Sukladnost i sličnost u srednjoškolskoj nastavi matematike

Čuljak, Sanja

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Sanja Čuljak

Sukladnost i sličnost u srednjoškolskoj nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Sanja Čuljak

Sukladnost i sličnost u srednjoškolskoj nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Opterećenje - (pre)opterećenje učenika je pedagoško - psihološki i didaktičko - metodički problem star gotovo koliko i škola. Teško bi se mogao naći školski sustav (država) u kojem problem (pre)opterećenosti učenika nije stalno prisutan kao teorijski i praktično - pedagoški problem. Stalno se i provode razni projekti s namjerom da se problem riješi, ali su, zbog činjenice da je teško doći do pojedinačnih pokazatelja što opterećuje učenike, rezultati uglavnom skromni. Skromnost rezultata u rješavanju problema preopterećenosti učenika uvjetovana je višestrukim razlozima (uzrocima).

Jedan dio problema proizlazi iz društvenog okruženja u kojemu odgojno-obrazovni sustav djeluje - posebno problemi uvjetovani tranzicijskim promjenama. Drugi suptilniji dio problema je “unutrašnje“ prirode. To su prije svega nastavni planovi i programi jer se njima, kao temeljnim dokumentima škole, određuju: cilj, zadaci i struktura - opseg, dubina i redoslijed obrade - nastavnih sadržaja koje učenici trebaju usvojiti. Tu su još neprimjerena didaktičko - metodička dokumentacija, neprimjerena pedagoško-psihološka i didaktičko metodička osposobljenost nastavnika, niska razina pedagoškog standarda, česti i neprimjereni zahtjevi roditelja i drugo. O kvaliteti ostvarivanja nastavnog plana i nastavnog programa ovisi i kvaliteta učenikova znanja, stupanj razvitka sposobnosti, vještina i umijeća te učenikov sustav vrijednosti. Stoga je razumljiv uži stručni i širi društveni interes za kvalitetu tih dokumenata.

Preopterećenost učenika je stalno stanje u kojem se tijekom školovanja učenici nalaze i u kojemu obaveze što ih nameće školski program količinom i kakvoćom, zahtjevima i načinom odgojno - obrazovnog rada, premašuju njihove psihofizičke mogućnosti, što ponekad izaziva negativne posljedice na mentalni i fizički razvoj učenika. Preopterećnost u pravilu izaziva stresove i frustracije učenika, ali i stvaranje obrambenih mehanizama - otpor prema školi i učenju u njoj. Učenici počinju raditi neredovito, svoje obaveze obavljaju selektivno, površno i formalistički - prepisuju zadaće, izmišljaju opravdanja, neopravdano izostaju s nastava, gube motivaciju, ne surađuju s nastavnicima i uče (iako ne uvijek) samo koliko je potrebno za prolaznu ocjenu. Nerijetko se među i učenicima razvija solidarnost na etički problematičnim vrijednostima.

Prestrukturiranjem važećih okvirnih nastavnih programa - utvrđivanje temeljnih (za sve učenike obaveznih) sadržaja treba stvoriti pretpostavke za djelomično otklanjanje problema preopterećenosti učenika u srednjim školama.

Ovaj diplomski rad se u drugom poglavlju bavi usporedbom Nastavnog plana i programa iz 1994. godine s Nacionalnim okvirnim kurikulumom iz 2006. godine te s najnovijim kurikulumom iz 2019. godine. U trećem poglavlju bavit ćemo se načinima uvođenja pojmova sukladnosti i sličnosti. U četvrtom poglavlju ćemo se baviti analizom udžbenika iz 2014. i 2019. godine izdavača Školska knjiga i Profil. U petom poglavlju ćemo se baviti usporedbom navedenih udžbenika.

Kurikulum nekad i sada

U Republici Hrvatskoj do prvog rasterećenja učenika dolazi 2006. godine, a 2019. godine dolazi do prve faze kurikularne reforme u 1. i 5. razredu osnovnih škola te u 7. razredu za predmete biologija, kemija i fizika. U srednjim se školama provodi u 1. razredu gimnazije u svim predmetima te u 1. razredu četverogodišnjih strukovnih škola u općeobrazovnim predmetima.

Prema planu i programu iz 1994. godine najvažniji ciljevi nastave matematike su bili:

1. Stjecanje temeljnih matematičkih znanja nužnih za nastavak daljnje izobrazbe, praćenje suvremenoga društveno-gospodarskoga i znanstveno-tehnološkoga razvoja i buduće djelatnosti.

2. Razvijanje logičnoga mišljenja i zaključivanja, matematičke intuicije, mašte i stvaralaštva.

3. Stjecanje navika i umijeća, kao što su sistematičnost, ustrajnost, preciznost i postupnost.

4. Postupno usvajanje metode matematičkoga mišljenja koje se očituje u preciznom funkcioniraju pojmova, logičnom zaključivanju i algoritamskom rješavanju problema.

5. Stjecanje sposobnosti matematičkoga oblikovanja i predočivanja problema na znakovima i jeziku matematike, naglašeno u grafičkom smislu.

Prema kurikularnom pristupu promjenama u gimnaziji iz 2006. godine cilj nastave matematike je:

- usvajanje matematičkog znanja potrebnoga za razumijevanje pojava i zakonitosti u prirodi, društvu i tehnici, te sposobnosti primjene u praktičnom životu

dok su zadaci nastave matematike:

1. Usvajanje znanja potrebnih za razumijevanje kvantitativnih odnosa i zakonitosti u raznim pojavama u prirodi, tehnici, društvu i praktičnom životu

2. Usvajanje matematičkih znanja neophodnih za uključivanje u svijet rada, za nastavljanje obrazovanja i za praćenje suvremenog znanstveno - tehnološkog razvoja

3. Razvijanje matematičkog jezika i sposobnosti izražavanja matematičkim jezikom

4. Razvijanje apstraktnog mišljenja i logičko-deduktivnog rasuđivanja
5. Osposobljavanje za precizno forumuliranje pojmova, logičko zaključivanje u algoritamskom rješavanju problema
6. Razvijanje sposobnosti za matematičku intiuciju, maštu i stvaralačko matematičko mišljenje
7. Spoznavanje smisla definicije, teorema i dokaza u matematici
8. Razvijanje sposobnosti primjene različitih metoda pri rješavanju matematičkih problema
9. Razvijanje sposobnosti primjene matematičkog znanja u drugim školskim predmetima
10. Spoznavanje matematike kao korisnog i nužnog dijela znanosti, tehnologije i kulture.

U ovom projektu su utvrđene obavezne (temeljne) i neobavezne (proširene) zadaće za učenike. Obavezne su zadaće temeljne u pojedinom programu i čine okosnicu nastavnoga programa. Ostvaruju ih svi učenici tijekom redovite nastave. Neobavezne zadaće proširuju ili produbljuju temeljne zadaće i namijenje su samo učenicima s većim interesom za pojedini program. Takve zadaće se ne obrađuju tijekom nastave za sve učenike, već se ostvaruju mentorskim oblikom rada, konzultacijama i samostalnim učeničkim projektima. Zadaćama za učenike razrađuju se nastavni sadržaji po vrstama i razinama postignuća učenika. Utvrđuju se znanja, vještine, umijeća i sposobnosti - vrijednosti koje učenik treba usvojiti da bi postigao cilj nastavnog programa. Razine obaveznih zadaća su različite zahtjevnosti: od prepoznavanja i ponavljanja, razumijevanja i primjene u sličnim situacijama do analize, kritičkog prosuđivanja, povezivanja i uređivanja podataka u novu kvalitetu te kreiranja zaključaka i ideja u novim situacijama. Postignuća učenika koja su obaveznim zadaćama predviđena ne dovode u pitanje kompetencije predviđene svjedožbom pojedinog razreda i škole.

Prema najnovijoj kurikularnoj reformi iz 2019. godine odgojno - obrazovni ciljevi nastave matematike je da će učenici temeljem usvojenih matematičkih znanja, vještina i procesa:

1. Primjeniti matematički jezik u usmenome i pisanome izražavanju, strukturiranju, analizi, razumijevanju i procjeni informacija upotrebljavajući različite načine prikazivanja matematičkih ideja, procesa i rezultata u matematičkome kontekstu i stvarnome životu.
2. Rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije te preispitivanje procesa i rezultata, po potrebi uz učinkovitu uporabu odgovarajućih alata i tehnologije
3. Razviti samopouzdanje i svijest o vlastitim matematičkim sposobnostima, upornost, poduzetnost, odgovornost, uvažavanje i pozitivan odnos prema matematici i radu općenito

4. Prepoznati povijesnu, kulturnu i estetsku vrijednost matematike njezinom primjenom u različitim disciplinama i djelatnostima kao i neizostavnu ulogu matematike u razvoju i dobrobiti društva.

Matematički procesi važni su na svim razinama obrazovanja te prožimaju sve domene kurikuluma predmeta Matematika. Organizirani su u pet skupina:

1. *Prikazivanje i komunikacija* - učenici smisleno prikazuju matematičke objekte, obrazlažu rezultate, objašnjavaju svoje ideje i bilježe postupke koje provode. Pritom se koriste različitim prikazima: riječima, crtežima, maketama, dijagramima, grafovima, listama, tablicama, brojevima, simbolima i slično. U danoj situaciji odabiru prikladan prikaz, povezuju različite prikaze i prelaze iz jednoga na drugi. Prikupljaju i tumače informacije iz raznovrsnih izvora. Razvijanjem sposobnosti komuniciranja u matematici i o matematici učenici se koriste jasnim matematičkim jezikom, razumiju njegov odnos prema govornome jeziku, slušaju i razumiju matematičke opise i objašnjenja drugih te razmjenjuju i sučeljavaju svoje ideje, mišljenja i stavove. Uspješna komunikacija doprinosi lakšemu i bržemu usvajanju novih sadržaja i kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika, ali i kurikuluma ostalih nastavnih predmeta. Prikazivanje i komunikacija spada u domenu Brojevi.

2. *Povezivanje* - učenici uspostavljaju i razumiju veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikuju cjeline njihovim nadovezivanjem. Uspoređuju, grupiraju i klasificiraju objekte i pojave prema zadanome ili izabranome kriteriju. Povezuju matematiku s vlastitim iskustvom, prepoznaju je u primjerima iz okoline i primjenjuju u drugim područjima kurikuluma. Time ostvaruju jasnoću, pozitivan stav i otvorenost prema matematici te povezuju matematiku sa sadržajima ostalih predmeta i životom tijekom procesa cjeloživotnog učenja. Povezivanje spada u domenu Algebra i funkcije.

3. *Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje* - učenici analiziraju problemsku situaciju, prepoznaju elemente koji se mogu matematički prikazati i planiraju pristup za njezino rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka. Odabiru, osmišljavaju i primjenjuju razne strategije, rješavaju problem, promišljaju i vrednuju rješenje te ga prikazuju na prikladan način. Razvojem ovoga procesa, osim primjene matematičkih znanja, učenici razvijaju upornost, hrabrost i otvorenost u suočavanju s novim i nepoznatim situacijama. Ovaj matematički proces spada u domenu Oblik i prostor.

4. *Rješavanje problema i matematičko modeliranje* - učenici analiziraju problemsku situaciju, prepoznaju elemente koji se mogu matematički prikazati i planiraju pristup za njezino rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka. Odabiru, osmišljavaju i primjenjuju razne strategije, rješavaju problem, promišljaju i vrednuju rješenje te ga prikazuju na prikladan način. Razvojem ovoga procesa, osim primjene matematičkih znanja, učenici razvijaju upornost, hrabrost i otvorenost u suočavanju s novim i nepoznatim situacijama.

5. *Primjena tehnologije* - korištenje alatima i tehnologijom pomaže učenicima u matematičkim aktivnostima u kojima su u središtu zanimanja matematičke ideje,

pri provjeravanju pretpostavki, pri obradi i razmjeni podataka i informacija te za rješavanje problema i modeliranje. Učenici uočavaju i razumiju prednosti i nedostatke tehnologije. Na taj se način prirodno otvaraju mogućnosti za nove ideje, za dublja i drukčija matematička promišljanja, kao i za nove oblike učenja i poučavanja. Spada u domenu Primjena tehnologije.

Početak i razvoj matematike temelji se na velikim matematičkim idejama kao što su broj, oblik, struktura i promjena. Usvajanje tih koncepata važno je za razumijevanje informacija, procesa i pojava u svijetu koji nas okružuje. Srodni koncepti grupirani su u domene Brojevi, Algebra i funkcije, Oblik i prostor, Mjerenje i Podatci, statistika i vjerojatnost, koje proizlaze iz domena matematičkoga područja kurikuluma.

Sukladnost i sličnost u 1.razredu opće gimnazije - 140 sati godišnje koja je tema ovog diplomskog rada spada u domenu Oblik i prostor. Domena Oblik i prostor dio je geometrije koji se bavi proučavanjem oblika, njihovih položaja i odnosa. Rastavljanjem i sastavljanjem oblika uspoređuju se njihova svojstva i uspostavljaju veze među njima. Iz uočenih svojstava i odnosa izvode se pretpostavke i tvrdnje koje se dokazuju crtežima i algebarskim izrazima. Koristeći se geometrijskim priborom i tehnologijom, učenici će izvoditi geometrijske transformacije, istraživati i primjenjivati njihova svojstva te razviti koncepte sukladnosti i sličnosti. Interakcijom s ostalim domenama i matematičkim argumenitranjem prostornih veza, rabeći prostorni zor (prostorni zor intuitivni je osjećaj za oblike i odnose među njima, a zajedno s geometrijskim rasuđivanjem razvija sposobnost misaone predodžbe objekta i prostornih odnosa) i modeliranje, učenici pronalaze primjenu matematičkih rješanje u različitim situacijama. Prepoznaju ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnome okružju te ih upotrebljavaju za opis i analizu svijeta oko sebe.

Prema planu i programu iz 1994. godine u cjelini Sukladnost i sličnost radili su ovi naslovi:

1. Sukladnost trokuta
2. Primjene sukladnosti
3. Proporcionalnost
4. Talesov teorem
5. Sličnost trokuta i primjene
6. Homotetija
7. Primjene na geometrijske konstrukcije

Prema kurikularnom pristupu promjenama u gimnaziji iz 2006. godine obavezne zadaće iz Sukladnosti i sličnosti su:

1. Izreći teoreme o sukladnosti trokuta
2. Izvesti osnovne konstrukcije trokuta i jednostavnije konstrukcije koje se na njih svode

3. Opisati proporcionalnost dužina i izreći Talesov teorem
4. Objasniti pojam sličnosti trokuta
5. Definirati homotetiju i primjeniti na jednostavnije konstruktivne zadatke

dok je proširena zadaća:

1. Rješavati složenije konstruktivne zadatke zajedno s primjenom homotetije

Prema kurikularnoj reformi iz 2019. odgojno - obrazovni ishodi su:

1. Definira i konstruira simetralu dužine, simetralu kuta, visinu, težišnicu te karakteristične točke trokuta
2. Uočava svojstva težišta
3. Analizira položaj karakterističnih točaka ovisno o vrsti trokuta
4. Otkriva formule za površinu trokuta sa zadanim polumjerom upisane i opisane kružnice
5. Izriče i ilustrira poučke o sukladnosti i sličnosti trokuta te Talesov poučak o proporcionalnosti dužina, primjenjuje ih u modeliranju problema
6. Određuje, obrazlaže i primjenjuje odnose površina, opsega i drugih veličina u sličnim trokutima
7. Primjenjuje Heronovu formulu pri računanju površine trokuta
8. Rješavajući primjere zadataka, upoznaje povijest matematike
9. Rješava probleme rabeći Euklidov poučak o pravokutnome trokutu
10. Dokazuje tvrdnje rabeći poučke o sukladnosti i sličnosti
11. Crtice iz povijesti - Tales, Euler, Heron, Pitagora

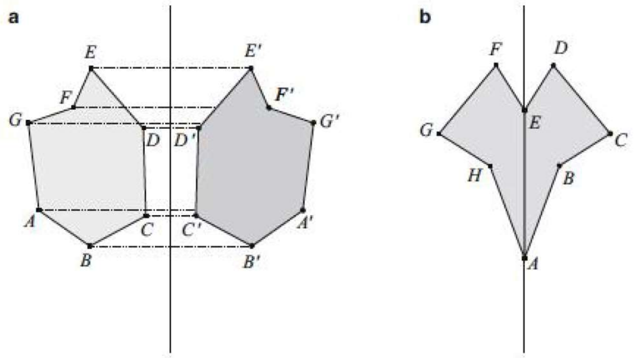
a prošireni sadržaj:

1. Otkriva Eulerov pravac
2. Crtice iz povijesti - Euler

Načini uvođenja pojmova sukladnosti i sličnosti

Sukladnost

Biti simetričan je svojstvo geometrijskih likova. Sukladnost, s druge strane, je, kao i sličnost, odnos između likova. Matematički koncepti preslikavanja ravnine i sukladnosti možemo pristupiti s dvije različite strane. S jedne strane, možemo poći od izometrija, konstruirati lik koji je izometrična slika početnog lika i tako uvesti sukladnost. S druge strane, međutim, sukladnost se može odabrati kao osnovni koncept, a time se izometrije kao preslikavanja ravnine uvode pomoću sukladnosti.



