Teorija katastrofe u fenomenima faznih prijelaza

Cvjetović, Milica

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:743764

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**



Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science







Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni diplomski studij matematike: smjer Financijska matematika i statistika

Milica Cvjetović

Teorija katastrofe u fenomenima faznih prijelaza

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni diplomski studij matematike: smjer Financijska matematika i statistika

Milica Cvjetović

Teorija katastrofe u fenomenima faznih prijelaza

Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ivica Martinjak

Osijek, 2016.

Zahvala

Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr. sc. Ivici Martinjaku na velikoj pomoći, strpljenju i savjetima pri oblikovanju teme i izradi ovog diplomskog rada.

Najveće hvala roditeljima i bratu na podršci i povjerenju koje su mi ukazali tokom studija.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Nabor i šiljak **3**

2.1 Glatke funkcije 3

2.2 Univerzalne perturbacije 7

2.3 Katastrofa nabora 9

2.3.1 Gravitacijski stroj 10

2.4 Katastrofa šiljka 12

2.4.1 Zeemanov stroj 15

3 Fazni prijelazi **17**

3.1 Proces grananja 17

3.1.1 Kritična točka 19

3.1.2 Kritični eksponenti 20

3.2 Van der Waalsov model 21

3.2.1 Kritična temperatura 22

3.2.2 Katastrofa šiljka u faznom prijelazu vode iz tekućeg u plinovito stanje 25

3.3 Isingov model feromagnetizma 28

3.3.1 Kristalna rešetka 29

3.3.2 Curiejeva temperatura 30

3.3.3 Jednadžba stanja magneta 32

4 Zeemanov model tržišta **35**

4.1 Tržište kapitala 35

4.2 Nestabilnost burze 35

4.3 Spori tok 37

4.4 Kružni tijek događaja 39

Sažetak **40**

Abstract **40**

Životopis **41**

1 Uvod

Mnoge pojave oko nas su nagle i nepredviđene. Voda iznenada isparava, a led se topi. Događaju se potresi koji ruše zgrade, ali i oni koji ruše burzu. Takve nagle promjene uzrokovali su vanjski čimbenici koji su se glatko i polagano mjenjali, a teško ih je predvidjeti i analizirati. Postoji više vrsta nepredvidljivih fenomena. Pomicanjem litosfernih ploča skuplja se energija koja u jednom trenutku postaje toliko jaka da savije ili slomi koru te uzrokuje potres. Populacija može naglo porasti ako stopa rađanja premaši stopu umiranja. Porozni kamen neće propuštati vodu dok broj mikroskopskih pora na njegovoj površini ne dosegne određenu kritičnu vrijednost. Voda će do određene temperature naglo prelaziti u paru, a komad željeza smješten u magnetsko polje će samo ispod određene temperature biti magnetiziran.

Neke od naglih promjena sličnih ovima prkose svim pokušajima analize. Mnoge su ipak opisane raznim matematičkim metodama. Tehnike koje su korištene u ovom radu razvio je francuski matematičar René Thom (1923.-2002.). Iznenadne promjene koje je opisao u svojoj knjizi [19] nazvao je *katastrofe* kako bi dočarao njihove nagle i dramatične promjene. Nova grana matematike postala je poznata pod nazivom *teorija katastrofe*. Od tada je objavljen velik broj znanstvenih radova u kojima je teorija katastrofe primijenjena u raznim granama znanosti i raznim disciplinama, od fizike, optike, geologije, biologije, embrijologije, lingvistike, pa sve do ekonomije i eksperimentalne psihologije [1]. Teorija katastrofe primjenjena je u proučavanju otkucaja srca, stabilnosti brodova, zatvorskih pobuna, modeliranju aktivnosti mozga i mentalnim oboljenjima, modeliranju ponašanja investitora na burzi, te proučavanju utjecaja alkohola na vozače.

Katastrofe su iznenadne promjene koje se pojavljuju kao trenutna reakcija sustava na glatke promjene u vanjskim uvjetima. Kako bismo se upoznali s osnovama teorije katastrofe, krenuti ćemo od najjednostavnijeg pojma koji je ujedno i osnovno polazište te teorije, a to je kritična točka glatke funkcije. Na početku našeg razmatranja napravljena je osnovna podjela tih točaka na *degenerativne* i *nedegenerativne* kritične točke. Degenerativne kritične točke nazvane 7 *elementarnih katastrofa* temelj su teorije katastrofe koja proučavanjem *univerzalnih perturbacija* tih kritičnih točaka pokušava odrediti svojstva funkcije koja opisuje dani sustav.

Česti su sustavi u kojima se pojavljuju dvije najjednostavnije katastrofe: *nabor* i *šiljak*. Pomoću njih su opisani jednostavni fizikalni sustavi, gravitacijski stroj katastrofe i Zeemanov stroj katastrofe koji na jednostavan način demonstriraju stabilnu i nestabilnu ravnotežu.

Ranije spomenuto isparavanje vode, gubljenje magnetizacije, proces grananja i poroznost kamena sustavi su u kojima dolazi do promjene nazvane *fazni prijelaz*. Iako se fazni prijelazi događaju na razne načine u raznim sustavima, zanimljivo je da svi tipovi faznih pri-

jelaza imaju neke zajedničke karakteristike. Slikovito i jednostavno, fazni prijelaz je opisan na jednostavnom sustavu procesa grananja. Na ovom primjeru lako uočavamo značenje kritične točke i kritičnih eksponenata. Među sustavima u kojima dolazi do faznog prijelaza, od posebnog su interesa oni sustavi koje možemo objasniti pomoću teorije katastrofe. Transformacija Van der Waalsove jednadžbe stanja plina u jednadžbu *lica katastrofe* šiljka dodatno je zanimljiva zbog svoje algebarske jednostavnosti. U Isingovom modelu feromagnetizma, iako transformacija jednadžbe stanja magneta u jednadžbi lica katastrofe šiljka nije konceptualno jednostavna, fascinanto je što se u tako jednostavnom rešetkastom modelu također pojavljuje teorija katastrofe.

Tijekom povijesti, slomovi burze imali su dramatične posljedice na društvo, a težnje za pronalaženjem teorije koja će predvidjeti uspone i padove tržišta prije nego se oni dogode nisu urodile plodom. E. C. Zeeman je kretanje burzovnog indeksa modelirao upravo pomoću katastrofe šiljka koja kvalitativno opisuje kretanja burze i njezine slomove i oporavke.

2 Nabor i šiljak

2.1 Glatke funkcije

Definirajmo najprije pojam glatke funkcije.

Definicija 2.1 *Neka je U otvoreni podskup skupa $\boldsymbol{R}^n$, $U \subset \boldsymbol{R}^n$. Funkcija $f : U \to \boldsymbol{R}$ je glatka ako u svakoj točki domene ima derivaciju proizvoljnog reda.*

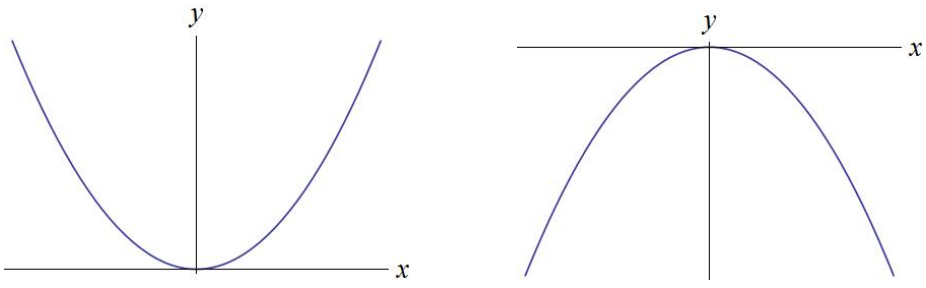
U ostatku ovog poglavlja sa f ćemo označavati glatku funkciju definiranu na otvorenom podskupu U.

Ako je k ne negativan broj, tada ćemo k-tu derivaciju od f u točki p iz U označavati sa $D^k f(p)$, gdje je $D^0 f(p) := f(p)$ i $D^1 f(p) := Df(p)$. Za funkcije jedne varijable koristit ćemo oznake $f(p)$, $f'(p)$, $\ldots$, $f^{(k)}(p)$. Da je funkcija glatka zapravo znači da sve parcijalne derivacije od f postoje u svakoj točki $p \in U$. Parcijalnu derivaciju po varijabli x_i (ili i-tu parcijalnu derivaciju) u točki p reda k označavat ćemo sa $D_i^k f(p)$, za $i = 1, \ldots, n$. *Gradijent* funkcije f u točki $p \in \mathbf{R}^n$ je vektor $(D_1 f(p), \ldots, D_n f(p))$.

Definicija 2.2 *Točka $p \in U$ je stacionarna točka funkcije f ako je derivacija od f u p, odnosno $Df(p)$, jednaka 0. Točka p je kritična točka funkcije f ako je p stacionarna točka ili ako f nije derivabilna u točki p.*

Pogledajmo nekoliko primjera kritičnih točki.

Primjer 2.1 *Za funkciju $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$ ($f(x) = -x^2$), kritična točka je njezin minimum (maksimum).*

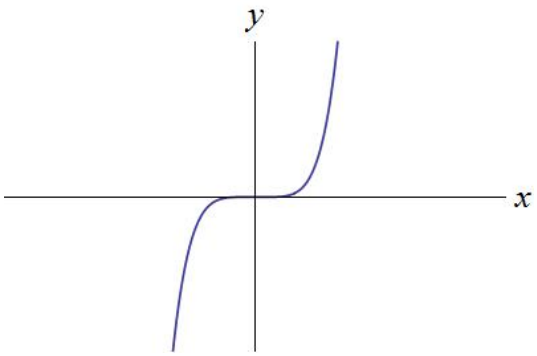


(a) Minimum (b) Maksimum

Slika 2.1: Kritične točke funkcije $f(x) = x^2$ i $f(x) = -x^2$

Definicija 2.3 *Ako kritična točka funkcije nije ni minimum ni maksimum te funkcije, tada ju nazivamo sedlasta točka.*

Primjer 2.2 *Za funkciju $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3$, kritična točka je sedlasta točka.*



Slika 2.2: Sedlasta točka funkcije $f(x) = x^3$

U prethodna dva primjera svaka funkcija je imala samo jednu kritičnu točku i svaka kritična točka je bila *izolirana.*

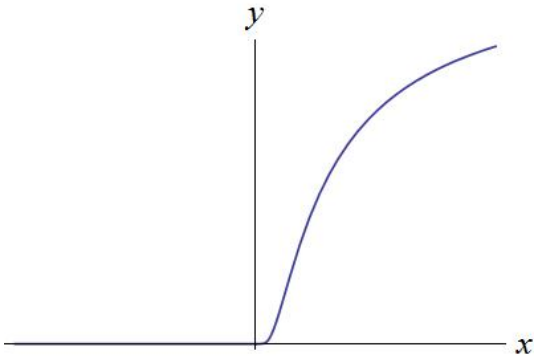
Definicija 2.4 *Kritična točka $p \in U$ funkcije f je izolirana ako postoji okolina V od p, $V \subset U$, takva da ni jedna druga točka iz V nije kritična.*

Međutim, kritične točke ne moraju nužno biti izolirane, što možemo uočiti na sljedećem primjeru.

Primjer 2.3 *Funkcija f definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

je glatka funkcija koja ima skup kritičnih točaka za sve $x \leq 0$ kako vidimo na Slici 2.3.



Slika 2.3: Funkcija f, $f(x) = e^{-1/x}$ za $x > 0$ i $f(x) = 0$ za $x \leq 0$

Kako bismo definirali nedegenerativne kritične točke potrebna nam je Hesseanova matrica H funkcije f. To je matrica svih parcijalnih derivacija drugog reda funkcije f u točki p:

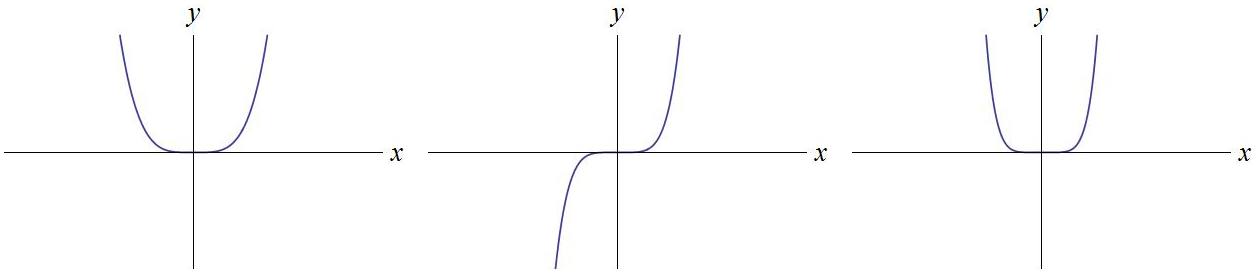
$$H = \begin{pmatrix} D_1^2 f(p) & D_2 D_1 f(p) & \cdots & D_n D_1 f(p) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 D_n f(p) & D_2 D_n f(p) & \cdots & D_n^2 f(p) \end{pmatrix}$$

gdje je $D_i D_j f(p)$ mješana parcijalna derivacija $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ funkcije f u točki p po i-toj i j-toj koordinati. Hesseanova matrica upotrebljava se kako bi se odredilo da li je kritična točka minimum, maksimum ili sedlasta točka.

Definicija 2.5 *Kritična točka $p \in U$ funkcije f je nedegenerativna ako je Hesseanova matrica $D^2 f(p)$ funkcije f u p invertibilna. U suprotnom točka p je degenerativna.*

Za funkciju jedne varijable, točka p je nedegenerativna kritična točka ako i samo ako $f'(p) = 0$ i $f''(p) \neq 0$. U Primjeru 2.1 kritične točke su nedegenerativne kritične točke. Jedine nedegenerativne kritične točke su izolirani ekstremi. Međutim, postoje izolirani ekstremi koji su degenerativni.

