

# Hestonov model

---

Trstenjak, Zlatko

Master's thesis / Diplomski rad

2020

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:645193>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-19**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

**Zlatko Trstenjak**  
**Hestonov model**  
Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

**Zlatko Trstenjak**

**Hestonov model**

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2020.

# Sadržaj

|                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Uvod</b>                                                                 | <b>1</b>  |
| <b>1 Modeliranje cijena dionica</b>                                         | <b>5</b>  |
| 1.1 Brownovo gibanje . . . . .                                              | 5         |
| 1.2 Stohastičke diferencijalne jednačbe . . . . .                           | 6         |
| 1.3 Black-Scholes-Mertonov model . . . . .                                  | 8         |
| 1.4 Vjerojatnost neutralna na rizik . . . . .                               | 9         |
| 1.5 Black-Scholes-Mertonova formula . . . . .                               | 11        |
| <b>2 Hestonov model</b>                                                     | <b>13</b> |
| 2.1 Implicirana volatilnost . . . . .                                       | 13        |
| 2.2 Modeli stohastičke volatilnosti . . . . .                               | 14        |
| 2.3 Jednačba Hestonovog modela . . . . .                                    | 15        |
| 2.4 Određivanje premije Europskih opcija unutar Hestonovog modela . . . . . | 17        |
| <b>3 Numerička implementacija</b>                                           | <b>21</b> |
| 3.1 Simulacija trajektorije Hestonovog modela . . . . .                     | 21        |
| 3.2 Grafička interpretacija parametara Hestonovog modela . . . . .          | 22        |
| 3.3 Procjena parametara uz objektivnu vjerojatnost . . . . .                | 24        |
| 3.4 Procjena parametara uz vjerojatnost neutralnu na rizik . . . . .        | 26        |
| <b>Sažetak</b>                                                              | <b>30</b> |
| <b>Dodatak</b>                                                              | <b>32</b> |
| <b>Literatura</b>                                                           | <b>37</b> |
| <b>Životopis</b>                                                            | <b>38</b> |

## Uvod

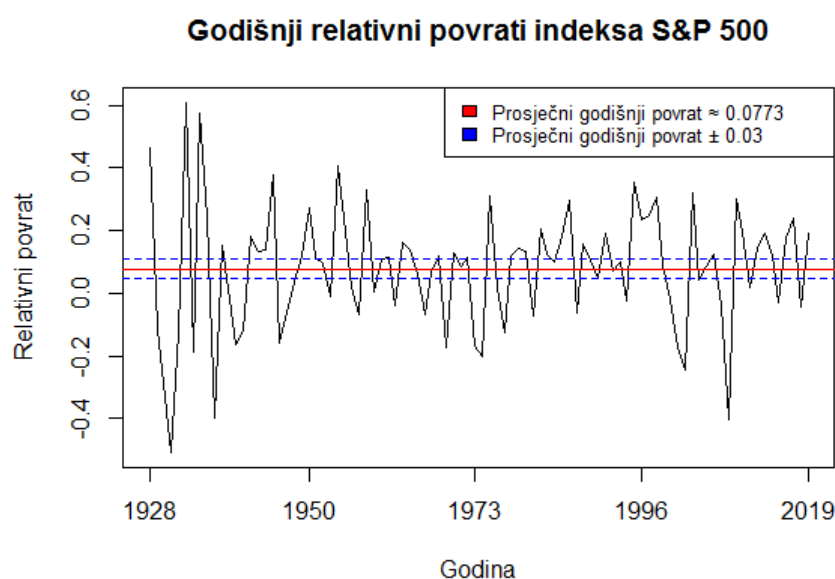
Većina ljudi i kompanija sa viškom dohotka, odnosno prihoda, željeli bi iskoristiti taj višak. Privlačna opcija za dodatnu zaradu svakako je štednja u banci. To je jednostavan, stabilan i predvidiv izvor prihoda sa zanemarivo malim rizikom. Novac u banci zato klasificiramo kao *nerizičnu financijsku imovinu*.

Kamatna stopa ostvarena štednjom u banci uglavnom je vrlo niska, stoga se ozbiljniji investitori okreću *rizičnoj financijskoj imovini*. Kao što joj naziv govori, rizična financijska imovina nosi određeni rizik od djelomičnog ili potpunog gubitka uložених sredstava, ali potencijalno donosi veći prinos od nerizične financijske imovine. Jedna od najzanimljivijih rizičnih financijskih imovina svakako su dionice.

Kada je u pitanju godišnji povrat na trgovanje dionicama, na mnogim web stranicama i člancima o investiranju se mogu pronaći brojke od 7%, 10%, 12% prosječni godišnji povrat što je značajno više od kamatnih stopa ponuđenih za štednju u banci. Kako bi ispitali je li stvarno tako, promotrit ćemo burzovni indeks S&P500. To je burzovni indeks na njujorškoj burzi koji se sastoji od 500 najvećih kompanija na toj burzi i dobar je izbor predstavnika cjelokupnog tržišta dionica na toj burzi. Godišnje podatke o kretanju vrijednosti tog indeksa preuzeli smo sa stranice [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com). Na temelju podataka, izračunali smo relativne povrate prema formuli:

$$\text{Relativni povrat u godini } t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}},$$

gdje je  $S_t$  vrijednost indeksa 1. siječnja godine  $t + 1$ . Podatke imamo od 1928. do 2020. godine pa relativne povrate možemo izračunati za  $t = 1928, \dots, 2019$ . Rezultati su prikazani na sljedećoj slici:



Slika 1

Prosječni godišnji relativni povrat u promatranom razdoblju iznosi približno 0.0773, odnosno oko 7.7%. Ipak, na slici uočavamo kako je malo godišnjih povrata blizu te vrijednosti. Primjerice, pogledamo li interval oko prosječne vrijednosti duljine 0.06, dobivamo interval sa gornjim vrijednostima približno 0.0473 i 0.1073. Iako je 6% velika promjena u relativnom godišnjem povratu, u tom intervalu se nalazi samo 10 od 92 moguća povrata. To govori o nepredvidivosti tržišta dionica. Nešto više godina imalo je godišnji povrat iznad prosjeka nego što ih je imalo ispod prosjeka (53 u odnosu na 39). Godišnji povrati ponekad su iznosili i preko 20% (u 18 od 92 godine) što pokazuje zašto su dionice toliko privlačne investitorima. S druge strane, 29 od 92 godine, što je otprilike jedna trećina, imalo je negativan godišnji povrat, stoga dionice s razlogom svrstavamo u *rizičnu* financijsku imovinu.

Većina investitora želi minimizirati rizik kod svojih ulaganja čak i ako to znači smanjenje potencijalne dobiti. Stoga, osim trgovanja samim dionicama, trguje se i raznim izvedenicama među kojima su najvažnije Europske call i put opcije.

**Definicija 1.** *Europska call (put) opcija je ugovor koji svome vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u unaprijed određenom trenutku  $T$  kupi (proda) neku financijsku imovinu po unaprijed određenoj cijeni  $K$ .*

Trenutak  $T$  nazivamo trenutak dospelosti, a cijenu  $K$  nazivamo cijenom izvršenja. Financijska će imovina u našem slučaju biti dionica neke kompanije. Vlasnik Europske call opcije (ECO) iskoristit će svoje pravo na kupovinu dionice ukoliko je cijena dionice u trenutku dospelosti  $T$ , u oznaci  $S_T$ , veća od cijene izvršenja  $K$ . U suprotnom, opcija će mu biti bezvrijedna. Slično, vlasnik Europske put opcije (EPO) iskoristit će svoje pravo na prodaju dionice ukoliko je cijena dionice u trenutku dospelosti  $T$  manja od cijene izvršenja  $K$ .

Vrijednost ECO za njezina vlasnika u trenutku dospelosti  $T$  označit ćemo sa  $C_T^{CALL}$  i možemo ju iskazati na sljedeći način:

$$C_T^{CALL} = \max\{0, S_T - K\} = (S_T - K)_+$$

Slično možemo iskazati i vrijednost EPO u trenutku dospelosti, u oznaci  $C_T^{PUT}$ :

$$C_T^{PUT} = \max\{0, K - S_T\} = (K - S_T)_+$$

Uočimo kako u trenutku dospelosti vlasnik ECO, odnosno EPO može biti samo na dobitku. U odnosu na direktnu kupovinu dionice, kupovinom prikladne opcije investitor i dalje može zaraditi ukoliko cijena dionice raste ili pada prema njegovim očekivanjima, a istovremeno je zaštićen od mogućih velikih gubitaka ako se cijena kreće suprotno njegovim očekivanjima.

Opcije i općenito izvedenice kupuju se u sadašnjem trenutku  $t = 0$  po cijeni  $C_0$  koju nazivamo premija. Iznos premije uglavnom je puno niži od same cijene dionice u trenutku  $t = 0$ . Stoga i investitor ima puno manje potencijalne gubitke kupovinom izvedenice umjesto dionice.

Određivanje *poštenog* iznosa premije za razne izvedenice jedan je od temeljnih problema matematičkih financija. Poštenu iznos premije treba odrediti s obzirom na sve poznate informacije i dosadašnja kretanja cijene dionice kako niti kupac, niti prodavatelj izvedenice ne bi bio u povlaštenom položaju.

Kako bi matematički postavili problem određivanja premije za izvedenice, ponovit ćemo osnovne definicije.

**Definicija 2.** *Neka je  $\Omega$  neprazan skup,  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra događaja na njemu, a  $P$  vjerojatnost na  $\Omega$ . Uređenu trojku  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  zovemo vjerojatnosni prostor.*

**Definicija 3.**  *$X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  je slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ako  $\forall B \in \mathbf{B}(\mathbf{R})$  vrijedi  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ .*

**Definicija 4.** *Slučajni proces je familija slučajnih varijabli  $(X_t, t \in T)$ ,  $T \subseteq \mathbf{R}$  na istom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*

Financijsko tržište matematički promatramo kao vjerojatnosni prostor. Skup  $\Omega$  predstavlja skup svih mogućih elementarnih događaja koji u svakom promatranom trenutku utječu na kretanje cijene određene financijske imovine. Za skup svih mogućih događaja  $\mathcal{F}$  uzimamo partitivni skup  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Vjerojatnost  $P$  realizacije određenog niza uzroka nazivamo objektivna vjerojatnost. Cijenu dionice u trenutku  $t \in I$  sada modeliramo nekom slučajnom varijablom  $S_t$  na tom vjerojatnosnom prostoru, odnosno kretanje cijene dionice na promatranom vremenskom intervalu modeliramo slučajnim procesom  $S = (S_t, t \in I)$ .

**Primjer 1.** *Promotrimo neku dionicu u tri vremenska trenutka: 0 (danas), 1 (sutra) i 2 (prekosutra). Neka ta dionica u svakom trenutku ima samo dva moguća relativna povrata:  $a$  i  $b$  sa vjerojatnostima  $p$  i  $1 - p$ ,  $p \in (0, 1)$ . Tada je  $\Omega = \{a, b\} \times \{a, b\}$ . Možemo definirati slučajne varijable  $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $X((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1$  i  $X_2 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $X((\omega_1, \omega_2)) = \omega_2$  koje predstavljaju relativni povrat dionice u trenutku 1, odnosno trenutku 2. Neka je  $S_0$  početna cijena dionice. Tada cijenu dionice u trenutku 1 modeliramo slučajnom varijablom  $S_1 = S_0(1 + X_1)$ , a cijenu dionice u trenutku 2 slučajnom varijablom  $S_2 = S_0(1 + X_1)(1 + X_2) = S_1(1 + X_2)$ . Kretanje cijene dionice na promatranom vremenskom intervalu modeliramo slučajnim procesom  $S = (S_t, t \in \{0, 1, 2\})$ .*

Na velikim svjetskim burzama cijene dionica se neprestano mijenjaju i naravno, postoji puno više mogućih promjena cijene od samo dvije kao u prethodnom primjeru. Stoga, kretanje cijene dionice modeliramo procesima u neprekidnom vremenu ( $t \geq 0$ ) s neprekidnim skupom stanja  $T \subseteq \mathbf{R}$ .

Sve informacije o financijskom tržištu, odnosno prijašnjim kretanjima cijene dionice do trenutka  $t$  modeliramo  $\sigma$ -algebrom  $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s, s \leq t)$ . Familija  $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  je rastući slijed informacija, odnosno filtracija. Cijena dionice u trenutku  $t$ , tj. slučajna varijabla  $S_t$ ,  $\mathcal{F}_t$  je izmjeriva, a slučajni proces  $S$  je  $\mathbf{F}$ -adaptiran.

Izvedenice na financijskom tržištu definiramo kao slučajne varijable dobivene Borelovom transformacijom cijene pripadne dionice, odnosno vrijednost izvedenice u trenutku  $t$  prikazujemo:  $C_t = f(S_t)$ , za neku Borelovu funkciju  $f$ . Primjerice, za ECO znamo da je u trenutku dospijeca  $T$ ,  $C_T^{CALL} = (S_T - K)_+$  pa je  $f(x) = (x - K)_+$ . Zanima nas koliko iznosi vrijednost ECO u proizvoljnom trenutku  $t \in [0, T]$ .

Ideja kako doći do vrijednosti u trenutku  $t$  je diskontirati vrijednost  $C_T$ , odnosno promatrati

izvedenicu kao nerizičnu financijsku imovinu sa intenzitetom kamate  $r$ , pošto ne znamo kako će se njena vrijednost kretati u budućnosti. Kako nakon diskontiranja i dalje imamo slučajnu varijablu, ideja je uzeti njezino očekivanje te kako treba uzeti u obzir dosadašnja kretanja cijene dionice, očekivanje uvjetujemo sa  $\mathcal{F}_t$ . Dobivamo izraz:

$$C_t = E[e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t].$$

Ovdje imamo nekoliko problema:

1. Treba odrediti  $S_T$ , odnosno treba konstruirati model koji dobro prati dosadašnja kretanja cijena i pretpostaviti kako će dobro pratiti buduća kretanja.
2. Računanje uvjetnog očekivanja može biti tehnički vrlo zahtjevno ako se koristi složeni model za kretanje cijene dionice
3. Za rizičnu financijsku imovinu općenito ne vrijedi  $E[e^{-r(T-t)}S_T|\mathcal{F}_t] = S_t$  jer ona ne raste po konstantnoj kamatnoj stopi  $r$  nego sadrži i određeni rizik. Stoga, iz gornjeg izraza prvo treba na neki način ukloniti taj rizik.