Slika 1a. Lik i njegova slika nastala zrcaljenjem (osnom simetrijom), **1b.** lik koji je osnosimetričan

Pojam sukladnosti čini važan dio nastave geometrije posebno za zaključivanje i dokaz. Sukladnost jamči nedvosmislenu konstrukciju trokuta, a sukladnost likova i tijela omogućuju različite metode određivanja površine i volumena.

U nastavi geometrije dokazi pomoću izometrija ravnine gotovo su iščeznuli iz kurikuluma i danas - na formalnoj razini - jedva imaju ulogu. No ta preslikavanja bi trebala biti važni elementi nastave geometrije iz nekoliko razloga:

1. Razvoj koncepta preslikavanja ravnine i sukladnosti lakši je s barem intuitivnim razumijevanjem osne simetrije, centralne simetrije, rotacije i translacije

2. Simetričnost kao svojstvo geometrijskog lika zahtijevaju suštinsko razumijevanje pojma lika

3. Izometrije stvaraju sukladne likove. To su posebne funkcije i doprinose važnom razvoju funkcionalnog mišljenja

4. Računalo je sada alat pomoću kojeg se može jasno prikazati transformacije likova i konstrukcije. Mnoge transformacije mogu se matematički opisati osnom simetrijom, centralnom simetrijom, rotacijama, translacijom

Matematički, koncepti izometrije i sukladnosti usko su povezani. Pitanje je kojom razinom razumijevanja izometrija, prije svega osne simetrije, i sukladnosti bavi u nastavi geometrije.

U nastavku je pristup pojmu sukladnosti i teoremima sukladnosti prikazan na dva različita načina.

Prvi način

1. Dvije se figure nazivaju sukladne ako se mogu položiti jedna na drugu tako da se potpuno podudaraju.

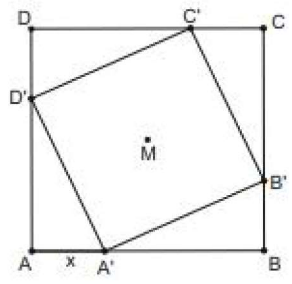
ili

2. Dvije figure A i B su sukladne ako imaju isti oblik i veličinu. Figure odgovaraju točno jedna drugoj.

U ovom pristupu sukladnost je osnovni pojam koji se temelji na usporedbi odgovarajućih veličina. Ako se kasnije uvode osna simetrija, centralna simetrija, translacija i rotacija, tim preslikavanjima originalni objekti preslikavaju se u objekte jednake veličine. To objašnjava sukladnost objekta i preslikanog objekta. Ovim pristupom definiramo sukladnost trokuta na sljedeći način: *Definicija*: Dva trokuta su *sukladna* ako imaju sukladne odgovarajuće stranice i sukladne odgovarajuće kutove.

Drugi način Na drugi način prvo se uvode osna simetrija, centralna simetrija, translacija i rotacija - dakle izometrije, preslikavanje koja čuvaju udaljenost. Pojam sukladnosti definira se preko izometrija: Lik L sukladan je liku L' ako postoji izometrija koja lik L preslikava na lik L'. Prema ovom pristupu sukladnost trokuta se definira: *Definicija*: Dva su trokuta sukladna ako postoji izometrija ravnine $g : M \to M$ koja preslikava vrhove prvog trokuta u vrhove drugog trokuta.

Slijedi primjer Kvadrat u kvadratu gdje je dan dokaz zasnovan na preslikavanju ravnine i dokaz pomoću sukladnosti: Dan je kvadrat ABCD kao na slici 2. Iz vrhova A,B,C i D povučene su dužine duljine x tako da nastaje novi četverokut A'B'C'D'. Zašto je ovaj četverokut opet kvadrat?



Slika 2. Kvadrat

Ideja dokaza zasnovanog na *sukladnosti:* Prema teoremu sukladnosti SKS, trokuti AA'D',BB'A',B'CC' i DD'C' su sukladni. Dakle, četverokut A'B'C'D' je romb (četverokut s četiri strane jednake duljine). Zbog zbroja kutova u trokutu, svaki unutarnji kut četverokuta A'B'C'D' iznosi 90°. Dakle, četverokut A'B'C'D'je kvadrat.

Ideja dokaza zasnovanog na *preslikavanju ravnina:* Zamišljamo da je čitava slika (kvadrat i četverokut A'B'C'D') zakrenuta za 90° oko središnje točke M, tako da se cijeli lik poklapa sa samim sobom. To se ponavlja za rotacije od 180° i 270°, a zatim za 360°. Četverokut A'B'C'D' ima četverostruku rotacijsku simetriju za svakih 90°. Četverokut s četverostrukom rotacijskom simetrijom je kvadrat.

Ovaj primjer pokazuje prototipske prednosti i nedostatke dvije metode dokazivanja.

Prednosti dokaza pomoću sukladnosti:

1. Pretpostavke teorema sukladnosti lakše je razumjeti od svojstava geometrijskog lika u dokazu temeljenom na preslikavanju ravnine. Da bismo mogli koristiti metodu preslikavanja, prvo se moraju pronaći odgovarajuća preslikavanja i moraju se vrlo precizno znati njihova svojstva

2. "Statična" usporedba danih veličina (duljine, mjere kuta) čine se jednostavnijom od "dinamičkog" preslikavanja lika

3. Lakše je verbalizirati dokaz sukladnosti nego svojstva preslikavanja ravnina

U obrađenim udžbenicima u ovom diplomskom radu pristupa se na prvi način.

Sličnost

Sličnosti istražuje svojstva geometrijskih likova koji se podudaraju u odgovarajućim kutovima i omjerima duljina odgovarajućih stranica. Na primjer, dva trokuta su slična ako se podudaraju u svojim unutarnjim kutovima. Ista tvrdnja općenito bi bila pogrešna kod četverokuta, što jednostavno možemo vidjeti na primjeru pravokutnika. S druge strane, svi krugovi su slični, budući jer vrijedi $\frac{o}{2r} = \pi$. Tako sličnost obuhvaća sukladnost. Kao i kod sukladnosti, i kod sličnosti imamo dva različita pristupa:

1. Pristup koji se temelji na Euklidu definira slične mnogokute pomoću jednakih unutarnjih kutova i odgovarajućih omjera. U središtu ovog pristupa nalaze se skupovi zraka, s kojima se zaključuje o sličnim (djelomičnim) figurama
2. Pristup preko geometrijskih preslikavanja prikazuje dva geometrijska lika kao slična ako postoji "preslikavanje sličnosti" između njih

"Pristup" se podrazumijeva samo kao tehnička struktura, a ne nastavni program dizajniran s didaktičkog gledišta. Rasprava o tome ima li geometrijska preslikavanja znatne didaktičke prednosti u odnosu na "statičku" analizu likova zbog "dinamičkog" karaktera, izblijedila je krajem prošlog stoljeća. U nastavnim materijalima danas se može pronaći mješoviti pristup: stroga struktura prema samo jednoj metodi i odbacivanje drugog pristupa se ne preporučuju za poučavanje, tako da se danas razvio suživot dvaju pristupa.

Analiza udžbenika

Udžbenik - J. Krajina, I. Gusić, F.M. Brückler, T. Milun - Školska knjiga, 2014

Matematika 1, 2. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka u 1. razredu opće, jezične i klasične gimnazije, nakladnika Školska knjiga u nastavnoj cjelini Sukladnost i sličnost trokuta obrađuje ove nastavne jedinice:

- Sukladnost dužina i kutova
- Sukladnost trokuta
- Četiri karakteristične točke trokuta
- Proporcionalnost dužina. Talesov poučak
- Sličnost trokuta
- Homotetija

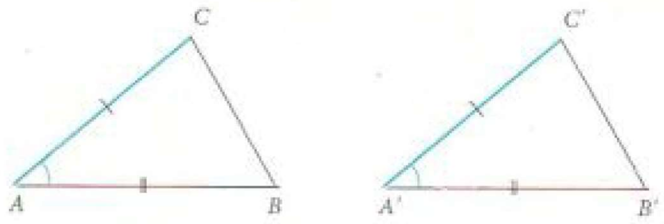
Prvo što se navodi nakon što se otvori cjelina motivacijski primjer i što će učenici nakon ovog poglavlja znati:

- Odrediti mjeru kuta
- Razlikovati vrste trokuta
- Rabiti koeficijent sličnosti
- Rabiti Pitagorin poučak i njegov obrat
- Rabiti osnovna svojstva paralelograma, trapeza i pravilnih mnogokuta
- Odrediti opseg i površinu
- Modelirati rabeći geometriju

Opći dojam ovog udžbenika je preglednost i ne tako dobra vizualna organizacija dijelova nastavne jedinice. Definicije i primjeri su vizualno označeni, ali je korištena samo jedna boja pa nije dovoljno izraženo što je točno definicija, a što primjer. Korištenje samo jedne boje može umanjiti interes učenika. Udžbenik je pisan jednostavnim jezikom, a boljem razumijevanju teksta doprinose i brojne slike odnosno riješeni primjeri. Svi su primjeri detaljno riješeni i popraćeni su sličnim zadatkom za samostalni rad. Svaka nastavna jedinica popraćena je zadatcima za vježbu, a posebno mi se svidjelo što kao pomoć u rješavanju zadataka učenicima je dana poveznica na video jednog od autora udžbenika koji objašnjava postupak rješavanja nekih zadataka. Primjeri i zadatci iz svakodnevnog života su slabo zastupljeni. Na kraju poglavlja nalaze se povijesne činjenice, a nakon toga slijede i dodatni zadatci za uvježbavanje i pripremu pismenog ispita. Na kraju nastavne cjeline nalaze se zadatci s državne mature koje se odnose na ovu cjelinu.

Na početku definira se kad su dvije dužine i dva kuta sukladna, također je dan podsjetnik koliki je zbroj mjera kutova u trokutu i nejednakost trokuta. Nakon toga prelazi se na sukladnost trokuta i poučke o sukladnosti.

Prvi poučak o sukladnosti S-K-S *Dva su trokuta sukladna ako su sukladna u dvjema stranicama i kutu među njima.*

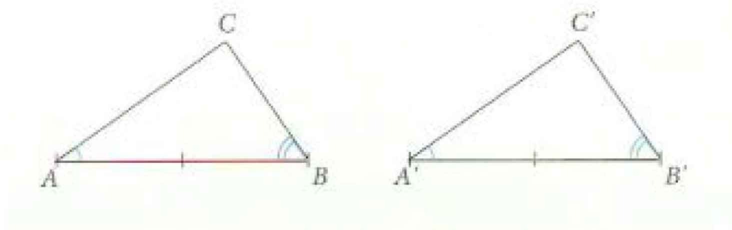


Slika 3. Udžbenik: Školska knjiga

Obrazloženje: Nacrtajmo trokute ABC i A'B'C' kao na slici 3. Da bismo naznačili da su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ sukladne, označili smo ih dvjema crticama. Slično je za stranice $\overline{AC}$ i $\overline{A'C'}$. Također su kutovi uz A i A' sukladni. Treba obrazložiti da su trokuti ABC i A'B'C' sukladni i u ostalim elementima. Budući da su kutovi uz A i A' sukladni, možemo kut uz A' nanijeti na kut uz A tako da zraku A'B' nanesemo na zraku AB. Tada će zraka A'C' biti nanesena na zraku AC. Pritom će točka B' pasti u točku B, a točka C' uz točku C. Zato će $\overline{B'C'}$ pasti na $\overline{BC}$, kut uz B' na kut uz B i kut uz C' na kut uz C. Zaključujemo da su trokuti sukladni.

Nakon definicije i obrazloženja nalaze se dva riješena primjera u kojem se koristi navedeni poučak i zadatak koji učenici samostalno trebaju riješiti i nakon toga se prelazi na drugi poučak.

Drugi poučak o sukladnosti K-S-K *Dva su trokuta sukladna ako su sukladna u jednoj stanici i kutovima uz tu stranicu.*

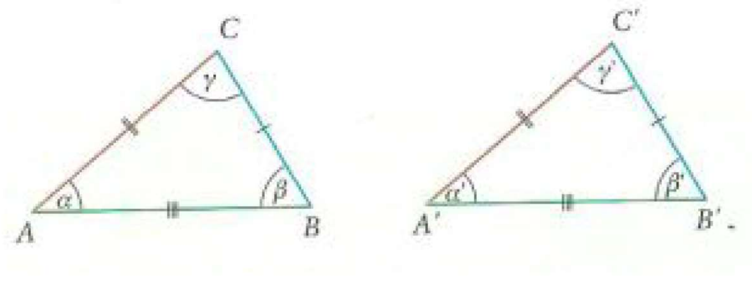


Slika 4. Udžbenik: Školska knjiga

Obrazloženje: Nanesimo kut uz A' na kut uz A tako da zraku A'B' nanesemo na zraku AB, a zraku A'C' na zraku AC. Pritom će B' pasti u B pa će $\overline{A'B'}$ pasti na dužinu $\overline{AB}$, a zraku A'C' na zraku AC. Pritom će B' pasti u B pa će dužina $\overline{A'B'}$ pasti na dužinu $\overline{AB}$. Također će kut uz B' pasti na kut uz B pa će zraka B'C' pasti na zraku BC. Zaključujemo da će sjecište zraka A'C' i B'C' pasti u sjecište zraka AC i BC, što znači da će vrh C' pasti u vrh C. Zato će dužina $\overline{A'C'}$ pasti na dužinu $\overline{AC}$, a dužina $\overline{B'C'}$ na dužinu $\overline{BC}$. Zaključujemo da su trokuti ABC i A'B'C' sukladni.

Slijede dva riješena primjera i odmah se prelazi na treći poučak o sukladnosti.

Treći poučak o sukladnosti S-S-S *Dva su trokuta sukladna ako su sukladna u svim svojim stranicama.*



Slika 5. Udžbenik: Školska knjiga

Nakon toga je dan riješen primjer i zadatci za samostalno vježbanje. Zadatci su poredani od jednostavnijeg prema težem. U jednom od zadataka nalazi se link jednog od autora udžbenika koji pokazuje kako se zadatak riješava.Također su dana i dva zadatka iz svakodnevnog života.

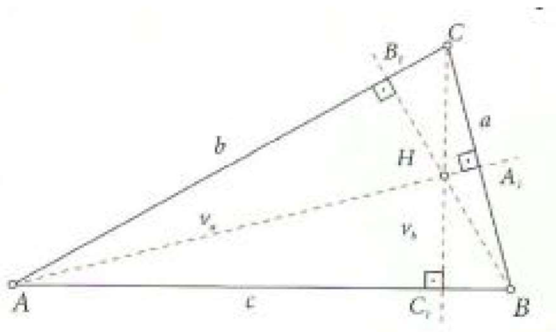
Slijedi nastavna jedinica *Četiri karakteristične točke trokuta* u kojoj su opisane središte opisane kružnice trokuta, središte upisane kružnice trokuta, težište trokuta i ortocentar trokuta.

Kod središta opisane kružnice dana je definicija središta opisane kružnice te konstrukcije trokuta ako su zadane dvije stranice trokuta i polumjer R. Slijedi rasprava o odnosima stranica trokuta i polumjera. Kroz primjer prikazano je da središte opisane kružnice može biti unutar trokuta, izvan trokuta ili na stranici trokuta. Također je kroz primjer prikazano gdje se središte opisane kružnice nalazi kod šiljastokutnog, pravokutnog i tupokutnog trokuta.

Slijedi središte upisane kružnice trokuta. Navedeno je koje su sličnosti i razlike s opisanom kružnicom te je dana definicija središta upisane kružnice i primjer konstrukcije trokuta ako je zadana jedna stranica trokuta, jedna veličina kuta i polumjer.

U nastavku je podnaslov težište trokuta (sjecište težišnica) gdje je prvo objašnjeno što su težišnice te iz toga slijedi što je težište trokuta. Napomenuto je da se težišnice trokuta sijeku u omjeru 2:1 te je to popraćeno s primjerom, te također dana je konstrukcija trokuta ako su nam zadane dvije težišnice i jedna stranica trokuta.

Zadnji podnaslov koji se još obrađuje u ovoj nastavnoj jednici je ortocentar (sjecište visina trokuta).

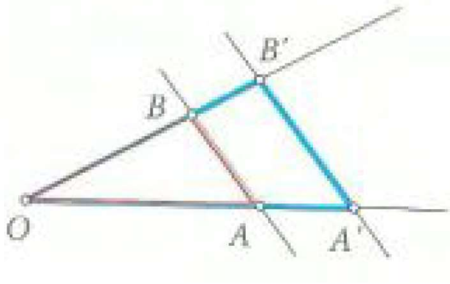


Slika 6. Udžbenik: Školska knjiga

Dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ zovu se *visine* trokuta, a točke A_1, B_1, C_1 su *nožišta* visina. Uočavamo da se visine sijeku u jednoj točki:*ortocentru* trokuta. Ortocentar može biti unutar trokuta, izvan trokuta ili u vrhu trokuta. Slijede primjeri gdje se treba konstruirati pravokutan trokut i njegove visine, zatim tupokutan trokut i njegove visine te je također dan primjer gdje se treba izračunati duljine visine trokuta ako su zadane stranice trokuta.

