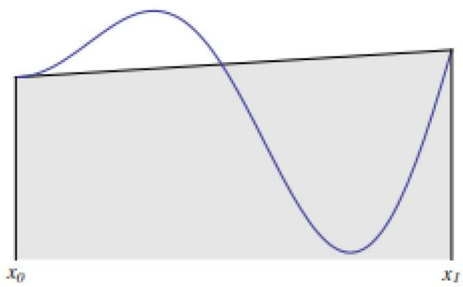
$$\omega_1 = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0}\,dt = \frac{1}{2}$$

Ako označimo $I^*(f) = (b-a)\,(\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1))$ i s $E(f)$ pogrešku aproksimacije, onda je

$$I(f) = (b-a)\,(\omega_0\, f\,(x_0) + \omega_1 f(x_1)) + E(f) = I^*(f) + E(f)$$

i formulu $\int_a^b f\,(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}(f\,(a) + f\,(b)) + E(f)$ zovemo **Trapezno pravilo**. Geometrijski gledano, $\frac{(b-a)}{2}(f\,(a) + f\,(b))$ predstavlja površinu trapeza sa stranicama $f(a)$ i $f(b)$ te visinom $h = b - a$, po čemu je formula dobila ime.

Slika 1: Trapezno pravilo



Sada ćemo odrediti pogrešku aproksimacije $E(f)$. Trapezno pravilo egzaktno je za polinome prvog stupnja pa slično kao i ranije tražimo Peanovu jezgru K_2 trapeznog pravila.

$$\begin{aligned}
K_2(t) = E_x((x-t)_+) &= \int_a^b (x-t)_+\,dx - I^*((x-t)_+) \\
&= \left.\frac{(x-t)^2}{2}\right|_t^b - \frac{(b-a)}{2}\,((a-t)_+ + (b-t)_+) \\
&= \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{(b-a)}{2}\,((a-t)_+ + (b-t)_+)
\end{aligned}$$

Daljnjim raspisom dobijemo da je Peanova jezgra K_2 trapeznog pravila jednaka

$$K_2(t) = \frac{(b-t)(a-t)}{2}, \text{ za } t \in [a,b]$$

Integrirajmo sada K_2:

$$\int_a^b K_2(t)\,dt = \int_a^b \frac{(b-t)(a-t)}{2}\,dt = -\frac{(b-a)^3}{12}$$

Kako je $K_2(t) \le 0$, po *Teoremu* 4.1 postoji broj $\xi \in [a,b]$ takav da je

$$E(f) = \int_a^b f''(t)K_2(t)dt = f''(\xi)\int_a^b K_2(t)\,dt = -f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Sada je trapezno pravilo oblika :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12},$$

a za pogrešku aproksimacije $E(f)$, uz oznaku $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, vrijedi

$$|E(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12}M_2.$$

Pronađimo sada kompozitni oblik trapeznog pravila.

Pretpostavimo da je funkcija f zadana u $n+1$ ekvidistantno raspoređenih točaka $x_i = a + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, gdje je $h = \frac{b-a}{n}$. Označimo $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$ i na svakom segmentu $[x_{i-1},x_i]$ primijenimo trapezno pravilo. Tako za segment $[x_{i-1},x_i]$ dobivamo:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_{i-1}+y_i) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_i),$$

gdje $\xi_i \in \langle a,b\rangle$ postoji, po *Teoremu* 4.1. Sada je :

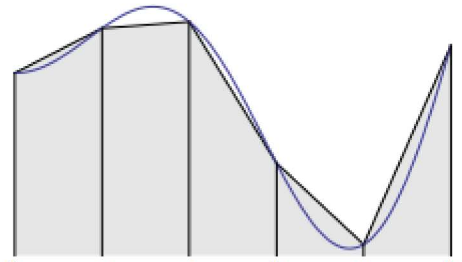
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)$$