U prvom poglavlju ovoga rada uvesti ćemo bitne definicije, teoreme i tehnike za modeliranje cijena dionica i računanje vrijednosti ECO i EPO. Također ćemo predstaviti Black-Scholes-Mertonov model, najpoznatiji model za kretanje cijena dionica.

U drugom ćemo poglavlju navesti nedostatke Black-Scholes-Mertonovog modela te definirati modele stohastičke volatilnosti. Među tim modelima, posebno ćemo promotriti Hestonov model te odrediti vrijednost premije Europskih opcija unutar tog modela.

U posljednjem poglavlju implementirat ćemo rezultate prethodna dva poglavlja. Procjenit ćemo parametre modela na temelju stvarnih podataka, simulirati trajektoriju cijene dionice te odrediti vrijednosti ECO.



# 1 Modeliranje cijena dionica

Kao što smo rekli u uvodu, model za kretanje cijene dionice tražit ćemo među slučajnim procesima u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja. Kako bi dobili ideju za konstrukciju takvog modela, promotrimo najprije neku nerizičnu financijsku imovinu koja donosi kamatu na intervalu  $[0, T]$  s intenzitetom kamate  $r$ , na primjer, neka je to novac uložen u banci.

U svakom trenutku  $t \in [0, T]$  znamo vrijednost nerizične financijske imovine:  $S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$ , gdje je  $S_0^0$  vrijednost u trenutku 0, odnosno početni ulog. Promjenu vrijednosti nerizične financijske imovine na proizvoljno malom vremenskom intervalu možemo opisati običnom diferencijalnom jednačinom:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt.$$

Primijenimo li gornji izraz za kretanje cijene dionice, intenzitet kamate  $r$  možemo zamijeniti parametrom  $\mu$  koji predstavlja očekivani intenzitet povrata te dionice ili općenitije  $\mu(t, S_t)$ . Sada još preostaje dodati nekakav šum koji predstavlja nepoznati šok u kretanju cijene na promatranom intervalu. Proces kojim se modelira taj šum je Brownovo gibanje.

## 1.1 Brownovo gibanje

**Definicija 5.** *Brownovo gibanje  $W = (W_t, t \geq 0)$  je slučajni proces u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja  $S = \mathbf{R}$  koji ima sljedeća svojstva:*

1.  $W_0 = 0$  g.s.
2. Za proizvoljne  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  slučajne varijable  $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  su nezavisne.
3. Za proizvoljne  $0 \leq s < t$  je  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .

Brownovo gibanje u literaturi se još naziva i Wienerov proces, prema američkom matematičaru Norbertu Wieneru.

Iz definicije slijedi kako  $W$  ima stacionarne i nezavisne priraste koji su centrirani i čija varijanca ovisi o duljini intervala na kojem ih promatramo. Također,  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ . Zbog ovih se svojstava Brownovo gibanje koristi za modeliranje šuma u kretanju cijena dionica. Razumno je pretpostaviti kako je veća fluktuacija cijena vjerojatnija na dužim vremenskim intervalima te kako svaki vremenski interval ima čimbenike koji utječu na kretanje cijena, a karakteristični su samo za taj interval, odnosno nezavisni su od drugih vremenskih intervala. Jačinu fluktuacije cijena, kao i moguću korelaciju sa fluktuacijama cijena u prethodnim vremenskim intervalima dobivamo tako da  $dW_t$  pomnožimo sa  $\sigma(t, S_t)$  koji može biti neka konstanta, funkcija ili slučajni proces.

Trajektorije Brownovog gibanja su neprekidne i nigdje diferencijabilne, g.s. Još jedno važno svojstvo Brownovog gibanja vezano je uz pojam varijacije.

**Definicija 6.** Neka je  $\Pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  subdivizija segmenta  $[0, T]$  i neka je  $||\Pi|| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |t_j - t_{j-1}|$  dijametar subdivizije  $\Pi$ . Varijacija reda  $p$ ,  $p \in [1, \infty)$ , funkcije  $f$  na segmentu  $[0, T]$  definirana je izrazom

$$\lim_{||\Pi|| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p.$$

Ako je taj limes konačan, kažemo da je  $f$  ograničene  $p$ -varijacije, a u suprotnom kažemo da je  $f$  neograničene  $p$ -varijacije.

**Propozicija 1.** Brownovo gibanje  $(W_t, t \geq 0)$  je proces g.s. neograničene 1-varijacije na  $[0, T]$ .

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti ekvidistantnu subdiviziju

$\Pi = \{0, \frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \dots, T\}$ . Tada je  $||\Pi|| = \frac{T}{n}$  i zahtjev  $||\Pi|| \rightarrow 0$  ekvivalentan je zahtjevu  $n \rightarrow \infty$ . Vrijedi sljedeće:

$$\sum_{j=1}^n |W_{t_j} - W_{t_{j-1}}| = \sqrt{\frac{T}{n}} \sum_{j=1}^n \frac{|W_{t_j} - W_{t_{j-1}}|}{\sqrt{\frac{T}{n}}} = \sqrt{nT} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\mathcal{E}_j|,$$

gdje su  $\mathcal{E}_j = \frac{W_{t_j} - W_{t_{j-1}}}{\sqrt{\frac{T}{n}}}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , međusobno nezavisne standardne normalne slučajne varijable, zbog svojstava prirasta Brownovog gibanja. Pustimo li u gornjem izrazu  $n \rightarrow \infty$ , imamo  $\sqrt{nT} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\mathcal{E}_j| \rightarrow E[|\mathcal{E}_1|] \neq 0$  prema jakom zakonu velikih brojeva pa limes gornjeg izraza nije konačan, odnosno Brownovo gibanje ima neograničenu 1-varijaciju.  $\square$

Može se pokazati kako Brownovo gibanje ima g.s. ograničenu 2-varijaciju na  $[0, T]$  i ona iznosi  $T$ .

## 1.2 Stohastičke diferencijalne jednačbe

Nakon što smo definirali Brownovo gibanje, možemo formalno definirati i vjerojatnosni prostor kojim opisujemo tržište u neprekidnom vremenu. Za skup  $\Omega$  uzimamo skup svih neprekidnih trajektorija  $\omega$  tako da je  $W_t(\omega) = \omega_t$ , odnosno  $\Omega = \mathcal{C}([0, \infty), \mathbf{R})$ .  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  neka sadrži sve skupove oblike  $\{\omega \in \Omega : |\omega(s)| < R, s \leq t\}$ , za  $R \in \mathbf{R}$  i  $t \in [0, \infty)$ , odnosno sljedeće događaje: apsolutna vrijednost realizacija Brownovog gibanja u svakom trenutku do trenutka  $t$  bila je manja od  $R$ , za proizvoljne  $R \in \mathbf{R}$  i  $t \in [0, \infty)$ . Vjerojatnost  $P$  definiramo pomoću funkcije distribucije slučajne varijable  $W_t$  iz Brownovog gibanja.

Kretanje cijena dionica na tom vjerojatnosnom prostoru modeliramo procesima koji zadovoljavaju sljedeći izraz:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \quad (1)$$

za neki odabir  $\mu(t, S_t)$  i  $\sigma(t, S_t)$ . Izraz (1) nazivamo **stohastička diferencijalna jednačba** (SDJ). Integriranjem dobivamo ekvivalentni zapis:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(s, S_s)ds + \int_0^t \sigma(s, S_s)dW_s. \quad (2)$$

Ovdje se pojavljuje integral u odnosu na trajektoriju Brownovog gibanja. Dovoljni uvjeti za postojanje tog integrala u Riemann-Stieltjesovom smislu su sljedeći:

1.  $\sigma$  i  $W$  nemaju prekide u istim točkama segmenta  $[0, t]$ .
2.  $\sigma$  je ograničene  $p$ -varijacije,  $W$  je ograničene  $q$ -varijacije i vrijedi  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ .

U propoziciji 1 pokazali smo kako Brownovo gibanje ima neograničenu 1-varijaciju, što znači da je  $q > 1$ . Tada je  $\frac{1}{q} < 1$  pa nejednakost  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  ne mora biti zadovoljena za sve  $p$ , odnosno nemamo osiguranu egzistenciju Riemann-Stieltjesovog integrala za svaku podintegralnu funkciju  $\sigma$ . Drugim riječima,  $\int_0^t \sigma(s, S_s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$  ne mora biti konačan ukoliko promatramo konvergenciju po točkama.

Zbog nezavisnosti i stacionarnosti prirasta Brownovog gibanja te svojstva  $E[W_t^2] = \text{Var}(W_t)$ , vrijedi sljedeća jednakost:

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^n \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^n \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})^2(t_i - t_{i-1})\right]. \quad (3)$$

Desna strana izraza konvergira prema  $E\left[\int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds\right]$  što je konačno uz pretpostavku  $E\left[\int_0^\infty \sigma(s, X_s)^2 ds\right] < \infty$ . Iz toga razloga, stohastički integral definiramo na način

$$\int_0^t \sigma(s, S_s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}), \quad (4)$$

gdje limes promatramo u srednje kvadratnom smislu.

Važno je vrijednosti podintegralne funkcije promatrati u lijevom rubu subdivizije  $[t_{i-1}, t_i]$  kako bi imali osiguranu nezavisnost u jednakosti (3). Za takav odabir vrijednosti podintegralne funkcije, stohastički integral (4) nazivamo **Itôv stohastički integral**.

Itôv stohastički integral rješavamo korištenjem sljedećeg teorema.

**Teorem 1.** (*Itôva formula*)

Neka je  $f(t, x)$  funkcija koja ima neprekidne parcijalne derivacije  $f_t, f_x, f_{xx}$  i neka je  $(W_t, t \geq 0)$  Brownovo gibanje. Tada za svaki  $T \geq 0$  vrijedi

$$f(T, W_T) = f(0, W_0) + \int_0^T f_t(t, W_t) dt + \int_0^T f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W_t) dt.$$

*Dokaz.* Neka je  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  subdivizija segmenta  $[0, T]$ . Vrijedi sljedeće:

$$f(T, W_T) - f(0, W_0) = \sum_{i=1}^n (f(t_i, W_{t_i}) - f(t_{i-1}, W_{t_{i-1}})).$$

Razvojem funkcije  $f(t_i, W_{t_i})$  u Taylorov red oko točke  $(t_{i-1}, W_{t_{i-1}})$  dobivamo.

$$\begin{aligned} f(T, W_T) - f(0, W_0) = \sum_{i=1}^n & \left[ f(t_{i-1}, W_{t_{i-1}}) + f_x(t_{i-1}, W_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) + \right. \\ & f_y(t_{i-1}, W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \frac{f_{xx}(t_{i-1}, W_{t_{i-1}})}{2}(t_i - t_{i-1})^2 + \\ & f_{xy}(t_{i-1}, W_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \\ & \left. \frac{f_{yy}(t_{i-1}, W_{t_{i-1}})}{2}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - f(t_{i-1}, W_{t_{i-1}}) + R \right], \end{aligned}$$

gdje  $R$  označava ostatak reda. Korištenjem sljedećih rezultata:

$$dt dt = 0, dt dW_t = 0, dW_t dt = 0, dW_t dW_t = dt,$$

iz gornjeg izraza dobivamo Itôvu formulu kada pustimo  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Prethodni teorem koristimo za računanje Itôvog integrala funkcije koja je transformacija Brownovog gibanja  $W_t$  i vremena  $t$ . Korisna će nam biti i Itôva formula za funkcije koje su transformacija cijene dionice  $S_t$  i vremena  $t$ .

**Propozicija 2.** *Uz pretpostavke prethodnog teorema, neka je  $(S_t, t \geq 0)$  slučajni proces koji zadovoljava SDJ (1). Tada za svaki  $T \geq 0$  vrijedi*

$$\begin{aligned} f(T, S_T) = f(0, S_0) &+ \int_0^T \left[ f_t(t, W_t) + \mu(t, W_t) f_x(t, W_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, W_t) f_{xx}(t, W_t) \right] dt \\ &+ \int_0^t \sigma(t, W_t) f_x(t, W_t) dW_t. \end{aligned}$$

*Dokaz.* Zamjenom  $dW_t$  sa  $dS_t$  u dokazu prethodnog teorema te uvrštavanjem  $dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$  dolazimo do navedene formule.  $\square$

Uvjeti za egzistenciju i jedinstvenost rješenja SDJ (1) dani su sljedećim teoremom.

**Teorem 2.** *U SDJ  $dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$ , neka su  $\mu(t, x)$  i  $\sigma(t, x)$  Lipschitz neprekidne u varijabli  $x$  te neka su uniformno neprekidne u varijabli  $t$ . Također, neka postoji konstanta  $C > 0$  takva da vrijedi  $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ , za svaki  $x \in \mathbf{R}, t \in [0, T]$ . Tada postoji jedinstveno rješenje te SDJ koje ima neprekidne trajektorije i za koje vrijedi  $E \left[ \int_0^\infty S_s^2 ds \right] < \infty$ .*

Iako znamo kada ona postoje, rješenja SDJ (1) često ne možemo eksplicitno izraziti. Primjer modela za koji znamo eksplicitno rješenje je Black-Scholes-Mertonov model.

### 1.3 Black-Scholes-Mertonov model

Black-Scholes-Mertonov (BSM) model za kretanje cijena dionica zadan je SDJ (1) uz odabir  $\mu(t, S_t) = \mu S_t$ ,  $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$ , gdje su  $\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0$  konstante. Dakle, jednadžba BSM modela izgleda ovako:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (5)$$

Ukoliko u gornjoj jednadžbi diferencijale zamijenimo diferencijama, dobivamo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} S_{t+dt} - S_t &= \mu S_t(t + dt - t) + \sigma S_t(W_{t+dt} - W_t) \\ \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma(W_{t+dt} - W_t). \end{aligned}$$

Kao što smo rekli u uvodu, lijeva strana jednakosti predstavlja relativni povrat dionice u trenutku  $t + dt$  u odnosu na trenutak  $t$ . Lako se pokaže kako je  $E\left[\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}\right] = \mu dt$  i

$\text{Var}\left(\frac{S_{t+dt}-S_t}{S_t}\right) = \sigma^2 dt$ . Uzmemo li  $dt = 1$ , zaključujemo kako parametar  $\mu$  predstavlja očekivani relativni povrat dionice na jediničnom intervalu, dok parametar  $\sigma$  predstavlja standardnu devijaciju relativnih povrata na jediničnom intervalu. Ta se veličina u literaturi naziva volatilnost i jedna je od najpopularnijih mjera rizika financijske imovine.