Primjer 2.4 *U Primjeru 2.2 kritična točka je degenerativna. Na Slici 2.4 pogledajmo još neke izolirane degenerativne kritične točke.*



(a) $f(x) = x^4$ (b) $f(x) = x^5$ (c) $f(x) = x^6$

Slika 2.4: Izolirane degenerativne kritične točke

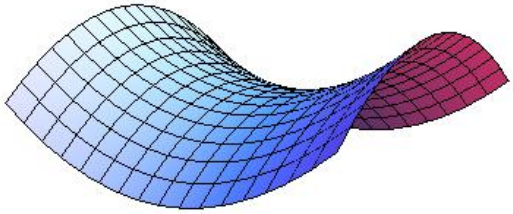
Za razliku od funkcija jedne varijable, nedegenerativne kritične točke funkcija više varijabli ne moraju nužno biti ekstremi. Dobar primjer je hiperbolični paraboloid prikazan na Slici 2.5, čija je kritična točka sedlasta točka.

Definicija 2.6 *Kritična točka funkcije dvije varijable je sedlasta točka ako vrijedi da je*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad i \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2 < 0 \tag{2.1}$$

u toj točki.

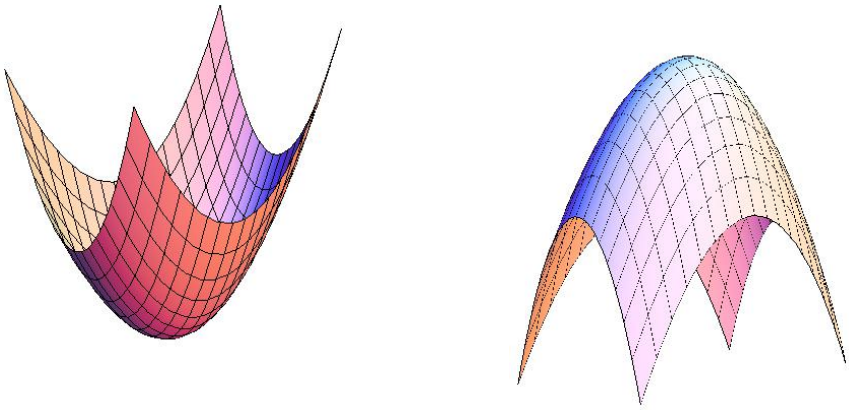
Primjer 2.5 *Funkciji $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ prikazanoj na Slici 2.5, ishodište je jedina kritična točka. Ona je nedegenerativna, ali nije ekstrem.*



Slika 2.5: Funkcija $f(x, y) = x^2 - y^2$ (hiperbolički paraboloid)

Kao i kod funkcija jedne varijable, nedegenerativne kritične točke funkcija više varijabli su uvijek izolirane. Može se pokazati da okolina nedegenerativne kritične točke svake glatke funkcije dvije varijable izgleda kao hiperbolički paraboloid iz Primjera 2.5 koji je prikazan na Slici 2.5 ili kao eliptički paraboloid prikazan na Slici 2.6 u idućem primjeru.

Primjer 2.6 *Funkciji $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ ($f(x, y) = -x^2 - y^2$), kritična točka je nedegenerativna i minimum (maksimum).*



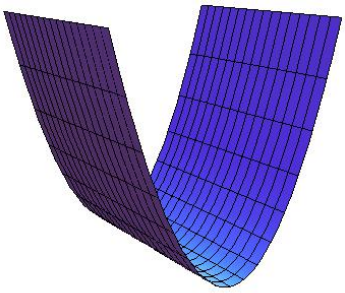
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (b) $f(x, y) = -x^2 - y^2$

Slika 2.6: Funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ i $f(x, y) = -x^2 - y^2$ (eliptički paraboloid)

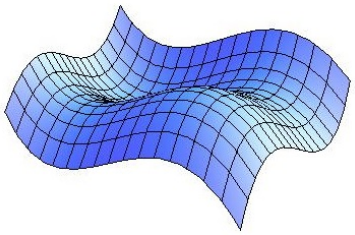
Pogledajmo sada primjere degenerativnih kritičnih točki funkcija dvije varijable.

Primjer 2.7 *Pogledamo li funkciju $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $f(x, y) = x^2$, (Slika 2.7a) vidimo da ona ima skup kritičnih točki koje se nalaze na osi ordinata i sve su degenerativne.*
Funkcija $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3$, (Slika 2.7b) ima jednu kritičnu točku u ishodištu i

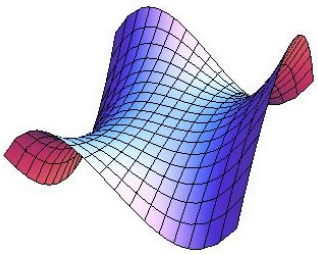
ona je degenerativna.
Funkcija $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $f(x, y) = x^3 - xy^2$, *(Slika 2.7c) se naziva još i majmunsko sedlo, ima ishodište kao kritičnu točku, i ona je degenerativna.*
Posljednji primjer je funkcija $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $f(x, y) = x^2y + y^4$, *(Slika 2.7d) s jednom degenerativnom kritičnom točkom u ishdištu.*



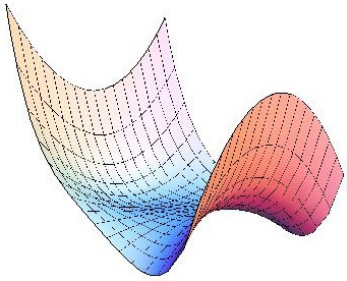
(a) $f(x, y) = x^2$



(b) $f(x, y) = x^3 + y^3$



(c) $f(x, y) = x^3 - xy^2$



(d) $f(x, y) = x^2y + y^4$

Slika 2.7: Degenerativne kritične točke

2.2 Univerzalne perturbacije

U srcu teorije katastrofe nalaze se dva teorema. Prvi je Thomov teorem koji klasificira degenerativne kritične točke glatkih funkcija f od n varijabli koje imaju takozvanu kodimenziju najviše 4 [13] i njega nećemo navoditi. Klasifikacijski teorem univerzalnih perturbacija kritičnih točki je drugi temeljni teorem u teoriji katastrofe.

Kada je neki prirodni sustav opisan funkcijom f s *varijablama stanja* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tada su smetnje u sustavu prikazane parametrima $u = (u_1, \ldots, u_r)$ koje nazivamo *vanjski* ili *kontrolni parametri* o kojima funkcija ovisi. Perturbacija F funkcije f je glatka funkcija

$F(x,u)$ varijabli stanja i parametara koja zadovoljava $F(x,0) = f(x)$. Teorija katastrofe se bavi svojstvima dane funkcije proučavajući njezine perturbacije.

Na primjer, pogledajmo funkciju x^2. Može se pokazati da svaka perturbacija od x^2, primjerice

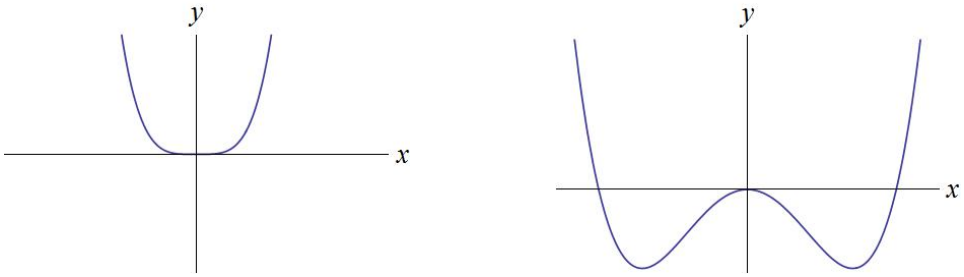
$$x^2 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots , \tag{2.2}$$

ima samo jednu kritičnu točku u okolini ishodišta koja je minimum. Točnije, postoji okolina ishodišta U takva da perturbacija ima samo jednu kritičnu točku unutar U za svaki dovoljno mali u, i ta točka je minimum.

Suprotno tome, perturbacija

$$x^4 - 2u^2 x^2 \tag{2.3}$$

od x^4 ima tri kritične točke oko ishodišta ako je u različito od nula, maksimum u 0 i dva minimuma, u i $-u$, dok x^4 ima samo jednu kritičnu točku u okolini ishodišta, odnosno minimum točno u 0, što se vidi na Slici 2.8. Dakle, ishodište je stabilna kritična točka od x^2, ali nestabilna za x^4. Generalno, svaka degenerativna kritična točka je nestabilna.



(a) $F(x,0) = x^4$ (b) $F(x,u) = x^4 - 2u^2x^2$ za $u \neq 0$

Slika 2.8: Funkcija $f(x) = x^4$ i njezina univerzalna perturbacija

Očito je da postoji velik broj perturbacija svake funkcije. Perturbacija s minimalnim brojem parametara koji opisuju sva moguća ponašanja sustava predstavljenog s f podvrgnutog promjenama nazivamo *univerzalna perturbacija*. Vratimo li se prethodnom primjeru, vidimo da je x^2 sama sebi univerzavna perturbacija. U idućem poglavlju definirat ćemo *nabor* i *šiljak*, univerzalne perturbacije od x^3 i x^4. Kasnije ćemo navesti neke njihove primjene.

Sedam standardnih univerzalnih perturbacija kritičnih točki koje su temelj teorije katastrofe nazivaju se *nabor*, *šiljak*, *lastin rep*, *leptir*, *eliptična pupčana vrpca*, *hiperbolična pupčana vrpca*, *parabolična pupčana vrpca*. To su, redom, kritične točke funkcija

$$x^3, \quad x^4, \quad x^5, \quad x^6, \quad x^3 + y^3, \quad x^3 - xy^2, \quad x^2 y + y^4 \tag{2.4}$$

(Primjeri 2.2, 2.4, 2.7) i nazivaju se 7 *elementarnih katastrofa.*

Pretpostavit ćemo da u sustavima koje promatramo kvazistatične sile, odnosno sile koje ne proizvode moment, uzrokuju nagle promjene. Kada sustav miruje u poziciji ravnoteže, vrijednost od x određuje stanje sustava. Parametri u opisuju ovisnost sustava o vanjskim silama koje uzrokuju promjenu u ravnoteži sustava. Posljedica toga je da sustav može naglo iz stabilnog ravnotežnog stanja, u kojem je potencijalna energija minimalna, preći u neko drugo stanje. Takva nagla promjena koja je rezultat kontinuirane promjene parametara naziva se katastrofa.

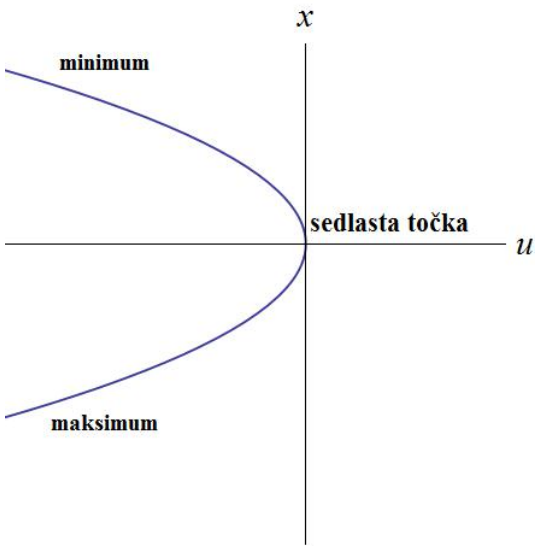
2.3 Katastrofa nabora

Perturbacija F funkcije $f(x) = x^3$,

$$F(x, u) := x^3 + ux, \tag{2.5}$$

nazvana nabor, najjednostavnija je katastrofa. F je ujedno i univerzalna perturbacija funkcije $f(x) = x^3$.

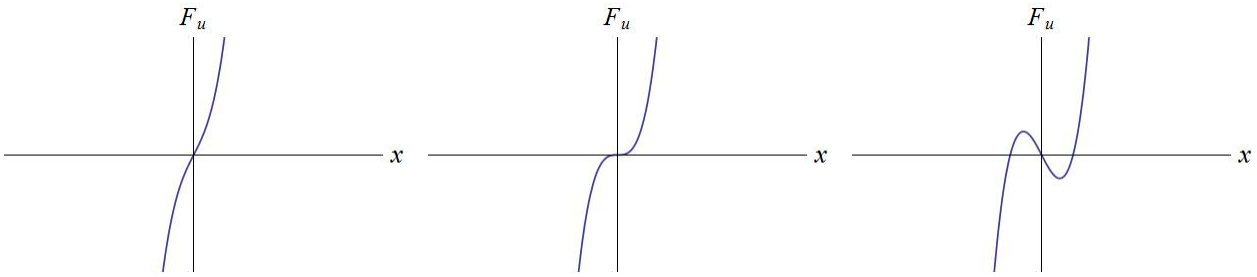
Definicija 2.7 *Za danu univerzalnu perturbaciju graf u koordinatnom sustavu koji prikazuje kritične točke zove se lice katastrofe.*



Slika 2.9: Lice katastrofe nabora

Na Slici 2.9 vidimo kako izgleda skup kritičnih točki svih parcijalnih funkcija $F_u(x) := F(u, x)$ od F. Lice katastrofe je parabola $M_F = \{(x, u) : 3x^2 + u = 0\}$. Kada fiksiramo

$u > 0$ F_u nema kritične točke, kada je $u = 0$ ima jednu kritičnu točku koja je sedlasta točka, a kada je $u < 0$ ima dvije kritične točke, minimum i maksimum. Točan izgled ovih funkcija možemo vidjeti na Slici 2.10.



(a) $u > 0$ (b) $u = 0$ (c) $u < 0$

Slika 2.10: Graf funkcije F_u za različite vrijednosti u

U slučaju kada je $u < 0$ maksimum se nalazi u točki $x = -\sqrt{|u/_3|}$, a minimum u točki $x = \sqrt{|u/_3|}$.