Zbog neprekidnosti funkcije f'' na intervalu $\langle a,b\rangle$, po *Lemi* 4.2 postoji $\xi \in \langle x_{i-1},x_i\rangle$ takav da vrijedi $n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = nf''(\xi)$ i $h^2 = \frac{(b-a)^2}{n^2}$ pa uvrštavanjem u prethodni izraz dobivamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) - f''(\xi)\frac{b-a}{12}h^2$$

i tu formulu nazivamo **kompozitno trapezno pravilo.**

Slika 2: Kompozitno trapezno pravilo



Apsolutna pogreška aproksimacije $E_n(f)$ kompozitnog trapeznog pravila za n podsegmenata i $\varepsilon > 0$, uz oznaku $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, može se ocijeniti idućim izrazom.

$$|E_n(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 < \varepsilon.$$

Tada za zadani $\varepsilon > 0$ možemo procijeniti i broj potrebnih podsegmenata n za tu metodu:

$$n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon} \cdot \frac{(b-a)}{12}}.$$

Ilustrirajmo ovo pravilo primjerom.

Primjer 4.2. *Neka je* $I(f) = \int\limits_0^1 e^{x^2}\, dx$.

a) *Aproksimirajmo integral* $I(f)$ *pomoću trapezne formule*

$$I^*(f) = I(f) - E(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1-0}{2}(1 + 2.718282) \approx 1.859141$$

b) *Izračunajmo broj potrebnih podsegmenata kako bi se primjenom generalizirane trapezne formule odredila približna vrijednost integrala* $I(f)$ *s točnošću* $\varepsilon = 0.0005$

$$\text{Jer je } M_2 = \max_{x\in[a,b]} | f''(x) | = 16.31, \text{ slijedi } n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\varepsilon} \cdot \frac{(b-a)}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{16.31 \cdot 1}{0.0005 \cdot 12}} \approx 52.137638$$

Dakle, broj potrebnih podsegmenata je $n = 53$.

c) *Aproksimirajmo integral* $I(f)$ *pomoću kompozitne trapezne formule koristeći* $n = 4$ *podsegmenata*

Duljina svakog podsegmenta h jednaka je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$. Nakon što izračunamo $y_i = f(x_i)$, gdje su $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, 4$, dobivamo podatke:

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.25	1.064494
2	0.5	1.284025
3	0.75	1.755055
4	1	2.718282

Sada možemo izračunati aproksimaciju $I^*(f) = I(f) - E(f)$:

$$I^*(f) \; = \; \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4) \; = \; 1.490679$$

4.3 Simpsonovo pravilo

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija čije su vrijednosti poznate u čvorovima interpolacije $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ te $x_2 = b$ i želimo izračunati integral $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Tada možemo primijeniti Newton-Cotesovu kvadraturnu formulu (13) za tri čvora interpolacije . Najprije izračunajmo težine:

$$\omega_0 \; = \; \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2t-1)\,(2t-2)\,dt \; = \; \frac{1}{6}$$

$$\omega_1 \; = \; -\int\limits_0^1 2t\,(2t-2)\,dt \; = \; \frac{2}{3}$$

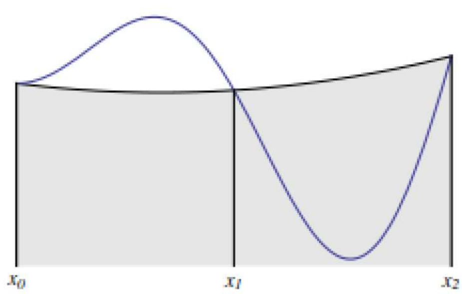
$$\omega_2 \; = \; \frac{1}{2}\int\limits_0^1 2t\,(2t-1)\,dt \; = \; \frac{1}{6}$$

Ako označimo $I^*(f) = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$ i s $E(f)$ pogrešku aproksimacije, onda je

$$I(f) \; = \; (b-a)\,(\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)) + E(f) \; = \; I^*(f) + E(f)$$

i formulu $\int\limits_a^b f\,(x)\,dx \; = \; \dfrac{b-a}{6}\left(f\,(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\,(b)\right) + E(f)$ nazivamo **Simpsonovo**[2] **pravilo**.

Slika 3: Simpsonovo pravilo



[2]Engleski matematičar Thomas Simpson (1710.-1761.)