Prelazi se na nastavnu jedinicu *Proporcionalnost dužina. Talesov poučak.* Prvo se definira proporcionalnost kao važan matematički pojam koji se javlja u raznim matematičkim područjima, nakon toga se definira omjer brojeva.

Neka su a i b, a $\neq 0$ realni brojevi. *Omjer* broja a i broja b prema definiciji je količnik $\frac{a}{b}$ broja a i broja b. Taj omjer često zapisujemo i u obliku $a : b$. Ako su nam zadana dva po dva broja a, b i c, d i ako je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tj. $a : b = c : d$ onda kažemo da su brojevi *a, c* razmjerni (proporcionalni) brojevima *b, d.* Posebno je naglašeno da je bitan redoslijed brojeva. Jednakost $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ zove se *razmjer(proporcija).* Dakle, razmjer je jednakost omjera. Ako taj jedan te isti omjer označimo oznakom k, onda je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Broj k zove se koeficijent proporcionalnosti (razmjernosti). Omjeri i razmjeri ne moraju biti povezani samo s brojevima, nego i s dužinama. Omjer dužina je prema definiciji omjer pripadnih duljina.

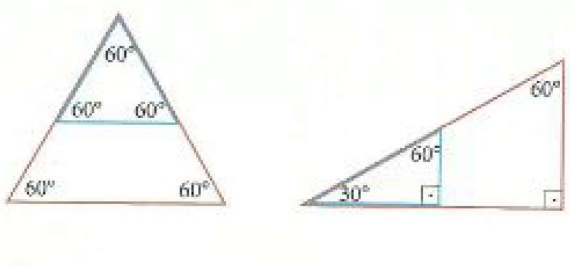


Slika 7. Udžbenik: Školska knjiga

Pogledajmo kut s vrhom u točki O, kojemu su kraci presječeni dvama usporednim pravcima (paralelama). Uočimo dužine $\overline{OA}$,$\overline{OA'}$, $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$, $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$. Tih 6 dužina su neovisne jedna o drugoj, nego ih povezuje jedan razmjer.
Vrijedi općenito: $\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$. Ta se tvrdnja zove **Talesov poučak** i može se izreći ovako: *Paralelni pravci na kracima kuta odsijecaju odsječke proporcionalnih duljina.*
Ta tvrdnja vrijedi samo ako su kraci presječeni usporednim pravcima. To znači da vrijedi **obrat Talesova poučka:** Ako je $\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}$, onda je $AB||A'B'$.

Slijede dva primjera i nakon toga zadatci za vježbu gdje učenici većinom moraju izračunati nepoznati element pomoću Talesovog poučka. Nakon toga slijedi nastavna jedinica *Sličnost trokuta.*

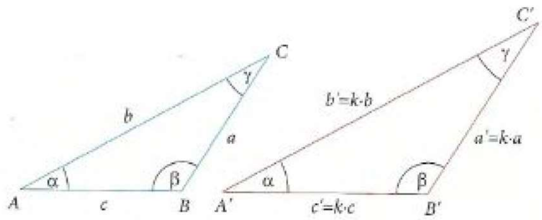
Intuitivno osjećamo što bi bio pojam sličnosti.



Slika 8. Udžbenik: Školska knjiga

Svi bismo sigurno rekli da su mali trokuti na ovim crtežima slični velikim trokutima.*Kažemo da su dva trokuta slična ako su im **kutovi sukladni** i odgovarajuće stranice **proporcionalne** (razmjerne).*

Ako su trokuti ABC i A'B'C' slični pišemo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



Slika 9. Udžbenik: Školska knjiga

Trokuti ABC i A'B'C' slični su jer su im kutovi *sukladni*, a odgovarajuće stranice razmjerne.

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

Broj $k > 0$ zove se *koeficijent sličnosti* trokuta ABC i A'B'C'. Svojstva razmjernosti stranica sličnih trokuta moglo se napisati i u obliku:

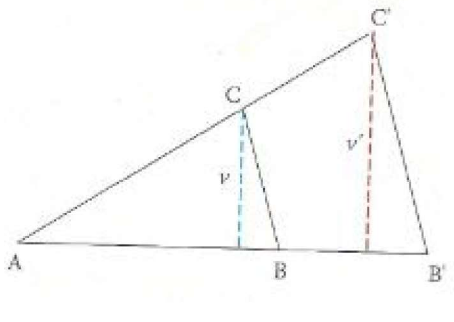
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{k}$$

pa je i broj $\frac{1}{k}$ koeficijent sličnosti tih trokuta. Koji ćemo koeficijent sličnosti uzeti ovisi o tome koji od tih dvaju trokuta izaberemo za prvi trokut, a koji za drugi.

Nakon uvoda slijedi primjer gdje treba odrediti duljine stranica sličnog trokuta ako su zadane stranice jednog trokuta i koeficijent sličnosti. Nakon toga dan je primjer gdje se proučava što se događa s opsegom trokuta i dan je zaključak da je *omjer opsega sličnih trokuta jednak je omjeru odgovarajućih stranica* (tj. jednak je koeficijentu sličnosti).

$$\frac{O'}{O} = \frac{k(a+b+v)}{a+b+c} = k$$

U sljedećem primjeru promatramo omjere odgovarajućih visina sličnih trokuta.



Slika 10. Udžbenik: Školska knjiga

Slične trokute postavimo u međusobni položaj kao na Slici 10. Određujemo omjer visina iz vrhova C i C' (visine na slici označene su oznakama v, v'). Te su visine usporedne pa prema Talesovu poučku zaključujemo da je
$\frac{v'}{v} = \frac{|AC'|}{|AC|} = k$, tj. $v' = k \cdot v$. Odnosno, odgovarajuće visine sličnih trokuta odnose se kao odgovarajuće stranice.

Kroz prethodni primjer je također pokazan omjer površina sličnih trokuta.

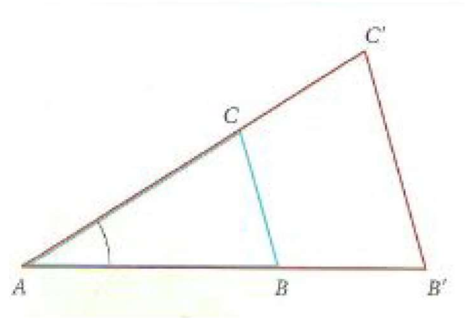
$$P = \frac{|AB'| \cdot v'}{2} = \frac{k \cdot |AB| \cdot k \cdot v}{2} = k^2 \cdot \frac{|AB| \cdot v}{2} = k^2 \cdot P$$

Dakle, $\frac{P'}{P} = k^2$.

Slijede poučci o sličnosti trokuta. Napominje se da za provjeravanje sličnosti dvaju trokuta nije potrebno ispitivati jednakosti svih odgovarajućih kutova i razmjernosti stranica, te da su poučci o sličnosti trokuta analogni poučcima o sukladnosti trokuta.

Prvi poučak o sličnosti trokuta

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu i ako su odgovarajuće stranice koje zatvaraju taj kut razmjerne.

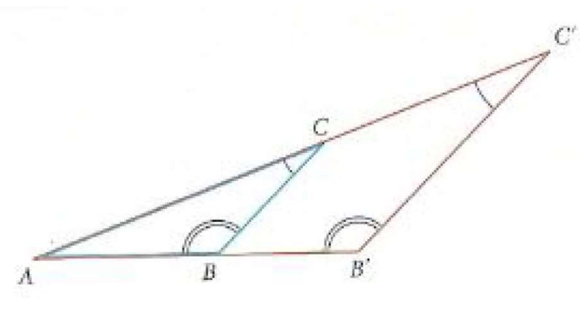


Slika 11. Udžbenik: Školska knjiga

Prema obratu Talesova poučka zaključujemo da je $BC \parallel B'C'$ i da je $\frac{|B'C'|}{|BC|} = k$. Iz $BC \parallel B'C'$ zaključujemo da je kut uz B' jednak kutu uz B, a kut uz C' kutu uz C. Dakle, trokuti ABC i A'B'C' međusobno su slični.
Nakon toga slijedi primjer gdje se dokazuje da se težišnice sličnih trokuta odnose kao odgovarajuće stranice.
Drugi i treći poučak o sličnosti su samo navedeni uz pripadajuće slike.

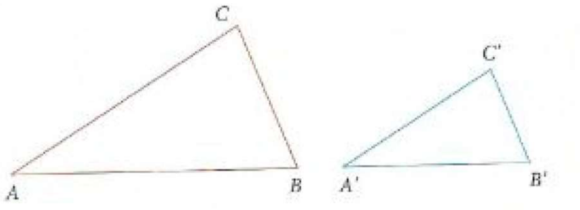
Drugi poučak o sličnosti trokuta

Dva su trokuta slična ako imaju sukladne odgovarajuće kutove.



Slika 12. Udžbenik: Školska knjiga

Treći poučak o sličnosti trokuta
Dva su trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice razmjerne.



Slika 13. Udžbenik: Školska knjiga

Slijede zadatci za vježbu, u ovom dijelu se također nalazi poveznica gdje jedan od autora riješava zadatke.

Slijedi zadnja nastavna jedinica *Homotetija.* Kao motivacijski primjer je dano da se zamisli da je nakon neke neuspjele opsade utvrde potpisano primirje u kojemu se napadač obvezao povući svoju vojsku na dvostruku udaljenost od utvrde. Povlačenje napadača možemo zamisliti kao preslikavanje koje svakoj točki A u kojoj je prije bio neki vojnik pridružuje točku A' u kojoj je taj vojnik nakon povlačenja. Taj je primjer povezan s važnim matematičkim pojmom, homotetijom.

Neka je O točka ravnine i k $\neq 0$ realan broj. *Homotetija* sa središtem (centrom) homotetije O i koeficijentom homotetije k jest preslikavanje ravnine koje svakoj točki A ravnine pridružuje točku A' tako da vrijedi:

1. $|OA'| = |k| \cdot |OA|$
2. Točke A, A, A' na istom su pravcu i pritom vrijedi da su:
   a) Točke A, A' su s iste strane točke O ako je $k > 0$
   b) Točka O je između točaka A, A' ako je $k < 0$

Nadalje, pokazana je homotetija s pozitivnim i negativnim koeficijentom homotetije. Također, dana su svojstva homotetije:

1. Ako je A' pridružena točki A, a B' točki B, onda je $A'B' \parallel AB$
2. Homotetija preslikava $\overline{AB}$ u njoj usporednu $\overline{A'B'}$. Pritom je $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$

Također je pokazano da homotetija preslikava trokut u njemu sličan trokut s koeficijentom sličnosti k, jednakim apsolutnoj vrijednosti koeficijenta homotetije, tj. da nam homotetija čuva kutove (kut se pri homotetiji ne mijenja). Nakon toga slijedi riješeni primjer gdje se mora odrediti homotetična slika kvadrata s zadanim pozitivnim koeficijentom homotetije. Isto tako imamo i riješeni primjer homotetične slike trokuta s pozitivnim i negativnim koeficijentom homotetije. Dan je riješeni primjer gdje u zadanom trokutu upišemo kvadrat tako da na jednoj stranici trokuta budu dva vrha kvadrata, a na preostalim dvjema stranicama preostala dva vrha kvadrata.

Za sami kraj nastavne cjeline dane su povijesne činjenice o Talesu iz Mileta i Euklidu, te je također spomenut Eulerov pravac i Feuerbachova kružnica.

Nakon povijesnih činjenica slijede zadatci za uvježbavanje homotetije, zatim zadatci za vježbu cijele cjeline. Na kraju cjeline dani su zadatci koji su se do sada pojavljivali na državnoj maturi koji su povezani s ovom nastavnom cjelinom. Također imamo pitanja za ponavljanje i primjere pisanog ispita.

S ovim je završena analiza ovog udžbenika, te sada slijedi analiza udžbenika Školske knjige po novom kurikulumu.

Udžbenik - A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić - Školska knjiga, 2019

Matematika 1, 2.dio, udžbenik sa zbirkom zadataka u 1. razredu opće, jezične i klasične gimnazije, nakladnika Školska knjiga u nastavnoj cjelini Sukladnost i sličnost trokuta obrađuje ove nastavne jedinice:

- Sukladnost dužina i kutova
- Sukladnost trokuta
- Karakteristične točke trokuta
- Proporcionalnost dužina
- Sličnost trokuta

ISHODI CJELINE:
Učenik:

- Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta (MAT SŠ C.1.1.)
- Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta (MAT SŠ C.1.2., MAT SŠ D.1.2.)

RAZRADA ISHODA:
Učenik:

- Definira i konstruira simetralu dužine, simetralu kuta, visinu i težišnicu te karakteristične točke trokuta
- Uočava svojstva težišta
- Analizira položaj karakterističnih točaka ovisno o vrsti trokuta
- Otkriva formule za površinu trokuta sa zadanim polumjerom upisane i opisane kružnice. Izriče i ilustrira poučke o sukladnosti i sličnosti trokuta te Talesov poučak o proporcionalnosti dužina, primjenjuje ih u oblikovanju problema
- Određuje, objašnjava i primjenjuje odnose površina, opsega i drugih veličina u sličnim trokutima

- Primjenjuje Heronovu formulu u računanju površine trokuta. U primjerima zadataka upoznaje povijest matematike
- Rješava probleme rabeći Euklidov poučak o pravokutnome trokutu
- Dokazuje tvrdnje rabeći poučke o sukladnosti i sličnosti

Na početku cjeline nalazi se motivacijska priča: Da bi procjenili visinu jarbola, Sonja je na tlo postavila zrcalo tako da u njemu vidi vrh jarbola. Zrcalo je udaljeno 7 m od jarbola. Sonja je 2.1 m udaljena od zrcala, a njezine su oči na visini od 1.7 m od tla. Koliko je visok jarbol?

Opći dojam ovog udžbenika je preglednost i jako dobra vizualna organizacija dijelova nastavne jedinice. Definicije i primjeri su jako dobro vizualno označeni. Udžbenik je pisan jednostavnim jezikom, a boljem razumijevanju teksta doprinose i brojne slike odnosno riješeni primjeri. Sa strane se nalaze svi pojmovi koji su učenici do sada učili i služi im za ponavljanje. Svi su primjeri detaljno riješeni. Pored primjera sa strane se nalaze "trikovi" pomoću kojih se zadatak riješio. Primjeri i zadaci iz svakodnevnog života su dosta zastupljeni. Definicije su uokvirene i posebno istaknute što olakšava samo snalaženje u udžbeniku.

Autori udžbenika kreću s nastavnom cjelinom *Sukladnost dužina i kutova.* Na samom početku kao motivacijski primjer su dane građevine koje imaju potporu u konstrukcijama u obliku trokuta. Konstrukcija krova ima potporne grede postavljene tako da čine oblik trokuta. Potporni trokuti imaju grede jednake duljine, koje su postavljene pod jednakim kutovima. Također je dan i primjer željezničkog mosta koji ima trokute kao potporne elemente.

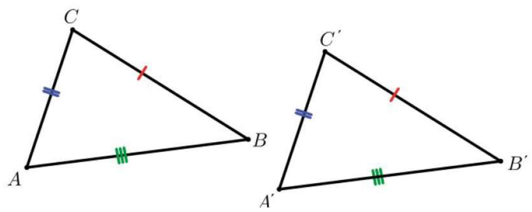
Prvo se obrađuju sukladnost dužina, gdje se odmah nadovezuju na motivacijski primjer da za predmete koji imaju isti oblik i veličinu kažemo da su međusobno jednaki, a u geometriji ćemo za takve objekte reći da su sukladni. Sa strane se nalazi podsjetnik kako označavamo dužinu i kako označavamo duljinu dužine.
Definira se: *Za dvije dužine kažemo da su sukladne ako su im duljine jednake.* Dana je oznaka za sukladnost dužina: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Nakon sukladnosti dužina prelazi se na sukladnost kutova. Dan je podsjetnik za učenike kako se kut može označiti. Isto tako napisano je da se mjere kutova označavaju malim grčkim slovima i u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Posebno se napominje da se često izjednačuju kut i njegova mjera, te da se često kaže da je zbroj kutova u trokutu $180°$ umjesto zbroj mjera kutova u trokutu je $180°$. Također se podsjeća da kutove razlikujemo s obzirom na njihovu mjeru na šiljasti kut, pravi kut, tupi kut, ispruženi kuti, izbočeni kut i puni kut. Učenici se pokušavaju navesti da sami zaključe kako bismo nazvali dva kuta koji imaju jednaku mjeru, s obzirom da smo za dvije dužine koje imaju jednaku duljinu rekli da su sukladne.
Za dva kuta kažemo da su sukladna ako imaju jednaku mjeru.