Ako F interpretiramo kao potencijalnu energiju sustava, tada minimumi predstavljaju stabilne ravnoteže, dok sve ostale kritične točke predstavljaju nestabilne ravnoteže. Kod nabora jedina stabilna ravnoteža je u $\sqrt{|u/_3|}$ za negativan u. Međutim, kako se u približava nuli, minimum postaje plosnatiji te nestaje za $u = 0$. To predstavlja nagli prijelaz iz stabilne ravnteže u neravnotežu, gdje sustav ne miruje, nego dolazi do kontinuirane promjene parametara, odnosno katastrofe.

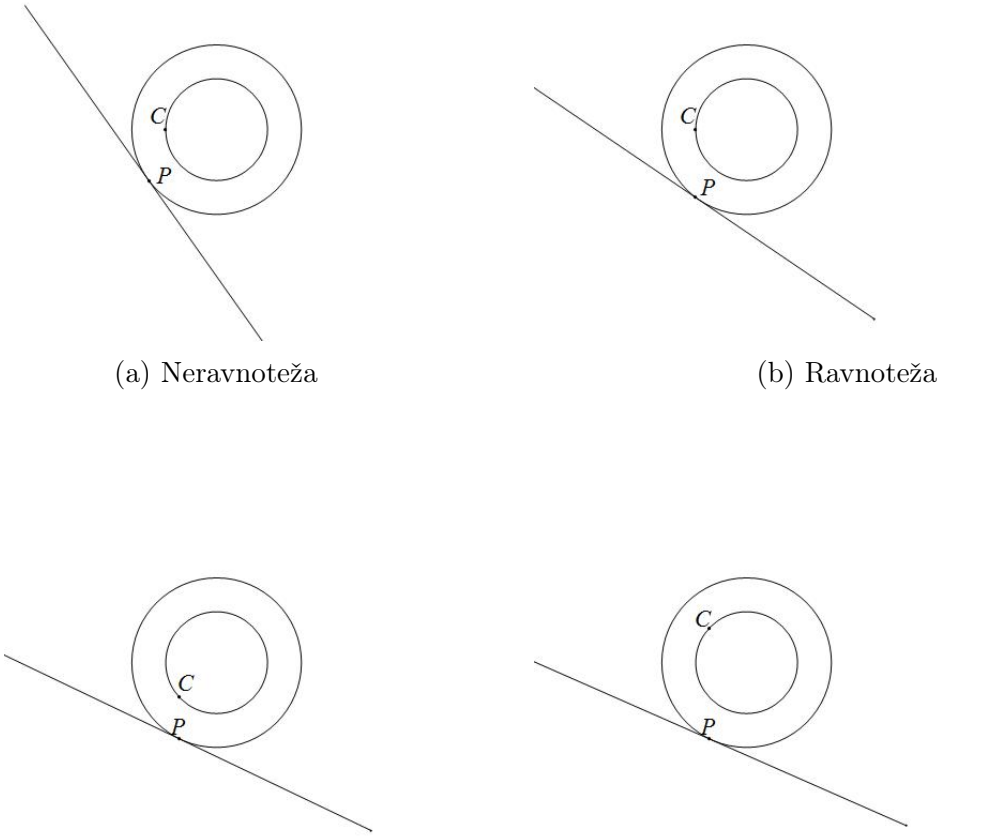
Katastrofa nabora dopušta i postojanje nestabilne ravnoteže. Ta pozicija je nestabilna u smislu da najmanje perturbacije mogu uzrokovati da sustav ili prijeđe u stabilno stanje ili se počne pomicati. Stabilna i nestabilna ravnoteža razdvajaju se u točki u kojoj je druga derivacija od F_u također 0, odnosno u degenerativnoj kritičnoj točki. Dakle, podskup C_F lica katastrofe M_F koji se sastoji od degenerativnih kritičnih točki svih parcijalnih funkcija F_u naziva se *skup katastrofa*, a njegova projekcija na prostor parametara naziva se *skup bifurkacija* B_F. U slučaju nabora, C_F je ishodište u $\mathbf{R}^2$, a B_F je ishodište u $\mathbf{R}$.

2.3.1 Gravitacijski stroj

Lijep primjer stabilne i nestabilne ravnoteže je kotač kojem težište nije u geometrijskom središtu, postavljen na nagibu. Radi se o jednom od najjednostavnijih primjera katastrofe nabora. S α označimo kut nagiba, s C označimo centar gravitacije kotača koji se nalazi na unutrašnjem rubu kotača, a s P dodirnu točku kotača i nagiba. Ravnotežna stanja kotača proučavat ćemo s obzirom na različite vrijednosti α. Kotač je u ravnoteži ako se C nalazi

točno iznad P. U ovisnosti o α postoje tri različite situacije u kojima se kotač može nalaziti. Prva mogućnost, prikazana na Slici 2.11a, je da se C nikada ne može nalaziti iznad P, odnosno kotač će se uvijek samo otkotrljati iz kojeg god stanja krene. U drugom slučaju postoji jedna pozicija u kojoj je C iznad P što je vidljivo na Slici 2.11b. Zadnji slučaj je da postoje točno dvije pozicije u kojima se C nalazi iznad P. Prva od njih je stabilna ravnoteža na Slici 2.11c, kada se C nalazi ispod geometrijskog centra kotača, a druga, na Slici 2.11d, je nestabilna.

Dakle, ravnoteža se nikada ne postiže kada se premaši određena kritična vrijednost kuta α. Ispod te kritične vrijednosti postoje dvije pozicije u kojima kotač stoji mirno, stabilna i nestabilna. Kada je u stabilnoj ravnoteži, ima minimalnu potencijalnu energiju i ako ga pomaknemo vratit će se u stanje stabilne ravnoteže. Međutim, kada je kotač u nestabilnoj ravnoteži, najmanji dodir će uzrokovati da se kotač otkotrlja.



(a) Neravnoteža (b) Ravnoteža

(c) Stabilna ravnoteža (d) Nestabilna ravnoteža

Slika 2.11: Položaji kotača na kosini

2.4 Katastrofa šiljka

Česti su sustavi u kojima se pojavljuje katastrofa šiljka, čija je funkcija oblika

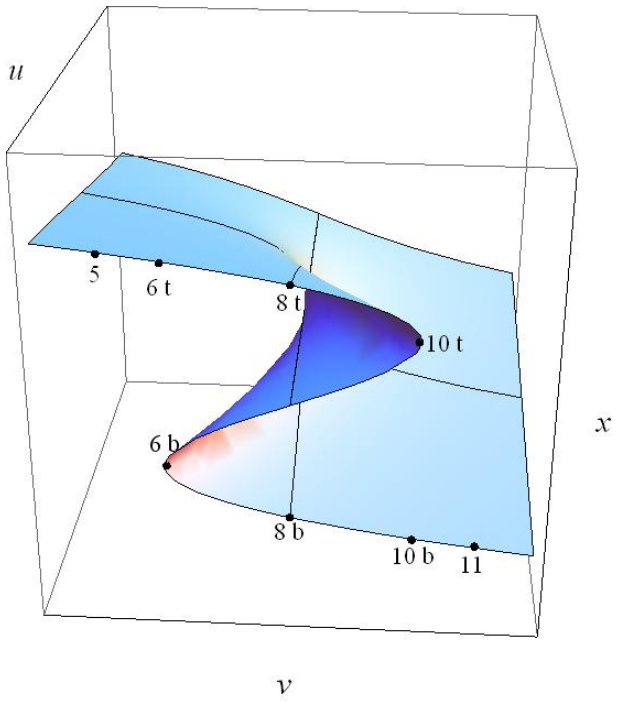
$$F(x; u, v) := x^4 - ux^2 + vx, \tag{2.6}$$

što je ujedno i univerzalna perturbacija od x^4.

Unatoč svojoj jednostavnosti, ima sva osnovna svojstva viših katastrofa, kao što su *modalitet* i *histereza*. Ima dva parametra, u i v, a x označava varijablu. Lice katastrofe

$$M_F = \{(x, u, v) : 4x^3 - 2ux + v = 0\} \tag{2.7}$$

prikazano je na slici 2.12.



Slika 2.12: Lice katastrofe šiljka

Skup katastrofa, odnosno skup degenerativnih kritičnih točki funkcije $F_{u,v}(x)$ dobijemo jednostavno iz sustava

$$\frac{\partial F_{u,v}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_{u,v}}{\partial x^2} = 0. \tag{2.8}$$

Rješavamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$4x^3 - 2ux + v = 0, \quad 12x^2 - 2u, \tag{2.9}$$

iz kojih slijedi da u i v moraju biti oblika:

$$u = 6x^2, \quad v = 8x^3. \tag{2.10}$$

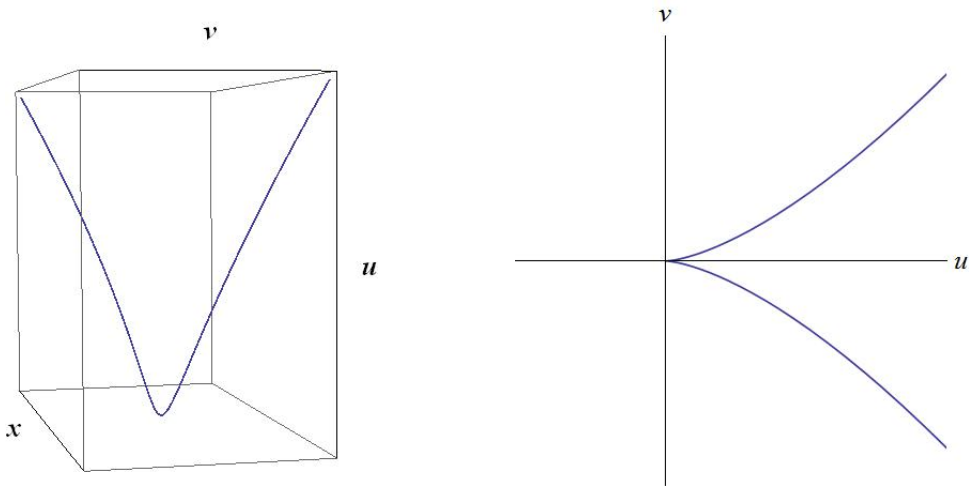
Dobili smo skup

$$C_F = \{(x, 6x^2, 8x^3) : x \in \mathbf{R}\} \tag{2.11}$$

koji ima oblik glatke krivulje (Slika 2.13a). Projiciramo li ju na $u - v$ ravninu vidjet ćemo da ime 'šiljak' dolazi od skupa bifurkacija

$$B_F = \{(6x^2, 8x^3) : x \in \mathbf{R}\} \tag{2.12}$$

koji je Neilova parabola u $\mathbf{R}^2$, odnosno ishodište je nediferencijabilna točka, kako vidimo na Slici 2.13b.

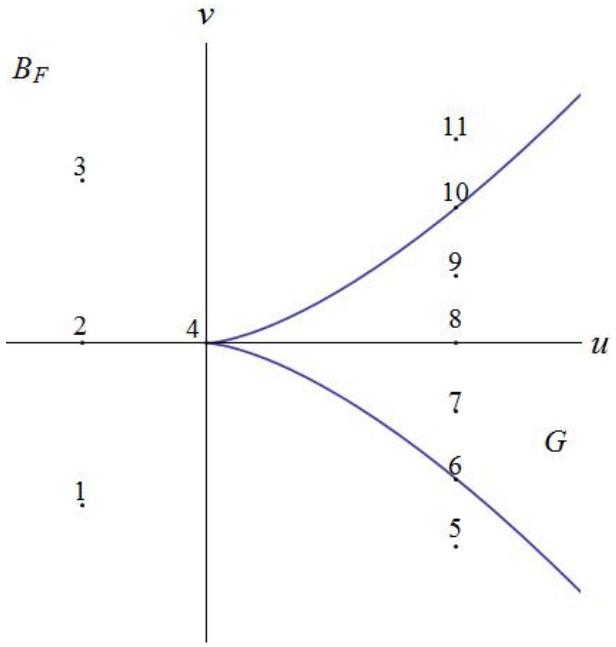


(a) Skup katastrofa šiljka (b) Neilova parabola

Slika 2.13: Skup katastrofa i skup bifurkacija šiljka

Na Slici 2.14 prikazana je projekcija $M_F \to \mathbf{R}^2$, odnosno $(x, u, v) \to (u, v)$. Označimo sa G otvoreni skup koji je omeđen sa B_F. Dio plohe M_F koji se nalazi izvan $B_F \cup G$ odgovara minimumu parcijalnih funkcija $F_{u,v}$, tj. svaka točka iz $\mathbf{R}^2 \setminus (B_F \cup G)$ ima samo jednu prasliku. Najzanimljiviji dio plohe M_F je onaj iznad skupa G, a sastoji se od 3 sloja. Gornji i donji sloj sadrže minimume od $F_{u,v}$, a srednji sloj maksimume.

Ako F interpretiramo kao potencijalnu energiju nekog sustava, minimumi od F predstavljali bi poziciju stabilne ravnoteže. Mjenjamo li parametre u i v tako da ostanemo izvan $(B_F \cup G)$, odnosno krećemo li se od pozicije 1 do 2 pa do 3 na Slici 2.14 sustav ostaje u stanju stabilne ravnoteže. Međutim, promjenimo li parametre u i v tako da prijeđemo B_F dogodit će se nešto neuobičajeno. To možemo vidjeti krenemo li iz pozicije 5 na Slici 2.14 u kojoj je sustav u stanju stabilne ravnoteže. Ovo stanje odgovara poziciji na gornjem sloju plohe M_F na Slici 2.12. Pomičemo li se paralelno s v-osi prema poziciji 6, a zatim 7, 8 i 9 ništa se ne mjenja. No kada dođemo do pozicije 10 sustav postaje nestabilan. Ta pozicija odgovara točki iz C_F koja se nalazi na samom rubu plohe M_F. Varijabla stanja pada paralelno s x-osi na donji sloj plohe M_F. U tom trenutku sustav ponovo postaje stabilan i ostaje takav sve do pozicije 11. Važno je primjetiti kako se nestabilnost u ponašanju sustava pojavljuje točno u trenutku napuštanja G.



