Generalizirani svojstveni problem i definitni matrični parovi

Pilj, Marinela

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marinela Pilj

Generalizirani svojstveni problem i definitni matrični parovi

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marinela Pilj

Generalizirani svojstveni problem i definitni matrični parovi

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović
Komentor: dr. sc. Marija Miloloža Pandur

Osijek, 2017.

Sažetak

U ovome radu ponovit ćemo kako definiramo osnovni svojstveni problem za matricu, pojmove svojstvenih vrijednosti, svojstvenih vektora i karakterističnog polinoma matrice. U usporedbi s time, uvest ćemo pojam generaliziranog svojstvenog problema za matrični par te također definirati svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i karakteristični polinom matričnog para. Pokazat ćemo koji se sve problemi mogu pojaviti kod generaliziranog svojstvenog problema, a kojih nema u svojstvenom problemu za matricu. Definirat ćemo regularan i singularan matrični par, ekvivalentne i kongruentne matrične parove te pokazat što ti pojmovi znače za generalizirani svojstveni problem. U drugome dijelu bavit ćemo se generaliziranim svojstvenim problemom matričnog para za koji postoji realna linearna kombinacija danih matrica koja je pozitivno definitna, tzv. definitnog para. Za kraj ćemo dati važne teoreme o istovremenoj dijagonalizaciji definitnih matričnih parova.

Ključne riječi: osnovni svojstveni problem, generalizirani svojstveni problem, svojstvena vrijednost, svojstveni vektor, regularan i singularan matrični par, definitan matrični par

Abstract

In this paper we will restate how ordinary eigenvalue problem for a given matrix is defined, as well as the terms of eigenvalues, eigenvectors and characteristic polynomial of matrix. Compared to that, we will introduce the term of generalized eigenvalue problem for matrix pair, and also define eigenvalues, eigenvectors and characteristic polynomial of matrix pair. We will show all problems that can appear in the generalized eigenvalue problem, but which do not exist in eigenvalue problem for matrix. We will define regular and singular matrix pair, equivalent and congruent matrix pairs and show what this concepts mean for generalized eigenvalue problem. In second part, we will deal with generalized eigenvalue problem for matrix pair for which exists real linear combination of given matrices which is positive definite, so called, definite pair. At the end of the paper, we will give important theorems about simultaneous diagonalization of definite matrix pairs.

Key words: ordinary eigenvalue problem, generalized eigenvalue problem, eigenvalue, eigenvector, regular and singular matrix pair, definite matrix pair

Sadržaj

1 Uvod

Rješavanje osnovnog svojstvenog problema, odnosno računanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora za matrice, jedan je od najvažnijih alata u linearnoj algebri i numeričkoj matematici. Primjerice, u [1] je dana primjena računanja svojstvenih vrijednosti u dekompoziciji matrice na singularne vrijednosti.

Ipak, pojedini problemi zahtijevaju rješavanje generaliziranog svojstvenog problema za matrični par. Iako generalizirani svojstveni problem za par (A, B) izgleda kao jednostavno poopćenje svojstvenog problema za matricu A, gdje smo jediničnu matricu I zamijenili općom matricom B, u generaliziranom svojstvenom problemu javljaju se puno veće komplikacije.

Hermitski svojstveni problem je, zbog svojih lijepih svojstava i specijaliziranih efikasnih metoda za njegovo rješavanje, jedan od najvažnijih svojstvenih problema za matricu, dok je kod generaliziranog svojstvenog problema to slučaj za definitan svojstveni problem.

U Poglavlju 2 ovoga rada ponavljamo osnovne pojmove i svojstva osnovnog svojstvenog problema te usporedno s time uvodimo nove pojmove i svojstva generaliziranog svojstvenog problema. U Poglavlju 3 bavimo se jednom važnom klasom matričnih parova, tzv. definitnih matričnih parova, i navodimo važne teoreme o istovremenoj dijagonalizaciji takvih parova.

2 Osnovni i generalizirani svojstveni problem

Osnovni svojstveni problem sastoji se od određivanja skalara $\lambda \in \mathbb{C}$ i nenul vektora $x \in \mathbb{C}^n$ takvih da vrijedi

$$Ax = \lambda x, \;\; x \neq 0, \tag{1}$$

pri čemu je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zadana matrica.
U tome je slučaju skalar λ **svojstvena** ili **karakteristična vrijednost** matrice A, a vektor x **svojstveni** ili **karakteristični vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Lako se vidi da ako je x svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ, onda je i svaki vektor αx, $\alpha \neq 0$, također svojstveni vektor za λ. Jednakost (1) možemo pisati i u sljedećem obliku:

$$(A - \lambda I)x = 0, \;\; x \neq 0. \tag{2}$$

Postojanje nenul vektora x takvog da vrijedi (2) povlači da matrica $A - \lambda I$ mora biti singularna. U tome slučaju je