Dan je podsjetnik učenicima na poučke o sukladnosti kutova, tj. da su vršni kutovi međusobno sukladni i da su dva kuta uz presječnicu usporednih pravaca ili sukladna ili suplementarna. Nakon toga slijede primjeri gdje je sve detaljno objašnjeno i zadatci za samostalni rad. Korištene su različite boje kako bi se posebno naglasilo koji kutovi su sukladni. Također je dan podsjetnik da su kutovi s okomitim kracima sukladni ako su oba kuta tupa ili oba šiljasta. Ako je jedan od njih tupi, a drugi šiljasti onda im je zbroj 180°. Slijede dva primjera gdje se upravo te činjenice koriste. Nakon toga slijede zadatci za samostalni rad kojih nema puno kao u prethodnom udžbeniku i teži su zadatci ako ih uspoređujemo s prethodnim udžbenikom, iako se radi o udžbeniku za gimnazijski program pa bi rekla da su zadaci primjereni.

Nakon toga slijedi nastavna jedinica *Sukladnost trokuta.* Sa strane je dan podsjetnik kako označavamo sam trokut i nejednakost trokuta. Nastavna jedinica počinje s osnovnim pojmovima o trokutu. Trokut je geometrijski lik koji čine tri stranice, tri vrha i tri kuta. Zbroj mjera unutrašnjih kutova u trokutu je 180°, a duljine stranica moraju zadovoljavati nejednakost trokuta. Slijedi primjer gdje se učenika podsjeća da nasuprot najvećoj stranici leži najveći kut, a nasuprot najmanjoj stranici leži najmanji kut. Slijedi zadatak koji učenici trebaju samostalno riješiti i provjeriti pomoću nejednakost trokuta da li postoji trokut sa zadanim stranicama. Polako se uvodi pojam sukladnosti trokuta. Ako se dva trokuta mogu preklopiti jedan preko drugoga tako da se svi elementi trokuta podudaraju, tada su trokuti sukladni. Vrijedi: ako su odgovarajući elementi obaju trokuta sukladni, tada su i trokuti sukladni. Nakon toga definiraju sukladnost trokuta.
Za dva trokuta kažemo da su sukladna ako imaju sukladne odgovarajuće stranice i sukladne odgovarajuće kutove.

Slijede primjeri i zadatci gdje učenici moraju sami odrediti sukladne dužine, sukladne kutove i sukladne trokute. Kao pomoć su im sukladne stranice, sukladne dužine različitim bojama označene. Dan je podsjetnik koje vrste trokuta imamo s obzirom na veličinu kutova i vrste trokuta s obzirom na duljine stranica i prelazi se na poučke o sukladnosti. U ovom udžbeniku navode se sva četiri poučka o sukladnosti trokuta. Prvo se kreće s poučkom SSS.

Poučak o sukladnosti trokuta SSS (stranica-stranica-stranica)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u svim trima stranicama.

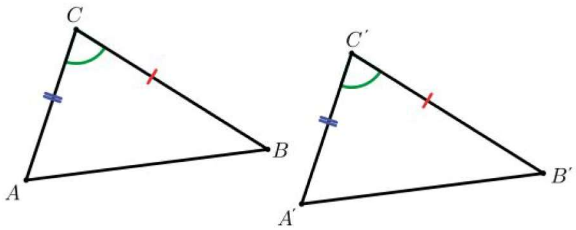


Slika 14. Udžbenik: Školska knjiga

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. Primjenom poučka o sukladnosti SSS vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Iz toga slijedi $\angle BAC \cong \angle B'A'C', \angle CBA \cong \angle C'B'A', \angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

Slijede riješeni primjeri, posebno zanimljiv je primjer gdje su u koordinatnom sustavu vrhovi imaju zadane koordinate pa učenici pomoću udaljenosti dviju točaka u koordinatnom sustavu trebaju odrediti da li su trokuti sukladni.

Poučak o sukladnosti trokuta SKS (stranica-kut-stranica)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutu među njima.

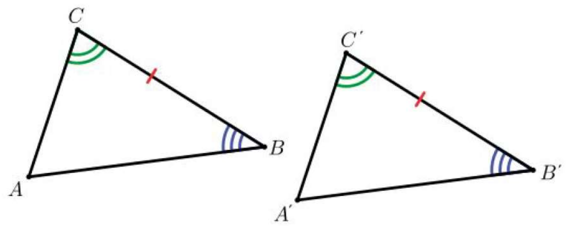


Slika 15. Udžbenik: Školska knjiga

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Primjenom poučka o sukladnosti SKS vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Iz toga slijedi $\angle BAC \cong \angle B'A'C', \angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

Slijede dva riješena primjera i iskazuje se novi poučak o sukladnosti.

Poučak o sukladnosti trokuta KSK (kut-stranica-kut)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i kutovima uz tu stranicu.

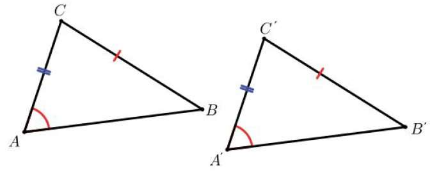


Slika 16. Udžbenik: Školska knjiga

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \angle CBA \cong \angle C'B'A', \angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Primjenom poučka o sukladnosti KSK vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Iz toga slijedi $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Nakon toga prikazana su dva detaljno riješena primjera i prelazi se na zadnji poučak o sukladnosti koji se spominje samo u ovom udžbeniku od svih obrađenih udžbenika.

Poučak o sukladnosti trokuta SSK (stranica-stranica-kut)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutu nasuprot duljoj stranici.

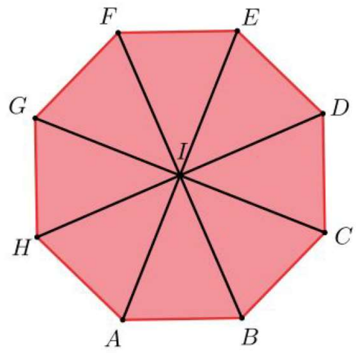


Slika 17. Udžbenik: Školska knjiga

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \angle BAC \cong \angle B'A'C'$ pri čemu je $|BC| > |AC|$. Primjenom poučka o sukladnosti SSK vrijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Iz toga slijedi $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \angle CBA \cong \angle C'B'A', \angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

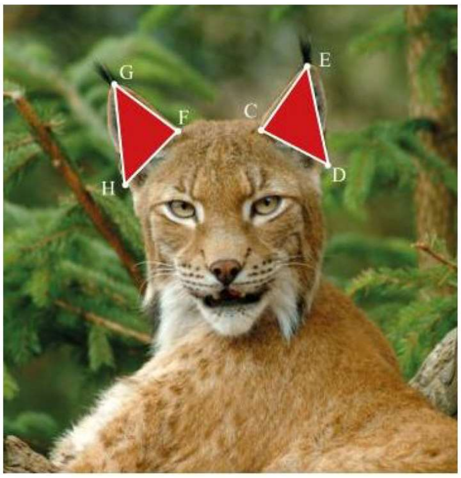
Na redu su zadatci za samostalni rad učenika od kojih ću izvojiti neke koji bi učenicima mogli biti posebno zanimljivi jer su iz svakodnevnog života:

1. Kada se rastvori, kišobran gledan odozgo nalikuje na pravilan osmerokut. Može li se za kišobran na slici zaključiti $\triangle CDI \cong \triangle HAI$? Objasnite!



Slika 18. Udžbenik: Školska knjiga

2. Ris, kao i većina životinja iz porodice mačaka, ima uši u obliku trokuta. Kako bismo pokazali da su njegove uši jednake veličine? Zamislimo uši kao dva trokuta $\triangle CDE$ i $\triangle FGH$, gdje je $\overline{FG} \cong \overline{CE}, \overline{DE} \cong \overline{GH}, \angle GHF \cong \angle CDE, \angle HFG \cong \angle ECD$. Dokažite da je $\triangle CDE$ sukladan $\triangle FGH$.

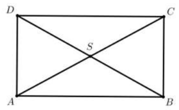


Slika 19. Udžbenik: Školska knjiga

3. Da bi konstruirali pravokutnu bazu za temelj svoje kuće, farmeri u Mozambiku domislili su se zanimljivoj metodi: dva užeta jednake duljine zavežu u čvor u sredini. Štap od bambusa čija duljina je željezna širina kuće polegne se na tlo i na njega se prikvače krajevi užeta. Nakon toga se užad zategne da bi se odredila dva vrha pravokutnika.

a) Daje li ta konstrukcija uvijek pravokutnik? Zašto?

b) Koja se svojstva pravokutnika koriste?

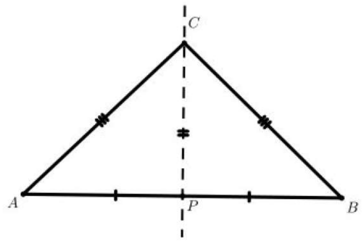


Slika 20. Udžbenik: Školska knjiga

Nakon poučaka o sukladnosti trokuta prelazi se na nastavnu cjelinu *Karakteristične točke trokuta.* Prvo se navodi da uz trokut povezujemo točke koje se dobivaju kao sjecišta posebnih pravaca ili dužina povezanih s tim trokutom. Četiri karakteristične točke trokuta su središte trokutu opisane kružnice, središte trokutu upisane kružnice, težište trokuta i ortocentar trokuta. Kreće se sa *Središtem trokutu opisane kružnice.* Sa strane je dan podsjetnik da je simetrala dužine pravac okomit na dužinu koji prolazi njezinim polovištem i nastavlja se s poučkom o simetrali dužine.

Poučak o simetrali dužine
Svaka točka simetrale dužine jednako je udaljena od krajeva te dužine.

Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i neka je P njezino polovište. Simetrala dužine prolazi točkom P okomito na $\overline{AB}$. Neka je C neka točka na toj simetrali. Trokuti $\triangle APC$ i $\triangle BCP$ su pravokutni, imaju zajedničku stranicu i vrijedi $|AP| = |PB|$. Zaključujemo da je $\triangle APC \cong \triangle BCP$ iz čega slijedi $|AC| = |BC|$.

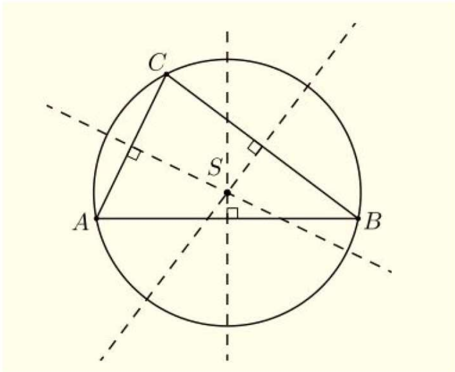


Slika 21. Udžbenik: Školska knjiga

Kroz riješeni zadatak dokazan je i obrat poučka o simetrali dužine. Slijedi riješeni primjer gdje je prikazan trokut ABC kojem je opisana kružnica. Udaljenost svake točke kružnice od središte kružnice S jednaka je polumjeru R kružnice. Na koji način možemo odrediti položaj točke S?
Rješenje: Točka S je sjecište simetrala stranica trokuta, odnosno simetrala dužina $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Prema poučku o simetrali dužine točka S jednako je udaljena od točaka A i B jer leži na simetrali stranice c. Također, jednako je udaljena od točaka B i C jer leži na simetrali stranice a.

Svaka točka simetrale stranice trokuta jednako je udaljena od dvaju vrhova trokuta. Sve tri simetrale stranica trokuta sijeku se u točki S koja je jednako udaljena od svih vrhova trokuta. Zato se svakom trokutu može opisati kružnica.

Središte trokutu opisane kružnice je sjecište simetrala stranica trokuta.



Slika 22. Udžbenik: Školska knjiga

Slijede riješeni primjeri gdje učenici mogu sami doći do zaključka gdje se nalazi središte opisane kružnice kod šiljastokutnog, tupokutnog i pravokutnog trokuta, ali je na kraju dan zaključak: Ovisno o vrsti trokuta, središte opisane kružnice nalazi se:

a) U trokutu ako je trokut šiljastokutan

b) Izvan trokuta ako je trokut tupokutan

c) Na stranici trokuta, odnosno u polovištu hipotenuze pravokutnoga trokuta

Napominje se da se kružnica može opisati oko svakog trokuta. Slijedi primjer konstrukcije trokuta ako je zadan polumjer opisane kružnice te dvije duljine stranica stranica. Dana je rasprava za konstrukcijske zadatke:

1. Ako je $a < 2R$ i $b < 2R$, zadatak ima dva rješenja

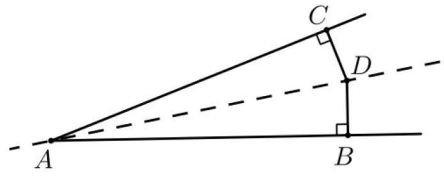
2. Ako je $a < 2R$ i $b = 2R$ ili je $a = 2R$ i $b < 2R$, zadatak ima jedno rješenje. Rješenje je pravokutan trokut.

3. Ako je $a = 2R$ i $b = 2R$ ili je $a > 2R$ i $b > 2R$, zadatak nema rješenja.

Dalje slijedi *Središte trokutu upisane kružnice.* Sa strane je dan podsjetnik da je simetrala kuta pravac koji prolazi vrhom kuta i dijeli taj kut na dva sukladna kuta i prelaze na poučak o simetrali kuta.

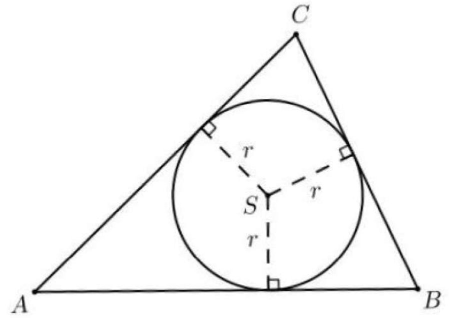
Poučak o simetrali kuta
Svaka točka simetrale kuta jednako je udaljena od krakova kuta.

Neka je dan kut s vrhom u točki A i neka je D neka točka na njegovoj simetrali. Spustimo iz točke D okomice $\overline{DB}$ i $\overline{DC}$ na krakove kuta. Vrijedi $\angle ACD \cong \angle DBA$, stranica $\overline{AD}$ je zajednička, odnosno pravokutni trokut $\triangle ABD$ i $\triangle ADC$ su sukladni, Slijedi $|DB| = |DC|$.



Slika 23. Udžbenik: Školska knjiga

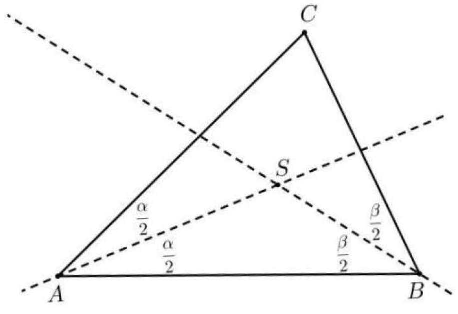
Kroz riješeni zadatak pokazan je obrat poučka o simetrali kuta. Slijedi riješeni primjer gdje je prikazan trokut ABC kojemu je upisana kružnica polumjera r. Središte upisane kružnice S jednako je udaljeno od stranica trokuta, odnosno kružnica dodiruje sve tri stranice trokuta. Na koji način možemo odrediti položaj točke S?



Slika 24. Udžbenik: Školska knjiga

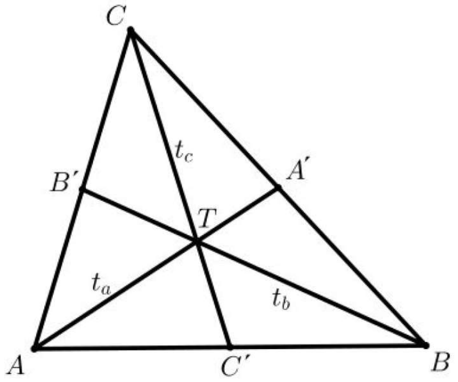
Rješenje: Točka S je sjecište simetrale kutova trokuta, odnosno simetrala kutova $\angle BAC, \angle ACB$ i $\angle CBA$. Prema poučku o simetrali kuta točka S jednako je udaljena od stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ jer pripada simetrali kuta $\angle BAC$. Također, jednako je udaljena od stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ jer pripada simetrali kuta $\angle CBA$. Prema obratu poučka o simetrali kuta ta točka pripada i trećoj simetrali kuta $\angle ACB$.

Svaka točka simetrale kuta trokuta jednako je udaljena od dviju stranica trokuta. Sve tri simetrale kutova trokuta sijeku se u točki S, koja je jednako udaljena od svih stranica trokuta. Dovoljno je konstruirati dvije simetrale kuta, da bismo odredili središte trokutu upisane kružnice. Središte upisane kružnice svakog trokuta je u trokutu.
Središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala kutova trokuta.



Slika 25. Udžbenik: Školska knjiga

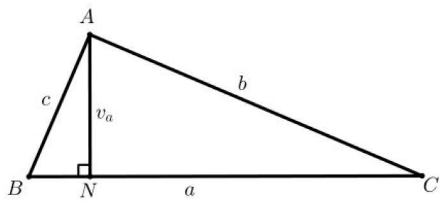
Slijede riješeni primjeri gdje učenici trebaju konstruirati trokut ako su im duljine sve tri stranice trokuta zadane i moraju mu upisati kružnicu, isto tako moraju konstruirati trokut kojemo je zadan polumjer upisane kružnice, duljina jedne stranice trokuta i zadan je jedan kut.
Slijedi *Težište trokuta.*



Slika 26. Udžbenik: Školska knjiga

Na slici 26. prikazani su trokut ABC i polovište stranica $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CA}$ označenih redom s C', A' i B'. Dužine $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ su težišnice tog trokuta.