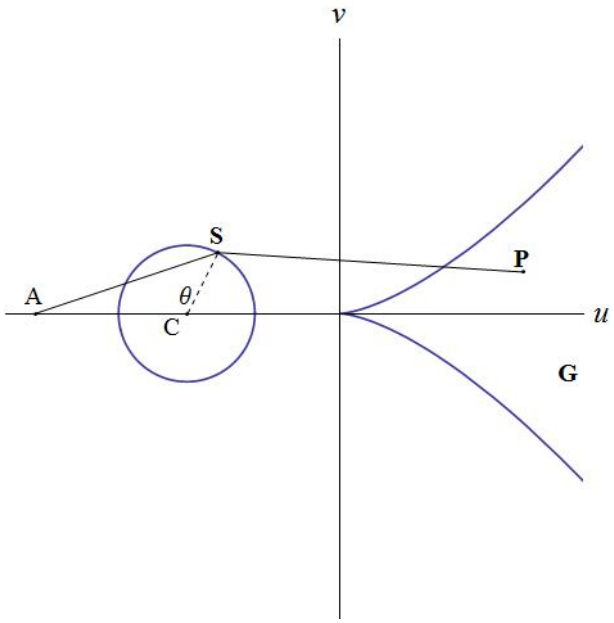
Slika 2.14: Projekcija $M_F \to \mathbf{R}^2$

Srednji sloj plohe M_F na Slici 2.12 predstavlja drugačiji tip ravnoteže. Ta ravnoteža odgovara maksimalnoj potencijalnoj energiji sustava i ona je nestabilna. Najmanja promjena u sustavu uzrokuje skok na jedan od susjednih minimuma na donjem ili gornjem sloju plohe M_F.

Kao što smo spomenuli, katastrofa šiljka očituje dva fenomena koja katastrofa nabora nema, a to su modalnost i histereza. Za iste vrijednosti parametara $(u, v) \in G$ šiljak ima dva stanja stabilne ravnoteže, nazovimo ih x_t i x_b, takva da se (u, v, x_t) i (u, v, x_b) nalaze na gornjem i donjem sloju plohe M_F. To svojstvo nazivamo *bimodalnost*. U kojem od tih stanja se nalazi sustav ovisi o tome kako je u to stanje došao, odnosno ovisi o prošlom stanju sustava. Takvu zavisnost sustava o prošlom stanju nazivamo histereza.

2.4.1 Zeemanov stroj

Zeemanov stroj katastrofe je jednostavan mehanički uređaj koji očituje katastrofu šiljka. Postavimo kotač tako da se slobodno može okretati oko centra C. Za vanjski rub kotača pričvrste se dvije elastične vrpce u točki S. Kraj jedne vrpce pričvrsti se u točki A iznad kotača tako da vrpca bude zategnuta. Kraj druge vrpce označimo s P i njega pomičemo po ravnini na kojoj se nalazi disk. Dok je P izvan ravnine G, točka S kontinuirano prati pokrete od P. Međutim, nakon što P uđe unutar G, pri izlasku iz G kotač će se naglo okrenuti, odnosno točka S će naglo skočiti na suprotnu stranu.



Slika 2.15: Zeemanov stroj katastrofe

Na primjer, krenemo od negativnog v i pomičemo točku P paralelno s v-osi. Točka S na kotaču nalazi se lijevo od dužine AC i nakon ulaska P u G. Kada P pomaknemo dovoljno da napusti G, kotač se naglo okrene te se točka S nađe desno od dužine AC, ali s istom vrijednosti u kao i prije ulaska u G.

Vrijedi napomenuti da se katastrofe nabora i šiljka pojavljuju i u drugim sustavima [3, 14]. Druge elementarne katastrofe također su zapažene u nekim fizikalnim sustavima. Tako se katastrofa leptira očituje u interaktivnom bozonskom modelu, koji se istražuje u nuklearnoj fizici [10].

3 Fazni prijelazi

Pojam faznog prijelaza označava trenutnu promjenu stanja nekog sustava uslijed promjene temperature ili nekog drugog vanjskog čimbenika. Tu nam je dobro poznata transformacija između krutog, tekućeg i plinovitog stanja tvari. Osim toga razni drugi procesi unutar nekog sustava također se nazivaju ovim pojmom. Poznato je da magneti zagrijavanjem gube magnetizam, a hlađenjem ga ponovo vraćaju [15]. Ova promjena nije postepena nego se događa trenutno, pri određenoj temperaturi. No, postoje i razni drugi tipovi faznih prijelaza koji se ne događaju zbog promjene temperature. Zajedničko im je to da se globalna svojstva sustava naglo promjene kada ključan parametar prođe kritičnu vrijednost. Fascinantno je da svi tipovi faznih prijelaza imaju neke zajedničke karakteristike [17]. Pojam faznog prijelaza također se koristi i u ekstremalnoj teoriji grafova. Više o tome se može pronaći u [5].

Matematička teorija o kritičnim fenomenima i znanost o faznim prijelazima isprepletene su i oslanjaju se na ideje iz vjerojatnosti i statističke fizike. Svakom mogućem stanju promatranog sustava dodijeljena je vjerojatnost pojavljivanja, a ponašanje sustava u svakom stanju je analizirano kao funkcija parametara sustava. Vrijednost te funkcije pri kojoj se događa trenutna i intenzivna promjena stanja sustava nazivamo *kritična točka*. Mnoge bitne karakteristike prijelaza u kritičnoj točki ovise o samo nekoliko obilježja sustava [17]. Takva pojava nazvana je *univerzalnost* (eng. universality), što znači da postoje procesi koji su invarijantni na pojedine parametre sustava. Jednostavan matematički model može dobro opisati kvalitativne i kvantitativne odrednice kritičnog ponašanja u stvarnom sustavu čak i ako model dramatično pojednostavljuje interakcije u stvarnom sustavu.

Primjer faznog prijelaza je i *proces grananja*. Takvi procesi se u prirodi događaju spontano kroz evoluciju populacije u vremenu kao rezultat rađanja i umiranja. Proučimo taj proces na najjednostavnijem modelu.

3.1 Proces grananja

Promatramo organizam koji živi neku jedinicu vremena i razmnožava se neposredno prije smrti. Organizam može imati maksimalno dva potomka koja ćemo nazvati 'ljevi' i 'desni' potomak. U trenutku razmnožavanja organizam može

i) ne imati niti jednog potomka,

ii) imati lijevog ali ne desnog potomka,

iii) imati desnog ali ne i lijevog potomka,

iv) imati oba potomka [17].

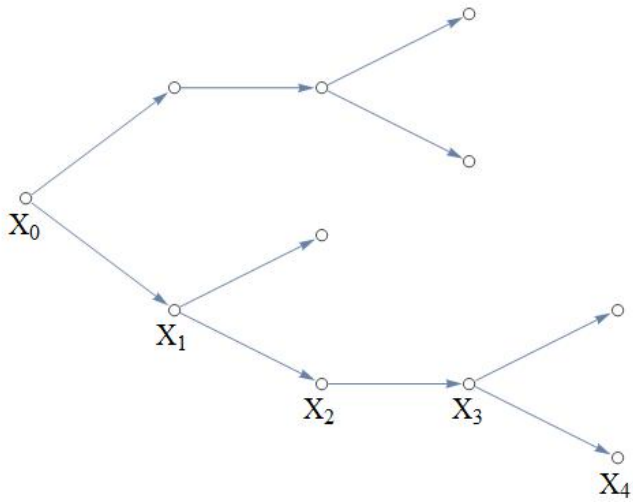
Svaki potomak se rađa s vjerojatnošću p i svaki se rađa neovisno o drugom. Broj $p \in [0,1]$ je mjera plodnosti populacije, tj. vjerojatnost rađanja pojedinog potomka. Broj potomaka svake jedinke iz bilo koje generacije modeliran je slučajnom varijablom Z,

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Broj jedinki u n-toj generaciji populacije za svaki $n \in \mathbf{N}_0$ lako se računa pomoću rekurzije

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=1}^{X_{n-1}} Z_{n,k}, \\ X_0 &= 1, \quad X_1 = Z_{1,1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje je slučajna varijabla $Z_{n,k}$ jednako distribuirana kao Z i predstavlja broj potomaka k-te jedinke iz generacije $(n-1)$.



Slika 3.1: Obiteljsko stablo kao primjer procesa grananja

Pretpostavimo da počinjemo u trenutku 0 s jednim organizmom. Primjer obiteljskog stabla populacije prikazan je na Slici 3.1. Vidimo da ukupno imamo deset potomaka, a da 12 mogućih potomaka nije rođeno. Dakle, vjerojatnost da se prikazano stablo dogodi dana je s $p^{10}(1-p)^{12}$.

Ekstremni slučajevi su za vrijednosti $p = 0$ i $p = 1$. Ako je $p = 0$, tada ni jedan potomak nije rođen i obiteljsko stablo se sastoji samo od prvog organizma. Ako je $p = 1$ svi mogući potomci su rođeni te je obiteljsko stablo beskonačno binarno stablo i populacija živi

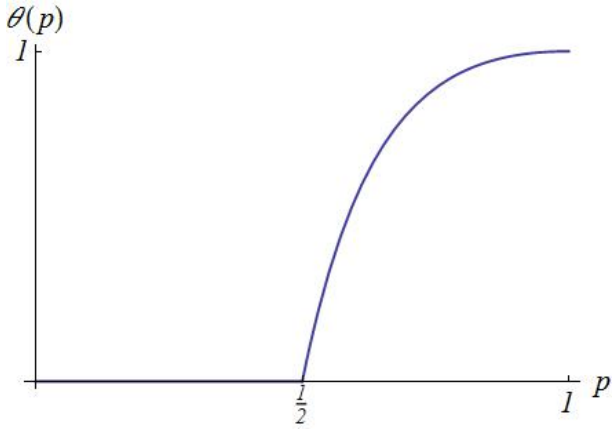
zauvijek. Za sve ostale vrijednosti p između 0 i 1 populacija će možda preživjeti a možda neće. Označimo sa $\theta(p)$ *vjerojatnost preživljavanja*, odnosno vjerojatnost da proces grananja preživi zauvijek kada je plodnost populacije jednaka p.

3.1.1 Kritična točka

Budući da organizam potencijalno ima dva potomka neovisno jedan o drugom s vjerojatnošću p, organizam u prosjeku ima $2p$ potomaka. Ako je $p < \frac{1}{2}$, tada organizam u prosjeku ima manje od jednog potomka, što znači da će populacija izumrijeti. Nasuprot tome, ako je $p \geq \frac{1}{2}$ vjerojatnost da će populacija preživjeti zauvijek iznosi $\theta(p)$. Točnije, može se pokazati da je vjerojatnost preživljavanja dana s

$$\theta(p) = \begin{cases} 0, & \text{za } p \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{p^2}(2p-1), & \text{za } p \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Vrijednost $p = p_c = \frac{1}{2}$ je kritična vrijednost u kojoj se graf od $\theta(p)$ lomi kako je prikazano na Slici 3.2.



Slika 3.2: Vjerojatnost preživljavanja θ u odnosu na plodnost populacije p

Možemo se pitati koja je vjerojatnost $P_k(p)$ da je broj potomaka početnog organizma barem k. Ako postoji barem $k+1$ potomaka, tada svakako postoji i k potomaka, pa zaključujemo da se $P_k(p)$ smanjuje kako k raste. Kada k teži u beskonačnost, $P_k(p)$ se smanjuje do $\theta(p)$. Kada je $p < p_c$ može se pokazati [17] da $P_k(p)$ teži u nulu eksponencijalno, a kada je $p = p_c$ vrijedi

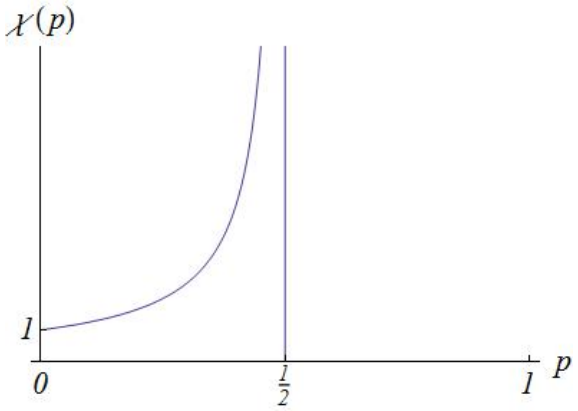
$$P_k(p_c) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi k}} \tag{3.4}$$

što znači da omjer ljeve i desne strane teži u 1 kad k teži u beskonačno, odnosno $P_k(p_c)$ se ponaša kao $\frac{2}{\sqrt{\pi k}}$ kada je k velik.

Veličina $\chi(p)$ označava prosječnu veličinu obiteljskog stabla. Za $\chi(p)$ prema [16] vrijedi:

$$\chi(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-2p}, & \text{za } p \leq \dfrac{1}{2} \\ \infty, & \text{za } p \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Graf funkcije χ je prikazan na Slici 3.3.



Slika 3.3: Prosječna veličina obiteljskog stabla $\chi(p)$

Može se učiniti kontradiktornim da su u $p = p_c$ obiteljska stabla uvijek konačna ($\theta(p_c) = 0$), a prosječna veličina obitelji beskonačna ($\chi(p_c) = \infty$). Ovakva kombinacija se pojavljuje samo u kritičnoj točki, kao što slijedi iz relacije 3.4.

