Primjene determinanti

Biuk, Vesna

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Vesna Biuk

Primjene determinanti

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Vesna Biuk

Primjene determinanti

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Darija Marković

Osijek, 2019.

Sažetak

Tema ovog rada su primjene determinanti matrica. Najprije ćemo nabrojati osnovna svojstva i teoreme koji opisuju determinante, a koji će nam biti potrebni u kasnijim računima i dokazima. Zatim ćemo govoriti o raznim primjenama determinanti. Definirat ćemo adjunktu matrice te pomoću nje i determinante matrice izvesti i dokazati formulu za pronalaženje inverza matrice. Nakon toga, govorit ćemo o Cramerovoj metodi za rješavanje sustava linearnih jednadžbi te o određivanju svojstvenog polinoma i rješavanju svojstvenog problema. Govorit ćemo i o primjeni determinante za određivanje zajedničkog korijena dvaju polinoma te također o primjenama determinanti u analitičkoj geometriji. Tu ćemo se dotaknuti površine trokuta i paralelograma te volumena tetraedra i paralelopipeda. Također, pomoću determinanti odredit ćemo jednadžbu pravca, ravnine i sfere. Na kraju ćemo definirati osnovne pojmove iz teorije grafova i objasniti primjenu determinanti u tom području.

Ključne riječi: determinanta, inverz matrice, Cramerovo pravilo, karakteristični polinom, teorija grafova

Abstract

The subject of this paper is the application of the determinants of matrix. First, we will state the basic properties and theorems that describe the determinants, which will be needed in later calculations and proofs. Then we will talk about various application of determinants. We will define the adjoint of a matrix. With use of it and determinant of the matrix we will derive and prove the formula for finding the inverse of matrix. After that, we will talk about Cramer's method for solving the linear system and determining its characteristic polynomial and solving its eigenvalue problem. We will also discuss the application of determinants for determing the common roots of two polynomials and the application of determinants in analytical geometry. Here we will mention the surfaces of triangles and parallelograms and the volume of tetrahedron and parallelepipeds. Also, we use the determinants to determine the equation of the line, plane and sphere. Finally, we will define the basic concepts from graph theory and explain the application of determinants to them.

Key words: determinant, inverse of the matrix, Cramer's rule, characteristic polynomial, graph theory

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu bavit ćemo se primjenama determinanti. Determinante je prvi otkrio i proučavao G. W. Leibniz 1693. godine ispitujući rješenja sustava linearnih jednadžbi, no kasnije se za otkrivača determinanti smatra G. Cramer koji je 1750. godine dao pravila rješavanja jednadžbi pomoću determinanti. Determinante se široko primjenjuju u metematici tek nakon K. J. Jacobija. U matematiku je naziv determinante uveo K. F. Gauss.
Postoji širok spektar područja matematike i stvarnoga života u kojima primjenjujemo determinante. Primjerice, determinante se koriste za opisivanje invertibilnih matrica i za eksplicitno opisivanje rješenja sustava linearnih jednadžbi. Jedna od primjena je također i pronalaženje svojstvene vrijednosti matrice pomoću njenog svojstvenog polinoma i slično. Primjene determinanti možemo pronaći i u analitičkoj geometriji gdje se koriste za određivanja raznih površina i volumena, te u teoriji grafova.

Napomena 1.1. *U radu ćemo koristiti sljedeće oznake:*

- M_n *će biti oznaka za skup svih kvadratnih matrica n-tog reda.*
- GL_n *će biti oznaka za skup svih regularnih matrica.*
- *Ponekad ćemo umjesto oznake* $\det A$ *(za determinantu matrice* A*) pisati* $|A|$.
- $A = \begin{bmatrix} a_1, \dots, a_n \end{bmatrix} \in M_n$ *će nam biti oznaka za kvadratnu matricu* A*, gdje* $a_1, \dots, a_n$ *predstavljaju stupce matrice* A.

Prisjetimo se najprije definicije determinante.

Definicija 1.1 (Determinanta). *Pod determinantom matrice drugog reda možemo podrazumijevati funkciju koja svakoj kvadratnoj matrici* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *drugog reda pridružuje realan broj* $\det A$ *definiran s* $\det A = ad - bc$. *Funkciju koja matrici* A *pridružuje njenu determinantu* $\det A$ *definirat ćemo induktivno:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$\dots$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k},$$

gdje je A_{1k} *kvadratna matrica (n-1)-og reda koja se dobiva iz matrice* A *ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca. Posebno, za* $A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ *definiramo* $\det A = a$.