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice. Težišnice trokuta sijeku se u točki T, koja se naziva težištem trokuta.
Težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1, odnosno dio težišnice od težišta do vrha dvostruko je veći od preostalog dijela težišnice, odnosno vrijedi:
$|AT| : |TA'| = |BT| : |TB'| = |CT| : |TC'| = 2 : 1.$
Slijedi riješeni primjer gdje se koristi upravo ovo svojstvo. Sa strane je navedeno da naziv težište trokuta potječe od pojma težište (hvatište) u fizici gdje predstavlja materijalnu točku u kojoj djeluje rezultantna sila na tijelo koje ostaje u ravnoteži i to može dovesti u korelaciju s fizikom. Slijede dva riješena primjera konstrukcije trokuta sa zadanim duljinama stranica, te učenici moraju konstruirati težište.
Nadalje se obrađuje pojam težišta.



Slika 27. Udžbenik: Školska knjiga

Dužinu $\overline{AN}$ nazivamo visina trokuta, a N nožište visine. Sa strane je dan podsjetnik da visina trokuta leži na pravcu koji prolazi vrhom trokuta, a okomit je na nasuprotnu stranicu tog trokuta.
Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo ortocentar i označujemo O.

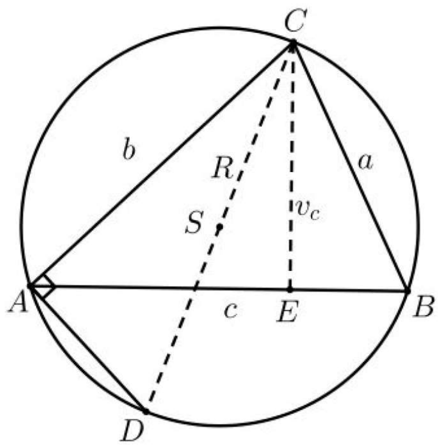
Slijede primjeri konstrukcije trokuta i ortocentra iz kojih će biti vidljivo učenicima da ortocentar trokuta može biti u trokutu, izvan trokuta ili u vrhu trokuta. U jednom od riješenih primjera učenici trebaju konstruirati proizvoljan šiljastokutan trokut ABC i karakteristične točke: središte opisane kružnice S, središte upisane kružnice U, težište T i ortocentar O i nacrtati Eulerov pravac e.

Dalje se obrađuje podnaslov *Površina trokuta* i to se posebno obrađuje:

1. Heronova formula za površinu trokuta
2. Površina trokuta izražena s pomoću polumjera trokutu opisane kružnice
3. Površina trokuta izražena s pomoću polumjera trokutu upisane kružnice

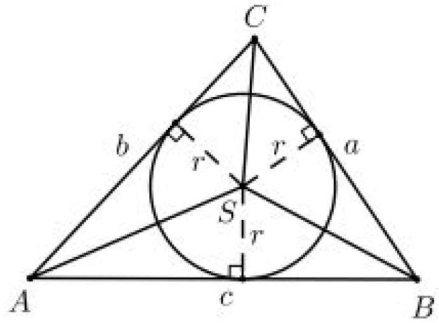
Na samom početku ponovljen je Pitagorin poučak i formule za izračunavanje površine pravokutnog trokuta i nakon toga postavljeno je pitanje kako izračunati površinu trokuta ako su zadane duljine stranice trokuta, a trokut nije pravokutan? Odgovor se nalazi u Heronovoj formuli za površinu trokuta kojemu su poznate duljine stranica a, b i c:
$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je s poluopseg $s = \frac{a+b+c}{2}$. Slijedi jedan riješeni primjer gdje učenici osim površine trokuta trebaju izračunati i duljinu visine trokuta na njegovu najkraću stranicu.

Nakon toga slijedi *Površina trokuta izražena s pomoću polumjera trokutu opisane kružnice.*



Slika 28. Udžbenik: Školska knjiga

Na slici 28. prikazan je trokut ABC i njemu opisana kružica. Dužina $\overline{CD}$ je spojnica vrha trokuta s točkom D na kružnici kroz središte opisane kružnice. $\overline{CD}$ je promjer kružnice pa vrijedi $|CD| = 2R$. Vrijedi $v_c : a = b : |CD|$ tj. $v_c : a = b : 2R$. Iz omjera slijedi: $v_c = \frac{ab}{2R}$, a nakon uvrštavanja u formulu $P = \frac{c \cdot v_c}{2}$ dobivamo formulu za površinu trokuta.
Slijedi riješeni primjer gdje su upravo koristi navedena formula i Heronova formula, te zadatak za samostalni rad.
Prelazi se na *Površina trokuta izražena s pomoću polumjera trokutu upisane kružnice.*



Slika 29. Udžbenik: Školska knjiga

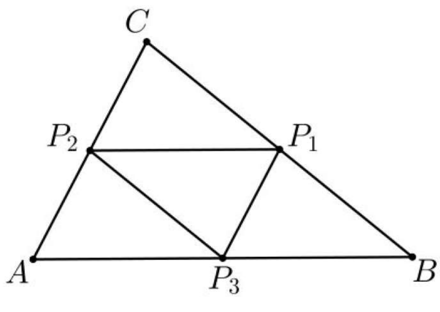
Na slici 29. su prikazani trokut ABC i njemu upisana kružnica. Dužine $\overline{SA}, \overline{SB}$ i $\overline{SC}$ su spojnice središta upisane kružnice s vrhovima trokuta ABC. One dijele trokut na trokute ABS, ACS i BCS. Visine na stranice trokuta a, b i c jednake su polumjeru upisane kružnice r. Vrijedi:

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle ASC} + P_{\triangle BCS}$$
$$P = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$
$$P = \frac{r}{2}(a + b + c)$$
$$P = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

Ako je r polumjer trokutu upisane kružnice, a s poluopseg, površinu trokuta računamo s pomoću forumule: $P = r \cdot s$.

Slijedi riješeni primjer i zadatak za samostalni rad.

U ovoj nastavnoj jedinici obrađen je još i pojam srednjica trokuta. Srednjica trokuta je dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta. Srednjica ima svojstvo da je paralelna s odgovarajućom stranicom trokuta i duljine upola kraće od duljine te stranice.



Slika 30. Udžbenik: Školska knjiga

Zbog poučka o kutovima s paralelnim kracima i svojstva da srednjica spaja polovišta stranica, trokuti $AP_3P_2, P_3BP_1, P_2P_1C$ i $P_1P_2P_3$ su sukladni. Nakon toga slijede zadatci za samostalni rad učenika, većinom se nalaze konstrukcije trokuta. Time završava

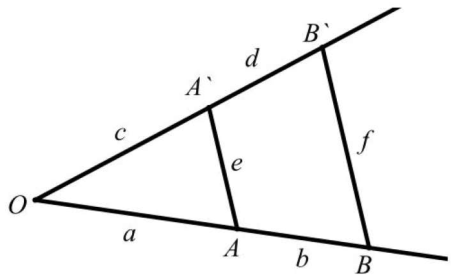
nastavna jedinica Karakteristične točke trokuta i prelazi se na nastavnu jedinicu *Proporcionalnost dužina.* Kao motivacijski primjer naveden je Vitruvijevog čovjeka koji je svjetski poznati crtež Leonarda da Vincija iz otprilike 1487. godine. Crtež zorno prikazuje figuru muškarca u dva položaja koji se preklapaju: raširenih ruku (u jednom položaju) te raširenih ruku i nogu (u drugom položaju). Oko figure su opisani kvadrat i kružnica. Crtež i tekst se katkad nazivaju zakonom proporcija. Tim je crtežom Leonardo objasnio skladne ljudske proporcije. Nakon toga definira se proporcija.
Kvocijent realnih brojeva a i b, $b \neq 0$ nazivamo omjerom. Označavamo ga $a : b$ ili $\frac{a}{b}$. Jednakost dvaju omjera $a : b = c : d$ nazivamo razmjerom ili proporcijom.

Omjer dviju dužina je omjer njihovih duljina. Slijede dva riješena primjera gdje se mora odrediti omjer dviju dužina.
Ako dva jednaka omjera označimo slovom k, onda je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Broj k nazivamo *koeficijentom proporcionalnosti.*
Ako uspoređujemo tri ili više brojeva, rabimo *produženi omjer.* Produženi omjer $a : b : c$ znači da je omjer prvih dvaju brojeva $a : b$, drugih dvaju brojeva $b : c$, a omjer prvog i zadnjeg broja $a : c$. *Produženi razmjer je jednakost produženih omjera.*

$$a_1 : a_2 : a_3 : ... : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : ... : b_n$$
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$$
$$a_1 = k \cdot b_1, a_2 = k \cdot b_2, a_3 = k \cdot b_3, ..., a_n = k \cdot b_n$$

Slijedi riješeni primjer gdje je zadan omjer duljina triju stranica trokuta i njegov opseg, te se moraju odrediti duljine stranica tog trokuta. Nakon toga je zadatak za samostalni rad učenika, te se prelazi na *Talesov poučak o proporcionalnosti dužina.* Ova nastavna jedinica započinje s riješenim primjerom gdje se mora odrediti omjer odsječaka na krakovima kuta. Slijedi iskaz Talesova poučka o proporcionalnosti dužina.

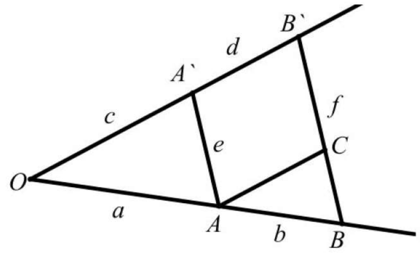
Paralelni pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine.



Slika 31. Udžbenik: Školska knjiga

Vrijedi $a : b = c : d$ ali i $a : c = b : d$
$(a + b) : b = (c + d) : d$
$(a + b) : a = (c + d) : c$
Također,, možemo zaključiti:
$e : f = a : (a + b)$
$e : f = c : (c + d)$

Pokazat ćemo neke od omjera. Površine trokuta ABA' i AA'B' jednake su jer trokuti imaju zajedničku stanicu AA', a kako dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ leže na paralelnim pravcima, visine na stranicu $\overline{AA'}$ jednake su u oba trokuta. Kako je površina trokuta OAB' jednaka zbroju površina trokuta OAA' i trokuta AB'A', slijedi da je površina trokuta OAB' jednaka zbroju površina trokuta OAA' i ABA', tj. površini trokuta OBA'.
Trokuti OBA' i OAA' imaju zajedničku visinu iz vrha A' pa im se površine odnose u omjeru $(a+b) : a$. Slično, kako trokuti OAB' i OAA' imaju zajedničku visinu iz vrha A, površine im se odnose u omjeru $(c+d) : c$. Iz jednakosti površina trokuta OBA' i OAB' dobivamo $(a+b) : a = (c+d) : c$. Nadalje, redom imamo $\frac{d}{c} = \frac{c+d-c}{c} = \frac{c+d}{c} - 1 = \frac{a+b}{a} - 1 = \frac{a+b-a}{a} = \frac{b}{a}$.



Slika 32. Udžbenik: Školska knjiga

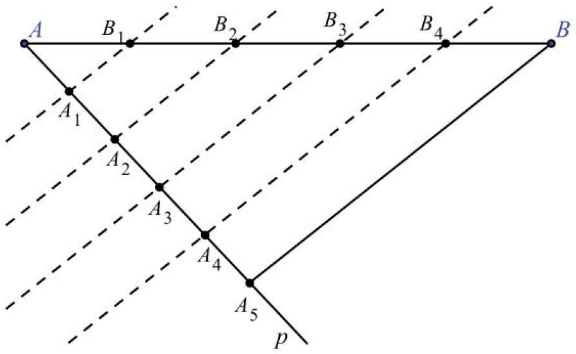
Konačno, neka pravac kroz točku A paralelan pravcu A'B' siječe dužinu $\overline{BB'}$ u točki C. Tada, prema prvom dijelu dokaza vrijedi $b : (a+b) = |BC| : f$. Kako je četverokut ACB'A' paralelogram, jer su mu nasuprotne stranice paralelne, vrijedi i $|CB'| = e$. Sada redom imamo

$$1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} = \frac{|BC|}{f} = \frac{f-e}{f} = 1 - \frac{e}{f}$$

Odakle slijedi: $a : (a+b) = e : f$.

Slijedi zadatak za samostalni rad učenik iz kojeg učenici mogu doći sami do zaključka: *Ako pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine, tada su ti pravci paralelni.* A time je upravo iskazan obrat Talesova poučka o proporcionalnosti dužina.

Slijede riješeni primjeri u kojima se prvenstveno koristi obrat Talesova poučka o proporcionalnosti dužina jer se treba pokazati da su određene stranice paralelne. U jednom od primjera dana su dva načina riješavanja zadatka. Slijedi još *Dijeljenje dužine u zadanom omjeru.* Kroz primjer je objašnjeno kako ćemo dužinu proizvoljne duljine podijeliti na pet jednakih dijelova. Dužina na dva jednaka dijela znamo podijeliti pomoću simetrale dužine. No postavlja se pitanje kako ćemo to napraviti ako želimo podijeliti dužinu na više od dva jednaka dijela. Tada ćemo se poslužiti Talesovim poučkom.



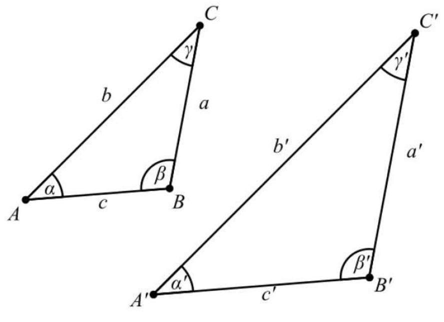
Slika 33. Udžbenik: Školska knjiga

Na slici 33. dana je dužina $\overline{AB}$. Nacrtamo polupravac p s početnom točkom A. Na taj polupravac nanesemo duljinu proizvoljne dužine pet puta; dobivamo točke A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5. Spojimo točku A_5 i B te kroz naznačene točke na polupravcu p provucimo paralele s dužinom $\overline{A_5B}$. Paralele sijeku dužinu $\overline{AB}$ u točkama B_1, B_2, B_3 i B_4. Prema Talesovu poučku točke dijele dužinu $\overline{AB}$ na pet jednakih dijelova.

Slijedi riješeni primjer konstrukcije trokuta koji ima zadani opseg i stranice mu se odnose u zadanom omjeru. Nakon toga slijedi sličan zadatak za samostalni rad učenika. Iza toga slijedi riješeni primjer konstrukcije trokuta ako su mu poznate dvije duljine težišnice i jedna duljina stranice. Slijede zadatci za samostalnu vježbu učenika za nastavnu jedinicu Proporcionalnost dužina.

U nastavku slijedi zadnja nastavna jedinica *Sličnost trokuta*. Započinje se s trikom koji svaki nastavnik može primjeniti na svom satu. Na jedan sat matematike nastavnica donosi zrcalo i izvodi trik: na pod stavlja zrcalo okrenuto prema gore i zamoli jednog učenika da se udalji dva koraka od zrcala. Nastavnica se zatim postavlja tako da može vidjeti samo vrh učenikove glave kad gleda u zrcalo. Nakon kratkog izračuna, ona iskazuje visinu učenika. Taj trik se može izvesti za svakog učenika u razredu. Kako nastavnica izvodi taj trik? Da bismo i sami mogli izvesti taj trik, potrebno nam je znanje o sličnim trokutima.

Za dva trokuta ABC i $A'B'C'$ kažemo da su slična ako su im odgovarajući kutovi sukladni i ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne.



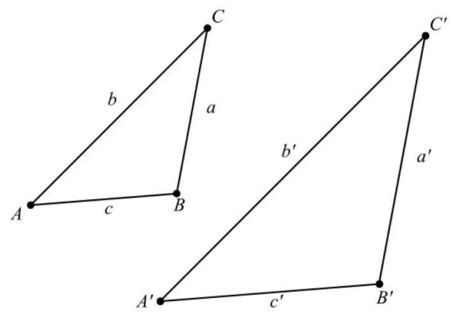
Slika 34. Udžbenik: Školska knjiga

Ako su trokuti ABC i A'B'C' slični, to označavamo $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
Za slične trokte ABC i A'B'C' vrijedi:
$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$
$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$, gdje je $k > 0$ koeficijent sličnosti ili proporcionalnosti.

Kako koeficijent k utječe na veličinu stranica trokuta? Ako je koeficijent sličnosti $k > 1$, trokut ABC je manji od trokuta A'B'C', tj. stranice trokuta ABC kraće su od stranica trokuta A'B'C'. Ako je koeficijent sličnosti $k < 1$, onda je trokut ABC veći od trokuta A'B'C', tj. stranice trokuta ABC dulje su od stranica trokuta A'B'C'.