3.1.2 Kritični eksponenti

Razmotrimo sada proces grananja višeg reda, osnosno proces s m potencijalnih potomaka od kojih se svaki pojavljuje s vjerojatnošću p. Tada je prosječan broj potomaka svakog organizma mp. Kritična vrijednost p_c se mjenja u $\frac{1}{m}$. Također i formule za vjerojatnost preživljavanja, za vjerojatnost pojavljivanja barem k potomaka i za prosječnu veličinu obiteljskog stabla su modificirane tako da sadrže parametar m.

Međutim, način na koji $\theta(p)$ teži u 0 u kritičnoj točki, ponašanje $P_k(p_c)$ kada k teži u beskonačno i $\chi(p)$ kada se p približava kritičnoj točki će biti određeni eksponentima koji su

nezavisni od m, odnosno:

$$\begin{aligned} \theta(p) &\sim C_1(p-p_c)^{\beta}, \qquad p \to p_c^{+} \\ P_k(p_c) &\sim C_2 k^{-1/\delta}, \qquad k \to \infty \\ \chi(p) &\sim C_3(p_c-p)^{-\gamma}, \qquad p \to p_c^{-} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Brojevi C_1, C_2 i C_3 su konstante ovisne o m. Eksponenti β, δ i γ imaju istu vrijednost za svaki $m \geq 2$, odnosno $\beta = 1$, $\delta = 2$ i $\gamma = 1$. Zovu se *kritični eksponenti*, univerzalni su i ne ovise o načinu na koji se pojedini organizmi razmnožavaju. Slično svojstvo zapažamo i kod drugih sustava s faznim prijelazima i to je svojstvo primjer ranije spomenute univerzalnosti.

3.2 Van der Waalsov model

Konkretan primjer faznog prijelaza možemo opaziti kod Van der Waalsovog modela prijelaza između tekućeg i plinovitog stanja. Prije nego opišemo Van der Waalsov model objasnit ćemo pojam idealnog plina.

U modelu idealnog plina ne uzima se u obzir privlačna sila između molekula jer privlačenje molekula ima vrlo kratak domet. Pretpostavka je da privlačne sile postaju zanemarive kada se molekule odvoje na udaljenost veću od njihove širine, a u plinu je prosječna udaljenost molekula mnogo veća od toga. Također, molekule su vrlo male, pa se u modelu idealnog plina na njih gleda kao na materijalne točke tj. kao na točke koje posjeduju masu, ali ne i veličinu. Na osnovi ovih pretpostavki možemo izvesti poznatu jednadžbu idealnog plina [18]

$$PV = nRT \tag{3.7}$$

gdje su P, V, T tlak, temperatura i volumen plina, R plinska konstanta, $R = 8.314\mathrm{JK}^{-1}\mathrm{mol}^{-1}$, a n količina tvari.

Većina plinova se ponaša kao idealan plin pri standardnom tlaku i temperaturi, odnosno pri višoj temperaturi i manjoj gustoći. Kada su temperature niže a tlakovi viši, veličina i sile između molekula počinju dolaziti do izražaja pa svojstva idealnog plina prestaju vrijediti.

Nizozemski fizičar Johannes Diderik van der Waals (1837.-1923.) je u svojem proučavanju tekućina u obzir uzeo privlačne sile između molekula te volumen molekula [7]. Tada je volumen prostora u kojem se molekule mogu kretati manji od volumena cijelog spremnika u kojem se nalaze. Tako je od klasične jednadžbe stanja idealnog plina Van der Waals došao do modificirane jednandžbe

$$\Big(P + \frac{\alpha}{V^2}\Big)\Big(V - \beta\Big) = RT \tag{3.8}$$

gdje P predstavlja tlak, V volumen, a T temperatura. Parametri α i β karakteristike su pojedinog plina, bez fizikalne interpretacije.

Na temelju ovih pretpostavki, Van der Waals je pokazao kako se unutar nekog raspona temperature i tlaka fluid nalazi u jednoj od dvije različite gustoće. Promjena između te dvije gustoće je nagla i to su jedina stabilna stanja fluida. S povećanjem temperature razlika u gustoći između tekućeg i plinovitog stanja će se smanjivati.

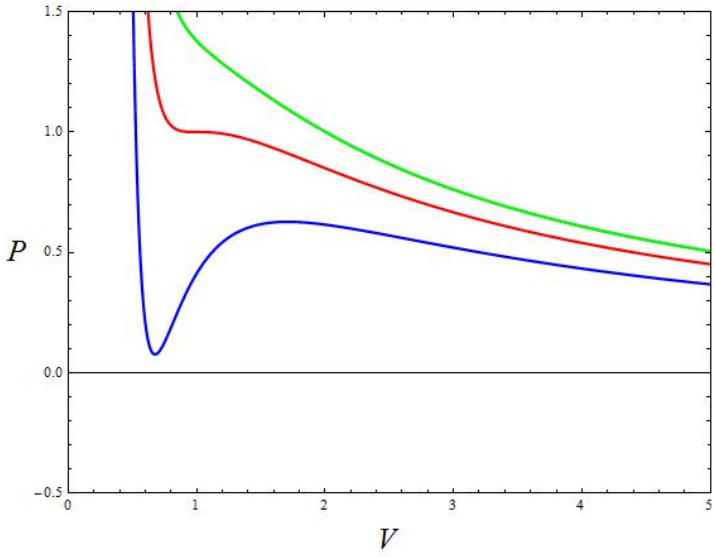
3.2.1 Kritična temperatura

Nagla promjena iz tekućeg u plinovito stanje događa se samo do određene temperature koja se razlikuje od tekućine do tekućine. Iznad te temperature, koju nazivamo *kritična temperatura*, odnosno kritična točka, promjena je postepena i može se uočiti glatki prijelaz iz tekućine u plin bez naglih skokova. Za vodu kritična temperatura iznosi 374°C. Fazni prijelazi kod kojih se događaju iznenadni skokovi u nekom svojstvu sustava, kao što je gustoća, zovu se fazni prijelazi *prvog stupnja*.

Spomenuli smo da se približavanjem kritičnoj točki tekućine ili plina smanjuje razlika u gustoći ta dva stanja. To možemo izraziti i brojčano pa možemo reći da postoji i karakteristična stopa po kojoj se fluid približava kritičnoj temperaturi. Izrazimo li te stope u postotcima dobit ćemo iste stope za različite fluide. Osim toga, postoje i razni drugi sustavi u kojima se približavanje kritičnoj točki događa po istoj stopi. To nas dovodi do zaključka da su fazni prijelazi generičke pojave: događaju se na isti način u potpuno različitim sustavima.

Kritične točke su iznimno osjetljive. Kada se sustav nalazi u blizini kritičnog stanja snažno će odgovarati na smetnje. Teoretski, i najnježniji stisak fluida u kritičnoj točki uzrokovao bi propadanje fluida do nevidljivosti. No, to ne opažamo jer je zbog nestabilnosti kritičnog stanja održavanje fluida u kritičnoj točki jako teško. Osim toga, u kritičnoj točki *toplinski kapacitet* (količina toplinske energije potrebna da se temperatura podigne za jedan stupanj) postaje beskonačan [6]. To znači da bez obzira što zagrijavamo tvar, njezina temperatura se uopće ne mjenja.

Vratimo se sada na Van der Waalsovu jednadžbu stanja plina. Ta jednadžba se uobičajeno prikazuje grafički kao što je prikazano na Slici 3.4.



Slika 3.4: Van der Waalsove izoterme

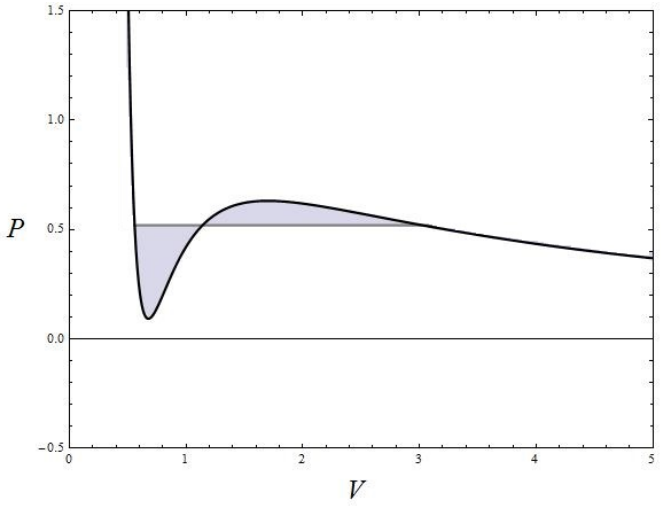
Na slici vidimo graf tlaka P u odnosu na volumen V za različite vrijednosti temperature T. Izoterma u sredini, možemo je označiti s T_c, predstavlja ponašanje fluida pri kritičnoj temperaturi, gornja, označimo je s T_a, pri temperaturi većoj od kritične, a donja, označimo je s T_b, pri temperaturi manjoj od kritične. Možemo vidjeti da postoji više mogućih ishoda ako se pri konstantnoj temperaturi smanjuje tlak fluida:

i) Ako je temperatura $T_a > T_c$, volumen će se glatko povećavati.

ii) Ako je temperatura jednaka T_c, tada je volumen V neprekidna, ali ne i diferencijabilna funkcija od P.

iii) Ako je temperatura $T_b < T_c$, ista vrijednost tlaka se pojavljuje za različiti volumen fluida, te jednadžba ne daje volumen kao funkciju tlaka. Za male promjene volumena događaju se veliki skokovi u tlaku i dolazi do nagle promjene iz tekućeg u plinovito stanje.

Treći slučaj, koji se događa u Van der Waalsovom modelu nije u skladu s onim što se događa u stvarnosti. Za postizanje ravnoteže bitno je da tlak P ne raste zajedno s volumenom V. Škotski fizičar James Clerk Maxwell (1831.-1879.) je predložio takozvano *pravilo jednakih površina*: dio originalne krivulje zamjeni se horizontalnom ravnom linijom kako je prikazano na Slici 3.5, tako da osjenčana područja imaju jednaku površinu.



Slika 3.5: Pravilo jednakih površina

Kod osjenčanih područja vidimo dva padajuća djela krivulje. Desni dio odgovara prehladnom plinu a lijevi pregrijanoj tekućini. Između ta dva dijela vidimo rastući dio krivulje koji upućuje na porast tlaka i volumena u isto vrijeme, dok je za stabilnu ravnotežu potrebno da porastom volumena tlak pada.

Ako povećavamo volumen spremnika s tekućinom, i pri tome je temperatura konstantna, u jednom trenutku voda počinje isparavati i spremnik ispunjavaju dvije odvojene faze fluida. Dok se u spremniku nalaze obje faze fluida, a volumen spremnika se povećava, tlak ostaje konstantan te nastavlja padati tek nakon što sva tekućina ispari. Zbog toga se na mjestu oscilacija izoterma zamjeni određenom izobarom. Jednakost područja iznad i ispod izobare Maxwell opravdava činjenicom da ona odgovaraju mehaničkom radu, te rad izvršen na sustavu smanjivanjem volumena treba biti jednak radu koji je obavio sustav pri povećanju volumena.

Zanimljivo je pitanje kako se približavanjem kritičnoj točki različite veličine mijenjaju. Te promjene možemo izraziti slično kao kod procesa grananja pomoću kritičnih eksponenata. Spomenuli smo već da razlika u volumenu tekućeg i plinovitog stanja opada kako se temperatura približava kritičnoj točki. To smanjivanje razlike u volumenu možemo opisati eksponentom β tako da vrijedi

$$V_{\text{plin}} - V_{\text{tekućina}} \sim (T_c - T)^{\beta}. \tag{3.9}$$

Ovisnost promjene volumena o promjeni tlaka opisana je kritičnim eksponentom δ na način da je

$$P - P_c \sim (V - V_c)^{\delta}. \tag{3.10}$$

Ranije je spomenuto kako različite vrste faznih prijelaza imaju neke zajedničke karakteristike. Upravo je kritični eksponent za pojedino svojstvo fluida po svojoj vrijednosti jednak za različite fluide. Iako Van der Waalsov model nije točno predvidio te eksponente, eksperimentalni rezultati također pokazuju da je za različite fluide vrijednost kritičnog eksponenta ista.

3.2.2 Katastrofa šiljka u faznom prijelazu vode iz tekućeg u plinovito stanje

U nastavku ćemo pokazati da se u jednadžbni stanja plina (3.8) očituje katastrofa šiljka.