Odredimo sada pogrešku aproksimacije $E(f)$. Simpsonovo pravilo egzaktno je za polinome trećeg stupnja pa ćemo odrediti Peanovu jezgru K_4 :

$$\begin{aligned}
K_4(t) &= E_x((x-t)_+^3) = \int_a^b (x-t)_+^3\,dx - I^*((x-t)_+^3) \\
&= \left.\frac{(x-t)^4}{4}\right|_t^b - \frac{(b-a)}{6}\left((a-t)_+^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+^3 + (b-t)_+^3\right) \\
&= \frac{(b-t)^4}{4} - \frac{(b-a)}{6}\left((a-t)_+^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+^3 + (b-t)_+^3\right)
\end{aligned}$$

Daljnjim raspisom dobijemo da je Peanova jezgra K_4 Simpsonovog pravila jednaka

$$K_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{4!}(t-a)^3(t-\frac{a+2b}{3}), & t\in[a,\frac{a+b}{2}] \\ \frac{1}{4!}(t-b)^3(t-\frac{2a+b}{3}), & t\in[\frac{a+b}{2},b] \end{cases}.$$

Integrirajmo sada K_4 :

$$\begin{aligned}
\int_a^b K_4(t)\,dt &= \int_a^b \frac{(b-a)^4}{4}\,dt - \frac{b-a}{6}\int_a^b \left((a-t)_+^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+^3 + (b-t)_+^3\right)dt \\
&= \left.\frac{(b-a)^5}{20}\right|_a^b - \frac{b-a}{6}\left(4\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)^3 dt + \int_a^b (b-t)^3\,dt\right) \\
&= \frac{(b-a)^5}{20} - \frac{b-a}{6}\left(4\frac{(b-a)^4}{64} + \frac{(b-a)^4}{4}\right) \\
&= -\frac{(b-a)^5}{480}
\end{aligned}$$

Kako je $K_4(t)\le 0$, po *Teoremu* 4.1 postoji broj $\xi\in[a,b]$ takav da je

$$E(f) = \frac{1}{3!}\int_a^b f^{(4)}(t)K_4(t)dt = \frac{1}{6}f^{(4)}(\xi)\int_a^b K_4(t)\,dt = -f^{(4)}(\xi)\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Sada je Simpsonovo pravilo oblika :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - f^{(4)}(\xi)\frac{(b-a)^5}{2880},$$

a za grešku aproksimacije $E(f)$, uz oznaku $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$, vrijedi

$$|E(f)| \le \frac{(b-a)^5}{2880}M_4.$$

Pronađimo sada kompozitni oblik Simpsonovog pravila.

Kako svaka primjena Simpsonovog pravila uključuje po dva podsegmenta, segment $[a, b]$ podijelit ćemo na parni broj n podsegmenata jednake duljine h, $h = \frac{b-a}{n}$, čvorovima $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Ako označimo $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, primjenom Simpsonovog pravila na segmentu $[x_{2j-2}, x_{2j}]$, $j \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\}$, koji je duljine $2h$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\,dx &= \frac{h}{6}(y_{2j-2} + 4y_{2j-1} + y_{2j}) - \frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_j) \\
&= \frac{h}{6}(y_{2j-2} + 4y_{2j-1} + y_{2j}) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_j)
\end{aligned}$$

gdje je $h^5 = \frac{(b-a)^5}{n^5}$ i gdje $\xi_j \in \langle x_{2j-2}, x_{2j} \rangle$ postoji, po *Teoremu* 4.1. Sada je :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\,dx &= \frac{h}{3}((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + \\
&\quad 2(y_2 + y_4 \cdots + y_{n-2})) - \frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\xi_j)
\end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti funkcije $f^{(4)}$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, po *Lemi* 4.2 postoji $\xi \in \langle a, b \rangle$ takav da vrijedi $\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\xi_j) = \frac{n}{2} f^{(4)}(\xi)$. Izraz $\frac{h^5}{90}\left(\frac{n}{2} f^{(4)}(\xi_j)\right)$ možemo još zapisati kao