Napomena 1.2. *Prethodnu definiciju možemo iskazati na više različitih načina.* (Npr.vidi [3])

2 Svojstva determinanti

Navest ćemo osnovna svojstva determinanti te teoreme koji će nam kasnije poslužiti prilikom rješavanja primjera vezanih uz primjene determinanti.

Napomena 2.1. *Neka su matrice tipa* P:$P_{ij}, P_i(\lambda), P_i(\lambda; j)$ *i matrice tipa* $Q : Q_{ij}, Q_i(\lambda), Q_i(\lambda; j)$ *oznake za elementarne matrice kao u* [6]*. Množenje matrice* A *zdesna matricama tipa* P *odgovara elementarnim transformacijama nad stupcima matrice* A*, a množenje matrice* A *slijeva matricama tipa* Q *odgovara elementarnim transformacijama nad retcima matrice* A*.*

Pravila koja vrijede za determinante:

1. Ako svi elementi nekog stupca matrice $A = \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_n \end{bmatrix} \in M_n$ iščezavaju, onda je $\det A = 0$.

2. Determinanta trokutaste matrice $A \in M_n$ jednaka je produktu dijagonalnih elemenata, tj. $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

3. Ako dva stupca determinante zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak, tj ako i-ti i j-ti stupac zamijene mjesta, vrijedi:
$$\det(AP_{ij}) = -\det A.$$
Odnosno, budući da je $\det P_{ij} = -1$ i zato što vrijedi da se matrica AP_{ij} dobiva od matrice A zamjenom i-tog retka i j-tog stupca, vrijedi $\det(AP_{ij}) = -\det A$. Zato formalno možemo pisati:
$$\det(AP_{ij}) = \det A \cdot \det P_{ij}.$$

4. Ako matrica $A \in M_n$ ima dva jednaka stupca, njena determinanta iščezava, tj. $\det A = 0$.

5. Ako je stupac a_j matrice $A \in M_n$ linearna kombinacija nekih vektora stupaca $b, c \in M_{n1}$ tada, za proizvoljne λ i μ, vrijedi svojstvo linearnosti determinante:
$\det A = \det \begin{bmatrix} \cdots \lambda b + \mu c \cdots \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} \cdots b \cdots \end{bmatrix} + \mu \det \begin{bmatrix} \cdots c \cdots \end{bmatrix}$.
Dakle, budući da je $\det P_i(\lambda) = \lambda$ i zato što se matrica $AP_i(\lambda)$ dobiva od matrice A množenjem i-tog stupca s λ, vrijedi $\det(AP_i(\lambda)) = \lambda \det A$. Zato formalno možemo pisati
$$\det(AP_i(\lambda)) = \det A \cdot \det P_i(\lambda).$$

6. Ako nekom stupcu determinante dodamo linearnu kombinaciju ostalih stupaca, determinanta ne mijenja vrijednost.
Posebno, budući da je $\det P_i(\lambda; j) = 1$ i i zato što se matrica $AP_i(\lambda; j)$ dobiva od matrice A tako da i-tom stupcu dodamo j-ti stupac pomnožen brojem λ vrijedi $\det(AP_i(\lambda; j)) = \det A$. Zato formalno možemo pisati
$$\det(AP_i(\lambda; j)) = \det A \cdot \det P_i(\lambda; j).$$

7. Ako je neki stupac determinante linearna kombinacija ostalih stupaca, vrijednost determinante jednaka je nuli.

8. Ako je A singularna matrica, onda je $\det A = 0$ i $\det A^T = 0$, gdje je A^T transponirana matrica matrice A.

9. Determinanta se množi brojem λ tako da bilo koji njezin stupac ili redak pomnožimo brojem λ.

Napomena 2.2. *Dokaze tvrdnji iz ovog pogljavlja koji nisu navedeni u radu mogu se pronaći u* [6].

Korolar 2.1. *Ako je $A \in GL_n$, onda postoje elementarne Q-matrice $Q_1, \ldots, Q_r$ i elementarne P-matrice $P_1, \ldots, P_s$ takve da je*

$$A = Q_1 \cdots Q_r \text{ i } A = P_1 \cdots P_s.$$

Teorem 2.1. *(Binet-Cauchy) Za bilo koje dvije matrice $A,B \in M_n$ vrijedi*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Dokaz. Ako je jedna od matrica $A, B \in M_n$ singularna, tvrdnja vrijedi. Primjerice, ako je B singularna matrica, onda je i $A \cdot B$ singularna, pa je det B = 0 i $\det(A \cdot B) = 0$. Dakle, tvrdnja vrijedi.
Pretpostavimo da je B regularna. Na osnovi prethodno navedenih pravila 3., 5. i 6. zaključujemo da za svaku matricu $A \in M_n$ i za svaku elementarnu P-matricu, $P \in M_n$ vrijedi