Neka P_c, V_c i T_c označavaju kritične vrijednosti tlaka, volumena i temperature, redom. Iz jednadžbe stanja plina dobijemo da je

$$P = \frac{RT_c}{V_c - \beta} - \frac{\alpha}{V_c^2}. \tag{3.11}$$

Na kritičnoj temperaturi vrijedi da su prva i druga derivacija od P po V jednake 0, odnosno

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V_c}\right)_T = 0 \quad i \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V_c^2}\right)_T = 0$$

budući da je kritična točka od P u ovisnosti o V sedlasta točka. Iz toga dobivamo da je

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V_c}\right)_T = -\frac{RT_c}{(V_c - \beta)^2} + \frac{2\alpha}{V_c^3} = 0$$

iz čega slijedi

$$\frac{RT_c}{(V_c - \beta)^2} = \frac{2\alpha}{V_c^3}. \tag{3.12}$$

Deriviramo P po V drugi puta,

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V_c^2}\right)_T = \frac{2RT_c}{(V_c - \beta)^3} - \frac{6\alpha}{V_c^4}$$

odakle dobijemo

$$\frac{2RT_c}{(V_c - \beta)^3} = \frac{6\alpha}{V_c^4}. \tag{3.13}$$

Podjelimo li (3.12) sa (3.13), iz izraza

$$\frac{V_c}{3} = \frac{V_c - \beta}{2},$$

slijedi da je volumen u kritičnoj točki jednak

$$V_c = 3\beta. \tag{3.14}$$

Uvrstimo li ovo rješenje u jednadžbu (3.12) dobijemo

$$\frac{2\alpha}{(3\beta)^3} = \frac{RT_c}{(2\beta)^2},$$

te je kritična temperatura jednaka

$$T_c = \frac{8\alpha}{27\beta R}. \tag{3.15}$$

Uvrstimo li sada izraze za V_c i T_c u jednadžbu stanja plina (3.11) dobijemo da je tlak u kritičnoj točki jednak

$$P_c = \frac{8\alpha}{54\beta^2} - \frac{\alpha}{9\beta^2} = \frac{\alpha}{27\beta^2}. \tag{3.16}$$

Iz ovog jednostavnog izračuna slijedi da je kritična točka oblika

$$\left(\frac{\alpha}{27\beta^2}, 3\beta, \frac{8\alpha}{27\beta R}\right). \tag{3.17}$$

Normaliziramo tu točku na $(1,1,1)$ tako da stavimo

$$P' = \frac{P}{P_c}, \quad V' = \frac{V}{V_c}, \quad T' = \frac{T}{T_c}.$$

Uvrštavanjem P', V' i T' u jednadžbu (3.11) dobijemo

$$\Big(\frac{P'\alpha}{27\beta^2} + \frac{\alpha}{9\beta^2 V'^2}\Big)\Big(3\beta V' - \beta\Big) = \frac{8\alpha T'}{27\beta}.$$

Sređivanjem prethodnog izraza dolazimo do reducirane Van der Waalsove jednadžbe stanja plina

$$\big(P' + \frac{3}{V'^2}\big)\big(V' - \frac{1}{3}\big) = \frac{8}{3}T'. \tag{3.18}$$

Kako bismo dobili intuitivniji opis stanja u kojem se nalazi fluid zamijenimo volumen V' s gustoćom X, odnosno postavimo $V' = \frac{1}{X}$. Na kraju premjestimo ishodište u točku $(1,1,1)$ oko koje se sve događa tako da postavimo

$$p = P' - 1, \quad x = X - 1, \quad t = T' - 1. \tag{3.19}$$

Uvrstimo (3.19) u jednadžbu

$$\Big(P' + 3X^2\Big)\Big(\frac{1}{X} - \frac{1}{3}\Big) = \frac{8}{3}T' \tag{3.20}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}\Big(p+1+3(x+1)^2\Big)\Big(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\Big) &= \frac{8}{3}(t+1)\\ (3x^2+6x+4+p)\frac{2-x}{3x+3} &= \frac{8}{3}(t+1)\\ x^3-\frac{8}{3}x+\frac{p}{3}x-\frac{2p}{3}-\frac{8}{3} &= -\frac{8t}{3}x-\frac{8}{3}x-\frac{8t}{3}-\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Dobivamo

$$x^3+\frac{8t+p}{3}x+\frac{8t-2p}{3}=0, \tag{3.21}$$

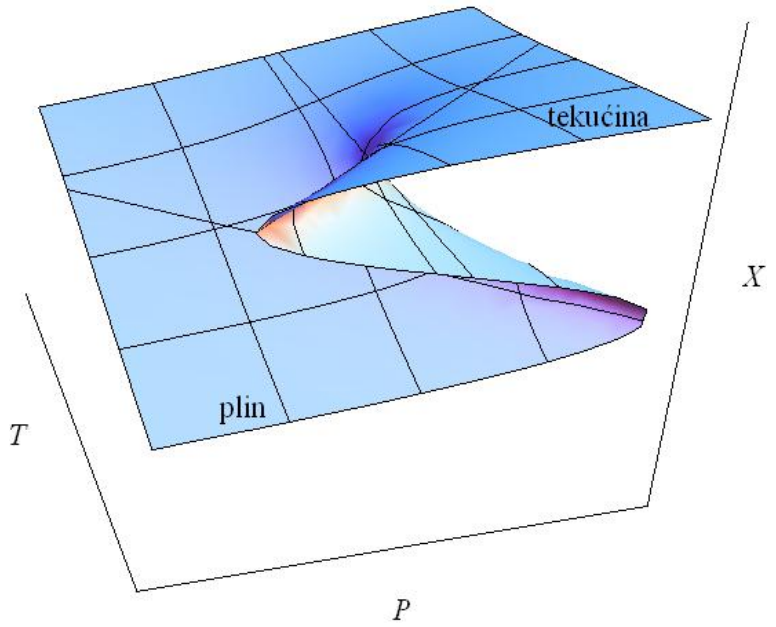
ili

$$x^3+ax+b=0, \tag{3.22}$$

gdje je

$$a=\frac{8t+p}{3}, \quad b=\frac{8t-2p}{3}. \tag{3.23}$$

U relaciji (3.22) odmah prepoznajemo algebarski oblik lica katastrofe šiljka iz Poglavlja 2.4. To možemo vidjeti i na Slici 3.6, pri čemu tlak i temperatura ne mogu biti negativni.



Slika 3.6: Lice katastrofe šiljka kod prijelaza iz tekućeg u plinovito stanje

Primjena Maxwellovog pravila jednakih površina pripisuje fluidu jedinstveni volumen (dakle i gustoću) za svaku temperaturu i tlak, osim u točkama promjene. Nacrtamo li to u novim koordinatama nećemo dobiti istu sliku. Skup bifurkacija će biti krivulja u (a, b)-ravnini kojoj je a-os tangenta u $(0, 0)$, a skup katastrofa ne možemo tako jednostavno napisati u terminima x, a i b.

3.3 Isingov model feromagnetizma

Poznato je da magneti zagrijavanjem gube magnetizam. Gubljenje magnetizacije zbog topline nije stupnjevit proces nego se događa na određenoj temperaturi i to je fazni prijelaz [8]. Taj proces ima velike sličnosti s načinom na koji fluid gubi svoje tekuće ili plinovito stanje u kritičnoj točki [4]. Kritična temperatura magneta nazvana je *Curiejeva temperatura*, a ime joj je dao francuski fizičar Pierre Weiss (1865.–1940.) u sjećanje na svojeg sunarodnjaka.

Spomenuli smo da je fazni prijelaz fluida nazvan fazni prijelaz prvog stupnja jer se neko svojstvo (gustoća fluida) naglo mjenja u kritičnoj točki, odnosno događa se iznenadni skok u nekom svojstvu sustava. Kod magneta svojstvo koje je karakteristično za cijeli sustav, a to je u ovom slučaju magnetizacija, se ne mjenja nego postupno pada u nulu kako se mjenja kontrolni parametar, odnosno temperatura. Takva vrsta faznog prijelaza naziva se *kritični* prijelaz, ili prijelaz *drugog stupnja*. To je pravi fazni prijelaz jer postoji točno određena točka promjene između nemagneta iznad Curiejeve temperature i magneta ispod nje.

No, atomi u magnetu su mirno posloženi jedan do drugog, nepokretni su i nimalo ne podsjećaju na kaotično kretanje čestica u fluidu. Međutim, Weissova teorija na sličan način objašnjava ovaj fazni prijelaz kao što je Van der Waals objasnio fazni prijelaz kod fluida. Kako bi to objasnili, razmotrit ćemo model magnetizma koji je razvio njemački fizičar Wilhelm Lenz (1888.-1957.). Uzmimo za primjer komad željeza. Svaki od njegovih atoma pojedinačno djeluje kao mali magnet. Svaki atom zamislimo kao kompas s iglom koje fizičari nazivaju *spinovi*. Svaki spin dobiva orjentaciju s obzirom na magnetska polja koja stvaraju ostali spinovi oko njega, odnosno svaki spin utječe na spinove svojih bliskih susjeda. Logično je tada da je najstabilnije stanje ono u kojem svi spinovi pokazuju u istom smjeru.

Isto kao što razoran utjecaj topline utječe na atome u fluidu, tako utječe i na sposobnost spinova da se postroje jedni uz druge. Dok su bili postrojeni, svaki atom je tvorio malo magnetsko polje, a svi skupa su činili jedan veliki magnet. Kada zbog utjecaja topline spinovi počnu pokazivati u slučajnim smjerovima, svako malo magnetsko polje se međusobno neutralizira, te željezo postaje nemagnetsko. To se ne događa naglo, nego magnetizacija postepeno opada prema nuli kako se temperatura približava Curiejevoj temperaturi.

3.3.1 Kristalna rešetka

Razmotrimo sada puno jednostavniji model magneta. Uzmemo za primjer komad željeza na kojeg gledamo kao na skup atoma čije su pozicije fiksirane kao u *kristalnoj rešetki*. Zamislimo spinove kao vektore koji u atomu željeza mogu biti orijentirani u samo dva smjera, nazovimo ih radi jednostavnosti "gore" i "dolje". Tada susjedni spinovi imaju isti smjer, dok im je orjentacija ista ili suprotna.

Svakom mogućem poretku spinova dodjeljena je određena energija. Budući da sustav uvijek teži tome da bude u stanju minimalne energije, a svaki atom teži tome da su mu spinovi orijentirani isto kao i neposredni susjedi, upravo je poredak u kojem svi spinovi imaju istu orjentaciju poredak s minimalnom energijom. Kako se povećava broj susjednih spinova koji su orjentirani u suprotnom smjeru, energija sustava se povećava, pa se vjerojatnost pojavljivanja takvog poretka smanjuje. Ako postoji vanjsko magnetsko polje koje također može pokazivati gore ili dolje, spinovi će težiti tome da budu orijentirani u istom smjeru kao vanjsko polje. Tada je energija još veća što je više spinova orijentirano u suprotnom smjeru od vanjskog polja.

Budući da je poredak s većom energijom manje vjerojatan, spinovi imaju tendenciju da su orijentirani u istom smjeru kao i njihovi neposredni susjedi, te u smjeru u kojem je vanjsko polje. Kada više spinova pokazuje gore nego dolje, kažemo da feromagnet ima pozitivnu magnetizaciju.

Uzmemo li u obzir samo energiju, vjerojatnije je da će prevladati poredak s više spinova okrenutih u istom smjeru. Međutim, povećanje temperature utječe na spinove te se smanjuje broj spinova koji gledaju u istom smjeru. Kada postoji vanjsko magnetsko polje prevladat će utjecaj energije i postojat će barem nekakva magnetizacija neovisno koliko je visoka temperatura. Ako vanjskog magnetskog polja nema, magnetizacija će postojati samo ispod određene kritične temperature.

U Isingovom modelu modeliramo rešetku atoma sa $\mathbf{Z}^d$ čiji vrhovi predstavljaju pozicije atoma, odnosno spinova, koji je u vrhu x određen brojem $+1$ ako je spin orijentiran prema gore, ili -1 ako je spin orijentiran prema dolje. Određeni broj odabran za x označimo sa σ_x, a skup svih brojeva, po jedan za svaki x iz rešetke, nazivamo *konfiguracija* Isingovog modela i označava se sa σ. Konfiguracija σ je funkcija koja ide s rešetke u skup $\{-1, 1\}$.

Svakoj konfiguraciji σ dodjeljena je određena energija. Ako ne postoji vanjsko polje energija od σ se sastoji od sume umnožaka $-\sigma_x\sigma_y$, gdje su (x, y) parovi susjednih vrhova. Vrijednost svakog izraza je -1 ako je $\sigma_x = \sigma_y$, a $+1$ u suprotnom, pa je energija veća što je veći broj susjednih spinova koji ne gledaju u istom smjeru. Ako postoji vanjsko polje vrijednosti $h \in \mathbf{R}$ tada na energiju dodatno utječe izraz $-h\sigma_x$ koji je veći što je više spinova

sa suprotnim predznakom od h. Slijedi da je energija $E(\sigma)$ konfiguracije σ definirana na način

$$E(\sigma) := -\sum_{(x,y)} \sigma_x \sigma_y - h \sum_x \sigma_x, \tag{3.24}$$

gdje prva suma ide po svim parovima susjednih vrhova, a druga suma po svim vrhovima i h je realan broj koji može biti pozitivan, negativan ili nula, s petpostavkom da je rešetka $\mathbf{Z}^d$ dovoljno velika ali konačna.

Svakoj konfiguraciji dodjeljena je vjerojatnost koja se smanjuje kako se energija povećava. Vjerojatnost pojavljivanja konfiguracije σ modelirana je izrazom

$$P(\sigma) = \frac{1}{Z} e^{-E(\sigma)/T}, \tag{3.25}$$

gdje je T ne negativan parametar koji predstavlja temperaturu. Negativan predznak dodjeljuje veću vjerojatnost stanjima s manjom energijom. Konstanta Z je defenirana kao

$$Z = \sum_\sigma e^{-E(\sigma)/T},$$

a sumira se po svim mogućim konfiguracijama σ na konačnom podskupu od $\mathbf{Z}^d$. Konstanta Z je potrebna kako bismo dobili vjerojatnost manju od 1.

Ovako definirana vjerojatnost se smanjuje kako se energija konfiguracije povećava. Kada je T velik, svi brojevi $e^{-E(\sigma)/T}$ su blizu 1, pa su sve vjerojatnosti približno jednake. Tako modeliramo temperaturne fluktuacije, jer s povećanjem temperature vjerojatnost različitih konfiguracija postaje slična.

Vjerojatnost pojavljivanja konfiguracija s malom energijom je veća ali takvih konfiguracija je mnogo manje od onih koje imaju veću energiju. Koja će od tih konfiguracija prevladati ovisi o temperaturi T.