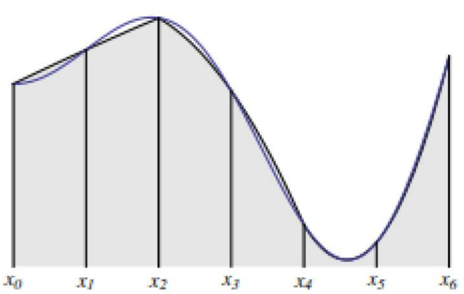
$$\frac{h^5}{90}\left(\frac{n}{2} f^{(4)}(\xi_j)\right) = \frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi_j) = \frac{\frac{(b-a)^5}{n^5} \cdot n}{\frac{180}{1}} = \frac{\frac{(b-a)(b-a)^4}{n^4}}{\frac{180}{1}} = \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

Sada formulu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})) - f^{(4)}(\xi) \frac{(b-a)}{180} h^4$$

nazivamo **kompozitno Simpsonovo pravilo.**

Slika 4: Kompozitno Simpsonovo pravilo



Apsolutna pogreška aproksimacije $E_n(f)$ kompozitnog Simpsonovog pravila za n podsegmenata i $\varepsilon > 0$, uz oznaku $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$, dana je izrazom :

$$|E_n| \leq \frac{b-a}{180}h^4 M_4 = \frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4 < \varepsilon.$$

Iz prethodnog izraza dobivamo ocjenu za broj podsegmenata n potrebnih da bi se primjenom kompozitnog Simpsonovog pravila postigla točnost ε:

$$n > (b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{\varepsilon} \cdot \frac{(b-a)}{180}}.$$

Primjer 4.3. *Neka je* $I(f) = \int\limits_0^1 e^{x^2} dx.$

a) Aproksimirajmo integral $I(f)$ *pomoću Simpsonovog pravila*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{1-0}{6}(1 + 4 \cdot 1.284025 + 2.718282)$$
$$\approx 1.474821$$

b) Izračunajmo broj potrebnih podsegmenata kako bi se primjenom kompozitnog Simpsonovog pravila odredila približna vrijednost integrala $I(f)$ *s točnošću* $\varepsilon = 0.0005$

$$\text{Jer je } M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| \approx 206.59, \quad \text{slijedi } n > (b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{\varepsilon} \cdot \frac{(b-a)}{180}}$$
$$= \sqrt{\frac{206.59 \cdot 1}{0.0005 \cdot 180}} \approx 6.92$$

Dakle, broj potrebnih podsegmenata je $n = 7$.

c) Aproksimirajmo integral $I(f)$ *pomoću kompozitnog Simpsonovog pravila koristeći* $n = 4$ *podsegmenta*

Duljina svakog podsegmenta h jednaka je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$. Nakon što izračunamo $y_i = f(x_i)$, gdje su $x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, 4$, dobivamo podatke:

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.25	1.064494
2	0.5	1.284025
3	0.75	1.755055
4	1	2.718282

Sada možemo izračunati $I^*(f) = I(f) - E(f)$

$$I^*(f) = \frac{h}{3}(y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)) = 1.463711$$

Literatura

[1] A.S.Ackleh, E.J. Allen, R.B.Hearfott, P.Seshaiyer, Classical and Modern Numerical Analysis, CRC Press, SAD, 2009.

[2] Z.Drmač, V.Hari, M.Marušić, M.Rogina, S. Singer, Numerička analiza, Sveučilište u Zagrebu - PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2003.

[3] S.Kurepa, Uvod u Linearnu Algebru, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[4] M.Schatzman, Numerical Analysis, Clarendon Press, Oxford, 2002.

[5] R.Scitovski, Numerička Matematika, Sveučlište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2015.

[6] G.W.Stewart, Afternotes on Numerical Analysis, SIAM, SAD, 1996.

[7] E. Süli, D.F Mayers, An introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, SAD, 2003.

[8] N.Ujević, Uvod u Numeričku Matematiku, Sveučilište Split - Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja, Split, 2004.