$$\det(A \cdot P) = \det A \cdot \det P. \tag{1}$$

Prema korolaru 2.1 postoje elementarne P-matrice $P_1, \ldots, P_r$ takve da je $B = P_1 \ldots P_s$. Zato prema (1) dobivamo:

$$\det B = \det(P_1 \ldots P_{r-1}) \cdot \det P_r,$$

Nastavljajući postupak analogno, dobivamo:

$$\det B = \det(P_1 \cdots P_{r-1}) \cdot \det P_r.$$

Također prema (1) dobivamo:

$$\det(A \cdot B) = \det(A \cdot P_1 \ldots P_{r-1}) \cdot \det P_r,$$

Nastavljajući postupak analogno, dobivamo:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det P_1 \cdots \det P_{r-1} \cdot \det P_r = \det A \cdot \det B.$$

□

Teorem 2.2. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi* $\det A^T = \det A$.

Determinantu možemo računati tako da ju razvijemo po bilo kojem retku ili stupcu, naime, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.3. *(Laplaceov razvoj determinante) Za matricu A reda n imamo razvoje:*

1) po i-tom retku:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}, \forall i = 1, \dots, n;$$

2) po j-tom stupcu:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj}, \forall j = 1, \dots, n.$$

Teorem 2.4. *Vrijedi poopćenje teorema 2.3, tj.vrijede sljedeće formule:*

1)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} a_{rk} \det A_{sk} = \delta_{rs} \det A,$$

2)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} a_{kr} \det A_{ks} = \delta_{rs} \det A,$$

pri čemu je matrica A_{ij} dobivena ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Dokaz. Ukoliko je $r = s$, imamo upravo Laplaceov razvoj. Pokažimo formulu 2) u slučaju $r \neq s$. Neka je C matrica koja se od matrice A dobije tako da njezin r-ti stupac zamijenimo sa s-tim. Dakle, $c_r = c_s = a_s$, pa je zato $\det C = 0$ (dva jednaka stupca).
S druge strane, iz dijela 2) teorema 2.3 slijedi:

$$0 = \det C = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} c_{kr} \det C_{kr} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{ks} \det A_{kr},$$

jer je $C_{kr} = A_{kr}$ i $c_{kr} = a_{ks}$. □

Napomena 2.3. *Primjetimo da u formuli 1) u teoremu 2.4 elemente r-tog retka množimo algebarskim komplementom iz s-tog retka, i slično, u formuli 2) elemente r-tog stupca množimo algebarskim komplementom s-tog stupca.*

3 Primjene determinanti

3.1 Inverz matrice

U sljedećem potpoglavlju pokazat ćemo kako se na lijep način može naći izravna formula za inverz regularne matrice. Bit će nam potrebna sljedeća definicija:

Definicija 3.1. *Neka je $A \in M_n$. Adjunkta matrice A je matrica $\tilde{A} = [x_{ij}]$ pri čemu je $x_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = C_{ij}$ $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Adjunkta kvadratne matrice A je, dakle, transponirana matrica algebarskih komplemenata ortogonalne matrice.*

Adjunkta matrice korisna je za pronalaženje inverza matrice, naime, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.1. *Ako je A regularna matrica onda vrijedi:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}. \tag{2}$$

Dokaz. Pokažimo prvo da je produkt matrice A i njene adjunkte $\tilde{A}$ jednak produktu determinante $\det A$ i jedinične matrice I_n.

$$A\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{j1} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{j2} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{jn} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Element i-tog retka i j-tog stupca ovog prethodno zapisanog produkta je
$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$. Ako je $i = j$ onda je suma jednaka determinanti matrice A, a s druge strane, ako je $i \neq j$, tada je suma jednaka 0 (ova tvrdnja slijedi iz teorema 2.4). Dakle,

$$A\tilde{A} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = \det AI.$$

Kako je matrica A invertibilna, $\det A \neq 0$ i možemo pisati:

$$\frac{1}{\det A}A\tilde{A} = I.$$

Sada sređujući taj izraz lako dođemo do formule iz teorema. □

3.2 Cramerova metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi

U sljedećem potpoglavlju predstavit ćemo Cramerovu metodu za rješavanje linearnih jednadžbi. Ova metoda dobila je ime po Adolfu Crameru(1704.-1752.) koji se služio determinantama prilikom rješavanja sustava od n jednadžbi s n nepoznanica. Cramerova metoda primjenjiva je samo na sustave jednadžbi koji imaju jedinstveno rješenje. Sljedeći teorem uvodi tu poznatu Cramerovu metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je $A \in GL_n$ regularna matrica. Metoda ima uglavnom teorijski značaj jer podrazumijeva izračunavanje $n+1$ determinanti n-tog reda, a to za nešto veći n može biti vremenski zahtjevno.