Često je korisno umjesto same cijene  $S_t$  promatrati njezin prirodni logaritam. Primjenom Itôve formule iz Propozicije 2 na funkciju  $f(t, x) = \ln x$  ( $f_t = 0, f_x = \frac{1}{x}, f_{xx} = -\frac{1}{x^2}$ ) te za  $\mu(t, S_t)$  i  $\sigma(t, S_t)$  iz BSM modela, dobivamo:

$$\begin{aligned}\ln S_t &= \ln S_0 + \int_0^t \left[ 0 + \frac{\mu S_s}{S_s} - \frac{\sigma^2 S_s^2}{2S_s^2} \right] ds + \int_0^t \frac{\sigma S_s}{S_s} dW_s \\ \ln S_t &= \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dW_s \\ \ln S_t &= \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t.\end{aligned}$$

Slijedi, cijena dionice u trenutku  $t$  u BSM modelu dana je izrazom

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}. \quad (6)$$

Cijena dionice u trenutku  $t$  eksponencijalna je transformacija Brownovog gibanja koju nazivamo geometrijsko Brownovo gibanje. Kako je  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , uz  $S_0 = 1$ , slijedi  $S_t \sim \text{LogN}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)$ . Jednostavniju distribuciju ima  $\ln S_t \sim \mathcal{N}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)$ .

## 1.4 Vjerojatnost neutralna na rizik

Vratimo se sada na određivanje vrijednosti premije izvedenica na financijskom tržištu. Uz dionice i izvedenice, pretpostavljamo kako investitor može ulagati i u nerizičnu financijsku imovinu uz intenzitet kamate  $r$ . Poštenu premiju za neku izvedenicu dobivamo tako da njezinu očekivanu vrijednost u trenutku dospijea diskontiramo na sadašnji trenutak uz intenzitet kamate  $r$ . Na taj način investitor će očekivano jednako zaraditi kupnjom izvedenice ili ulaganjem iznosa premije u nerizičnu financijsku imovinu. Ako bi diskontirali po intenzitetu kamate  $r' < r$ , kupac izvedenice očekivano bi bio na gubitku u odnosu na ulaganje u nerizičnu financijsku imovinu, dok bi za  $r' > r$  prodavatelju izvedenice očekivano bilo isplativije zaduživati se u nerizičnoj financijskoj imovini.

Kao što smo rekli u uvodu, vrijednost izvedenice  $f(S_t)$  u trenutku  $t$  željeli bi odrediti na sljedeći način:

$$C_t = E[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t].$$

Problem u gornjem izrazu je to što  $E[e^{-r(T-t)} S_T | \mathcal{F}_t]$  ne mora biti jednako  $S_t$ , odnosno  $E[e^{-rT} S_T | \mathcal{F}_t]$  ne mora biti jednako  $e^{-rt} S_t$ . To je zato što cijenu dionice  $S_T$  diskontiramo u odnosu na intenzitet kamate  $r$ , ali intenzitet povrata dionice na intervalu  $[t, T]$  ne mora biti  $r$ . Drugim riječima, proces  $(\tilde{S}_t, t \geq 0) = (e^{-rt} S_t, t \geq 0)$  nije martingal. Prisjetimo se definicije:

**Definicija 7.** *Slučajni proces  $(X_t, t \geq 0)$  je martingal u neprekidnom vremenu s obzirom na filtraciju  $\mathbf{F} = (F_t, t \geq 0)$  ako vrijedi:*

1.  $E[|X_t|] < \infty$ .
2.  $(X_t, t \geq 0)$  je  $\mathbf{F}$ -adaptiran, odnosno  $\sigma(X_t) \subset F_t$ , za svaki  $t \geq 0$ .
3.  $E[X_t|F_s] = X_s$ , za svaki  $s \in [0, t)$ .

Iz svojstva 3 prethodne definicije slijedi  $E[X_t - X_s|F_s] = 0$ , odnosno očekivani prirast martingala na  $[s, t]$  uz poznate informacije do trenutka  $s$  iznosi 0. U BSM modelu, primjerice, primjenom Itôve formule iz Propozicije 2 na funkciju  $f(t, x) = e^{-rt}x$  ( $f(t, S_t) = \tilde{S}_t$ ) dobivamo

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \int_0^t [-e^{-rt}rS_t + \mu S_t e^{-rt}] dt + \int_0^t \sigma S_t e^{-rt} dW_t,$$

odnosno u diferencijalnom obliku

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t. \quad (7)$$

Ukoliko je  $\mu \neq r$ , očekivani prirast procesa diskontiranih cijena u gornjoj jednadžbi neće biti jednak 0 pa stoga proces  $(\tilde{S}_t, t \geq 0)$  nije martingal u odnosu na objektivnu vjerojatnost  $P$ . Ideja je definirati novu vjerojatnost na  $(\Omega, \mathcal{F})$  u odnosu na koju će očekivani intenzitet povrata dionice biti  $r$ .

**Definicija 8.** Vjerojatnost  $P^*$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  je neutralna na rizik ako je s obzirom na nju proces diskontiranih cijena  $(\tilde{S}_t, t \geq 0)$  martingal s obzirom na filtraciju  $\mathbf{F}$ .

Vjerojatnost  $P^*$  ekvivalentna je vjerojatnosti  $P$ , odnosno vrijedi  $P^*(A) = 0 \iff P(A) = 0$ ,  $A \in \mathcal{F}$ . Uvođenjem vjerojatnosti  $P^*$  mijenjamo distribuciju od  $W_t$ , a time i  $S_t$ , tako da je intenzitet povrata dionice sada  $r$ . Tu novu distribuciju koristimo za računanje iznosa premije izvedenica.

Zamjenu vjerojatnosti provodimo koristeći sljedeći teorem.

**Teorem 3.** (Girsanovljev teorem) Neka je  $(W_t, t \geq 0)$  Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\mathbf{F}$  njegova prirodna filtracija i  $\theta$   $\mathbf{F}$ -adaptiran proces za koji vrijedi

$$E[e^{-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds}] = 1.$$

Tada je  $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$  Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ , gdje je vjerojatnost  $P^*$  definirana sa  $\frac{dP^*}{dP} = e^{-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds}$ , odnosno  $P^*(A) = E[e^{-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds}]$ ,  $A \in \mathcal{F}$ .

Girsanovljev teorem vrijedi i u općenitom slučaju kada je  $(W_t, t \geq 0)$   $n$ -dimenzionalno Brownovo gibanje i  $\theta$   $n$ -dimenzionalan proces.

Vrijednost izvedenice u trenutku  $t$  računamo na sljedeći način:

$$C_t = E^*[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t], \quad (8)$$

gdje je  $E^*$  očekivanje s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik  $P^*$ . Cijenu dionice  $S_T$  prvo ćemo izraziti s obzirom na vjerojatnost  $P^*$ . Iz izraza (7) slijedi

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t \left( dW_t + \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) dt \right)$$

pa primjenom Teorema 3 za  $\theta = \frac{\mu-r}{\sigma}$  slijedi da je  $W_t^* = W_t + \theta t$  Brownovo gibanje s obzirom na vjerojatnost  $P^*$  i

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t^*.$$

Iz gornjeg izraza slijedi kako je s obzirom na vjerojatnost  $P^*$ , očekivani prirast procesa  $(\tilde{S}_t, t \geq 0)$  jednak 0 pa je  $(\tilde{S}_t, t \geq 0)$  martingal s obzirom na vjerojatnost  $P^*$  i  $P^*$  je vjerojatnost neutralna na rizik.

Uvrštavanjem  $W_t = W_t^* - \theta t$  u jednadžbu BSM modela (5) dobivamo jednadžbu BSM modela s obzirom na vjerojatnost  $P^*$ :

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t (dW_t^* - \theta dt) \\ dS_t &= (\mu - \sigma\theta) S_t dt + \sigma S_t dW_t^* \\ dS_t &= r S_t dt + \sigma S_t dW_t^*. \end{aligned}$$

Uočimo kako je jedina razlika u odnosu na jednadžbu modela s obzirom na vjerojatnost  $P$  ta što je parametar  $\mu$  zamijenjen sa  $r$  ( $W_t^*$  je standardno Brownovo gibanje s obzirom na vjerojatnost  $P^*$  kao što je i  $W_t$  s obzirom na vjerojatnost  $P$ ). Stoga je i rješenje te jednadžbe analogno rješenju (6):

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^*}. \quad (9)$$

Sada možemo odrediti vrijednost ECO i EPO u okviru ovog modela.

## 1.5 Black-Scholes-Mertonova formula

U formulu (8) uvrštavamo  $f(x) = (x - K)_+$ ,  $S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^*}$  i računamo

$$\begin{aligned} C_t^{CALL} &= E^*[e^{-r(T-t)}(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^*} - K)_+ | \mathcal{F}_t] \\ &= E^*[e^{-r(T-t)}(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t+t) + \sigma(W_T^* - W_t^* + W_t^*)} - K)_+ | \mathcal{F}_t] \\ &= E^*[e^{-r(T-t)}(S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*)} - K)_+ | \mathcal{F}_t] \\ &= E^*[(S_t e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*)} - e^{-r(T-t)}K)_+ | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

$\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_t$  sadrži sve informacije o kretanje cijene dionice do trenutka  $t$  pa pretpostavimo da je  $S_t = x$  i primijenimo teorem o supstituciji za uvjetno očekivanje.

$$\begin{aligned} C_t^{CALL} &= E^*[(x e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*)} - e^{-r(T-t)}K)_+] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma y} - e^{-r(T-t)}K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg integrala dolazimo do poznate Black-Scholes-Mertonove formule za vrijednost ECO:

$$C_t^{CALL} = S_t \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right), \quad (10)$$

gdje je  $d_1 = \frac{1}{\sigma}(\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))$ ,  $d_2 = \frac{1}{\sigma}(\ln(\frac{S_t}{K}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))$ , a  $\Phi$  funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable. Vrijednost premije ECO dobivamo uvrštavanjem  $t = 0$  u (10).

Black-Scholes-Mertonovu formulu za EPO možemo dobiti na analogan način iz formule (8), a možemo i iskoristiti jednakost koja se naziva Call-put paritet. Za ECO i EPO s istim trenutkom dspijećā  $T$  i cijenom izvršenja  $K$  vrijedi:

$$\begin{aligned} C_T^{CALL} - C_T^{PUT} &= (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ \\ &= \begin{cases} S_T - K & , S_T > K \\ 0 & , S_T \leq K \end{cases} - \begin{cases} 0 & , S_T > K \\ K - S_T & , S_T \leq K \end{cases} \\ &= S_T - K. \end{aligned}$$

Korištenjem gornje jednakosti, slijedi

$$C_t^{CALL} - C_t^{PUT} = E^*[e^{-r(T-t)}(C_T^{CALL} - C_T^{PUT})|\mathcal{F}_t] = E^*[e^{-r(T-t)}(S_T - K)|\mathcal{F}_t] = S_t - e^{-r(T-t)}K.$$

Uvrštavanjem  $C_t^{CALL}$  u gornju formulu, dobivamo Black-Scholes-Mertonovu jednadžbu za vrijednost EPO:

$$C_t^{PUT} = Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{-d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t\Phi\left(\frac{-d_1}{\sqrt{T-t}}\right).$$

gdje je, kao i ranije,  $d_1 = \frac{1}{\sigma}(\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t))$ ,  $d_2 = \frac{1}{\sigma}(\ln(\frac{S_t}{K}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t))$ ,  $\Phi$  funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable.



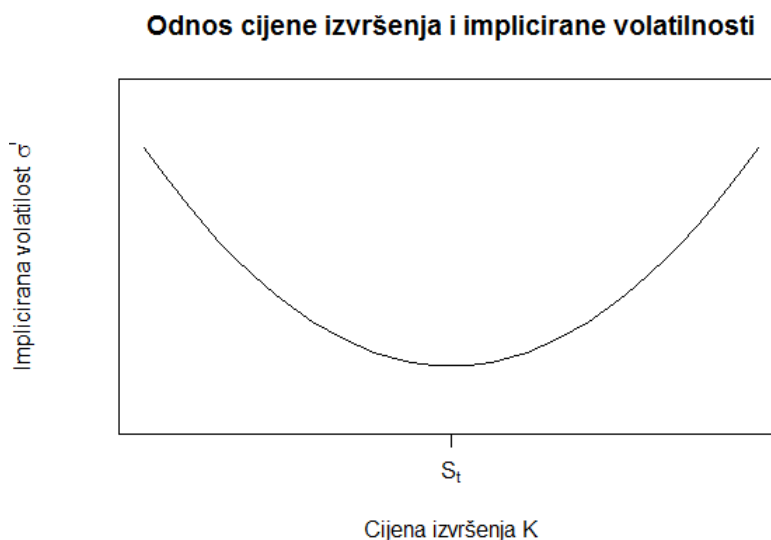
## 2 Hestonov model

BSM model daje eksplicitnu formulu za cijenu dionice i vrijednost Europskih opcija te se zbog toga i dalje često upotrebljava. Međutim, model ima svoja ograničenja i svojstva koja nisu empirijski podržana. Primjerice, log-povrati cijena, definirani kao  $\ln S_t - \ln S_{t-1}$ , normalno su distribuirani prema modelu iako u praksi to često nije slučaj.

Veliko ograničenje BSM modela je pretpostavljena konstantna volatilitet  $\sigma$  na jediničnom intervalu. Intuitivno, razumno je pretpostaviti veću volatilitet dionice tijekom razdoblja nesigurnosti na cijelom tržištu ili u razdoblju velikog proširenja kompanije, a manju u "mirnijim" razdobljima. Konstantna volatilitet stvara problem i kod vrednovanja Europskih opcija.

### 2.1 Implicirana volatilitet

Promotrimo Europske opcije sa istim trenutkom dospeljeća  $T$ , ali različitim cijenama izvršenja  $K$ . Implicirana volatilitet  $\sigma^I$  predstavlja vrijednost parametra  $\sigma$  za koju je vrijednost opcije predviđena BSM modelom jednaka stvarnoj cijeni te opcije na tržištu (uz konstantan parametar  $r$ ). Prikažimo grafički vezu između cijene izvršenja  $K$  i implicirane volatiliteti  $\sigma^I$ . Kada bi BSM model savršeno predviđao vrijednost opcije, imali bi pravac paralelan sa  $x$ -osi, odnosno trebalo bi biti  $\sigma^I = \sigma$ , za svaki  $K$ . Međutim, pokazuje se kako krivulja ima oblik smiješka, kao na slici 2.