Slijede dva riješena primjera u kojima se moraju izračunati duljine stranice sličnog trokuta zadanom trokutu sa zadanim koeficijentom sličnosti. Naglašeno je da se mora paziti koji trokut je manji a koji je veći. U jednom od riješenih primjera dano je upravo to, jedan od zadanih trokuta prvo se gleda kao veći trokut, a zatim ga se promatra kao manji trokut. Također je naglašeno da je poredak vrhova u zapisu sličnih trokuta važan. Taj nam poredak govori koje su stranice odgovarajuće i koji kutovi su odgovarajući. Slijede Pouči o sličnosti.

Poučak o sličnosti trokuta SSS (stranica - stranica - stranica)
Dva su trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne.

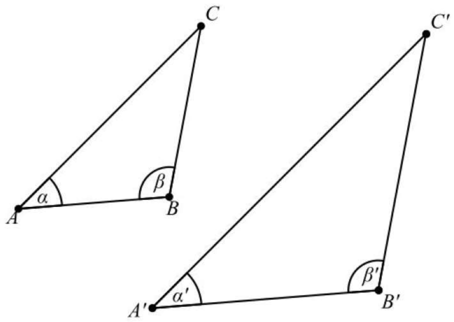


Slika 35. Udžbenik: Školska knjiga

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ primjenom poučka o sličnosti vrijedi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Slijedi riješeni primjer gdje se mora provjeriti da li trokuti sa zadanim stranicama slični. Ako su trokuti slični, tada sve odgovarajuće stranice moraju biti u istom omjeru, s tim da najkraća stranica treba biti u omjeru s najkraćom, a najdulja s najduljom. Nakon što smo provjerili da sve odgovarajuće stranice imaju iste omjere, tj. možemo reći da su proporcionalne. Prema poučku SSS o sličnosti trokuta zaključujemo da su trokuti s danim duljinama stranica slični. Slijedi sličan zadatak za samostalni rad učenika te se prelazi na novi poučak s tim je naglašeno da ako znamo kolika je mjera dvaju kutova, lako možemo izračunati i mjeru trećega kuta. To slijedi iz poznatog svojstva o zbroju kutova u trokutu: zbroj kutova u trokutu je 180°.

Poučak o sličnosti trokuta KK (kut - kut)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dvama kutovima.

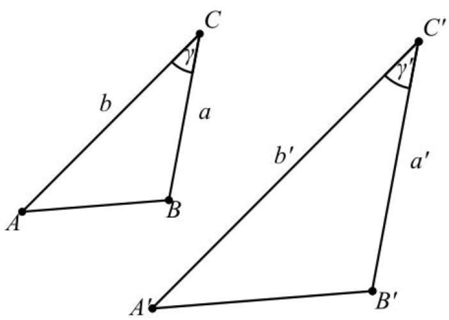


Slika 36. Udžbenik: Školska knjiga

$\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ primjenom poučka o sličnosti KK slijedi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Slijedi riješeni primjer gdje se koristi KK poučak o sličnosti trokuta da bi se dokazalo da su trokuti slični. Također, kroz riješeni primjer pokazano je da se duljine visina sličnih trokuta odnose kao duljine odgovarajućih stranica. Navodi se da za određivanje sličnosti dvaju trokuta postoji još jedan poučak.

Poučak o sličnosti trokuta SKS (stranica - kut - stranica)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu i ako su stranice koje zatvaraju taj kut proporcionalne.



Slika 37. Udžbenik: Školska knjiga

$\gamma = \gamma', \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ primjenom poučka SKS slijedi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Slijedi riješeni primjer gdje se koristi SKS poučak o sličnosti trokuta da bi se dokazalo da su trokuti slični. Također, kroz riješeni primjer pokazano je da se duljine težišnica sličnih trokuta odnose kao duljine odgovarajućih stranica. Ostalo je još za vidjeti kako se ponašaju opseg i površina sličnih trokuta. Kroz riješeni primjer navodi se učenike da sami probaju zaključiti da ako su duljine sličnih trokuta u nekom zadanom omjeru da su tad i opsezi sličnih trokuta u istom tom omjeru.

Omjer opsega sličnih trokuta jednak je koeficijentu sličnosti tih trokuta.

$$\frac{o'}{o} = k$$

Neka je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ s koeficijentom sličnosti k, gdje je $k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ tada je

$$\frac{o'}{o} = \frac{a'+b'+c'}{a+b+c} = \frac{ak+bk+ck}{a+b+c} = \frac{(a+b+c)k}{a+b+c} = k$$

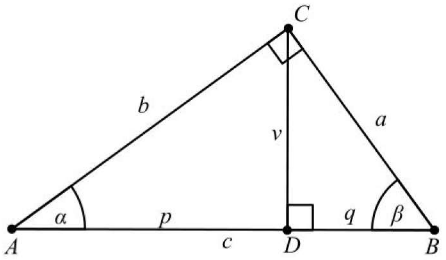
Isto kao i sa opsegom sličnih trokuta, kroz riješeni primjer navode se učenici da sami zaključe u kakvom odnosu su omjeri stranica sličnih trokuta i površine sličnih trokuta.
Omjer površina sličnih trokuta jednak je kvadratu koeficijenta sličnosti tih trokuta.

$$\frac{P'}{P} = k^2$$

Ako je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ s koeficijentom sličnosti k za koji vrijedi:
$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ te $v' = vk$ tada je:

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{a'v'}{2}}{\frac{av}{2}} = \frac{\frac{ak \cdot vk}{2}}{\frac{av}{2}} = k^2$$

Nakon toga slijedi riješeni primjer gdje su zadane površine sličnih trokuta i duljine stranica manjeg trokuta, a treba izračunati opsege tih trokuta. Kroz riješeni primjer dokazan je Euklidov poučak.
Neka je ABC pravokutan trokut i neka je D nožište visine povučene iz vrha C na hipotenuzu. Pokažimo da je pravokutni trokut ABC sličan trokutu ADC i DBC.



Slika 38. Udžbenik: Školska knjiga

Trokuti ABC i ADC imaju zajednički kut α, $\angle ADC = 90°$, pa je prema poučku o sličnosti trokuta KK $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. S druge strane, trokuti ABC i DBC imaju zajednički kut β, $\angle BDC = 90°$, pa je prema poučku o sličnosti trokuta KK $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. No, iz tih razmatranja slijedi da je $\angle ACD = \beta$ i $\angle BCD = \alpha$ pa dobivamo da je $\triangle ACD \sim \triangle CBD$. Promatramo sada omjere duljina stranica tih sličnih trokuta.

Iz $\triangle ABC \sim \triangle ACD$: $\frac{p}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow b^2 = pc$

Iz $\triangle ABC \sim \triangle CBD$: $\frac{q}{a} = \frac{a}{c} \rightarrow a^2 = qc$

Iz $\triangle ACD \sim \triangle CBD$: $\frac{v}{p} = \frac{q}{v} \to v^2 = pq$
Time je dokazan Euklidov poučak.

Neka je ABC pravokutan trokut, D nožiste visine spuštene iz vrha C na hipotenuzu i neka je $|AD| = p$, *a* $|DB| = q$. *Tada vrijedi:* $v = \sqrt{pq}, a = \sqrt{qc}, b = \sqrt{pc}$.

Slijedi još jedan riješeni primjer i zadatci za samostalni rad za nastavnu jedinicu Sličnost trokuta. Zadatci idu od lakših prema težim i podijeljeni su prema nastavnim jedinicima. Zadatci su prilagođeni za učenike gimnazijskog programa. Na kraju su dani zadatci za pripremu za državnu maturu, odnosno učenici imaju zadatke iz nastavne cjeline Trokut koji su se do sada pojavljivali na državnoj maturi. Dani su slični zadatci koji su se pojavljivali na državnoj maturi učenicima za samostalni rad.

Školska knjiga ima digitalnu platformu za novo doba poučavanja i učenja koja se zove e - sfera gdje se nalaze digitalni udžbenik i didaktički oblikovani i svrhoviti dodatni digitalni sadržaji usklađeni s načelima učenja i poučavanja te su usmjereni prema ostvarivanju odgojno - obrazovnih ishoda. Digitalni materijali su dostupni uza svaku nastavnu jedinicu.
Sinergija tiskanog i digitalnog dijela udžbeničkoga kompleta danas pruža sasvim nove mogućnosti prilagodbe, proširivanja i produbljivanja sadržaja te sasvim nove načine ponavljanja i uvježbavanja kako bi učenici dosegnuli željene ishode. Digitalni materijali imaju opciju da se uključi font za disleksiju da bi se umanjio napor učenicama s poteškoćama pri čitanju.
Na e - sferi učenicima su dane interaktivne provjere znanja za svaku nastavnu jedinicu tako da se učenici mogu samovrednovati i vidjeti koji dio im slabije ide pa se više fokusirati na taj dio gradiva. Učenicima je također dano i jako puno sadržaja za rad u Geogebri gdje je detaljno opisano šta učenik treba napraviti. Osim digitalnog materijala koji prati svaku nastavnu jedinicu postoje i dio Matematika+ i Prošireni sadržaj za učenike koji žele znati više.
Slijedi analiza Profilovih udžbenika iz 2014. i 2019. godine.

Udžbenik - Z. Šikić, R. Kalazić, S. Lukač, B. Palanović - Profil, 2014

Matematika 1, 2. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za prvi razred gimnazije i tehničke škole, nakladnika Profil u nastavnoj cjelini Sukladnost i sličnost obrađuje ove nastavne jedinice:

- Sukladnost trokuta
- Talesov poučak o proporcionalnosti duljina
- Sličnost trokuta

Prvo što se navodi nakon što se otvori cjelina je što će učenici nakon ovoga poglavlja znati:

- Poučke o sukladnosti trokuta

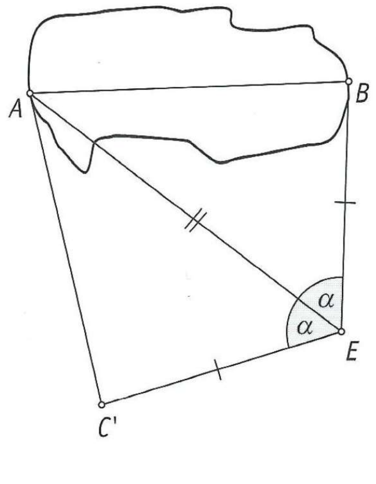
- Poučke o sličnosti trokuta
- Rabiti omjere i koeficijent sličnosti

Nakon toga slijedi Za što mi to treba?

- Da znam odrediti visinu drveta ili tornja pomoću duljine njegove sjene
- Da se snađem u nepoznatom gradu i izračunam udaljenost do željene lokacije pomoću plana grada
- Za izračunavanje dimenzije i površine geometrijskih likova pomoću podataka o sličnim likovima

Opći dojam ovog udžbenika je preglednost i dobra vizualna organizacija dijelova nastavne jedinice. Definicije i primjeri su vizualno označeni. Udžbenik je pisan jednostavnim jezikom, a boljem razumijevanju teksta doprinose i brojne slike odnosno riješeni primjeri. Svi su primjeri detaljno riješeni ali nisu popraćeni sličnim zadatkom za samostalni rad. Svaka nastavna jedinica popraćena je zadatcima za vježbu. Primjeri i zadatci iz svakodnevnog života su slabo zastupljeni. Na kraju poglavlja autori su stavili ponavljanje za ispit i posebno zadatke za ponavljanje. Autori nisu stavili dio za učenike koji žele znati više, pa čak nema ni nekih povijesnih činjenica. Na samom kraju nalaze se zadatci koji su se do sada našli na državnoj maturi.

Započinje se s nastavnom jedinicom *Sukladnost trokuta.* Na početku, sa strane dan je podsjetnik što su sukladne dužine i kutovi i definira se kad su trokuti sukladni. Kroz riješeni primjer kontrukcije trokuta kojemu su zadane dvije stranice i kut među njima iskazuje se prvi poučak o sukladnosti trokuta SKS. Autori ne dokazuju poučke nego odmah prelaze na riješene primjere, od kojih je jedan zanimljiv.
Primjer: Marija i Andreja dobile su zadatak da u ime ekološke grupe izmjere širinu $\overline{AB}$ odlagališta za smeće (vidi sliku 39.). Odlagalište se nalazi na ravnom terenu, a one za obavljanje zadatka na raspologanju imaju metar, tanki konopac, kutomjer i drvene štapiće za označavanje rubnih točaka. Kako će djevojke uspješno obaviti zadatak?

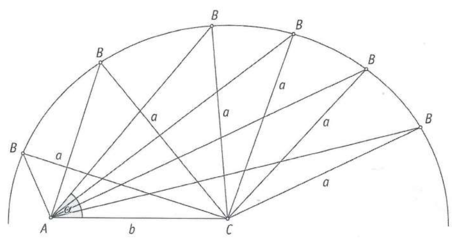


Slika 39. Udžbenik: Profil

Najprije ćemo izmjeriti udaljenost $|BE|$ i $|AE|$ te kut $\angle BEA$. Potom će odrediti drugi krak kuta $\angle AEC'$ tako da bude $\angle BEA = \angle AEC'$ i $|BE| = |EC'|$. Tada će doći do zaključka da je $\triangle ABE = \triangle AEC'$ po SKS poučku. Dakle, širina je odlagališta $|AB|$ jednaka $|AC'|$ što će se lako izmjeriti.

Slijede dva zadatka za samostalni rad učenika od kojih je jedan konstrukcija trokuta. Nadalje, imamo riješenu konstrukciju trokuta sa zadanim duljinama sve tri stranice trokuta pomoću koje se uvodi učenike u SSS poučak o sukladnosti trokuta. Konstrukcija se može provesti samo na jedan način, tj. svi su ovako zadani trokuti sukladni. Nakon iskaza SSS poučka o sukladnosti trokuta nastavlja se s riješenim primjerom gdje se dokazuje da su trokuti sukladni ako se podudaraju u dvjema stranicama i težišnici na jednu od tih stranica. Slijede dva zadatka za samostalni rad učenika od kojih je jedna konstrukcija trokuta sa zadanim svim duljinama stranica trokuta.

SSS poučak o sukladnosti trokuta navodi da je trokut jednoznačno određen svojim trima stranicama. Postavlja se pitanje da li se može od dužina proizvoljnih duljina konstruirati trokut, a odgovor je dan kroz riješeni primjer konstrukcije trokuta gdje su sve tri stranice zadane ali ne zadovoljavaju nejadnakost trokuta pa konstrukcija nije moguća. Definira se nejednakost trokuta. Slijedi riješeni primjer da je duljina bilo koje stranice trokuta manja od poluopsega trokuta. Nakon toga su dva zadatka konstrukcije trokuta sa zadanim svim duljinama stranica. Slijede dva primjera riješenih konstrukcija koji su uvod u SSK poučak. Jedan od tih primjera je: zadan je trokut sa stranicama a, b i kutom α. Vrijedi da je $a > b$. Konstruirajmo taj trokut za zadane kutove α.



Slika 40. Udžbenik: Profil

Prvo nacrtamo stranicu b. Zatim oko vrha C opišemo kružnicu polumjera a. Za svaki kut α krak toga kuta na točno će jednom mjestu sjeći kružnicu. Zaključujemo da zadatak uz ove uvjete ima jedinstveno rješenje (za svaki α točno jedan trokut). Ovim primjerom je napravljen uvod za SKS poučak o sukladnosti trokuta. Posebno je naglašeno u poučku da su trokuti sukladni ako se podudaraju u kutu nasuprot duljoj stranici. Slijedi još jedan riješeni primjer gdje se dokazuje da ako je točka T jednako udaljena od krakova kuta α tada se ona nalazi na simetrali tog kuta. Nakon toga su dva zadatka za samostalni rad učenika, tj. dvije konstrukcije trokuta gdje su zadane dvije stranice i kut nasuprot duljoj stranici. Slijede zadatci za ponavljanje nastavne jedinice. Većina zadataka su prema mojoj osobnoj procjeni više za tehničke škole, nego za gimnazijski program.

Prelazi se na nastavnu jedinicu *Proporcionalnost dužina. Talesov poučak.* Kao motivacija za proporcionalnost spominju se omjeri npr. broj dječaka u razredu nasuprot broju djevojčica u omjeru je 3:4, zatim otopine su bile pomiješane u omjeru 5:7 i formula za brzinu je dana omjerom $v = \frac{s}{t}$. Nakon toga definiraju se omjer i razmjer i omjer dviju dužina.Riješenim primjerom pokazuje se produženi razmjer.

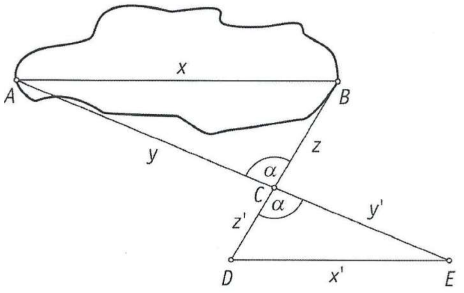
Slijedi Talesov poučak o proporcionalnosti dužina. Kroz riješeni primjer pokazano je da paralelni pravci odsjecaju proporcionalne duljine na kracima kuta. Nakon riješenog primjer iskazan je Talesov poučak. Kroz primjer je dokazan poučak o simetrali kuta trokuta: Simetrala kuta trokuta dijeli nasuprotnu stanicu u omjeru preostalih dviju stranica. Iskazan je i obrat Talesova poučka. Kroz riješeni primjer dokazano je da je srednjica trokuta paralelna odgovarajućoj stranici trokuta. Nakon toga prelazi se na *Dijeljenje dužine u zadanom omjeru.* Slijede dva riješena primjera. U jednom primjeru dužina se dijeli na tri sukladne dužine, a u drugom primjeru dužina se dijeli točkom u zadanom omjeru. Ovo je zapravo ponavljanje gradiva iz osnovne škole. Jedino novo gradivo je riješeni primjer gdje se radi konstrukcija trokuta zadanom opsega čije se stranice odnose u zadanom omjeru.