Promotrimo sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$ koji možemo zapisati kao

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Teorem 3.2. *(Cramer)Ako je $A \in GL_n$ regularna matrica, onda je rješenje sustava (3) dano s*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{4}$$

gdje je $D = \det \begin{bmatrix} a_1, \dots, a_n \end{bmatrix}$=det A, *a*
$D1 = \det \begin{bmatrix} b, a_2, \dots, a_n \end{bmatrix}$, $D2 = \det \begin{bmatrix} a_1, b, a_3, \dots, a_n \end{bmatrix}$,..., $Dn = \det \begin{bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b \end{bmatrix}$.

Dokaz. Sustav (3) možemo zapisati u matričnom obliku kao $Ax = b$. Kako je A regularna matrica, postoji njen inverz kojim s lijeva pomnožimo jednadžbu i dobivamo rješenje $x = A^{-1}b$. Korištenjem formule (2) dobivamo

$$x_j = \frac{(\tilde{A} \cdot b)_j}{\det A} = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{A})_{jk}b_k = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}\det A_{jk}b_k = \frac{D_j}{D},$$

jer je

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}\det A_{kj}b_k.$$

Laplaceov razvoj po j-tom stupcu determinante dobivene od determinante D zamjenom j-tog stupca vektorom slobodnih koeficijenata b. □

Korolar 3.1. *Sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, $A \in M_n$, ima jedinstveno rješenje onda i samo onda ako je $\det A \neq 0$ (matrica sustava je regularna).*
Specijalno, homogeni sustav $Ax = 0$ ima samo trivijalno rješenje $x_1 = \dots = x_n = 0$ onda i samo onda ako je $\det A \neq 0$ (matrica sustava je regularna).
Ako je $D = 0$ i $D_1 = \dots = D_n = 0$, sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja.
Ako je $D = 0$, a pri tome barem jedan od brojeva $D_1, \dots, D_n$ različit od nule, sustav nema rješenja.

Primjer 3.1. *Koristeći Cramerovo pravilo riješimo sljedeći sustav linearnih jednadžbi:*

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 5x_2 &= 11. \end{aligned}$$

Rješenje. Odredimo prvo determinantu matrice koeficijenata:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14.$$

Uočimo da je $|A| \neq 0$. Dakle, prema Cramerovom teoremu, dani sustav ima jedinstveno rješenje. Nadalje, primjenom formuli (4) slijedi:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1.$$

Dakle, rješenja početnog sustava su $x_1 = 2$ i $x_2 = -1$.

3.3 Svojstveni polinom

Prisjetimo se najprije definicije svojstvenih vrijednosti.

Definicija 3.2. *Neka je $\mathbb{F}$ polje i $A \in M_n(\mathbb{F})$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost matrice A ako postoji $x \in M_{n1}, x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se spektar matrice A i označava sa $\sigma(A)$.*

Definicija 3.3. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom*

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

naziva se svojstveni polinom matrice A.

Teorem 3.3. *Neka je $\mathbb{F}$ polje i $A \in M_n(\mathbb{F})$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako vrijedi*

$$k_A(\lambda_0) = 0,$$

gdje je k_A svojstveni polinom matrice A.

Dakle, pomoću determinante određujemo svojstveni polinom koji nam kasnije koristi za određivanje svojstvenih vrijednosti, svojstvenih vektora i svojstvenih potprostora.

Dokaz. Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [1]. □

Primjer 3.2. *Pronađimo svojstveni polinom matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$*
Rješenje. Prema prethodnoj definiciji, vrijedi:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

odnosno,

$$k_A(\lambda_0) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12$$

Dakle, odredili smo svojstveni polinom, njegove nultočke bit će svojstvene vrijednosti matrice A pomoću kojih možemo lako odrediti pripadne svojstvene vektore i svojstvene potprostore.

3.4 Postojanje zajedničkog korijena dvaju polinoma

Determinante nam mogu koristiti i prilikom ispitivanja imaju li neka dva polinoma zajednički korijen. Pokažimo to na sljedećem primjeru.