Ova se pojava naziva smiješak volatiliteti (volatility smile). Najmanja implicirana volatilitet pojavljuje se kod opcija čija je cijena izvršenja blizu trenutne cijene dionice (at-the-money). Što je cijena izvršenja udaljenija od trenutne cijene, implicirana volatilitet je veća, što znači kako je stvarna vrijednost opcije veća od vrijednosti predviđene modelom uz

at-the-money volatilitnost. Razlog tome je što su veliki skokovi u cijenama dionica u stvarnosti češći nego što je to predviđeno modelom. Zbog toga se plaća dodatna premija na takve opcije jer se one češće mogu iskoristiti nego što je očekivano.

## 2.2 Modeli stohastičke volatilitnosti

Kako bi se bolje procijenila vrijednost opcije potrebno je konstruirati model u kojem volatilitnost  $\sigma$  neće biti konstantna. Jedno moguće rješenje je volatilitnost modelirati determinističkom pozitivnom funkcijom  $f(t, x)$  čije vrijednosti dobivamo uvrštavanjem trenutka  $t$  i realizirane cijene dionice  $S_t$ . Ovdje se javlja problem ukoliko  $\sigma$  ovisi samo o  $t$  jer je tada, u nekom fiksnom trenutku  $t$ ,  $\sigma$  konstantna pa i dalje nemamo smiješak volatilitnosti za opcije za različitim cijenom izvršenja. S druge strane, ukoliko  $\sigma$  ovisi o  $S_t$ ,  $\sigma$  i  $S_t$  će biti korelirane sa koeficijentom korelacije 1 ili  $-1$ . Ukoliko znamo trenutnu cijenu dionice, možemo odrediti i točnu volatilitnost cijene na idućem vremenskom intervalu te znamo koliko je vjerojatna velika ili mala promjena cijene. Primjerice, za  $f(t, x) = x^{-0.02}$  i realizaciju  $S_t = 100$ , slijedi kako će volatilitnost dionice na idućem vremenskom intervalu biti 0.91201. Ukoliko je trenutna volatilitnost dionice primjerice  $\sigma = 0.9$ , znamo kako je trenutna cijena dionice  $f^{-1}(\sigma) = \exp(\frac{\ln \sigma}{-0.02}) = 194.03$ .

Empirijski je pokazano kako je korelacija između cijene dionice  $S_t$  i volatilitnosti  $\sigma$  uglavnom negativna. Velika volatilitnost češće povlači pad cijene dionice dok kod male volatilitnosti cijena uglavnom raste. Međutim, između  $S_t$  i  $\sigma$  ne mora postojati savršena negativna korelacija. Slično kao i cijena dionice u odnosu na nerizičnu financijsku imovinu, i sama volatilitnost dionice u svakom trenutku ima određeni nepoznati šok. Iz toga razloga, volatilitnost dionice također modeliramo stohastičkom diferencijalnom jednadžbom. Takve modele nazivamo modeli stohastičke volatilitnosti i općenito su oblika:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu(t, S_t)dt + f(V_t)S_t dW_t \\ dV_t &= \alpha(V_t)dt + \beta(V_t)d\tilde{W}_t, \end{aligned}$$

za neke funkcije  $\mu : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \beta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+, f$  glatka, pozitivna i rastuća funkcija i  $W_t, \tilde{W}_t$  Brownova gibanja.

Kao i ranije, uzet ćemo  $\mu(t, S_t) = \mu S_t$ , gdje je  $\mu$  neka konstanta. Vezu između cijene dionice i volatilitnosti opisanu ranije uvodimo u model kao korelaciju prirasta Brownovih gibanja  $W_t$  i  $\tilde{W}_t$ , odnosno imamo

$$dW_t d\tilde{W}_t = \rho dt, \rho \in [-1, 1].$$

Kao što smo rekli,  $\rho$  će većinom biti negativan. Ako je, primjerice, realizacija od  $dW_t$  pozitivna, cijena dionice će rasti, ali zbog negativne korelacije je vjerojatnije kako će  $d\tilde{W}_t$  biti negativan, a to znači kako će volatilitnost dionice imati tendenciju pada.

Volatilitnost dionice modelirana je sa  $f(V_t)$ , za neku funkciju  $f$ . Najčešći izbori su  $f(x) = x$ , u kojem slučaju  $V_t$  predstavlja volatilitnost dionice u trenutku  $t$  i  $f(x) = \sqrt{x}$ , u kojem slučaju  $V_t$  predstavlja varijancu relativnih povrata dionice na jediničnom intervalu u trenutku  $t$ .

Proces  $V_t$  može se modelirati na razne načine različitim odabirima funkcija  $\alpha$  i  $\beta$ . Posebno

ćemo promotriti Cox-Ingersoll-Ross (CIR) proces kojeg dobivamo za  $\alpha(V_t) = \kappa(\bar{V} - V_t)$  i  $\beta(V_t) = \nu\sqrt{V_t}$ . Dakle, jednadžba CIR procesa glasi:

$$dV_t = \kappa(\bar{V} - V_t)dt + \nu\sqrt{V_t}d\tilde{W}_t,$$

gdje su  $\kappa, \bar{V}, \nu$  pozitivne konstante.

Izraz  $\kappa(\bar{V} - V_t)$  daje CIR procesu svojstvo povratka u očekivanje (mean reversion). Parametar  $\bar{V}$  predstavlja dugoročno očekivanje procesa  $V_t$  i ukoliko je, primjerice, trenutna vrijednost procesa  $V_t$  veća od  $\bar{V}$ ,  $\bar{V} - V_t$  će biti negativno i vjerojatniji je pad vrijednosti procesa u idućem trenutku. Parametar  $\kappa$  predstavlja brzinu povratka procesa u očekivanje. Za veće vrijednosti  $\kappa$ , vrijednosti procesa se brže vraćaju svome dugoročnom očekivanju  $\bar{V}$ . Svojstvo povratka u očekivanje volatilnosti dionice podržano je i empirijski. Volatilnost dionice obično je stabilna oko neke vrijednosti, a velike promjene u volatilnosti uglavnom su kratkotrajne. Parametar  $\nu$  predstavlja volatilnost procesa. Množenjem sa  $\sqrt{V_t}$  volatilnost postaje ovisna o trenutnoj vrijednosti procesa. Ako je trenutna vrijednost velika, volatilnost će također biti velika pa je vjerojatnija velika vrijednost procesa u idućem trenutku. Ovim svojstvom dobivamo vezu između volatilnosti dionice u dva uzastopna vremenska trenutka.

Kako procesom  $(V_t, t \geq 0)$  modeliramo varijancu, odnosno volatilnost dionice, potrebno je da su vrijednosti tog procesa uvijek pozitivne. Dovoljan uvjet za to daje sljedeća propozicija.

**Propozicija 3.** (*Fellerov uvjet*)

*Neka je  $(V_t, t \geq 0)$  CIR proces i neka je  $V_0 > 0$ . Ako vrijedi  $2\kappa\bar{V} \geq \nu^2$ , tada su vrijednosti tog procesa pozitivne gotovo sigurno.*

Intuitivno, Fellerov uvjet govori kako, za dovoljno mali  $\nu$  u odnosu na  $\kappa$  i  $\bar{V}$ , varijanca od  $d\tilde{W}_t$  će biti dovoljno mala pa negativne realizacije od  $d\tilde{W}_t$  gotovo sigurno neće biti veće (po apsolutnoj vrijednosti) od trenutne vrijednosti procesa uvećane za deterministički dio  $\kappa(\bar{V} - V_t)$ .

## 2.3 Jednadžba Hestonovog modela

Hestonov model je model stohastičke volatilnosti u kojem je  $f(V_t) = \sqrt{V_t}$ , a varijanca relativnih povrata dionice na jediničnom intervalu modelirana je CIR procesom. Dakle, jednadžba modela glasi:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t \\ dV_t &= \kappa(\bar{V} - V_t)dt + \nu\sqrt{V_t}d\tilde{W}_t \\ dW_t d\tilde{W}_t &= \rho dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Parametre modela interpretiramo kao i ranije:

- $\mu \in \mathbf{R}$  je očekivani povrat dionice na jediničnom intervalu.
- $\kappa > 0$  je brzina povratka u očekivanje procesa  $V_t$ .
- $\bar{V} > 0$  je dugoročno očekivanje procesa  $V_t$ .

- $\nu > 0$  je volatilitnost procesa  $V_t$ .
- $\rho \in [-1, 1]$  je koeficijent korelacije Brownovih gibanja  $W_t$  i  $\tilde{W}_t$ .

Kako bi se osigurala pozitivnost procesa  $(V_t, t \geq 0)$  parametri modela trebaju zadovoljavati Fellerov uvjet  $2\kappa\bar{V} \geq \nu^2$ .

Hestonov model zadan je dvodimenzionalnim stohastičkim procesom  $((S_t, V_t), t \geq 0)$ , a  $((W_t, \tilde{W}_t), t \geq 0)$  je dvodimenzionalno Brownovo gibanje. Kako bi odredili jednadžbu modela s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik, treba odrediti  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  iz Girsonovljevog teorema.

U SDJ kretanja cijena dionice želimo da je, kao i u BSM modelu, očekivani povrat dionice na jediničnom intervalu jednak  $r$ . Za  $\theta_1 = \frac{\mu-r}{\sqrt{V_t}}$ , primjenom Teorema 3 slijedi kako je  $W_t^* = W_t + \theta_1 t$  Brownovo gibanje s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik  $P^*$  i vrijedi

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t d(W_t^* - \theta_1 t) \\ dS_t &= (\mu - \theta_1 \sqrt{V_t}) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^* \\ dS_t &= r S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^*. \end{aligned}$$

Iz procesa varijance relativnog povrata dionice također treba na neki način ukloniti rizik. Stoga, postavljamo zahtjev  $E^*[dV_t] = (\kappa(\bar{V} - V_t) - \gamma V_t)dt$ . Parametar  $\gamma$  predstavlja premiju na rizik volatilitnosti. Gornjim zahtjevom od očekivane vrijednosti varijance dionice oduzimamo ili dodajemo onu vrijednost varijance koja je vezana uz rizik te dionice. Primjerice, ukoliko je očekivani povrat dionice  $\mu$  veći od  $r$ , više ljudi će trgovati tom dionicom pa će i očekivana varijanca biti veća. Kako je s obzirom na vjerojatnost  $P^*$  očekivani povrat dionice  $r$ , od očekivane varijance treba oduzeti onaj dio koji nastao zbog većeg očekivanoga povrata  $\mu$ .

Primjenom Teorema 3 za  $\theta_2 = \frac{\gamma\sqrt{V_t}}{\nu}$  slijedi kako je  $\tilde{W}_t^* = \tilde{W}_t + \theta_2 t$  Brownovo gibanje s obzirom na vjerojatnost  $P^*$  i

$$\begin{aligned} dV_t &= \kappa(\bar{V} - V_t)dt + \nu\sqrt{V_t}d\tilde{W}_t \\ dV_t &= \kappa(\bar{V} - V_t)dt + \nu\sqrt{V_t}d(\tilde{W}_t^* - \theta_2 t) \\ dV_t &= (\kappa\bar{V} - \kappa V_t - \nu\theta_2\sqrt{V_t})dt + \nu\sqrt{V_t}d\tilde{W}_t^* \\ dV_t &= (\kappa\bar{V} - \kappa V_t - \gamma V_t)dt + \nu\sqrt{V_t}d\tilde{W}_t^* \\ dV_t &= (\kappa + \gamma)\left(\frac{\kappa\bar{V}}{\kappa + \gamma} - V_t\right)dt + \nu\sqrt{V_t}d\tilde{W}_t^*. \end{aligned}$$

Uz oznake  $\kappa^* = \kappa + \gamma$ ,  $\bar{V}^* = \frac{\kappa\bar{V}}{\kappa + \gamma}$ , dobivamo jednadžbu varijance relativnih povrata dionice s obzirom na vjerojatnost  $P^*$

$$dV_t = \kappa^*(\bar{V}^* - V_t)dt + \nu\sqrt{V_t}d\tilde{W}_t^*.$$

Korištenjem rezultata  $dt dt = 0$ ,  $dt dW_t = 0$ ,  $dW_t dt = 0$ , dobivamo

$$\begin{aligned} dW_t d\tilde{W}_t &= \rho dt \\ d(W_t^* - \theta_1 t) d(\tilde{W}_t^* - \theta_2 t) &= \rho dt \\ (dW_t^* - d\theta_1 t)(d\tilde{W}_t^* - d\theta_2 t) &= \rho dt \\ dW_t^* d\tilde{W}_t^* &= \rho dt. \end{aligned}$$

Slijedi, jednadžba Hestonovog modela s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik  $P^*$  glasi:

$$\begin{aligned} dS_t &= r S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^* \\ dV_t &= \kappa^* (\bar{V}^* - V_t) dt + \nu \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^* \\ dW_t^* d\tilde{W}_t^* &= \rho dt, \end{aligned}$$

gdje je  $\kappa^* = \kappa + \gamma$ ,  $\bar{V}^* = \frac{\kappa \bar{V}}{\kappa + \gamma}$ ,  $W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} t$ ,  $\tilde{W}_t^* = \tilde{W}_t + \frac{\gamma \sqrt{V_t}}{\nu} t$ .

Jednadžba Hestonovog modela s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik  $P^*$  istog je oblika kao i jednadžba s obzirom na objektivnu vjerojatnost  $P$ . Veza između parametara te dvije jednadžbe je nemjerljivi parametar  $\gamma$ , što znači da, ako znamo parametre pod jednom vjerojatnosti, ne možemo pomoću njih odrediti parametre u odnosu na drugu vjerojatnost. Ukoliko znamo parametre s obzirom na objektivnu vjerojatnost  $P$ , model možemo koristiti za simulaciju budućih kretanja cijena dionice dok uz poznavanje parametara s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik  $P^*$  modelom možemo procijeniti vrijednost Europskih opcija. Odredimo još i jednadžbu modela za proces logaritmiranih cijena. Primjenom Itôve formule 2 za funkciju  $f(t, x) = \ln x$ , slijedi

$$\ln S_t = \ln S_0 + \int_0^t \left(r - \frac{V_s}{2}\right) ds + \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^*,$$

odnosno, jednadžba modela u odnosu na vjerojatnost  $P^*$  glasi

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(r - \frac{V_t}{2}\right) dt + \sqrt{V_t} dW_t^* \\ dV_t &= \kappa^* (\bar{V}^* - V_t) dt + \nu \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^* \\ dW_t^* d\tilde{W}_t^* &= \rho dt, \end{aligned}$$

gdje je  $X_t = \ln S_t$ .