3.3.2 Curiejeva temperatura

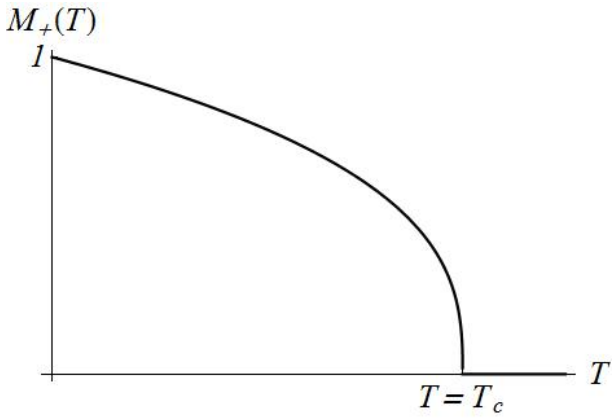
Uzmimo vanjsko polje h, temperaturu T i neku konfiguraciju s vjerojatnostima kako su prethodno definirane. *Magnetizacija* $M(h,T)$ definirana je tako da bude očekivana vrijednost spina σ_x u vrhu x. Ako je magnetizacija pozitivna, tada je većina spinova okrenuta u pozitivnom smjeru i sustav je magnetiziran. Zbog simetrije vrijedi $M(-h,T) = -M(h,T)$ za svaki h i T. Kada je $h = 0$ magnetizacija je 0. Ako je $h \neq 0$ najvjerojatnija je konfiguracija sa spinovima koji imaju isti smjer i orjentaciju kao i h, te vrijedi

$$M(h,T)\begin{cases} <0, & \text{ako je } h<0 \\ =0, & \text{ako je } h=0 \\ >0, & \text{ako je } h>0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Spontana magnetizacija $M_+(T)$ je magnetizacija koju neka tvar ima u odsutnosti vanjskog magnetskog polja. Ona uvijek ovisi o tempretauri T kako je prikazano na Slici 3.7, odnosno pozitivna je za $T < T_c$ i nula za $T > T_C$. Kada je $T = T_c$, $M_+(T)$ nije diferencijabilna. Spontana magnetizacija nestaje kako temperatura T teži Curievoj točki T_c na način da je

$$M_+(T) \sim C(T_c - T)^\beta, \quad T \to T_c^-, \tag{3.27}$$

gdje je β kritični eksponent.

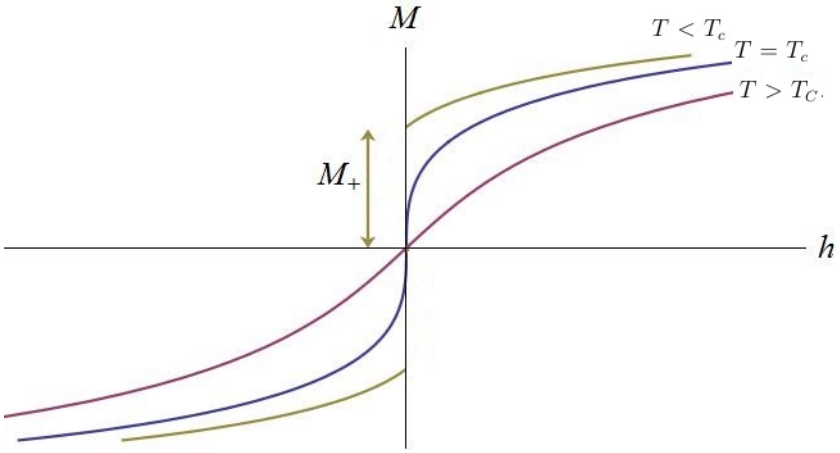


Slika 3.7: Spontana magnetizacija u odnosu na temperaturu

Zanimljivo je pitanje što se dogodi ako je u početku vanjsko polje različito od nule i onda smanjeno na nulu, odnosno je li spontana magnetizacija, definirana kao

$$M_+(T) = \lim_{h\to 0^+} M(h,T), \tag{3.28}$$

pozitivna ili nula? Ako je $M_+(T)$ pozitivna, magnetizacija ostaje i nakon što vanjsko polje nestane. U tom slučaju postoji prekid grafa od M u odnosu na h u $h = 0$, što možemo vidjeti na Slici 3.8.



Slika 3.8: Spontana magnetizacija u odnosu na h

Kritični eksponent δ opisuje način na koji magnetizacija opada u nulu kako se vanjsko polje smanjuje prema nuli kada je $T = T_c$, odnosno

$$M(h, T_c) \sim Ch^{1/\delta}, \quad h \to 0^+. \tag{3.29}$$

Za $d = 3$ još nije dokazano da je spontana magnetizacija na kritičnoj temperaturi jednaka 0. Iako se vjeruje da je tako, to i dalje ostaje otvoren problem u fizici.

3.3.3 Jednadžba stanja magneta

Jednadžba stanja magneta je prema [11] oblika

$$\tanh \eta = \frac{T}{T_c}\eta - \frac{\mu_B h}{\kappa T_c} \tag{3.30}$$

gdje je h vanjsko magnetsko polje a η reparametrizacija magnetizacije M, odnosno

$$\tanh \eta = \frac{M}{M_0}. \tag{3.31}$$

Veličine M_0, μ_B, κ, i T_c su konstante. Prijelaz iz magnetizacije u ne magnetsko stanje događa se kada temperatura T prijeđe T_c. Stavimo da je

$$\frac{T - T_c}{T_c} = \frac{A}{3}, \quad -\frac{\mu_B h}{\kappa T_c} = \frac{B}{3},$$

pa jednadžba stanja poprima oblik

$$\tanh \eta = \left(\frac{A}{3} + 1\right)\eta + \frac{B}{3}. \tag{3.32}$$

Razvoj u Taylorov red funkcije $\tanh(x)$ je oblika

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \cdots, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

pa razvijemo li $\tanh\eta$ u Taylorov red dobijemo

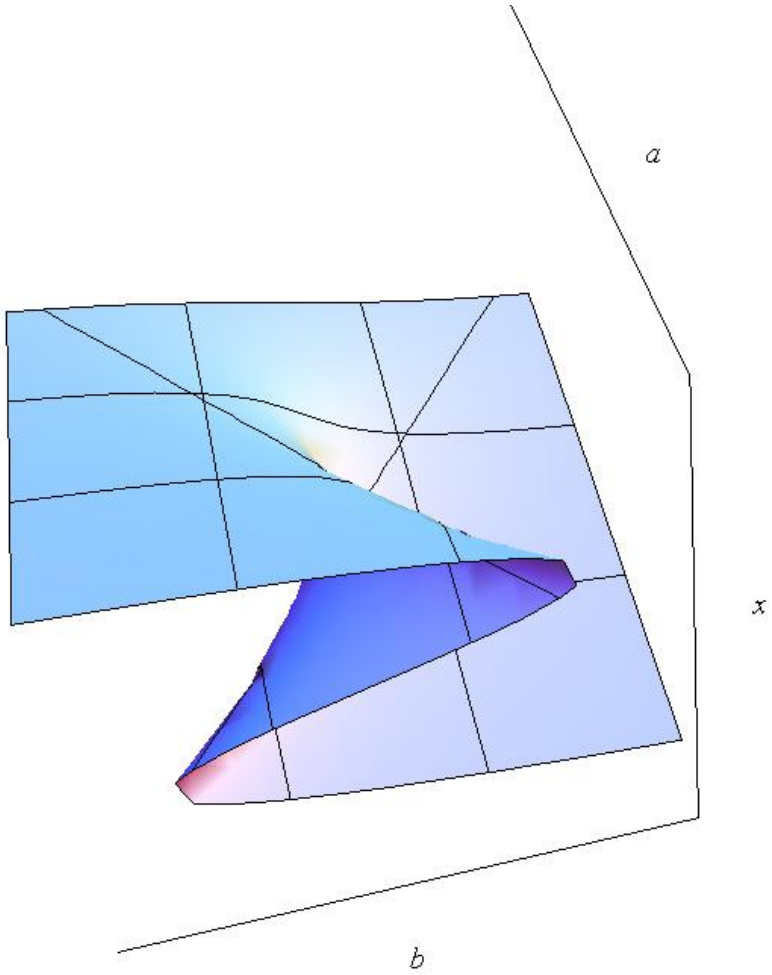
$$\begin{aligned} \tanh\eta &= \eta - \frac{1}{3}\eta^3 + \frac{2}{15}\eta^5 + \cdots \\ &= \eta - \frac{1}{3}\eta^3 + t(\eta). \end{aligned}$$

Jednadžba stanja postaje

$$\eta - \frac{1}{3}\eta^3 + t(\eta) = \eta + \frac{A}{3}\eta + \frac{B}{3},$$

odnosno

$$0 = \frac{1}{3}\eta^3 - t(\eta) + \frac{A}{3}\eta + \frac{B}{3}.$$



Slika 3.9: Lice katastrofe šiljka za jednadžbu stanja magneta

Nakon daljnih supstitucija, kako je detaljnije objašnjeno u [13], jednadžba stanja dobiva oblik

$$\frac{1}{3}(x^3 + ax + b) = 0 \tag{3.33}$$

odnosno

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{3.34}$$

gdje x označava magnetizaciju, a temperaturu a b vanjsko polje. Vidimo da smo ponovo dobili površinu katastrofe šiljka prikazanu na Slici 3.9.

4 Zeemanov model tržišta

4.1 Tržište kapitala

Tržišta kapitala su dio financijskih tržišta na kojima poduzeća zadovoljavaju najveći dio svojih potreba za novčanim sredstvima. Dijelimo ga na tržište kredita i tržište vrijednosnih papira. Upravo je tržište vrijednosnih papira ono što smatramo tržištem kapitala u užem smislu, a dijeli se na primarno i sekundarno tržište. Primarno je ono tržište na kojem se vrijednosni papiri nude investitorima prvi puta radi prikupljanja novčanih sredstava i izvor su financiranja poduzeća. Na sekundarnom tržištu se trguje već emitiranim vrijednosnim papirima te isti kod takvih transakcija samo mijenjaju vlasnika. Sekundarno tržište omogućuje likvidnost vrijednosnih papira.

Glavni *financijski instrumenti* na sekundarnom tržištu su *dionice* i *obveznice*, ali i mnogi *izvedeni financijski instrumenti* (*derivati*), primjerice *opcije*, *budućnice* itd. Dionice su vlasnički vrijednosni papiri i predstavljaju udio u vlasništvu kompanije. Obveznice su dužnički vrijednosni papir. Opcije su izvedeni financijski instrumenti koji vlasniku daju pravo ali ne i obvezu da kupi ili proda financijski instrument.

Tehnike kojima se procjenjuje vrijednost dionica i drugih vrijednosnih papira u ekonomiji se dijele na fundamentalnu i tehničku analizu. Tehnička analiza podrazumjeva predviđanje cijena vrijednosnica u budućnosti na osnovu cijena iz prošlosti dok se fundamentalna analiza temelji na ekonomskoj logici. Sudionike na tržištu kapitala možemo podijeliti na fundamentaliste i špekulante [12]. Špekulanti nastoje zaraditi na kratkotrajnim promjenama cijena. Može se reći da oni uglavnom ne analiziraju kvalitetu dionice nego analiziraju raspoloženje javnosti i očekivani trend na tržištu. Fundamentalisti iscrpnom analizom stvaraju dugoročne strategije kupnje i prodaje dionica. Oni prije ulaganja proučavaju isplativost ulaganja, mogućnost rasta dionice, stanje na burzi itd.

Druga podjela sudionika na tržištu kapitala je na *bikove* i *medvjede*. Prvi očekuju rast cijena dionica te stoga kupuju dionice, dok drugi očekuju pad cijena dionica pa ih prodaju. Jedan sudionik istovremeno se može ponašati kao bik za jednu vrstu imovine i kao medvjed za drugu vrstu.

4.2 Nestabilnost burze

Burzovni slomovi su sastavni dio tržišta. Jedan od prvih dokumentiranih slomova je balon cijena lukovica tulipana, što se zbilo 1636. godine u Nizozemskoj. Nakon toga zabilježeni su i drugi slomovi, kao što je to velika depresija 1929 godine, ili balon internetskih kompanija

(engl. dot-com bubble) na prijelazu prošlog stoljeća. Na crni ponedjeljak 19. listopada 1987. gotovo sve svjetske burze zabilježile su dotad najveće padove. Zbog toga su kroz povijest ekonomisti uvijek težili pronalaženju teorije koja će predvidjeti uspone i padove tržišta prije nego se oni dogode. Razvijeni su brojni modeli za predviđanje cijena, no jedna od središnjih tvrdnji u teoriji tržišnog rizika i ekonomiji uopće, 'hipoteza učinkovitog tržišta' [9], sugerira da samo predviđanje cijena utječe na cijene. Ta je hipoteze iskazana u tri forme. Slaba forma te hipoteze nam kaže kako nije moguće predvidjeti buduće cijene dionica na osnovi njihovih predhodnih vrijednosti, odnosno da ne možemo pobijediti tržište tehničkom analizom, a umjerena forma kaže da to ne možemo ni fundamentalnom analizom. Jaka forma nam govori da na efikasnom tržištu sve informacije, uključujući i privatne, trenutno utječu na cijenu.

Nepredvidljivo ponašanje burze može se uspješno objasniti matematičkim modelom baziranim na teoriji katastrofe [21]. Stanje burze je najlakše vidjeti iz kretanja *burzovnih indeksa*. Spomenimo da je jedan od najznačajnijih burzovnih indeksa američki indeks Dow-Jones, koji se bazira na vrijednosti 30 najvećih američkih tvrtki. Odaberemo indeks I, na primjer Dow-Jones indeks. Tada je $J = I' = \frac{dI}{dt}$ stopa promjene indeksa. U tom slučaju $J = 0$ predstavlja statičko tržište, $J > 0$ predstavlja bikovsko tržište, a $J < 0$ medvjeđe tržište. Dakle, varijablu J možemo interpretirati kao varijablu čija vrijednost ovisi o dominantnom raspoloženju investitora (medvjeđe ili bikovsko tržište). U isto vrijeme postoji i *povratna informacija* jer poznavanje stope promjene J utječe na investitore. Označimo sa C razinu špekulacije na tržištu, odnosno udio tržišta na kojem trguju špekulanti. Sa F označimo razinu ponude i potražnje fundamentalista za dionicama, odnosno pozitivan F predstavlja višak potražnje fundamentalista za dionicama, a negativan F predstavlja višak ponude fundamentalista za dionicama.