Primjer 3.3. *Odredimo imaju li sljedeća dva polinoma*

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2 \text{ i } q(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$$

zajednički korijen.

Rješenje. Općenito, dva polinoma 3. i 4. stupnja

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \ , \ q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

(slično kao i polinomi ostalih stupnjeva) imaju zajednički korijen x_0 ako i samo ako imaju zajednički linearni faktor $x - x_0$, tj.:

$$p(x) = (x - x_0)(A_2x^2 + A_1x + A_0) \ , \ q(x) = (x - x_0)(-B_3x^3 - B_2x^2 - B_1x - B_0)$$

(razlog označavanja koeficijenata B_3, B_2, B_1, B_0 negativnim predznakom bit će vidljiv kasnije). Iz jednadžbi iznad slijedi:

$$x - x_0 = \frac{p(x)}{A_2x^2+A_1x+A_0} \text{ i } x - x_0 = \frac{q(x)}{-B_3x^3-B_2x^2-B_1x-B_0},$$

stoga vrijedi:

$$\frac{p(x)}{A_2x^2+A_1x+A_0} = \frac{q(x)}{-B_3x^3-B_2x^2-B_1x-B_0}$$

odnosno:

$$p(x)(-B_3x^3 - B_2x^2 - B_1x - B_0) = q(x)(A_2x^2 + A_1x + A_0)$$

dakle,

$$(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)(-B_3x^3-B_2x^2-B_1x-B_0) = (b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)(A_2x^2+A_1x+A_0)$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$\begin{gathered}
-a_3B_3x^6 + (-a_3B_2 - a_2B_3)x^5 + (-a_3B_1 - a_2B_2 - a_1B_3)x^4 + (-a_3B_0 - a_2B_1 - a_1B_2 - a_0B_3)x^3 + \\
+(-a_2B_0 - a_1B_1 - a_0B_2)x^2 + (-a_1B_0 - a_0B_1)x - a_0B_0 = \\
= b_4A_2x^6 + (b_4A_1 + b_3A_2)x^5 + (b_4A_0 + b_3A_1 + b_2A_2)x^4 + (b_3A_0 + b_2A_1 + b_1A_2)x^3 + \\
+(b_2A_0 + b_1A_1 + b_0A_2)x^2 + (b_1A_0 + b_0A_1)x + b_0A_0.
\end{gathered}$$

Ova jednakost vrijedi ako i samo ako su koeficijenti koji stoje uz iste potencije od x na obje strane jednaki, odnosno:

$$\begin{aligned}
-a_3B_3 &= b_4A_2 \\
-a_3B_2 - a_2B_3 &= b_4A_1 + b_3A_2 \\
-a_3B_1 - a_2B_2 - a_1B_3 &= b_4A_0 + b_3A_1 + b_2A_2 \\
-a_3B_0 - a_2B_1 - a_1B_2 - a_0B_3 &= b_3A_0 + b_2A_1 + b_1A_2 \\
-a_2B_0 - a_1B_1 - a_0B_2 &= b_2A_0 + b_1A_1 + b_0A_2 \\
-a_1B_0 - a_0B_1 &= b_1A_0 + b_0A_1 \\
-a_0B_0 &= b_0A_0
\end{aligned}$$

Sređivanjem tih jednadžbi dobivamo:

$$
\begin{gathered}
a_3B_3 + b_4A_2 = 0 \\
a_2B_3 + a_3B_2 + b_3A_2 + b_4A_1 = 0 \\
a_1B_3 + a_2B_2 + a_3B_1 + b_2A_2 + b_3A_1 + b_4A_0 = 0 \\
a_0B_3 + a_1B_2 + a_2B_1 + a_3B_0 + b_1A_2 + b_2A_1 + b_3A_0 = 0 \\
a_0B_2 + a_1B_1 + a_2B_0 + b_0A_2 + b_1A_1 + b_2A_0 = 0 \\
a_0B_1 + a_1B_0 + b_0A_1 + b_1A_0 = 0 \\
a_0B_0 + b_0A_0 = 0
\end{gathered}
$$

Dobili smo homogeni sustav linearnih jednadžbi s varijablama $B_3, B_2, B_1, B_0, A_2, A_1, A_0$. Taj sustav ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je determinanta matrice sustava jednaka nuli. Budući da je determinanta matrice A jednaka determinanti transponirane matrice A^T, možemo pisati:

$$
\begin{vmatrix}
a_3 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\
a_2 & a_3 & 0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 \\
a_1 & a_2 & a_3 & 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 \\
0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\
0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\
0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0
\end{vmatrix}
= 0
$$