## 2.4 Određivanje premije Europskih opcija unutar Hestonovog modela

Premija ECO sa cijenom izvršenja  $K$  i trenutkom dospijeca  $T$  je vrijednost te opcije u trenutku  $t = 0$ , odnosno

$$C_0^{CALL} = E^*[e^{-rT}(S_T - K)_+].$$

Hestonov model na daje eksplicitnu formulu za vrijednost dionice  $S_t$  što predstavlja problem pri računanju premije. Zato će nam biti potrebne karakteristične funkcije.

**Definicija 9.** Karakteristična funkcija slučajne varijable  $X$  na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je funkcija  $\varphi_X : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  definirana izrazom:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF_X(x) = E[e^{itX}].$$

Veza između karakteristične funkcije i funkcije distribucije slučajne varijable dana je sljedećim teoremom:

**Teorem 4.** Neka je  $X$  slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\varphi$  njezina karakteristična funkcija i  $F$  njezina funkcija distribucije. Tada vrijedi

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iwx} \varphi(w)}{iw} \right] dw.$$

*Dokaz.* Definiramo

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{iwx} \varphi(-w) - e^{-iwx} \varphi(w)}{iw} dw.$$

Uvrštavanjem izraza za karakterističnu funkciju iz definicije dobivamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{e^{iwx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} dF(z) - e^{-iwx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} dF(z)}{iw} dw \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(x-z)} - e^{-iw(x-z)}}{iw} dF(z) dw. \end{aligned}$$

Iskoristimo Fubinijev teorem te Eulerovu formulu  $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  za  $\theta = w(x - z)$  ( $\frac{e^{iw(x-z)} - e^{-iw(x-z)}}{i} = 2 \sin(w(x - z))$ )

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin(w(x - z))}{w} dw dF(z).$$

Vrijedi  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\theta t)}{t} dt = \frac{\pi \operatorname{sign}(\theta)}{2}$  pa za  $\theta = x - z$  imamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi \operatorname{sign}(x - z) dF(z) = \pi \left( \int_{-\infty}^x \operatorname{sign}(x - z) dF(z) + \int_x^{\infty} \operatorname{sign}(x - z) dF(z) \right) \\ &= \pi \left( \lim_{n \rightarrow -\infty} (F(x) - F(n)) - \lim_{n \rightarrow \infty} (F(n) - F(x)) \right) = \pi (F(x) - (1 - F(x))) \\ &= \pi (2F(x) - 1). \end{aligned}$$

Iz gornjeg izraza slijedi

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{iwx} \varphi(-w) - e^{-iwx} \varphi(w)}{iw} dw \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\frac{e^{-iwx} \varphi(w)}{iw} - \frac{e^{iwx} \varphi(-w)}{iw}}{2} dw. \end{aligned}$$

Označimo  $g(w) = \frac{e^{-iwx} \varphi(w)}{iw}$  i primijetimo kako je, zbog svojstva karakteristične funkcije  $\bar{\varphi}(w) = \varphi(-w)$ ,  $\bar{g}(w) = -\frac{e^{iwx} \varphi(-w)}{iw}$ . Sada  $F(x)$  možemo zapisati

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(w) + \bar{g}(w)}{2} dw.$$

Za svaku funkciju  $g$  vrijedi  $\frac{g(x)+\bar{g}(x)}{2} = \text{Re}[g(x)]$ . Stoga, dobivamo izraz za  $F(x)$ :

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[ \frac{e^{-iwx} \varphi(w)}{iw} \right] dw.$$

□

Sada možemo odrediti formulu za računanje premije ECO. Uvodimo slučajnu varijablu  $X = \ln S_T$  te neka je  $f$  njezina funkcija gustoće,  $F$  funkcija distribucije i  $\varphi$  karakteristična funkcija.

$$\begin{aligned} C_0^{CALL} &= e^{-rT} E^*[(e^X - K)_+] = e^{-rT} \int_{\ln K}^\infty (e^x - K) f(x) dx \\ &= e^{-rT} \int_{\ln K}^\infty e^x f(x) dx - e^{-rT} K \int_{\ln K}^\infty f(x) dx \\ &= e^{-rT} I_1 - e^{-rT} K I_2. \end{aligned}$$

Računamo integral  $I_1$  tako da ga pomnožimo i podijelimo sa  $\int_{-\infty}^\infty e^x f(x) dx$ . Uočimo kako je  $\int_{-\infty}^\infty e^x f(x) dx = E^*[e^X] = E^*[S_T] = e^{rT} S_0$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\ln K}^\infty e^x f(x) dx = \frac{\int_{\ln K}^\infty e^x f(x) dx}{\int_{-\infty}^\infty e^x f(x) dx} \int_{-\infty}^\infty e^x f(x) dx = \frac{\int_{\ln K}^\infty e^x f(x) dx}{\int_{-\infty}^\infty e^x f(x) dx} e^{rT} S_0 \\ &= e^{rT} S_0 \int_{\ln K}^\infty \frac{e^x f(x)}{\int_{-\infty}^\infty e^x f(x) dx} dx = e^{rT} S_0 \int_{\ln K}^\infty f^*(x) dx = e^{rT} S_0 \left( 1 - \int_{-\infty}^{\ln K} f^*(x) dx \right). \end{aligned}$$

$f^*$  je normirana pa su njezine vrijednosti su između 0 i 1 i vrijedi  $\int_{-\infty}^\infty f^*(x) dx = 1$ . Stoga,  $f^*$  možemo shvatiti kao funkciju gustoće neke slučajne varijable te možemo odrediti njezinu karakterističnu funkciju  $\varphi^*$ :

$$\begin{aligned} \varphi^*(w) &= \int_{-\infty}^\infty e^{iwx} f^*(x) dx = \int_{-\infty}^\infty e^{iwx} \frac{e^x f(x)}{\int_{-\infty}^\infty e^x f(x) dx} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix(w-i)} f(x)}{\int_{-\infty}^\infty e^{ix(-i)} f(x) dx} dx = \frac{\varphi(w-i)}{\varphi(-i)}. \end{aligned}$$

Koristeći Teorem 4, slijedi  $\int_{-\infty}^{\ln K} f^*(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[ \frac{e^{-iw \ln K} \varphi(w-i)}{iw \varphi(-i)} \right] dw$  i dobivamo

$$I_1 = e^{rT} S_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[ \frac{e^{-iw \ln K} \varphi(w-i)}{iw \varphi(-i)} \right] dw \right).$$

Teorem 4 koristimo i za računanje integrala  $I_2$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\ln K}^\infty f(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{\ln K} f(x) dx = 1 - F(\ln K) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[ \frac{e^{-iw \ln K} \varphi(w)}{iw} \right] dw. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem  $I_1$  i  $I_2$  u izraz za  $C_0^{CALL}$  dobivamo

$$C_0^{CALL} = S_0 \Pi_1 - e^{-rT} K \Pi_2, \quad (12)$$

gdje su  $\Pi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iw \ln K} \varphi(w-i)}{iw \varphi(-i)} \right] dw$ ,  $\Pi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iw \ln K} \varphi(w)}{iw} \right] dw$ .

Premiju za EPO dobivamo korištenjem Call-put pariteta:

$$C_0^{PUT} = e^{-rT} K - S_0 + C_0^{CALL}.$$

Izraz (12) možemo koristiti za određivanje premije ECO uz bilo koji proces cijena  $(S_t, t \geq 0)$ .

Potrebno je jedino poznavati karakterističnu funkciju  $\varphi$  procesa  $X_t = \ln S_t$ .

U Hestonovom modelu, karakteristična funkcija od  $X_t$  je sljedećeg oblika, prema [2]:

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= e^{C(t,w)\bar{V}^* + D(t,w)V_0 + iw \ln(S_0 e^{rt})} \\ C(t,w) &= \kappa^* \left[ r^- t - \frac{2}{\nu^2} \ln \left( \frac{1 - g e^{-ht}}{1 - g} \right) \right] \\ D(t,w) &= r^- \frac{1 - e^{-ht}}{1 - g e^{-ht}} \\ r^- &= \frac{\beta - h}{\nu^2} \\ r^+ &= \frac{\beta + h}{\nu^2} \\ h &= \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\nu^2} \\ g &= \frac{r^-}{r^+} \\ \alpha &= -\frac{w^2 + iw}{2} \\ \beta &= \kappa^* - \rho\nu iw. \end{aligned}$$

Preostaje još samo na neki način odabrati parametre modela s obzirom na vjerojatnost  $P^*$ ,  $\kappa^*$ ,  $\bar{V}^*$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  i početnu varijancu  $V_0$ . Tada možemo, uz poznatu početnu cijenu  $S_0$  i bezrizičnu kamatnu stopu  $r$ , odrediti karakterističnu funkciju  $\varphi$  logaritmiranog procesa cijena pomoću gornjeg izraza. Nakon što odredimo karakterističnu funkciju, uvrštavanjem u (12) dobivamo procjenu iznosa premije ECO unutar Hestonovog modela.



### 3 Numerička implementacija

U ovome ćemo poglavlju implementirati iskazane rezultate o Hestonovom modelu te ih primijeniti na stvarne podatke. Za implementaciju ćemo koristiti metode koje ćemo teorijski obraditi. Implementaciju provodimo u računalnom programu R.

#### 3.1 Simulacija trajektorije Hestonovog modela

Pretpostavimo kako znamo sve vrijednosti parametara Hestonovog modela. Na temelju tih parametara želimo procijeniti buduća kretanja cijena i varijance neke dionice. Trajektorije tih procesa dane su jednadžbom (11) čiji ekvivalentni zapis u integralnom obliku glasi:

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta t} &= S_t + \int_t^{t+\Delta t} \mu S_s ds + \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{V_s} S_s dW_s \\ V_{t+\Delta t} &= V_t + \int_t^{t+\Delta t} \kappa(\bar{V} - V_s) ds + \int_t^{t+\Delta t} \nu \sqrt{V_s} d\tilde{W}_s \\ dW_t d\tilde{W}_t &= \rho dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Problem se javlja zato što su  $(S_t, t \geq 0)$  i  $(V_t, t \geq 0)$  procesi u neprekidnom vremenu pa bi za direktnu implementaciju bilo potrebno izračunati vrijednosti tih procesa u beskonačno mnogo točaka. Stoga se vrijednosti procesa aproksimiraju nekom numeričkom metodom. U ovom ćemo radu predstaviti Eulerovu metodu.

Neka je  $[0, T]$  vremenski interval na kojem želimo simulirati trajektorije Hestonovog modela. Kako bi mogli provesti Eulerovu metodu, potrebno je diskretizirati interval  $[0, T]$ . Neka su  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  točke ekvidistantne subdivizije intervala  $[0, T]$  i neka je dijametar te subdivizije jednak  $\Delta t$ . Vrijednosti procesa cijena i varijance sada promatramo samo u točkama  $t_1, \dots, t_n$ . Što je  $n$  veći, vrijednosti procesa promatramo u više točaka i aproksimacija je bliža stvarnoj trajektoriji.

Nakon diskretizacije, vrijednosti procesa iz jednadžbe (13) aproksimiramo Eulerovom metodom tako da uzmemo vrijednost podintegralnih funkcija u lijevom rubu integrala. Koristeći svojstvo Brownovog gibanja  $W_{t+\Delta t} - W_t \sim \sqrt{\Delta t}Z$ , gdje je  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , slijedi

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \mu S_s ds &\approx \mu S_t \int_t^{t+\Delta t} ds = \mu S_t \Delta t, \\ \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{V_s} S_s dW_s &\approx \sqrt{V_t} S_t \int_t^{t+\Delta t} dW_s = \sqrt{V_t \Delta t} S_t Z, \\ \int_t^{t+\Delta t} \kappa(\bar{V} - V_s) ds &\approx \kappa(\bar{V} - V_t) \int_t^{t+\Delta t} ds = \kappa(\bar{V} - V_t) \Delta t, \\ \int_t^{t+\Delta t} \nu \sqrt{V_s} d\tilde{W}_s &\approx \nu \sqrt{V_t} \int_t^{t+\Delta t} d\tilde{W}_s = \nu \sqrt{V_t \Delta t} \tilde{Z}. \end{aligned}$$

Aproksimacija jednadžbe (13) u odabranim točkama  $t_1, \dots, t_n$  Eulerovom metodom glasi

$$\begin{aligned} S_{t_{i+1}} &\approx S_{t_i} + \mu S_{t_i} \Delta t + \sqrt{V_{t_i} \Delta t} S_{t_i} Z_{t_i} \\ V_{t_{i+1}} &\approx V_{t_i} + \kappa(\bar{V} - V_{t_i}) \Delta t + \nu \sqrt{V_{t_i} \Delta t} \tilde{Z}_{t_i}, \end{aligned} \quad (14)$$

gdje su  $Z_{t_i}, \tilde{Z}_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  i korelirane sa koeficijentom korelacije  $\rho$ , za svaki  $i = 1, \dots, n$  te  $Z_{t_i}$  i  $Z_{t_j}$ , odnosno  $\tilde{Z}_{t_i}$  i  $\tilde{Z}_{t_j}$  nezavisne za  $i \neq j$ .

Korelaciju između  $Z_{t_i}$  i  $\tilde{Z}_{t_i}$  implementiramo koristeći sljedeći izraz:

$$Z_{t_i} = \rho \tilde{Z}_{t_i} + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{Z}_{t_i},$$

gdje je  $\bar{Z}_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  nezavisna od  $\tilde{Z}_{t_i}$ .

Aproksimacija procesa varijance može ponekad poprimiti negativne vrijednosti, pogotovo kada koeficijenti modela ne ispunjavaju Fellerov uvjet iz Propozicije 3. Stoga, prije same implementacije Eulerove metode potrebno je napraviti dodatne modifikacije. Najjednostavnije rješenje je neke vrijednosti  $V_{t_i}$  zamijeniti sa, primjerice  $|V_{t_i}|$  ili  $\max(V_{t_i}, 0)$ , kao u [10]. Mi ćemo koristiti sljedeću modifikaciju Eulerove metode:

$$\begin{aligned} S_{t_{i+1}} &\approx S_{t_i} + \mu S_{t_i} \Delta t + \sqrt{V_{t_i}^+} \Delta t S_{t_i} Z_{t_i} \\ V_{t_{i+1}} &\approx V_{t_i} + \kappa(\bar{V} - V_{t_i}^+) \Delta t + \nu \sqrt{V_{t_i}^+} \Delta t \tilde{Z}_{t_i}, \end{aligned}$$

gdje je  $V_{t_i}^+ = \max(V_{t_i}, 0)$ .