Slijede zadatci za samostalni rad. Zadatci idu od lakših prema težima.Pojavljuje se zadatak koji je zanimljiv učenicima u ovoj školskoj dobi: Dok je Antun čekao svoju djevojku Anu, počeo je razmišljati o visini starog kestena u čijoj je sjeni stajao. Izmjerio je duljinu svoje sjene (108 cm) i svoju udaljnost od kestena (192 cm). Antun je visok 1.8 metara. Kraj njegove sjene poklapao se s krajem sjene kestena i zaključio je da lako može izračunati visinu kestena. Kako? Kada je došla Ana i stala 9 cm od Antuna, krajevi njihovih sjena poklopili su se i Antun je izračunao Aninu visinu. Koliko je visoka Ana?

Slijedi nastavna jedinica *Sličnost trokuta.* Definira se kada su dva trokuta slična i koeficijent proporcionalnosti ili sličnosti. Kroz riješeni primjer pokazano je da dva trokuta imaju jednak koeficijent sličnosti stranica. Objašnjeno je da ako želimo provjeriti jesu li dva trokuta slična treba provjeriti podudaraju li se u kutovima te jesu li im stranice proporcionalne. Poučci o sličnosti koji olakšavaju provjeru sličnosti slični su poučima o sukladnosti trokuta.

Kao prvi poučak o sličnosti navode KK poučak o sličnosti trokuta. Zatim je dan riješeni primjer gdje se pokazuje da visina na hipotenuzu u pravokutnom trokutu dijeli taj trokut na dva slična trokuta. Slijedi riješeni primjer gdje su nam zadana dva kuta α i β i trebamo dokazati da simetrala kuta α dijeli trokut na dva trokuta od kojih je jedan sličan početnom trokutu. Isto tako imamo riješeni primjer gdje imamo zadana dva slična trokuta s koeficijentom sličnosti $k = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. Dokazano je da za duljine visina na odgovorajuće stranice vrijedi jednak omjer, to jest $k = \frac{v_a}{v_{a1}}$.

Nastavlja se sa SSS poučkom o sličnosti trokuta. U riješenom primjeru provjerava se imaju li dva trokuta imaju isti koeficijent sličnosti i po SSS poučku o sličnosti trokuta zaključuje se da dva trokuta slična. Dalje se navodi SKS poučak o sličnosti trokuta. Dan je riješeni primjer gdje se pomoću SKS poučka provjerava da li su zadani trokuti slični. Nadalje, dan je riješeni primjer preko SKS poučka gdje su Marija i Andreja dobile zadatak da u ime ekološke grupe izmjere širinu odlagališta smeća (vidi sliku 39.) koji je već riješen pomoću sukladnosti trokuta.



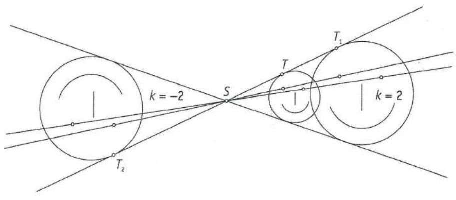
Slika 41. Udžbenik: Profil

Rješenje: Najprije odaberu točku C te izmjere $|BC| = z$ i $|AC| = y$. Zatim na vršnome kutu α odrede točke D i E tako da bude $z' = k \cdot z$ i $y' = k \cdot y$. Zatim izmjere $\overline{DE}$, tj. nađu x'. Iz SKS poučka slijedi da je $\triangle ABC \sim \triangle EDC$, pa je traženi $x = k \cdot x'$ (k su same odabrale, a x' su izmjerile).

Dalje slijedi *Opseg i površina sličnih trokuta* gdje se odmah dokazuje da je omjer opsega sličnih trokuta jednak koeficijentu sličnosti tih trokuta, a da je omjer površina sličnih trokuta jednak kvadratu koeficijenata sličnosti tih trokuta. Slijedi riješeni primjer gdje su zadane duljine svih stranica jednog trokuta, treba izračunati opseg sličnog trokuta ako mu je poznata najkraća stranica. Zatim je riješen primjer gdje treba izračunati površinu trokuta ako je poznata površina trokuta unutar ovog zadanog trokuta i ako su poznate duljine dviju stranica i označeni su sukladni kutovi.

Nastavlja se s *Euklidovim poučkom.* Odmah je iskazan Euklidov poučak i dokazan. Slijede riješeni primjeri. U prvom primjeru imamo zadanu duljinu katete i odsječka, a treba izračunati duljinu druge katete i hipotenuzu. Zatim imamo riješeni primjer konstrukcije dužine duljine $\sqrt{6}$. Imamo još jednu riješenu konstrukciju gdje se treba konstruirati kvadrat koji ima jednaku površinu kao i zadani trokut.

Obrađena je još *Homotetija* u ovoj nastavnoj cjelini. Uz pomoć slike 42. objašnjeno je da je homotetija preslikavanje točaka ravnine koje je zadano točkom S i koeficijentom k, $k \neq 0$.



Slika 42. Udžbenik: Profil

Slijede još dva riješena primjera. U prvom primjeru imamo zadanu dužinu i treba nacrtati njezinu sliku pri homotetiji sa zadanim središtem i sa zadanim koeficijentima, od kojih je jedan pozitivan koeficijent a jedan je negativan. Nadalje, imamo riješeni primjer gdje je zadan kvadrat i treba konstruirati njegovu sliku pri homotetiji čije je središte sjecište dijagonala tog kvadrata i isto tako imamo jedan pozitivan i jedan negativan koeficijent homotetije. Dalje su dana dva zadatka odnosno konstrukcije za samostalni rad učenika. Slijede i zadatci za ovu nastavnu jedinicu od kojih bi izdvojila jedan zadatak koji bi učenicima mogao biti zanimljiv: Šećući starim dijelom grada, Augustin i Hrvoje naišli su na bunar i odlučili izmjeriti njegovu dubinu. Imali su mali laser i metar. Izmjerili su promjer bunara 80 cm. Zatim su olovku duljine 5 cm postavili s unutrašnje strane bunara, 50 cm duboko, okomito na stijenke, tako da je pravac laserske zrake prolazio točkom A na rubu bunara, vrhom olovke i točkom na dnu bunara dijametralno suprotno točki A. Koliko je bunar dubok?

Slijede zadatci za ponavljanje cijele cjeline. Prvo imamo zadatke Jesmo li razumjeli? gdje učenici u svakom zadatku imaju ponuđene odgovore. Ovi zadatci mogu dobro poslužiti učenicima kao priprema za ispit jer ima i lakših i težih zadataka i ima ih samo 10. Nakon toga slijede Zadatci za ponavljanje u kojem ima puno više zadataka i ima i dosta lakših, ali i puno više težih zadataka za ponavljanje. U ovim zadacima je gradivo Sukladnost i sličnost zapravo povezano s učeničkim dosadašnjih znanjima. Autori u ovoj cjelini nisu obradili četiri karakteristične točke trokuta ali ima dosta zadataka gdje se treba dokazati recimo da se simetrala stranice u trokutu sijeku u jednoj točki i autori su u zagradi stavili da je ta točka središte trokutu opisane kružnice. Ovi zadatci su na razini gimnazijskog programa iako sama obrada gradiva ne prati tu razinu. Na samom kraju se nalaze zadatci Bilo jednom na maturi gdje se pojavljuju zadatci koji su se do sada pojavljivali na maturi. Ostao je još jedan udžbenik za analizu.

Udžbenik - Z. Šikić, R. Kalazić, S. Lukač, K. J. Penzar - Profil, 2019

Matematika 1, 2. svezak, udžbenik za 1. razred gimnazije i srednje škole, nakladnika Profil u nastavnoj cjelini Sukladnost i sličnost obrađuje ove nastavne jedinice:

- Sukladnost trokuta
- Proporcionalnost dužina. Talesov poučak
- Sličnost trokuta
- Karakteristične točke trokuta

Ishodi Kurikulima koji će se zadovoljiti u ovoj nastavnoj cjelini su:

C. Konstruirati i analizirati položaj karakterističnih točaka trokuta

C. Primjenjivati Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnosti trokuta

D. Primjenjivati Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnosti trokuta

Prvo što se navodi nakon što se otvori cjelina jest što će učenici nakon ovog poglavlja moći:

- Izreći i ilustrirati poučke o sukladnosti i sličnosti trokuta i Talesov poučak o proporcionalnosti dužina

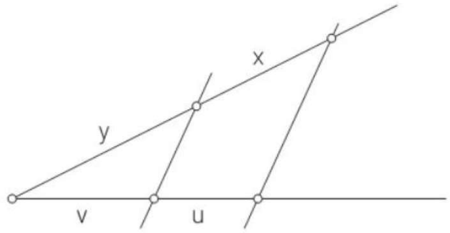
- Primjeniti poučke u modeliranju problema
- Odrediti, obrazložiti i primjeniti odnose površina, opsega i drugih veličina u sličnim trokutima
- Primjeniti Heronovu formulu za površinu trokuta
- Riješiti probleme koristeći se Euklidovim poučkom u pravokutnome trokutu
- Konstruirati i analizirati položaj karakterističnih točaka

Autori također navode Za što mi to treba?

- Da znam odrediti visinu drveta ili tornja uz pomoć duljine njegove sjene
- Da se snađem u nepoznatom gradu i izračunam udaljenost do željene lokacije uz pomoć plana grada
- Za izračunavanje dimenzije i površine geometrijskih likova uz pomoć podataka o sličnim likovima

Opći dojam ovog udžbenika je preglednost i jako dobra vizualna organizacija dijelova nastavne jedinice. Definicije, primjeri i zadaci su vizualno označeni. Udžbenik je pisan jednostavnim jezikom, a boljem razumijevanju teksta doprinose i brojne slike odnosno riješeni primjeri. Svi su primjeri detaljno riješeni i popraćeni su sličnim zadatkom za samostalni rad. Autori su osmišljavajući i oblikujući udžbenik vodili računa o tome da cilj učenja matematike nije samo uvježbavanje određenih skupina zadataka, već i izgradnja znanja, kao i proces razvoja mišljenja. Koristili su se fotografijama, zanimljivostima i praktičnim primjerima.
Skeniranjem koda koji se nalazi pokraj zadatka učenici mogu provjeriti da li su usvojili prethodni primjer. Također postoji i ikona Zadatci za ponavljanje koji omogućuje učenicima da provježbaju i ponove sadržaj cjeline kako bi mogli krenuti dalje s učenjem. Postoji i posebna rubrika Zadatci koja je sastavni dio nastavnog sadržaja te omogućuju učenicima da prethodnu jedinicu uvježbaju. Osim zadataka i primjeri su označeni ali drugačijom ikonom. Autori su napravili i rubriku Jesmo li razumjeli? koja omogućuje ponavljanje, uvježbavanje te provjeru znanja kratkim pitalicama i jednoznačnim odgovorima. Isto tako postoji i rubrika Znate li koja nudi vrijedne i zanimljive podatke. Osim tiskanog postoji i digitalna verzija udžbenika koja se nalazi na platformi Profil IZZI gdje su autori osim digitalnog udžbenika stavili i videozapise, digitalne kvizove, spajalice i memory.

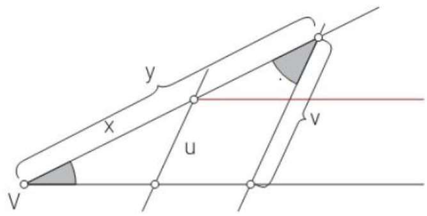
Započinje se s nastavnom jedinicom *Sukladnost trokuta.* Sama obrada gradiva je skoro identična udžbeniku iz 2014. godine. Jedina novina je da se iza svakog riješenog primjera nalazi zadatak za samostalni rad učenika. U ovom udžbeniku izbačen je primjer gdje su Marija i Andreja dobile zadatak da u ime ekološke grupe izmjere odlagalište za smeće. Zadatci koji služe za utvrđivanje ove nastavne jedinice su identični kao u udžbeniku iz 2014. godine jedino je dan podsjetnik da nasuprot većoj stranici leži veći kut, a nasuprot većem kutu veća stranica. Prelazi se na nastavnu jedinicu *Proporcionalnost dužina. Talesov poučak* gdje je u potpunosti izbačena definicija omjera i razmjera i umjesto toga je stavljen zadatak za samostalni rad učenika koliki je omjer dijagonale i stranice kvadrata. Početni riješeni primjer za Talesov poučak je identičan kao u prošlom udžbeniku, kao i ostala obrada gradiva. Dodana su dva riješena primjera i dva zadatka za samostalni rad učenika. Prvi novi primjer koji je dodan je: Paralelni pravci sijeku kut kao na slici 43. Ako je $\frac{u}{u+v} = \frac{1}{3}$ i $y = 4$ cm, koliki je x?



Slika 43. Udžbenik: Profil

Zadano je $\frac{u}{u+v} = \frac{1}{3}$, a iz Talesova poučka imamo $\frac{x}{x+y} = \frac{u}{u+v}$.
Dakle, $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{3}$
$3x = x + y$
$2x = y$
$2x = 4$ cm
$x = 2$ cm

Drugi riješeni primjer koji je dodan je: Paralelni pravci kut s vrhom V kao na slici 44. Dokažimo da je $x : y = u : v$.



Slika 44. Udžbenik: Profil

Povucimo crveni pravac paralelan s jednim krakom kuta s vrhom V. Taj krak i ta paralela tada sijeku kut uz vrh U pa je po Talesovu poučku $u : v = x : y$.

Prelazi se na *Dijeljenje dužine u zadanom omjeru* gdje su ostavljena dva riješena primjera kao u prethodnom udžbeniku, isto kao i zadatci za samostalni rad učenika. Izostavljen je primjer u kojem se treba konstruirati trokut zadanog opsega sa zadanim omjerima stranica. Što se tiče zadataka za ponavljanje ove nastavne jedinice dosta zadataka je ostavljeno kao u prošlom udžbeniku, neki zadatci su izbačeni, a neki zadatci su dodani. Od tri nova dodana zadatka jedan bi učenicima mogao biti zanimljiv: Na dijelu zemljišta oblika kvadrata površine 25 m^2 treba napraviti bazen oblika pravokutnika tako da vrhovi budu na stranicama kvadrata, a stranice paralelne dijagonalama kvadrata. Odredi duljinu i širinu bazena ako se odnose kao 2:3.

Slijedi nastavna jedinica *Sličnost trokuta*. Uspoređujući udžbenike vidimo da je ova nastavna jedinica identična kao u udžbeniku iz 2014. godine. Dolazimo do podnaslova *Opsezi i površine sličnih trokuta* gdje je sami početak gdje se definira omjer opsega i površina sličnih trokuta isti kao u udžbeniku iz 2014. godine. Dodana je Heronova formulu za površinu trokuta što je nedostajalo u prethodnom udžbeniku. Isto tako dodan je i novi riješeni primjer gdje se izračunava površina trokuta pomoću Heronove formule i koeficijenta sličnosti. Dolazimo do podnaslova Euklidov poučak gdje su definicija i riješeni primjer isti kao u prethodnom udžbeniku, jedino je dodatan zadatak za samostalni rad učenika. Izbačene su konstrukcije koje su bile vezane uz Euklidov poučak. Isto tako je izbačen u ovom udžbeniku podnaslov Homotetija. Kod zadataka za ponavljanje ove nastavne jedinice s obzirom na nastale promjene u obradi gradiva prilagođeni su i sami zadatci. Dio zadataka je isti kao u prethodnom udžbeniku, a novi zadatci za novo gradivo su dodani. Dodan je jedan zadatak iz svakodnevnog života: Dio gradskoga trga ima oblik jednakokračnoga trokuta kraka duljine 10 m i visine na krak duljine 8 m.

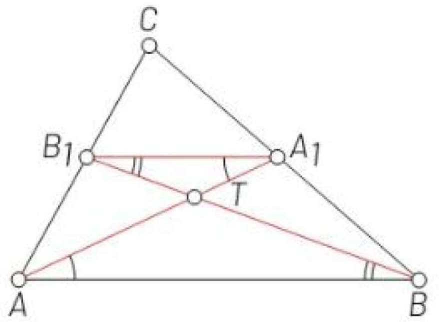
a) Na kojoj udaljenosti od kraka treba paralelno s krakom povući liniju da se dobije trokut 4 puta manje površine?

b) Na manjem trokutu želi se napraviti okrugla fontana. Koliki je maksimalan promjer fontane?