Općenito, dva polinoma
$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ i $q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$ za koje je $n \leq m$ i $a_n \neq 0$ imaju zajednički korijen ako i samo ako:

$$
\begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0
\end{vmatrix}
= 0
$$

Vratimo se sada na početni problem. Dakle, za polinome $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ i $q(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$ prateći prethodni postupak dobit ćemo sljedeću determinantu:

$$
\begin{vmatrix}
2 & 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & -5 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & 2 \\
4 & -4 & -9 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 4 & -4 & -9 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 4 & -4 & -9 & 1 & 2
\end{vmatrix}.
$$

Nije teško provjeriti da je ta determinanta jednaka nuli pa možemo zaključiti da polinomi $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ i $q(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$ imaju zajednički korijen.

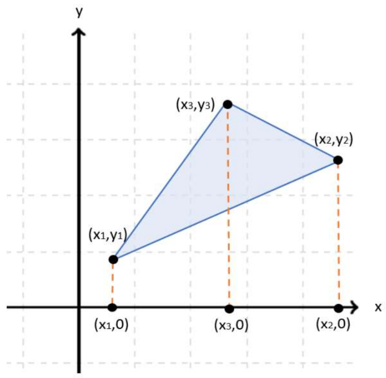
3.5 Primjene determinanti u analitičkoj geometriji

U ovom poglavlju opisat ćemo neke od primjena determinanti na računanje volumena i površina tijela i likova u analitičkoj geometriji.

3.5.1 Površina trokuta i volumen tetraedra

Teorem 3.4. *U ravnini, površina trokuta s vrhovima* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3)$ *jednaka je*

$$P = \frac{1}{2}|D|, \text{ gdje je } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$



Slika 1: Trokut u xy-ravnini

Dokaz. Pretpostavimo da je trokut smješten u koordinatnom sustavu kao na slici 1. Razmotrimo tri trapeza čiji su vrhovi

- Trapez 1:$(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_3, y_3), (x_3, 0)$
- Trapez 2:$(x_3, 0), (x_3, y_3), (x_2, y_2), (x_2, 0)$
- Trapez 3:$(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, 0)$

Površina trokuta jednaka je zbroju površina prva dva trapeza minus površina trećeg trapeza. Dakle,

$$P = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

□

Formulu za površinu trokuta u ravnini možemo generalizirati na trodimenzionalni prostor pa slijedi da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.5. *Volumen tetraedra čiji su vrhovi* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) *jednak je*

$$P = \frac{1}{6}|D|, \ \textit{gdje je} \ D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Razmislimo, što bi se dogodilo da su sve tri točke ležale na istom pravcu i da na te tri točke primjenimo formulu danu u teoremu 3.4. Ako su tri točke u xy-ravnini kolinearne (tj. leže na istom pravcu), onda je determinanta u formuli (5) jednaka 0, tj. vrijedi sljedeći teorem.

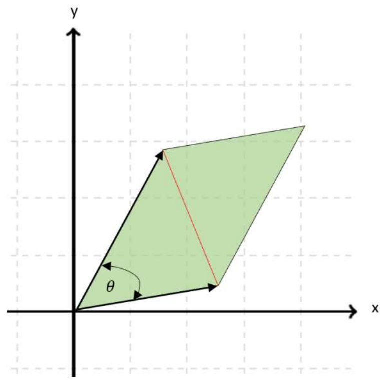
Teorem 3.6. *Tri točke* $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *i* (x_3, y_3) *su kolinearne ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.5.2 Površina paralelograma i volumen paralelopipeda

Paralelogram je četverokut čije su nasuprotne strane paralelne i jednakih duljina, a paralelopiped je prizma čija je baza paralelogram. Primjenom determinanti jednostavno možemo izračunati površinu paralelograma i volumen paralelopipeda.

Teorem 3.7. *Ako je* $A \in M_2$ *onda je površina paralelograma razapetog vektorima koji su stupci matrice* A *jednaka apsolutnoj vrijednosti determinante matrice* A, *tj* $P = |\det A|$. *(Apsolutnu vrijednost koristimo zbog toga što površina mora biti pozitivan broj).*



Slika 2: Paralelogram u xy-ravnini

Dakle, postupak određivanja površine zadanog paralelograma je sljedeći:
Translatirajmo najprije paralelogram tako da se jedan njegov vrh nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, kao na slici 2.