Ukoliko je aproksimacija varijance u nekom trenutku  $t_i$  negativna, tada uz ovu modifikaciju dionicu u trenutku  $t_i$  promatramo kao nerizičnu financijsku imovinu s prirastom  $\mu \Delta t$ . Bez ove modifikacije, uz negativnu varijancu, negativne bi realizacije od  $Z_{t_i}$  pozitivno utjecale na  $S_{t_i}$ , odnosno negativne informacije o dionici bi povećavale njezinu vrijednost. Ipak, i dalje ne možemo očekivati dobre rezultate u slučajevima kada nije ispunjen Fellerov uvjet pa trajektorije nećemo simulirati u takvim uvjetima.

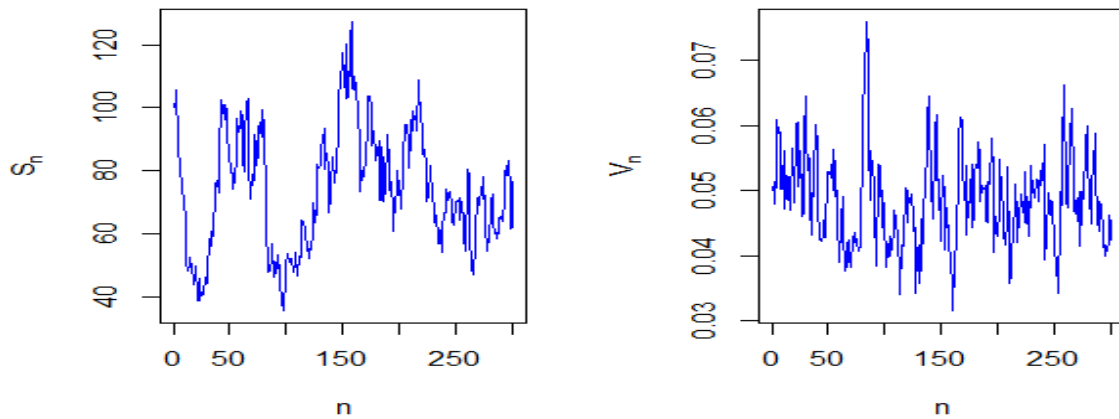
### 3.2 Grafička interpretacija parametara Hestonovog modela

Neka su dane sljedeće vrijednosti parametara Hestonovog modela:

$$S_0 = 100, V_0 = 0.05, \mu = 0.01, \kappa = 1, \bar{V} = 0.05, \nu = 0.05, \rho = -0.5.$$

Simulirajmo trajektorije cijene i varijance na vremenskom intervalu  $[0, 60]$ . Uzet ćemo 300 točaka subdivizije promatranog intervala. Dijametar subdivizije  $\Delta t$  tada iznosi  $\frac{60}{300} = 0.2$ . Ako jedan vremenski trenutak shvatimo kao dan, to znači da se u našoj aproksimaciji cijena i varijanca u jednom danu promjeni 5 puta. Odabirom većeg broja točaka subdivizije dolazimo bliže neprestanoj promjeni koja je opisana modelom, ali se i povećava vrijeme izvršenja algoritma.

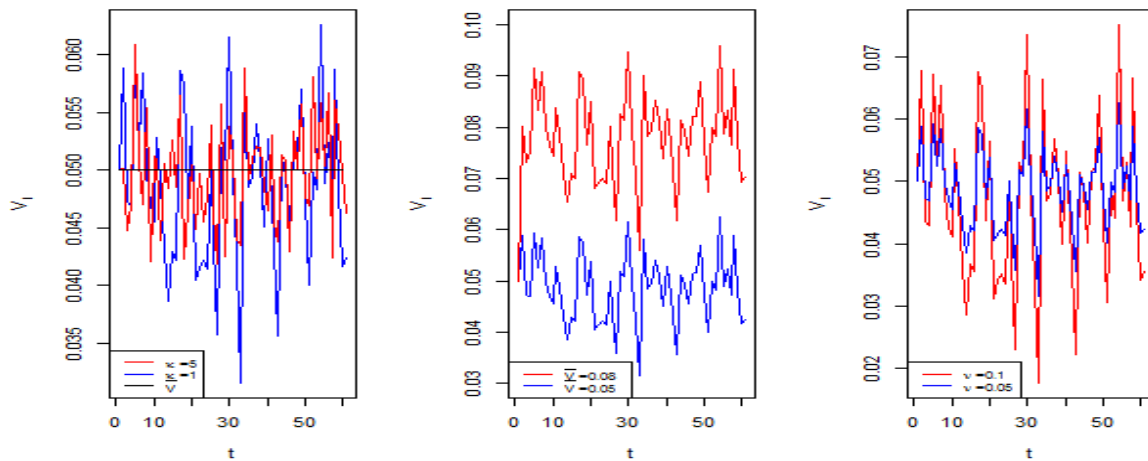
U svakoj simulaciji trajektorija potrebno je prvo simulirati realizacije dvije nezavisne standardne normalne slučajne varijable  $\tilde{Z}$  i  $\bar{Z}$  u svakoj točki subdivizije te odrediti vrijednosti za  $Z$ . To znači kako će svaka simulacija dati drugačiju trajektoriju. Primjer jedne trajektorije cijene i varijance dan je na sljedećoj slici.



Slika 3

Na slici možemo uočiti negativnu korelaciju između  $S_n$  i  $V_n$ : rast vrijednost jednog procesa obično je popraćena padom vrijednosti drugog procesa. Kako bi promotрили utjecaj pojedinog parametara, fiksirat ćemo *seed*, odnosno realizacije slučajnih varijabli  $\tilde{Z}$  i  $\bar{Z}$  te mijenjati jedan po jedan parametar, uz ostale fiksne kao što su zadani.

Utjecaj parametara  $\kappa$ ,  $\bar{V}$  i  $\nu$  na vrijednosti procesa varijance prikazan je na sljedećoj slici. Proces i dalje aproksimiramo sa 300 točaka subdivizije, ali njegove vrijednosti sada promatramo samo u trenucima  $1, 2, \dots, 60$ .

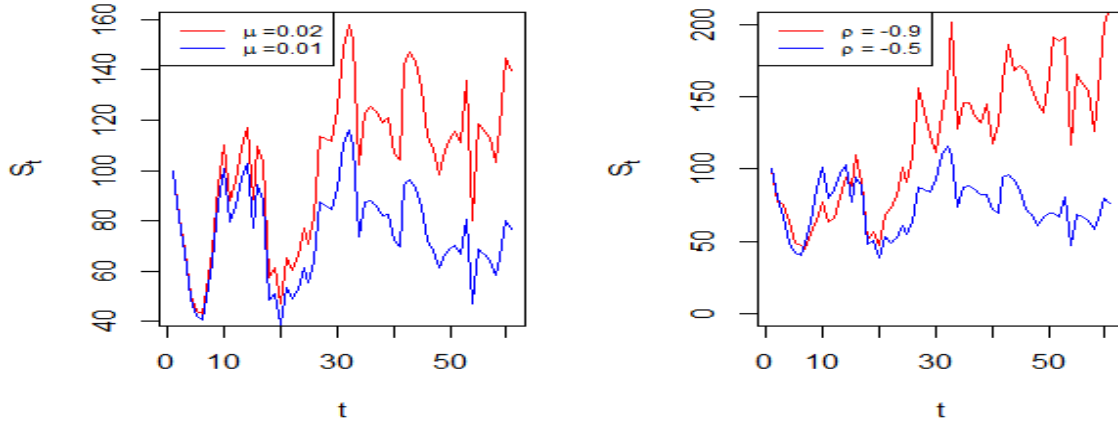


Slika 4

Na slici 4 prikazana je promjena u trajektoriji varijance kada, redom, mijenjamo parametar  $\kappa$  uz ostale parametre fiksne, mijenjamo parametar  $\bar{V}$  uz ostale parametra fiksne i mijenjamo parametar  $\nu$  uz ostale parametre fiksne. Najveći utjecaj na vrijednost procesa varijance ima parametar  $\bar{V}$  koji govori oko koje vrijednosti će se proces kretati. Parametar  $\nu$  označava jačinu kojom se proces udaljava od  $\bar{V}$ , dok parametar  $\kappa$  jačinu kojom se proces

vraća prema  $\bar{V}$ . Sva tri parametra također utječu i na proces cijene kroz  $V_n$ .

Na proces cijene direktno utječu parametri  $\mu$  i  $\rho$  kao što je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 5

Na slici 5 prikazana je promjena u trajektoriji cijene kada mijenjamo parametar  $\mu$ , uz ostale parametre fiksne, odnosno parametar  $\rho$ , uz ostale parametre fiksne. Parametar  $\mu$  predstavlja determinističku stopu rasta vrijednosti procesa koja ne ovisi o procesu varijance ili varijabli  $Z$ . Utjecaj parametra  $\rho$  vezan je uz realizaciju od  $\tilde{Z}$  i drugačiji je za svaku simulaciju.

### 3.3 Procjena parametara uz objektivnu vjerojatnost

Za simulaciju trajektorija cijene i varijance neke dionice potrebno je procijeniti parametre Hestonovog modela na temelju dosadašnjih kretanja cijene te dionice. Parametre treba procijeniti s obzirom na objektivnu vjerojatnost  $P$ . Procjenu radimo koristeći metodu maksimalne vjerodostojnosti.

**Definicija 10.** Neka je  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$  slučajan uzorak sa zajedničkom funkcijom gustoće  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \theta)$ , gdje je  $\theta \in \Theta$   $k$ -dimenzionalni vektor parametara modela i  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^m$ , za svaki  $i \in 1, \dots, n$ ,  $k, m \in \mathbf{N}$ . Funkciju  $L(\theta; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \theta)$  zovemo funkcija vjerodostojnosti modela za danu realizaciju  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ .

Metoda maksimalne vjerodostojnosti procjenjuje vektor parametara  $\theta$  na sljedeći način

$$\tilde{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n),$$

odnosno odabire onaj vektor parametara za koji su dane realizacije slučajnog uzorka najvjerojatnije. Ukoliko su  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  nezavisni i  $f_i$  funkcija gustoće od  $\mathbf{X}_i$ , tada je  $L(\theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}_i; \theta)$ . Često se umjesto funkcije  $L$  maksimizira funkcija

$$l(\theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \ln L(\theta | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Kako bi primijenili metodu maksimalne vjerodostojnosti na Hestonov model, promotrimo diskretizirani oblik (14) za  $\Delta t = 1$ :

$$\begin{aligned} S_{t+1} &\approx S_t + \mu S_t + \sqrt{V_t} S_t Z_t \\ V_{t+1} &\approx V_t + \kappa(\bar{V} - V_t) + \nu \sqrt{V_t} \tilde{Z}_t. \end{aligned}$$

Dijeljenjem jednadžbe cijene sa  $S_t$  dobivamo

$$\frac{S_{t+1}}{S_t} \approx 1 + \mu + \sqrt{V_t} Z_t$$

pa je  $Q_{t+1} = \frac{S_{t+1}}{S_t} \sim \mathcal{N}(1 + \mu, V_t)$ . Iz druge jednadžbe slijedi  $V_{t+1} \sim \mathcal{N}(V_t + \kappa(\bar{V} - V_t), \nu^2 V_t)$ .  $(Q_{t+1}, V_{t+1})$  tada ima dvodimenzionalnu normalnu distribuciju. Zbog nezavisnosti od  $Z_i$  i  $Z_j$ , odnosno  $\tilde{Z}_i$  i  $\tilde{Z}_j$ , realizacije  $(Q_{i+1}, V_{i+1})$  i  $(Q_{j+1}, V_{j+1})$  su također nezavisne, za  $i \neq j$ . Zbog koreliranosti  $Z_i$  i  $\tilde{Z}_i$ ,  $(Q_{i+1}, V_{i+1})$  i  $(Q_{j+1}, V_{j+1})$  su također korelirane sa koeficijentom korelacije  $\rho$ . Stoga, njihova zajednička funkcija gustoće glasi

$$\begin{aligned} f(Q_{t+1}, V_{t+1}) = & \frac{1}{2\pi\nu V_t \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{(Q_{t+1} - 1 - \mu)^2}{2V_t(1-\rho)^2} \right. \\ & + \frac{\rho(Q_{t+1} - 1 - \mu)(V_{t+1} - V_t - \bar{V}\kappa + \kappa V_t)}{V_t\nu(1-\rho)^2} \\ & \left. - \frac{(V_{t+1} - V_t - \bar{V}\kappa + \kappa V_t)^2}{2\nu^2 V_t(1-\rho)^2} \right]. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} l(\mu, \kappa, \bar{V}, \nu, \rho) = & \sum_{t=1}^n \left( -\ln(2\pi) - \ln \nu - \ln V_t - \frac{1}{2} \ln(1-\rho^2) - \frac{(Q_{t+1} - 1 - \mu)^2}{2V_t(1-\rho)^2} \right. \\ & + \frac{\rho(Q_{t+1} - 1 - \mu)(V_{t+1} - V_t - \bar{V}\kappa + \kappa V_t)}{V_t\nu(1-\rho)^2} \\ & \left. - \frac{(V_{t+1} - V_t - \bar{V}\kappa + \kappa V_t)^2}{2\nu^2 V_t(1-\rho)^2} \right). \end{aligned}$$

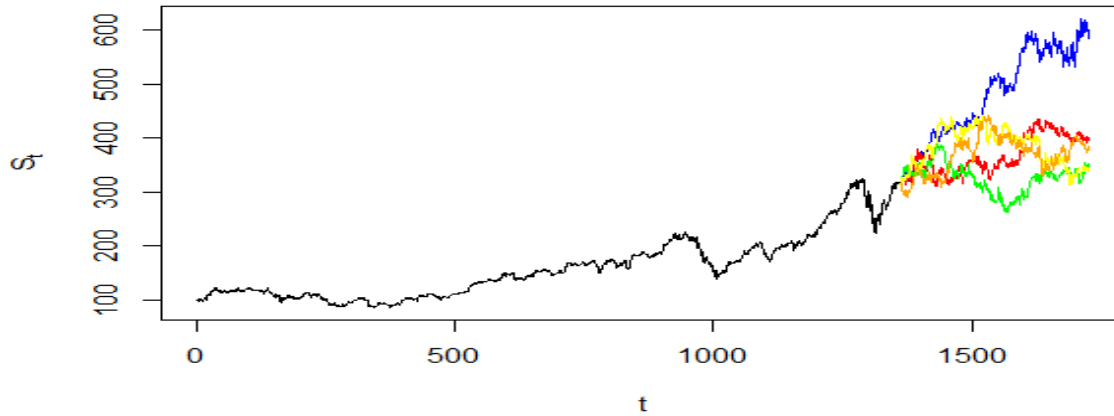
Neka su  $S_0, S_1, \dots, S_n$  podatci o cijenama dionice u trenucima  $0, 1, \dots, n$ . Na temelju tih podataka možemo odrediti vrijednosti  $Q_1, \dots, Q_n$ . Kako je  $V_t = \text{Var}(Q_{t+1})$ ,  $V_t$  ćemo procijeniti kao varijancu od  $Q_1, \dots, Q_{t+1}$ . Nakon uvrštavanja dobivenih vrijednosti u funkciju  $l$ , njenom maksimizacijom dobivamo procjenu za parametre Hestonovog modela.