Polazeći od tri opisana parametra, kretanje cijena vrijednosnica na burzi možemo opisati na sljedeći način. Stopa promjene burzovnog indeksa J reagira na razinu špekulacije C i na potražnju fundamentalista F puno brže nego C i F na J. Vrijeme reagiranja za C mogu biti i sati, ali puno vjerojatnije dani ili tjedni, dok vrijeme reagiranja od F mogu biti tjedni ili mjeseci zbog iscrpne analize koju fundamentalisti obavljaju prije donošenja odluke o kupnji ili prodaji.

Nadalje, ako su špekulanti na burzi u manjini, a na tržištu dominiraju dobro obaviješteni investitori tada će jednaka ponuda i potražnja držati indeks nepromjenjen. Višak potražnje tada će povećati indeks, a višak ponude će indeks smanjiti.

Nestabilnost na tržištu nastaje ako je razina špekulacije C velika. Pretpostavimo da su ponuda i potražnja od strane fundamentalista za dionicama jednake, odnosno da je $F = 0$. Tada će stopa promjene indeksa biti nula, odnosno $J = 0$ će biti ravnotežno stanje za

J, ali zbog prisutnosti velike količine špekulativnog novca to će biti nestabilna ravnoteža. To znači da će bilo koja mala promjena u indeksu, pozitivna ili negativna, biti trenutno pojačana djelovanjem špekulanata. Ako indeks počne rasti, ubrzo će biti u stalnom porastu, odnosno tržište će postati bikovsko. Dakle, J će prijeći u stanje stabilne ravnoteže kao $J > 0$. Ako indeks počne padati, tada će J brzo prijeći u drugo stanje stabilne ravnoteže, odnosno medvjeđe tržište gdje je $J < 0$.

Ovakav, gore opisani, model tržišta uključuje mogućnost nagle, trenutne i intenzivne, promjene cijena vrijednosnica koje kotiraju na burzi. Iz gornjeg, kvalitativnog, opisa slijedi da ta promjena ima sva obilježja faznog prijelaza te da odgovara katastrofi šiljka. Do tog modela tršišta došao je engleski matematičar E. Zeeman u svojem radu *On the unstable behaviour of stock exchanges* [20].

Na Slici 4.1 vidimo lice katastrofe šiljka koje slikovito prikazuje dinamiku burze. Ako potražnja fundamentalista za dionicama premašuje ponudu, odnosno ako je F velik, tada će potražnja fundamentalista za kupnjom nadjačati suprotan utjecaj na tržište i osigurati bikovsko tržište, što na Slici 4.1 predstavlja rub na gornjem sloju lica katastrofe. Suprotno tome, medvjeđe tržište je prikazano kao rub donjeg sloja plohe.

Pretpostavimo sada da su se fundamentalisti povukli s bikovskog tržišta, odnosno ponuda dionica od strane fundamentalista je veća od njihove potražnje za dionicama. Ako se u tom slučaju na burzi nalazi malo špekulativnog novca, stopa promjene indeksa J će sporo padati što je na Slici 4.1 prikazano normalnom krivuljom.

U slučaju da se pri povlačenju fundamentalista s bikovskog tržišta na tržištu nalazi velika količina špekulativnog novca, tada će tržište neko vrijeme prividno ostati bikovsko, dok ne dosegne granicu u točki B kada će stopa promjene indeksa J iznenadno pasti prema B' na donji, odnosno medvjeđi dio plohe. Ovaj događaj nazivamo *recesija* [20].

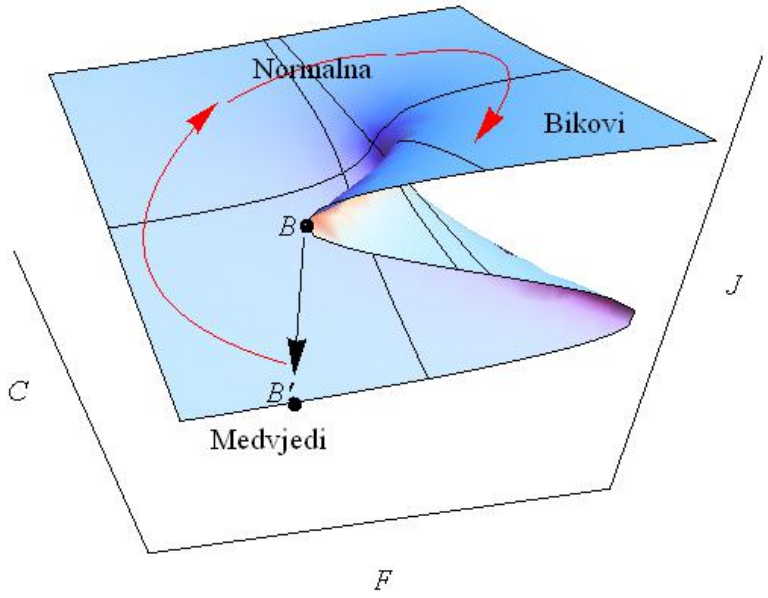
Ploha prikazana na Slici 4.1 dana je jednadžbom

$$J^3 - (C - C_0)J - F = 0 \tag{4.1}$$

gdje je C_0 vrijednost od C pri kojoj se događa skok sa B u B'.

4.3 Spori tok

Kako bismo vidjeli kako promjene stope indeksa J utječu na špekulante i fundamentaliste, odnosno na C i F, trebamo proučiti spore promjene na plohi sa Slike 4.1. Sva spora kretanja na tržištu su prikazana zaobljenim strijelicama. Podsjetimo se da je $J = I'$, gdje I' označava stopu promjene indeksa I.



Slika 4.1: Lice katastrofe šiljka u Zeemanovom modelu tržišta

Špekulanti uvijek prate trend na burzi, odnosno stopa promjene količine špekulativnog novca na tržištu C' uvijek ima isti predznak kao i stopa promjene indeksa J. Stoga na bikovskom tržištu uvijek ima puno špekulativnog novca. S druge strane, medvjeđe tržište odbija špekulante, te tada količina špekulativnog novca opada.

Kada tržište postaje precijenjeno, odnosno kada burzovni indeks I znatno poraste, fundamentalisti se povlače jer smatraju da bikovsko tržište ne traje zauvijek, te ponuda dionica od strane fundamentalista postaje veća od potražnje, odnosno $F' < 0$. Kada tržište postane precijenjeno, fundamentalisti se povlače dok indeks još raste, i prije nego dosegne svoj maksimum.

Kada indeks I počne padati fundamentaisti se povlače te je $F' < 0$. Međutim, ako I pada duže vrijeme, i počinje se izravnavati, tada je $F' > 0$. Drugim riječima, kada se medvjeđe tržište počne oporavljati, fundamentalisti počinju ulagati jer su cijene nestabilne i podcjenjene, te će mali gubitci u kratkom vremenu biti dugoročno nadoknađeni.

4.4 Kružni tijek događaja

U suštini, Zeemanov model tržišta možemo sažeti na jednostavan način kao niz događaja koji se neprestano ponavljaju [2]. Bez ikakvih vanjskih utjecaja tržište će biti u stabilnom i statičnom stanju ravnoteže. Međutim, ako je tržište bilo statično neko vrijeme, to je fundamentalistima dalo dovoljno vremena da istraže njegov potencijal, te dolazi do priljeva novca od strane fundamentalista. Dolazi do polaganog rasta vrijednosti indeksa što počinje privlačiti špekulante te se bikovsko tržište ubrza. Kada količina špekulativnog novca postane prevelika fundamentalisti se počinju povlačiti. Ako se dovoljno fundamentalista povuče s tržišta dolazi do recesije te se s tržišta počinju povlačiti i špekulanti. Naposljetku dolazi do polaganog oporavka kako se fundamentalisti počinju vraćati na tržište.

Ako je opisani model točan, regulator može uvesti kontrolu, i spriječiti urušavanje bikovskog tržišta i recesiju, tako što će privremeno uvesti velike poreze na prodaju dionica proporcionalne s dužinom vremenskog perioda u kojem su dionice bile u nečijem vlasništvu. To će obeshrabriti investitore od prodaje dionica, a posebno će natjerati fundamentaliste da zadrže svoje dugoročne investicije, dok će razina špekulativnog novca opadati. Ako je model točan, ovo bi vratilo tržište u normalu po neprekidnoj putanji bez naglog pada.

Sažetak

U ovom radu proučavamo kako različiti tipovi stacionarnih točaka glatke funkcije opisuju ponašanje sustava kojeg ta funkcija karakterizira. Definirat ćemo *degenerativne* i *nedegenerativne* kritične točke. Zatim ćemo se upoznati s *naborom* i *šiljkom*, univerzalnim perturbacijama kritičnih točaka koje spadaju u 7 *elementarnih katastrofa*. Gravitacijski stroj i Zeemanov stroj katastrofe jednostavni su fizikalni sustavi opisani navedenim perturbacijama. U drugom dijelu rada opisujemo nekoliko sustava u kojima se događa *fazni prijelaz*. Temeljne pojmove uvodimo i ilustriramo na primjeru procesa grananja. Drugi primjer je Van der Waalsova jednadžba stanja fluida, koja očituje katastrofu šiljka. Idući primjer je Isingov model feromagnetizma u kojem se od jednadžbe stanja magneta također dolazi do katastrofe šiljka. Na kraju rada opisujemo nestabilno ponašanje tržišta Zeemanovim modelom baziranim na teoriji katastrofe.

Ključne riječi: glatka funkcija, nedegenerativna točka, nabor, šiljak, fazni prijelaz, Van der Waalsov model, Isingov model, Zeemanov model

Abstract

In this thesis we study how different types of stationary points of smooth function describes behaviour of the system that is characterised whit this function. We define *degenerate* and *nondegenerate* critical points. After that we get to know *fold* and *cusp catastrophe*, universal unfoldings of critical points which are also known as two of 7 *elementary catastrophes*. Gravitational catastrophe machine and Zeeman catastrophe machine are simple physical systems exhibiting typical catastrophic behaviour. In the second part of thesis we describe several systems in which the phase transition occurs. We start with simple example of branching process. Second example is Van der Waals equation of state of gas from which we can easily get cusp catastrophe. Also there is Ising model of ferromagnetism in which we can also find cusp catastrophe. In the end we describe unstable behaviour of stock exchange with a model based on catastrophe theory.

Keywords: smooth function, nondegenrate point, fold, cusp, phase transition, Van de Waals's model, Ising model, Zeeman model

Životopis

Rođena sam 21. studenog 1992. u Našicama. Osnovnu školu završavam u Našicama 2007. godine te u istom gradu upisujem opću gimnaziju. Godine 2011. upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Tri godine kasnije uspješno završavam studij uz završni rad *Konvergencija redova realnih brojeva* pod mentorstvom izv.prof.dr.sc. Kristiana Sabe. U listopadu 2014. upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika. U rujnu 2016. sudjelovala sam na međunarodnoj znanstvenoj konferenciji *Croatian Combinatorial Days* s izlaganjem pod nazivom *Cusp catastrophe in lattice based models of phase transitions*.

Literatura

[1] V. I. Arnold, *Catastrophe theory*, Springer-Verlag Gmbh, Berlin, 2004.

[2] P. Ball, *Kritična masa: Kako jedno vodi drugome*, Algoritam, Zagreb, 2007.

[3] A. M. Baranov, *The catastrophe theory, Petrov's algebraic classification and gravitation transitions*, Gravitation & Cosmology, 2011., Vol. 17, No. 2, 170-172

[4] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic press limited, London, 1989.

[5] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer, New York, 1998.

[6] H. B. Callen, *Thermodynamics*, John Wiley and Sons, Inc, Singapore, 1985.

[7] D. P. L. Castrigiano, S. A. Hayes, *Catastrophe Theory*, Technische Universitat Munchen, Mathematisches Institut, Munich, Germany, 1993.

[8] B. Cipra, *An Introduction to the Ising Model*, Amer. Math. Monthly, 94. (1987), 937-959.

[9] Eugene F. Fama, *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, Reports on Progress in Physics, Volume 66, Number 10

[10] J. E. García-Ramos, P. Pérez-Fernández, J. M. Arias, and E. Freire, *Phase diagram of the two-fluid Lipkin model: A butterfly catastrophe*, Physical review C, Volume 93, Iss. 3, 2016.

[11] A. Haug,*Theoretical Solid State Physics*,Vol. 1 . Pergamon, Oxford and New York, 1972.

[12] B. Mandelbrot, R. L. Hudson, *The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence*, Basic Books, New York, 2006.

[13] T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe Theory and its applications*, Pitman, London, 1978.

[14] S. Rosenblum, O. Bechler, I. Shomroni, R. Kaner, T. Arusi-Parpar, O. Raz, B. Dayan, *Demonstration of Fold and Cusp Catastrophes in an Atomic Cloud Reflected from an Optical Barrier in the Presence of Gravity*, Phys. Rev. Lett. 112, 120403, 1-5, 2004

[15] R. A. Serway, J. W Jewett, *Principles of Physics*, Brooks/Cole, Boston, 2002.

[16] S. Roch, *Modern Discrete Probability: An Essential Toolkit*, Lecture notes, 2015.

[17] G. Slade, *Probabilistic models of Critical Phenomena*, The Princeton companion to mathematics, 343-346

[18] V. Šips, *Uvod u statističku fiziku*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[19] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models*, W. A. Benjamin, Inc., Massachusetts, 1975.

[20] E. C. Zeeman, *On the unstable behaviour of stock exchanges*, Journal of Mathematical Economics 1, 39-49

[21] E. C. Zeeman, *Levels of Structure in Catastrophe Theory Illustrated by Applications in the Social and Biological Sciences*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 533-546