Zatim odredimo one vektore na kojima leže stranice danog paralelograma, a čiji je početak u ishodištu koordinatnog sustava.
Označimo te vektore sa $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ i $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$.
Zatim konstruiramo matricu A pomoću vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tako da ti vektori postanu stupci matrice A, tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

I na kraju dovoljno je pronaći apsolutnu vrijednost determinante matrice A.

Teorem 3.8. *Ako je $A \in M_3$ onda je volumen paralelopipeda razapetog vektorima koji su stupci matrice A jednaka apsolutnoj vrijednosti determinante matrice A, tj $P = |\det A|$. (Apsolutnu vrijednost koristimo zbog toga što volumen mora biti pozitivan broj).*

Postupak traženja volumena zadanog paralelopipeda analogan je postupku traženja površine zadanog paralelograma, samo što ćemo prilikom traženja volumena paralelopipeda odrediti tri vektora, a samim time i apsolutnu vrijednost determinante matrice $A \in M_3$.

3.5.3 Jednadžba pravca, ravnine i sfere

Teorem (3.6) može se prilagoditi te upotrijebiti i u svrhe pronalaženja jednadžbe pravca koji prolazi dvjema točkama.

Teorem 3.9. *Jednadžba pravca koji prolazi kroz dvije različite točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) je*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nadalje, ako tri zadane točke (x_1, y_1, z_1),(x_2, y_2, z_2) i (x_3, y_3, z_3) leže na ravnini $ax + by + cz + d = 0$, njihove koordinate zadovoljavaju jednadžbe:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d &= 0. \end{aligned}$$

Taj sustav zajedno s jednadžbom $ax + by + cz + d = 0$ čini sustav od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice a, b, c i d. Ovaj homogeni sustav ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je determinanta odgovarajuće matrice koeficijenata jednaka nuli, tj.vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.10. *Jednadžba ravnine koja prolazi kroz tri nekolinearne točke (x_1, y_1, z_1),(x_2, y_2, z_2) i (x_3, y_3, z_3) je*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Napomena 3.1. *Napomenimo da ako tri točke leže na istom pravcu(tj., ako ne određuju ravninu), gornja determinanta će također biti jednaka nuli, neovisno o x, y i z.*

Zatim, ako imamo zadane četiri točke (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) i (d_1, d_2, d_3) koje leže na sferi čija je jednadžba $a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e = 0$, onda njihove koordinate zadovoljavaju sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned}
a(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + ba_1 + ca_2 + da_3 + e = 0\\
a(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + bb_1 + cb_2 + db_3 + e = 0\\
a(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + bc_1 + cc_2 + dc_3 + e = 0\\
a(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) + bd_1 + cd_2 + dd_3 + e = 0.
\end{aligned}$$

Te jednadžbe zajedno s jednadžbom sfere čine homogeni sustav od pet linearnih jednadžbi s pet nepoznanica, a, b, c, d, e. Ovaj homogeni sustav ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je determinanta odgovarajuće matrice koeficijenata jednaka nuli, tj.vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.11. *Jednadžba sfere koja prolazi kroz četiri različite točke (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) i (d_1, d_2, d_3) koje ne leže sve u istoj ravnini je:*

$$\begin{vmatrix}
x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1\\
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 & a_2 & a_3 & 1\\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 & b_2 & b_3 & 1\\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 & c_1 & c_2 & c_3 & 1\\
d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 & d_1 & d_2 & d_3 & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Napomena 3.2. *Napomenimo da je na analogan način moguće dobiti jednadžbu kruga koji prolazi trima zadanim točkama.*

3.6 Primjene determinanti u teoriji grafova

U sljedećem poglavlju vidjet ćemo kako su determinante također korisne i primjenjive i u teoriji grafova. Teorija grafova jedna je od grana matematike koja nalazi veliku primjenu u prometu, informatici i sl. Prisjetimo se ukratko osnovnih pojmova teorije grafova.

Definicija 3.4. *1.) Neusmjereni graf je uređeni par skupova (V, E). Elemente skupa V nazivamo čvorovima(ili vrhovima), a elemente skupa E bridovima(ili granama).*
2.) Naizmjenični niz čvorova i grana naziva se putom, a put koji počinje i završava u istom čvoru naziva se ciklus. Graf je povezan ako se svaka dva čvora tog grafa mogu povezati nekim putom, u suprotnom kažemo da je graf nepovezan.
3.) Osnovna razlika između usmjerenih i neusmjerenih grafova je u tome što je brid u usmjerenog grafu uređeni par čvorova. Usmjereni graf smatramo čvrsto povezanim ako za njega vrijedi da se iz svakog čvora može doći u svaki drugi. Ako bi, pak, graf postao povezan kad bi se bridovi zamijenili neusmjerenima, onda taj graf smatramo slabo povezanim.
4.) Vrlo specifična klasa grafova su stabla. Šuma je graf bez ciklusa, a povezana šuma zove se stablo. Ako je graf usmjeren, stablom zovemo šumu koja je slabo povezana.
5.) U stablu može postojati poseban čvor koji se naziva korijenom. Takvo se stablo naziva ukorijenjenim.