Metodom maksimalne vjerodostojnosti procjenit ćemo parametre za dionicu kompanije Apple. Koristimo 1361 podatak o dnevnom kretanju cijene u razdoblju od 1.1.2015. do 1.6.2020. Podaci su dostupni na stranici [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com).

Dobivamo sljedeću procjenu parametara:

$$\mu = 0.000933, \kappa = 0.011555, \bar{V} = 0.000252, \nu = 0.000544, \rho = -0.024881.$$

Uz poznati  $S_0 = 317.37$  i procjenu  $V_0 = 0.000321$  možemo simulirati trajektorije cijene i varijance dionice. Nekoliko trajektorija za idućih 365 dana prikazano je na sljedećoj slici:



Slika 6

Simuliranjem trajektorija dobivamo procjenu kretanja cijene dionice, ali ne možemo znati koja trajektorija daje najbolju procjenu. Simuliramo li velik broj trajektorija te odredimo li njihov prosjek za svaku točku, na dugim vremenskim intervalima cijena će imati eksponencijalni rast. Kako je  $\mu$  mali broj, na kraćim vremenskim intervalima do nekoliko godina, cijena se može dobro aproksimirati i linearnom funkcijom. Ipak, za procjenu budućih cijena bitnije je znati informaciju o tržištu. Model za kretanje cijene biti će korisniji za određivanje premije Europskih opcija.

### 3.4 Procjena parametara uz vjerojatnost neutralnu na rizik

Parametre  $s$  obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik  $P^*$  procjenjujemo na temelju podataka o Europskim opcijama za neku dionicu. Sa stranice [www.barchart.com](http://www.barchart.com) preuzeli smo podatke o Europskim call opcijama za tržišni indeks S&P500. Podaci uključuju vrijeme dospijeca opcije  $T$ , cijenu izvršenja  $K$  te vrijednosti ask, bid i mid. Ask predstavlja najvišu trenutnu ponudu za kupnju opcije, bid predstavlja najnižu trenutnu ponudu za prodaju opcije. Vrijednost mid predstavlja prosjek vrijednosti ask i bid i tu ćemo vrijednost uzeti kao pravu vrijednost premije opcije. Za procjenu parametara koristit ćemo 15 Europskih call opcija sa različitim  $T$  i  $K$ . Prosječna vrijednost opcija iznosi 159.20.

Vrijednost indeksa u trenutku preuzimanja podataka iznosila je 3451.07. Za bezrizičnu kamatnu stopu  $r$  najčešće se uzima prinos na tromjesečne državne obveznice SAD-a. U trenutku preuzimanja podataka, taj prinos je iznosio 0.08%, iz čega slijedi kako je dnevna bezrizična kamatna stopa  $r = (1 + 0.0008)^{\frac{1}{90}} - 1 = 0.000008885$ .

Parametre modela  $\kappa^*, \bar{V}^*, \nu, \rho$  i početnu varijancu  $V_0$  biramo tako da minimiziraju sumu kvadrata razlike premije predviđene modelom i stvarne premije, za svaku opciju. U našem slučaju, funkcija koju minimiziramo izgleda ovako:

$$f(V_0, \kappa^*, \bar{V}^*, \nu, \rho) = \sum_{i=1}^{15} (C_{0_i}^{CALL}(V_0, \kappa^*, \bar{V}^*, \nu, \rho; K_i, T_i, S_0, r) - \text{mid}_i)^2.$$

Minimizaciju provodimo pomoću R funkcije *nlinb*. Funkcija koju minimiziramo funkcija je 5 varijabli te je izrazito kompliciranog oblika. Zbog toga je sama minimizacija tehnički zahtjevana te uvelike ovisi o početnom odabiru točke minimuma. Nakon mnogo različitih odabira početne aproksimacije, procjena parametara koja daje najnižu vrijednost minimizirajuće funkcije glasi

$$V_0 = 0.0760984, \kappa^* = 277.816, \bar{V}^* = 0.0001316598, \nu = 36.25, \rho = -0.769797.$$

Za navedene parametre, vrijednost minimizirajuće funkcije iznosi 424.55. Iz toga slijedi kako prosječno kvadratno odstupanje predviđene premije od stvarne iznosi 28.30.

Vrijednost premije za ECO sada možemo procijeniti pomoću karakteristične funkcije i formule (12).

Drugi način na koji ćemo procijeniti vrijednost premije je koristeći takozvanu Monte Carlo metodu. Uz poznate parametre modela, znamo kako simulirati trajektoriju cijene dionice. Nakon simulacije, dobivamo jednu realizaciju slučajne varijable  $S_T$ . Uvrštavanjem te vrijednosti u (8), za  $f(x) = (x - K)_+$ , dobivamo vrijednost premije ECO za tu simulaciju. Ideja Monte Carlo metode je provesti velik broj simulacija te za svaku odrediti vrijednost premije. Procjena za pravu vrijednost premije  $C_0^{CALL}$  je tada prosjek svih dobivenih vrijednosti premije.

Kako u izrazu (8) očekivanje računamo u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik  $P^*$ , i simulaciju trajektorija treba provesti uz parametre neutralne na rizik. Gore navedeni parametri ne zadovoljavaju Fellerov uvjet iz Propozicije 3 pa stoga ponovno minimiziramo funkciju  $f$  uz dodatan uvjet  $2\kappa^*\bar{V}^* \geq \nu^2$ . Procjena parametara koju smo dobili, a daje najnižu vrijednost minimizirajuće funkcije glasi

$$V_0 = 0.0000673406, \kappa^* = 0.0150096, \bar{V}^* = 0.000147374, \nu = 0.00210334, \rho = -0.902088.$$

Navedeni parametri daju nešto veću vrijednost funkcije  $f$  koja iznosi 586.76, odnosno prosječno kvadratno odstupanje predviđene premije od stvarne iznosi 39.12.

Za usporedbu, vrijednost premije opcija procjenit ćemo i BSM modelom. U tom slučaju, funkcija  $f$  je funkcija jedne varijable  $\sigma$  i ona postiže svoj minimum za  $\sigma = 0.01019131$ . Vrijednost funkcije  $f$  tada iznosi 2234.9, odnosno prosječno kvadratno odstupanje predviđene premije od stvarne iznosi 148.99.

U sljedećoj tablici dane su procjene vrijednosti premije 15 Europskih call opcija korištenih pri procjeni parametara i to pomoću formule (12) (KF), Monte Carlo metodom uz 200000 simuliranih trajektorija (MC) te koristeći BSM formulu (10) (BSM). Također ćemo prokazati i udio apsolutne greške u stvarnoj vrijednosti premije (%AG).

| K    | T   | mid    | KF     | MC     | BSM    | %AG KF | %AG MC | %AG BSM |
|------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 3405 | 35  | 99     | 103.33 | 101.3  | 108.13 | 4.38%  | 2.32%  | 9.22%   |
| 3445 | 35  | 72.2   | 74.51  | 75.42  | 86.53  | 3.06%  | 4.46%  | 19.85%  |
| 3485 | 35  | 49.3   | 49.05  | 52.98  | 67.99  | 0.51%  | 7.46%  | 37.92%  |
| 3550 | 35  | 23.15  | 19.63  | 24.58  | 44.14  | 15.22% | 6.17%  | 90.68%  |
| 3750 | 35  | 1.93   | 0.88   | 0.1    | 8.44   | 54.38% | 94.82% | 337.33% |
| 3400 | 217 | 253.2  | 243.02 | 241.3  | 234.86 | 4.02%  | 4.70%  | 7.25%   |
| 3450 | 217 | 221.45 | 213.35 | 211.73 | 210.14 | 3.66%  | 4.39%  | 5.11%   |
| 3475 | 217 | 206.1  | 199.21 | 199.18 | 198.5  | 3.34%  | 3.36%  | 3.69%   |
| 3550 | 217 | 163.45 | 159.7  | 158.44 | 166.4  | 2.30%  | 3.07%  | 1.81%   |
| 3600 | 217 | 137.7  | 135.9  | 135.18 | 147.28 | 1.31%  | 1.83%  | 6.96%   |
| 3400 | 308 | 288.5  | 288.23 | 288.57 | 275.11 | 0.09%  | 0.02%  | 4.64%   |
| 3450 | 308 | 257.25 | 259.71 | 260.7  | 250.81 | 0.96%  | 1.34%  | 2.50%   |
| 3475 | 308 | 242.25 | 246.01 | 245.51 | 239.27 | 1.55%  | 1.35%  | 1.23%   |
| 3550 | 308 | 199.35 | 204.51 | 206.78 | 206.99 | 2.59%  | 3.69%  | 3.83%   |
| 3600 | 308 | 173.15 | 183.47 | 183.93 | 187.39 | 5.96%  | 6.23%  | 8.23%   |

Tablica 1: Procjene vrijednosti premije ECO korištenih za procjenu parametara

Najbolji rezultati postignuti su korištenjem karakteristične funkcije. Malo slabije rezultate postigla je Monte Carlo metoda, dok su obje metode koje koriste Hestonov model postigle bolje rezultate od BSM modela. Većina apsolutnih grešaka te dvije metode ne prelazi 5% stvarnog iznosa premije. Najslabiji rezultati postignuti su za opcije sa kratkim vremenom dospijeća i visokom cijenom izvršenja što je problem koji se javlja i u ostalim radovima. Procijenit ćemo i vrijednost premije za opcije koje nismo koristili pri procjeni parametara. Rezultati su dani u sljedećoj tablici:

| K    | T   | mid    | KF     | MC     | BSM    | %AG KF | %AG MC | %AG BSM |
|------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 3405 | 13  | 68.2   | 73.57  | 71.34  | 76.86  | 7.87%  | 4.60%  | 12.70%  |
| 3445 | 13  | 39.8   | 41.7   | 45.63  | 53.84  | 4.77%  | 14.65% | 35.28%  |
| 3500 | 13  | 13.75  | 11.19  | 18.97  | 30.31  | 18.62% | 37.97% | 120.44% |
| 3445 | 30  | 66.4   | 67.85  | 69.4   | 80.31  | 2.18%  | 4.52%  | 20.95%  |
| 3400 | 205 | 246.9  | 236.41 | 235.49 | 228.97 | 4.25%  | 4.62%  | 7.27%   |
| 3450 | 205 | 215.05 | 206.56 | 204.73 | 204.19 | 3.95%  | 4.80%  | 5.05%   |
| 3500 | 205 | 185.1  | 178.63 | 177.29 | 181.38 | 3.50%  | 4.22%  | 2.01%   |
| 3400 | 296 | 285.2  | 282.68 | 283.27 | 270.17 | 0.88%  | 0.68%  | 5.27%   |
| 3450 | 296 | 254    | 254.03 | 255.43 | 245.82 | 0.01%  | 0.56%  | 3.22%   |
| 3500 | 296 | 224    | 226.94 | 228.14 | 223.11 | 1.22%  | 1.85%  | 0.49%   |

Tablica 2: Procjene vrijednosti premije ECO koje nisu korištene za procjenu parametara

Procijenjeni parametri daju dobre rezultate i za navedene opcije, pogotovo za opcije sa dužim vremenom izvršenja. Najbolja procjena dobivena je korištenjem karakteristične funkcije za opciju sa  $K = 3450$  i  $T = 296$ . Udio apsolutne greške u stvarnoj vrijednosti premije te opcije iznosi samo 0.01%.



Za kvalitetniju procjenu vrijednosti premije možemo kreirati specifičnije modele. Primjerice, možemo kreirati model na temelju samo jednog trenutka izvršenja ili model na temelju nekoliko vrlo bliskih cijena izvršenja. Takvi modeli će davati bolje rezultate za takve opcije.

Korištenjem karakteristične funkcije ne moramo simulirati trajektorije cijene te puno brže dolazimo do procjene vrijednosti premije, a i predikcije su uglavnom bolje, u odnosu na Monte Carlo metodu. S druge strane, za izvođenje formule (12) je bila potrebna matematička analiza i formulu možemo koristiti jedino za premiju ECO. Monte Carlo metodu možemo koristiti za procjenu premija izvedenica bez prevelike matematičke analize.

Primjerice, barijerne knock-out opcije su ugovori koji se ponašaju kao pripadne Europske opcije uz uvjet da vrijednost dionice u niti jednom trenutku na intervalu  $[0, T]$  ne dosegne barijeru  $B$ . U suprotnom, ugovor postaje bezvrijedan. Postoje još i barijerne knock-out opcije koje postaju pripadne Europske opcije tek nakon što se dosegne barijera  $B$ , a do tada su bezvrijedne. Barijerne opcije imaju nižu premiju od običnih Europskih opcija jer sadrže i dodatan uvjet.

Monte Carlo metodom jednostavno se implementira uvjet barijerne opcije. Nakon svake simulacije trajektorije, provjeravamo je li trajektorija u bilo kojem trenutku postigla vrijednost barijere  $B$  te s obzirom na to računamo vrijednost opcije za tu trajektoriju. Primjerice, za  $K = 3450$ ,  $T = 205$  i razne  $B$ , procijenjene vrijednosti premije knock-out barijerne call opcije glase:

| B    | MC     |
|------|--------|
| -    | 204.73 |
| 3500 | 0.06   |
| 3750 | 17.03  |
| 4000 | 100.13 |
| 4500 | 203.85 |

Tablica 3: Procjene vrijednosti premije za barijerne opcije s barijerom  $B$

Za dovoljno veliku barijeru  $B$ , premije za ECO i pripadnu barijernu knock out opciju biti će približno jednake. Barijerne opcije ilustriraju korisnost Monte Carlo metode u procjeni premije izvedenica.