Nastavlja se s nastavnom jedinicom *Karakteristične točke trokuta* koja nije obrađena u prethodnom udžbeniku. Započnje se s Središtem opisane kružnice. Na samom početku promatraju se trokut i simetrale njegovih stranica i objašnjavaju koje su sve dužine sukladne. Na priloženoj slici se vidi da se sve simetrale sijeku u zajedničkoj točki i da je to središte kružnice opisane trokutu ABC. Kroz samostalni zadatak za učenike navodi ih se da sami zaključe gdje se nalazi središte opisane kružnice kod šiljastokutnog, pravokutnog i tupokutnog trokuta. Kroz riješeni primjer dokazana je formula za površinu trokuta $P = \frac{abc}{4r_0}$, gdje je r_0 polumjer trokutu opisane kružnice. Slijedi samostalan zadatak za učenike gdje trebaju dokazati da je u jednakostraničnom trokutu polumjer opisane kružnice dan formulom $r_0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dalje se obrađuje Središte upisane kružnice. Promatra se trokut ABC, njegovi kutovi α, β, njihove simetrale s_α, s_β i njihovo sjecište. Promatra se koje su sve dužine sukladne i da se sve simetrale sijeku u zajedničkoj točki koja je središte kružnice upisane trokutu ABC. Opet kroz samostalni zadatak navode se učenici da sami dođu do zaključka gdje se nalazi središte upisane kružnice kod šiljastokutnog, pravokutnog i tupokutnog trokuta. U riješenom primjeru izvodi se formula za površinu trokuta $P = \frac{a+b+c}{2} r_u$, gdje je r_u polumjer trokutu upisane kružnice. Slijedi zadatak za samostalni rad učenika gdje trebaju dokazati da je u jednakostraničnom trokutu polumjer upisane kružnice dan formulom $r_u = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

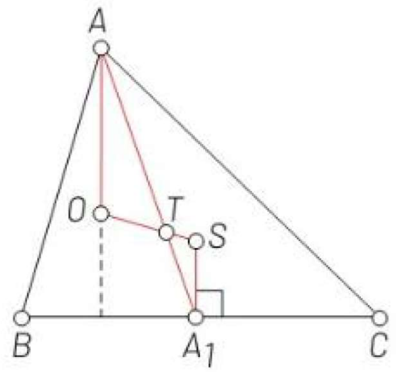
Dalje se obrađuje pojam težišta. Na početku se definira težišnica - spojnica vrha trokuta s polovištem njemu suprotne stranice. Dokazuje se da se sve tri težišnice trokuta sijeku u zajedničkoj točki T koju zovemo težište. Promatra se trokut ABC i njegove težišnice AA_1 i BB_1:



Slika 45. Udžbenik: Profil

Po Talesovu poučku stranica AB dvostruko je duža od A_1B_1 i s njom paralelna. Zato su jednako označeni kutovi uz transverzalu međusobno jednaki. No, to znači da su trokuti A_1TB_1 i trokut ATB međusobno slični s koeficijentom sličnosti 2.
Dakle, $|AT| = 2|TA_1|$ i $|BT| = 2|TB_1|$ tj. $|AT| = \frac{2}{3}|AA_1|$ i $|BT| = \frac{2}{3}|BB_1|$.
Kada bi se krenulo od težišnica BB_1 i CC_1 i njihova sjecišta Q, na jednak način se nalazi: $|BQ| = \frac{2}{3}|BB_1|$ i $|CQ| = \frac{2}{3}|CC_1|$.
No, iz $|BQ| = \frac{2}{3}|BB_1|$ i $|BT| = \frac{2}{3}|BB_1|$ slijedi $Q = T$.
To znači da se sve tri težišnice sijeku u zajedničkoj točki T:
$|AT| = \frac{2}{3}|AA_1|$, $|BT| = \frac{2}{3}|BB_1|$, $|CT| = \frac{2}{3}|CC_1|$.

Dalje su dana dva zadatka za samostalni rad učenika i prelazi se na pojam ortocentra. Dokazano je da se visine trokuta sijeku u zajedničkoj točki koju zovemo ortocentar. Promatramo trokut ABC u kojem je istaknuto središte opisane kružnice S i težište T:



Slika 46. Udžbenik: Profil

Točka O konstruira se na pravcu ST tako da vrijedi $|TO| = 2|TS|$ i da S i O budu s različitih strana točke T. Promatraju se trokuti TOA i TSA_1 uz težišnicu AA_1. Oni su slični jer imaju jednake vršne kutove uz T i proporcionalne stranice uz te kutove ($|TA| = 2|TA_1|$ zbog prethodno dokazanog svojstva težišta, a $|TS| = 2|TO|$, po konstrukciji od O). Slijedi da je AO paralelno s A_1S. No, simetrala A_1S okomita je na BC pa je i AO okomito na BC, tj. O leži na visini iz vrha A. Kada bi se promatrali trokuti uz težišnice BB_1 i CC_1, na jednak bi se način zaključilo da O leži na visini iz vrha B i na visini iz vrha C, tj. da se sve visine sijeku u točki O. Također, treba uočiti da težište T, središte opisane kružnice S i ortocentar O leže na istome pravcu i taj pravac zovemo Eulerovim pravcem. Slijede četiri zadatka za samostalni rad učenika. Nakon toga slijede zadatci za ovu nastavnu jedinicu od kojih ću izdvojiti zadatke koji bi mogli biti zanimljivi učenicima:

1. Tri voćke međusobno su udaljene 4 m, 5 m i 7m. Na kojoj udaljenosti od svake voćke treba postaviti prskalicu da voda doseže do svake voćke?

2. Tri stupa povezana su žicom ukupne duljine 108 m. Udaljenosti stupova od nasuprotnih spojnica redom su 36 m, 27 m i 21.6 m. Koliko su stupovi udaljeni jedan od drugoga?

3. Tri klupe na dječjem igralištu međusobno su udaljene 15 m, 29 m i 36 m. Na kojoj udaljenosti od klupa treba postaviti tobogan da bude jednako udaljen od svake klupe?

Slijede još zadatci Jesmo li razumjeli i Zadatci za ponavljanje koji su većinom identični zadatcima u prethodnom udžbeniku, jedino što su dodani zadatci za gradivo koje se obrađivalo u ovom udžbeniku, a u prethodnom udžbeniku nisu obrađeni. Također u ovom udžbeniku nema rubrike Bilo jednom na maturu, ali zadatke koji su do sada bili na maturi učenici mogu pronaći na platformi Profil IZZI u obliku kviza. Ovo je kraj analize srednjoškolskih udžbenika iz teme Sukladnost i sličnost.

Usporedba udžbenika

Na temelju provedene analize udžbenika iz matematike za 1. razred gimnazije - 140 sati godišnje, nakladnika Školska knjiga i Profil, udžbenici iz 2014. godine i udžbenici iz 2019.godine po novom kurikulumu napravit ćemo usporedbu ovih udžbenika. Navesti ćemo neke sličnosti i razlike među njima, istaknuti neke metodičke prednosti i nedostatke te ocijeniti kvalitetetu udžbenika iz perspektive učenika i nastavnika.

Udžbenik nakladnika Profil iz 2014. godine ne obrađuje gradivo Karakteristične točke trokuta koje se u sva tri preostala udžbenika obrađuje. Jedinu sličnost koju možemo uočiti između udžbenika nakladnika Profil iz 2014. i 2019. godine gdje je obrada sadržaja koja je zajednička u oba udžbenika identična, osim što se razlikuje u dodanom i izbačenom sadržaju. U udžbeniku iz 2014. godine, kao što je već navedeno, ne obrađuju se Karakteristične točke trokuta, ali se obrađuje Homotetija. Autori su također u novom udžbeniku obradili i Heronovu formulu za površinu trokuta koja nije obrađena u starom udžbeniku. Zadatci i riješeni primjeri su identični kao u starom udžbeniku, jedino što su dodani zadatci za novi sadržaj i izbačeni zadatci za sadržaj koji nije prisutan u novom Kurikulumu.

Udžbenici nakladnika Školska knjiga opširnije obrađuju gradivo Sukladnost i sličnost nego udžbenici nakladnika Profil. Također, udžbenici nakladnika Školska knjiga su pisani stručnijim matematičkim jezikom te sadrže i određeni broj preciznih izvoda formula i dokaza nekih poučaka i teorema navedenih u ovoj nastavnoj cjelini dok to izostaje u udžbenicima nakladnika Profil, što bi s obzirom da se radi o udžbeniku za gimnazijski program ipak trebalo sadržavati. Jedino u udžbeniku nakladnika Školska knjiga iz 2019. godine autori navode četiri poučka o sukladnosti trokuta, dok u svim ostalim udžbenicima su navedena tri poučka o sukladnosti trokuta.

Što se tiče riješenih primjera udžbenik nakladnika Školska knjiga iz 2019. godine ima uvjerljivo najviše riješenih primjera u usporedbi s ostalim udžbenicima, što uveliko može pomoći učenicima pri svladavanju gradiva. Što se tiče zadataka za samostalni rad učenika, najmanji broj ima udžbenik nakladnika Profil iz 2019. godine, oko 100 zadataka, dok ostali udžbenici imaju oko 130 zadataka. Posebno treba istaknuti da udžbenici iz 2019. godine uz standardne tipove zadataka zatvorenog tipa sadrže i određeni broj zadataka otvorenog tipa i zadataka postavljenih u kontekstu stvarnog života i primjene u drugim nastavnim predmetima. U svakom udžbeniku se brinulo da zadatci idu po težini, od lakših prema težima.

Svi udžbenici nakladnika Školska knjiga i udžbenik nakladnika Profil iz 2014. godine na kraju ove nastavne cjeline imaju i skupinu zadataka s državne mature koja sadrži zadatke iz ove nastavne cjeline koji su se pojavljivali na državnoj maturi ranijih godina, dok udžbenik nakladnika Profil iz 2019. godine nema u tiskanom udžbeniku ovu skupinu zadataka, nego se ti zadatci nalaze na digitalnoj platformi u obliku kviza.

Kod sva četiri udžbenika možemo primjetiti da su autori na početku cjeline jasno iskazali što će učenici nakon obrađenog gradiva znati i čemu im služi obrađeno gradivo. Udžbenik nakladnika Školska knjiga iz 2014. godine dobro je metodički i didaktički osmišljen, no nedostatak ovog udžbenika je što djeluje prilično bezizražajno i teško će privući pažnju učenika. Definicije i važni pojmovi nisu dovoljno jasno istaknuti i nedostaje slika koje bi privukle pažnju učenika.

Udžbenik nakladnika Profil iz 2014. godine je dobro metodički i didaktički osmišljen, ali mu nedostaje sadržaja. Ovaj udžbenik je više primjeren strukovnim školama nego gimnazijama. Jezik kojim je ovaj udžbenik pisan i gradivo koje je obrađeno previše je jednostavno i učenicima većih intelektualnih sposobnosti ne nudi dovoljno.

Svaka nova generacija udžbenika iz matematike donosi neke nove didaktičke, metodičke i grafičke pristupe, pa se tako mogu primjetiti pozitivni pomaci u udžbenicima iz 2019.godine. Svaki od njih iz didaktičke i metodičke perspektive ima niz prednosti i nedostataka. Autori su u novim udžbenicima vodili brigu o motivacijskim primjerima vezanim uz pojedine nastavne jedinice pa tako će i učenici moći dobiti dojam korisnosti onoga što uče. Autori novih udžbenika su također upotrijebljavali i dosta slika.

Udžbenik nakladnika Školska knjiga iz 2019. godine je najbolje od svih udžbenika metodički i didaktički osmišljen, te je dosta vizualno orijentiran. Isto tako primjeren je učenicima različitih intelektualnih sposobnosti. Pisan je jednostavnim matematičkim jezikom, ali nudi i stroge matematičke definicije i dokaze nekih teorema. Dosta zadataka je postavljeno u kontekstu stvarnog života. Ovaj udžbenik lako može zainteresirati svakog učenika jer je vrlo pregledan i zanimljiv.

Udžbenik nakladnika Profil iz 2019. godine je sadržajem skoro identičan kao i udžbenik iz 2014. godine osim što su autori doradili područje vizualnog pregleda. I dalje je sadržaj više primjeren strukovnim školama nego gimnazijama. Autori su dali više zadataka iz svakodnevnog života.

Ono što je svakako za pohvalu su digitalne platforme koje smo već do sad spominjali koje i učenicima i profesorima mogu puno pomoći prilikom obrade gradiva. Na digitalnoj platformi e - sfera ima jako puno aplikacija u Geogebri koje mogu pomoći učenicima pri savladavanju sadržaja, a i učiteljima mogu olakšati obradu novog gradiva. Pojedini kvizovi koji postoje na platformama mogu isto tako poslužiti za samovrednovanje učenika.

Na kraju se postavlja pitanje koji udžbenik bih ja osobno koristila? S obzirom da se radi o gimnazijskom programu odabrala bih udžbenik nakladnika Školska knjiga jer smatram da je više primjeren za učenike gimnazijskog programa, a i metodički i didaktički je puno bolje obrađen od Profilovog udžbenika.

Bibliografija

[1] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan, V. Vujasnin Ilić, Ž. Dijanić, *Udžbenik matematike u prvom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[2] J. Krajina, I. Gusić, F. M. Brückler, T. Milun, *Matematika 1, 2.dio, udžbenik sa zbirkom zadataka u prvom razredu opće, jezične i klasične gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[3] Z. Šikić, R. Kalazić, S. Lukač, B. Palanović, *Matematika 1, 2. polugodište, udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za prvi razred gimnazije i tehničke škole*, Profil, Zagreb, 2014.

[4] Z.Šikić, R.Kalazić, S.Lukač, K.J.Penzar, *Matematika 1, 2. svezak, udžbenik za prvi razred gimnazije i srednje škole*, Profil Klett, Zagreb, 2019.

[5] H.-G. Weigand, A.Filler, R.Hölzl, S.Kuntze, M.Ludwig, J.Roth, B.Schmidt-Thieme, G.Wittmann, *Didaktik der Geometrie für di Sekundarstufe I*, Springer Spektrum, Berlin, 2018.

[6] Glasnik Ministarstva kulture i prosvjete

[7] Kurikularni pristup promjenama u gimnaziji, Razrada okvirnog nastavnog plana i programa u funkciji rastećenja učenika, Prirodoslovno-matematičko-tehničko područje, Zagreb, 2003.

[8] *https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html*

[9] *https://hr.izzi.digital/DOS/2602/2615.html*

[10] *https://www.e-sfera.hr/dodatni-digitalni-sadrzaji/c1659191-b6a0-467f-993b-2f395e7bdf24/*

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je bio usporediti srednjoškolske matematičke udžbenike koji u svom sadržaju obrađuju Sukladnost i sličnost trokuta, i to sa naglaskom na udžbenike prije i poslije novog kurikuluma. Izgledno je da novi udžbenici pružaju puno više motivacijskih primjera i zadataka iz svakodnevnog života. Svaki novi udžbenik počinje s nekom motivacijskom pričom kako bi se učenici motivirali za daljnji rad. Nakon uvodnog dijela, dio koji se obrađuje je obilno potkrijepljen riješenim primjerima. Nakon toga slijede zadatci za samostalni rad učenika u kojem također ima dosta zadataka iz svakodnevnog života i zadataka koji bi učenicima mogli biti zanimljivi. Napredak svakako vidimo i u digitalnim platformama koje su učenicima zanimljive i mogu im povećati želju za učenjem i stjecanjem novih znanja. Na kraju, možemo zaključiti da je najbitnije da je svaki udžbenik matematički ispravan. Kako je pisanje udžbenika individualna stvar, onda tako i postoje razlike među udžbenicima , a ono najbitnije je u svakom udžbeniku je postignuto.

Ključne riječi: Kurikulum, trokut, sukladnost, sličnost

Summary

The goal of this master thesis was to compare high school mathematical textbooks that cover the topic of congruent and similar triangles, with an emphasis on textbooks before and after the new Curriculum. It is evident that the new textbooks provide many more motivational examples and tasks from everyday life. Every new textbook starts with a motivational story to motivate the students to study. After introduction, many examples are given for the material that is being studied. The next part of materials consists of tasks for individual work and tasks that could be interesting to students. We can also observe a breakthrough in use of digital platforms that are very appealing to students and can increase their drive for studying and acquisition of new knowledge. Finally, we can conclude that it's essential that every textbook is mathematically correct. Taking into consideration that writing a textbook is an individual matter of every author, it's logical that there are differences between textbooks, but the essence of the topic is explained in every textbook.

Key words: Curriculum, triangle, congruence, similarity

Životopis

Sanja Čuljak rođena je 08. veljače 1985. godine u Osijeku. Osnovnu školu "Mladost" završila je u Osijeku 1999. godine . Iste godine upisuje srednju školu "Ekonomska i upravna škola Osijek". Srednju školu završava 2003. godine, te 2004. godine upisuje studij matematike i informatike u Osijeku na Odjelu za matematiku. Do sada je radila u vlastitoj projektantskoj tvrtci, te u Osnovnoj školi Blage Zadre u Vukovaru kao učiteljica matematike i informatike, te u Osnovnoj školi Nikole Andrića u Vukovaru kao učiteljica matematike.
Majka je dvogodišnje kćeri i u slobodno vrijeme voli voziti bicikl i šetati s psima.