Pokušajmo sada, pomoću determinante, odrediti rješenja sljedećih problema.

Primjer 3.4. *Neka je G neusmjereni graf koji se sastoji od skupa vrhova $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i skupa rubova $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$, gdje $\{i, j\}$ označava rub koji povezuje vrhove i i j (primjetimo da je $\{i, j\}$=$\{j, i\}$). Odredite broj različitih stabala u grafu G (tj. podskupova grafa G, gdje su uključeni svi vrhovi grafa G i pritom ne promatramo cikluse rubova).*

Rješenje. Općenito, moguće je karakterizirati graf G kojemu je skup vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ matricom $A \in M_n$ na sljedeći način: element na dijagonali $a_{ii}, \forall i = 1, \ldots, n$, bit će jednak broju rubova koji sadrže vrh i. Nedijagonalni elementi a_{ij} $(i \neq j)$ bit će jednaki -1 ako postoji rub koji povezuje vrhove i i j ili jednaki 0 u suprotnom slučaju. Kako je G neusmjereni graf $(\{i, j\} = \{j, i\})$, matrica A će biti simetrična. Takozvani teorem matričnih stabala tvrdi kako je broj različitih stabala u grafu G određen vrijednošću bilo kojeg kofaktora matrice A.
Vratimo se sada početnom problemu. Prema prethodnoj diskusiji, vidimo da će matrica A u promatranom problemu imati sljedeći oblik:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zatim, da bismo odredili broj različitih stabala u promatranom grafu, koristimo npr. sljedeći kofaktor:

$$(-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 21.$$

Dakle, u zadanom grafu nalazi se 21 stablo.

Primjer 3.5. *Neka je G usmjereni graf koji se sastoji od skupa vrhova $V = \{1, 2, 3, 4\}$ i skupa rubova $E = \{[1, 3], [1, 4], [2, 1], [3, 2], [4, 2], [4, 3]\}$,gdje $[i, j]$ označava rub koji vodi od vrha i do vrha j. Odredite broj različitih usmjerenih stabala koji su ukorjenjeni u vrhu 1.*

Rješenje. Općenito, dijagonalni element $a_{ii}, \forall i = 1, \ldots, n$ u matrici A koja karakterizira graf G bit će jednaka broju rubova koji završavaju u vrhu i. Nedijagonalni elementi a_{ij} $(i \neq j)$ bit će jednaki -1 ako postoji rub koji počinje u vrhu i i završava u vrhu j, a u suprotnom, ti elementi bit će jednaki 0. Kako je graf G usmjereni graf $([i, j] \neq [j, i])$, matrica A neće biti simetrična. Tada će vrijediti da je broj različitih usmjerenih stabala ukorjenjenih u vrhu i jednak vrijednosti kofaktora (i, i) matrice A. Vratimo se na početni problem i u skladu s prethodnim razmatranjem definirajmo matricu A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada slijedi da je broj različitih usmjerenih stabala grafa G ukorjenjenih u vrhu 1 dan vrijednošću kofaktora (1,1), tj zaključujemo da postoje 4 takva stabla jer vrijedi:

$$(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Literatura

[1] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] R. Diestel, Graph Theory, Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] Z. Franušić, J Šiftar, Linearna algebra 1, skripta za studije na PMF-MO, web adresa: https://web.math.pmf.unizg.hr/ fran/predavanja-LA1.pdf

[4] R. Larson, Elementary Linear Algebra, 7th Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, Boston, 2012.

[5] R. Scitovski, Geometrija ravnine i prostora, recenzirani nastavni materijali dostupni na web stranici Odjela za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2011.

[6] R. Scitovski, D.Marković, D.Brajković, M. Miloloža Pandur, Linearna algebra 1,nastavni materijali, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2018.

[7] E. Ulrychová, Several Applications of Determinants Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Prague, web adresa: https://www.mff.cuni.cz/veda/konference/wds/proc/pdf10/WDS10_120_m8_Ulrychova.pdf