## Sažetak

Tema ovog rada je modeliranje cijene dionica Hestonovim modelom te određivanje poštene premije za Europske opcije. U prvom dijelu rada predstavljena je obrađena je osnovna teorija za modeliranje cijene dionica te je predstavljen Black-Scholes-Mertonov model. U drugom dijelu rada prikazana je potreba za modelima stohastičke volatilnosti te je posebno obrađen Hestonov model. Posljednji dio rada sastoji se od numeričke implementacije rezultata iz prethodnih dijelova, uključujući vrednovanje premija opcija pomoću karakterističnih funkcija te Monte Carlo metodom.

## Ključne riječi

Hestonov model, Black-Scholes-Mertonov model, Europske opcije, stohastičke diferencijalne jednačbe, modeli stohastičke volatilnosti, Monte Carlo metoda

# Heston model

## Summary

The theme of this thesis is modeling stock market prices using Heston model and determining the fair price for European options. In the first part of this thesis we go through the basic theory behind stock price modeling and introduce the Black-Scholes-Merton model. In the second part of this thesis present the need for stochastic volatility models and define the Heston model. The last part of this thesis is dedicated to numerical implementation of results from previous part, including evaluating option prices using characteristic functions and Monte Carlo method.

## Key words

Heston model, Black-Scholes-Merton model, European options, stochastic differential equations, stockastic volatility models, Monte Carlo method

## Dodatak

### Korištene R skripte

```

#---parametri---
S=vector() #vektor cijena
V=vector() #vektor varijance
S0 #početna cijena
V0 #početna varijanca
S[1]=S0
V[1]=V0
mi #očekivani prirast(r)
kapa #brzina povratka varijance u očekivnaje
vp #očekivana varijance
nu #volatilnost varijance
rho #koeficijent korelacije
K #cijena izvršenja
T #broj simuliranih dana, odnosno trenutak dospijeća opcije

#---simulacija trajektorije---
N #broj točaka subdivizije (N djeljivo sa T)
dt=T/N #duljina intervala
set.seed(NULL)
Wv=rnorm(N) #BG varijance
Wt=rnorm(N)
Ws=rho*Wv+sqrt(1-rho^2)*Wt #BG cijene
for(i in 1:N){
  vplus=max(V[i], 0)
  V[i+1]=V[i]+kapa*(vp-vplus)*dt+nu*sqrt(vplus*dt)*Wv[i]
  S[i+1]=S[i]+mi*S[i]*dt+sqrt(vplus*dt)*S[i]*Ws[i]
}
Sdan=vector()
for (i in 1:T) {
  Sdan[1]=S[1]
  Sdan[i+1]=S[(N/T)*i+1]
}
Vdan=vector()
for (i in 1:T) {
  Vdan[1]=V[1]
  Vdan[i+1]=V[(N/T)*i+1]
}
plot(S, type="l") #trajektorija cijene po svakoj točki subdivizije
plot(Sdan, type="l") #trajektorija cijene po danu
plot(V, type="l") #trajektorija varijance po svakoj točki subdivizije
plot(Vdan, type="l") #trajektorija varijance po danu

#---procjena parametara uz vjerojatnost P---
sapl #povijesne cijene

```

```

qapl=vector()
for (i in 1:length(sapl)-1) {
  qapl[i]=sapl[i+1]/sapl[i]
}
vapl=vector()
for(i in 1:length(qapl)-1){
  vapl[i]=var(qapl[1:(i+1)])
}
qapl=qapl[1:length(vapl)]
ml=vector()
maxl=function(mi,kapa,vp,nu,rho){
  for (j in 1:length(vapl)-1) {
    c=0
    c=-log(2*pi)-log(nu)-log(vapl[j])-log(1-rho^2)/2
    -(qapl[j+1]-1-mi)^2/(2*vapl[j]*(1-rho^2))+(rho*(qapl[j+1]-1-mi)
    *(vapl[j+1]-vapl[j]-vp*kapa+kapa*vapl[j]))
    /(vapl[j]*nu*(1-rho^2))
    -(vapl[j+1]-vapl[j]-vp*kapa+kapa*vapl[j])^2
    /(2*nu^2*vapl[j]*(1-rho^2))
    ml[j]=c
  }
  return(sum(ml))
}
maxlop=function(x){
  -maxl(x[1],x[2],x[3],x[4],x[5])
}
nlminb(start=c(1,2,0.5,0.2,0),maxlop,lower = c(-Inf,0,0,0,-1)
,upper = c(Inf,Inf,Inf,Inf,1),control = list(trace=1))
#mi,kapa,vp,nu,rho
S0=sapl[length(sapl)] #S0
V0=vapl[length(vapl)] #V0
#procjena uz Fellerov uvjet
maxlopfel=function(x){
  if(2*x[2]*x[3]>x[4]^2){
    -maxl(x[1],x[2],x[3],x[4],x[5])
  }
  else{
    return(Inf)
  }
}
nlminb(start=c(0.001,0.01,0.01,0.001,-0.02),maxlopfel
,lower = c(-Inf,0,0,0,-1),upper = c(Inf,Inf,Inf,Inf,1)
,control = list(trace=1)) #mi,kapa,vp,nu,rho
S0=sapl[length(sapl)] #S0
V0=var(qapl[1:length(qapl)]) #V0

#---procjena parametara uz vjerojatnost P*---
mi #bezrizična kamatna stopa

```

```

S0 #cijena dionice
minsd<-function(V0, vp, kapa, nu, rho){
  sd=vector()
  for (i in 1:length(ecoT)) {
    T=ecoT[i]
    K=ecoK[i]
    sd[i]=(ecoprice(S0, V0, mi, vp, kapa, nu, rho, K, T)-ecomid[i])^2
  }
  return(sum(sd))
}
minsdop<-function(x){
  minsd(x[1], x[2], x[3], x[4], x[5])
}
nlminb(start=c(0.0002, 0.0001, 0.01, 0.003, -0.5), mins dop
, lower = c(0, 0, 0, 0, -1), upper = c(Inf, Inf, Inf, Inf, 1)
, control = list(trace=1)) #V0, vp, kapa, nu, rho
#--uz Fellerov uvjet--
minsd felop<-function(x){
  if(2*x[2]*x[3]>x[4]^2){
    minsd(x[1], x[2], x[3], x[4], x[5])
  }
  else{
    return(Inf)
  }
}
nlminb(start=c(0.0005, 0.001, 0.1, 0.003, -0.7), minsd felop
, lower = c(0, 0, 0, 0, -1), upper = c(Inf, Inf, Inf, Inf, 1)
, control = list(trace=1)) #V0, vp, kapa, nu, rho

#Premija za ECO preko KF
kf<-function(S0, V0, mi, vp, kapa, nu, rho, T, w){
  alfa=(-w^2)/2-(complex(imaginary = 1)*w)/2
  beta=kapa-complex(imaginary=1)*rho*nu*w
  h=sqrt(beta^2-2*alfa*nu^2)
  rplus=(beta+h)/(nu^2)
  rminus=(beta-h)/(nu^2)
  g=rminus/rplus
  C=kapa*(rminus*T-2/(nu^2)*log((1-g*exp(-h*T))/(1-g)))
  D=rminus*((1-exp(-h*T))/(1-g*exp(-h*T)))
  phi=exp(C*vp+D*V0+complex(imaginary=1)*w*log(S0*exp(mi*T)))
  return(phi)
} #karakteristična funkcija
fun1<- function (S0, V0, mi, vp, kapa, nu, rho, K, T, w) {
  Re(exp(complex(imaginary=-1)*w*log(K))
  *kf(S0, V0, mi, vp, kapa, nu, rho, T, w-complex(imaginary = 1))
  /(complex(imaginary = 1)*w
  *kf(S0, V0, mi, vp, kapa, nu, rho, T, complex(imaginary = -1))))
}
int1<-function(S0, V0, mi, vp, kapa, nu, rho, K, T, w){

```

```

    cubintegrate ( fun1 , lower=0, upper=Inf , S0=S0 , V0=V0 , mi=mi , vp=vp
    , kapa=kapa , nu=nu , rho=rho , K=K , T=T)
}
fun2<-function ( S0 , V0 , mi , vp , kapa , nu , rho , K , T , w ) {
  Re ( exp ( complex ( imaginary=-1)*w*log ( K ) )
  *kf ( S0 , V0 , mi , vp , kapa , nu , rho , T , w ) / ( complex ( imaginary = 1)*w ) )
}
int2<-function ( S0 , V0 , mi , vp , kapa , nu , rho , K , T , w ) {
  cubintegrate ( fun2 , lower=0, upper=Inf , S0=S0 , V0=V0 , mi=mi , vp=vp
  , kapa=kapa , nu=nu , rho=rho , K=K , T=T)
}
ecoprce<-function ( S0 , V0 , mi , vp , kapa , nu , rho , K , T ) {
  pi1=1/2+1/pi*int1 ( S0 , V0 , mi , vp , kapa , nu , rho , K , T , 1 ) $integral
  pi2=1/2+1/pi*int2 ( S0 , V0 , mi , vp , kapa , nu , rho , K , T , 1 ) $integral
  C0=S0*pi1-exp (-mi*T)*K*pi2
  C0
} #premija za ECO

#---Monte Carlo---
set.seed ( NULL )
J #broj simuliranih trajektorija
ST=vector ( )
for ( j in 1:J ) {
  S[1]=S0
  V[1]=V0
  Wv=rnorm ( N )
  Wt=rnorm ( N )
  Ws=rho*Wv+sqrt ( 1-rho^2 ) *Wt
  for ( i in 1:N ) {
    vplus=max ( V[ i ] , 0 )
    V[ i +1 ] = V[ i ] + kapa * ( vp - vplus ) *dt + nu * sqrt ( vplus * dt ) * Wv[ i ]
    S[ i +1 ] = S[ i ] + mi * S[ i ] *dt + sqrt ( vplus * dt ) * S[ i ] * Ws[ i ]
  }
  ST[ j ] = ( max ( S[ length ( S ) ] - K , 0 ) *exp (-mi*T) )
}
sum ( ST ) / J #Monte Carlo procjena za premiju ECO

set.seed ( NULL )
J #broj simuliranih trajektorija
ST=vector ( length=N+1 )
VT=vector ( length=N+1 )
for ( j in 1:J ) {
  S[1]=S0
  V[1]=V0
  Wv=rnorm ( N )
  Wt=rnorm ( N )
  Ws=rho*Wv+sqrt ( 1-rho^2 ) *Wt
  for ( i in 1:N ) {

```

```

    vplus=max(V[i],0)
    V[i+1]=V[i]+kapa*(vp-vplus)*dt+nu*sqrt(vplus*dt)*Wv[i]
    S[i+1]=S[i]+mi*S[i]*dt+sqrt(vplus*dt)*S[i]*Ws[i]
  }
  ST=ST+S
  VT=VT+V
}
ST=ST/J #Monte Carlo procjena za trajektoriju cijene
VT=VT/J #Monte Carlo procjena za trajektoriju varijance
plot(ST,type="l") #trajektorija cijene po danu
plot(VT,type="l") #trajektorija varijance po danu

set.seed(NULL)
B #barijera
J #broj simuliranih trajektorija
ST=vector()
for (j in 1:J) {
  S[1]=S0
  V[1]=V0
  Wv=rnorm(N)
  Wt=rnorm(N)
  Ws=rho*Wv+sqrt(1-rho^2)*Wt
  for(i in 1:N){
    vplus=max(V[i],0)
    V[i+1]=V[i]+kapa*(vp-vplus)*dt+nu*sqrt(vplus*dt)*Wv[i]
    S[i+1]=S[i]+mi*S[i]*dt+sqrt(vplus*dt)*S[i]*Ws[i]
  }
  for(k in 1:N){
    if (S[k]>B)
      {ST[j]=0
       break}
    else if (k==N){
      ST[j]=(max(S[length(S)]-K,0))*exp(-mi*T)}
  }
}
sum(ST)/J #Monte Carlo procjena za premiju ECO s barijerom B

```



## Literatura

- [1] J.-F. BÉGIN, M. BÉDARD, P. GAILLARDETZ , *Simulating from the Heston Model: A Gamma Approximation Scheme*, Submitted to Monte Carlo Methods and Applications, 2014.
- [2] R. CRISÓSTOMO, *An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab*, 2014.
- [3] R. DUNN, P. HAUSER, T. SEIBOLD, H. GONG, *Estimating option prices with Heston's stochastic volatility model*, Valparaiso University, 2015.
- [4] F. FORNARI, A. MELE, *Stochastic volatility in financial markets*, Springer Science + Business Media, LLC, 2000.
- [5] J.-P. FOUQUE, G. PAPANICOLAOU, R. SIRCAR, K. SØLNA, *Multiscale Stochastic Volatility for Equity, Interest Rate, and Credit Derivatives*, Cambridge University Press, 2011.
- [6] F. B. HANSON, *Stochastic Calculus of Heston's Stochastic-Volatility Model*, Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2010.
- [7] P. KARLSSON, *The Heston Model - Stochastic Volatility and Approximation*, B.Sc. Thesis.
- [8] I. KRAVCHENKO, *Barrier option pricing via Heston model*, ISCTE Business School, Instituto Universitário de Lisboa, 2013.
- [9] M. PUIG, *An introduction to stochastic volatility models*, Facultat de Matemàtiques i Informàtica Universitat de Barcelona, 2017.
- [10] F. O. TEIXEIRA, *On the Numerical simulation of the Heston model*, M.Sc. of Applied Mathematics thesis, 2017.
- [11] L. TENG, M. EHRHARDT, M. GÜNTHER, *Numerical Simulation of the Heston Model under Stochastic Correlation*, International Journal of Financial Studies, 2017.

## Životopis

Rođen sam 29. rujna 1996. godine u Našicama. Pohađao sam Osnovnu školu Ivan Goran Kovačić i to prva četiri razreda u Crncu, a druga četiri u Zdencima. 2011. godine upisujem opću gimnaziju u Srednjoj školi Stjepan Ivšić, Orahovica. 2015. godine upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku. 2018. godine završavam preddiplomski studij i stječem akademski naziv sveučilišnog postupnika matematike. Završni rad pišem na temu Određeni interval i primjene u geometriji uz mentorstvo doc.dr.sc. Ivana Solde. 2018. godine upisujem Diplomski studij Financijska matematika i statistika u Osijeku. Na posljednjoj godini studija odradio sam stručnu praksu u Hrvatskoj agenciji za poljoprivredu i hranu.