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Polinom $\det(A - \lambda I)$ u kompleksnoj varijabli λ nazivamo **svojstveni** ili **karakteristični polinom** matrice A. Iz (3) slijedi da su nultočke karakterističnog polinoma svojstvene vrijednosti matrice A. Stoga iz Osnovnog teorema algebre[1] slijedi sljedeća važna tvrdnja:

Teorem 2.1 *Svaka matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ima n, ne nužno različitih, svojstvenih vrijednosti.*

Navedimo sada jedan primjer rješavanja svojstvenog problema:

Primjer 2.1 *Neka je zadana matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Iz karakterističnog polinoma*

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 6)$$

dobivamo da su njegove nultočke, odnosno svojstvene vrijednosti matrice A: $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 6$.
Za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = -1$ iz sustava $(A - (-1)I)x = 0$ dobivamo $x_2 = -x_1$ pa je jedan svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost $[1, -1]^T$.
Za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 6$ iz sustava $(A - 6I)x = 0$ dobivamo $x_2 = \frac{5}{2}x_1$ pa je jedan svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost $[2, 5]^T$.

Detaljnije o osnovnom svojstvenom problemu može se naći u [2].

Generalizirani svojstveni problem sastoji se od određivanja parova $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ za koje vrijedi

$$Ax = \lambda Bx, \;\; x \neq 0, \tag{4}$$

pri čemu su $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zadane matrice.
U tome je slučaju λ kompleksan skalar kojeg nazivamo **svojstvena vrijednost matričnog para** (A, B), a $x \in \mathbb{C}^n$ nenul vektor kojeg nazivamo **svojstveni vektor** pridružen

[1] Osnovni teorem algebre tvrdi da svaki polinom $P(x)$ stupnja $n \geq 1$ ima točno n kompleksnih korijena $x_1, \ldots, x_n$ i može se na jedinstven način (do na poredak faktora) zapisati u obliku $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

svojstvenoj vrijednosti λ. Par (λ, x) naziva se **svojstveni par**. Lako se vidi da ako je matrica B invertibilna, onda se generalizirani svojstveni problem $Ax = \lambda Bx$ za par (A, B) može svesti na osnovni svojstveni problem $B^{-1}Ax = \lambda x$ za matricu $B^{-1}A$. Jednakost (4) možemo pisati i u sljedećem obliku:

$$(A - \lambda B)x = 0, \quad x \neq 0. \tag{5}$$

Iz (5), analogno kao i kod svojstvenog problema za matricu, slijedi da je

$$\det(A - \lambda B) = 0. \tag{6}$$

Polinom $\det(A - \lambda B)$ u kompleksnoj varijabli λ zove se **karakteristični polinom matričnog para** (A, B). Iz (6) slijedi da su nultočke karakterističnog polinoma svojstvene vrijednosti matričnog para (A, B).

Sljedeća propozicija opisuje svojstvene vrijednosti dijagonalne matrice i, u usporedbi s time, svojstvene vrijednosti matričnog para u kojemu su obje matrice dijagonalne.

Propozicija 2.2

1. *U svojstvenom problemu, ako je* $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ *dijagonalna matrica, onda su svojstvene vrijednosti matrice* A *elementi na dijagonali, odnosno skalari* $a_1, \ldots, a_n$.

2. *U generaliziranom svojstvenom problemu, ako su* $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ *i* $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ *dijagonalne matrice, tada su svojstvene vrijednosti matričnog para* (A, B) *dane sa* $\lambda_i := a_i/b_i$, $i = 1, \ldots, n$, *odnosno svojstvene vrijednosti su kvocijenti dijagonalnih elemenata.*

Dokaz:

1. Neka je $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Tada je $A - \lambda I$ dijagonalna matrica pa je karakteristični polinom matrice A, odnosno determinanta matrice $A - \lambda I$, jednak umnošku dijagonalnih elemenata: $\det(A - \lambda I) = (a_1 - \lambda) \cdots (a_n - \lambda)$. Tada se lako vidi da su nultočke tog polinoma, odnosno svojstvene vrijednosti matrice A, upravo dijagonalni elementi $a_1, \ldots, a_n$.

2. Neka su $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ i $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ dijagonalne matrice. Tada je $A - \lambda B$ dijagonalna matrica pa je karakteristični polinom para (A, B), odnosno determinanta matrice $A - \lambda B$, jednak umnošku dijagonalnih elemenata: $\det(A - \lambda B) = (a_1 - \lambda b_1) \cdots (a_n - \lambda b_n)$. Tada se lako vidi da su nultočke tog polinoma, odnosno svojstvene vrijednosti para (A, B), upravo kvocijenti dijagonalnih elemenata $a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n$. □

Iz prethodne propozicije odmah se postavlja pitanje što se događa u slučaju da matrica B na dijagonali ima neki element koji je jednak nuli. Pogledajmo sljedeći primjer dijagonalnih matrica:

Primjer 2.2 *Neka su zadane sljedeće matrice:* $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Karakteristični polinom matričnog para (A, B) *je:*

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3\lambda \end{vmatrix} = -18\lambda.$$

Jedna svojstvena vrijednost je sigurno 0 *(to možemo očitati iz kvocijenta* $0/3$*), a druga bi trebala biti* ∞ *(to očitavamo iz kvocijenta* $6/0$*). Iako su zadane matrice reda 2, karakteristični polinom je stupnja 1 pa možemo reći da je nultočka, odnosno svojstvena vrijednost, koja nedostaje beskonačno. Pojavljivanje* ∞ *kao svojstvene vrijednosti je neobično, ali razlog tome je nesimetrična uloga matrica* A *i* B *u* (4).

Kako b_i iz 2. točke propozicije 2.2 može biti 0, kao kvocijent dijagonalnih elemenata može se pojaviti ∞ ili čak neodređeni oblik $0/0$! Zbog toga se generalizirani svojstveni problem također zapisuje u obliku (vidi [3]):

$$\beta Ax = \alpha Bx. \tag{7}$$

Sada A i B imaju simetričnu ulogu, ali ako par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ zadovoljava (7), onda (7) zadovoljava i svaki par $(\tau\alpha, \tau\beta)$ za bilo koji skalar τ. Stoga, ako bismo par (α, β) smatrali svojstvenom vrijednošću matričnog para (A, B), morali bismo time smatrati i svaki par $(\tau\alpha, \tau\beta)$ za proizvoljni $\tau \neq 0$. To nam sugerira da bi se potprostor od $\mathbb{C}^2$ razapet s (α, β) trebao smatrati svojstvenom vrijednošću matričnog para (A, B). Stoga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.1 *Neka je* $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$*, za* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*. Tada*

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \{\tau(\alpha, \beta),\ \tau \in \mathbb{C}\}.$$

Nadalje, ostaje nam problem mogućeg pojavljivanja neodređenog oblika $0/0$ kao kvocijenta dijagonalnih elemenata iz propozicije 2.2. Zbog toga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.2 *Matrični par* (A, B) *je* ***singularan*** *ako je* $\det(A - \lambda B) = 0$*, za svaki* $\lambda \in \mathbb{C}$*, odnosno ako je* $\det(\beta A - \alpha B) = 0$*, za svaki* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$*. U suprotnom, matrični par* (A, B) *je* ***regularan****.*

Sada napokon možemo korektno definirati svojstvenu vrijednost matričnog para, po analogiji s definicijom svojstvene vrijednosti matrice.

Definicija 2.3 *Neka je* (A, B) *regularan matrični par takav da vrijedi*

$$\beta Ax = \alpha Bx \tag{8}$$

za $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ *i* $x \neq 0$*. Tada je* $\langle \alpha, \beta \rangle$ ***svojstvena vrijednost matričnog para*** (A, B)*, a* x *je pridruženi* ***svojstveni vektor****.*

Sada je potrebno uvesti korekciju 2. točke propozicije 2.2 tako da pretpostavimo regularnost para (A, B). U [3] je pojašnjeno da, ako je B neinvertibilna matrica, znamo da je 0 njezina svojstvena vrijednost ($\det(B - 0I) = \det(B) = 0$) pa za $0 \neq y \in Ker(B)$ možemo pisati $By = 0 = 0Ay$. Ako generalizirani svojstveni problem glasi $Ax = \lambda Bx$, onda recipročan svojstveni problem glasi $Bx = \lambda^{-1}Ax$ pa je x svojstveni vektor i od zadanog, i od recipročnog problema. Stoga je y svojstveni vektor recipročnog svojstvenog problema za svojstvenu vrijednost $\lambda^{-1} = 0$, odnosno $\lambda = \infty$ je svojstvena vrijednost zadanog svojstvenog problema $Ax = \lambda Bx$. Ako svojstveni problem zapišemo u obliku $\beta Ax = \alpha Bx$, onda $\langle 1, 0 \rangle$ odgovara beskonačnoj svojstvenoj vrijednosti.

Vratimo se sada primjeru 2.2:
Par (A, B) je regularan matrični par jer njegov karakteristični polinom nije nul-polinom. Njegove svojstvene vrijednosti su $\langle 6, 0\rangle$, odnosno ∞ i $\langle 0, 3\rangle$, odnosno 0. Izračunajmo pripadne svojstvene vektore:
Za svojstvenu vrijednost $\langle 6, 0\rangle$, iz sustava $(0A - 6B)x = 0$, dobivamo da je $x_2 = 0$, a za x_1 da može biti proizvoljan. Svojstveni vektor je tada primjerice $[1, 0]^T$.
Za svojstvenu vrijednost $\langle 0, 3\rangle$, iz sustava $(3A - 0B)x = 0$, dobivamo da je $x_1 = 0$, a za x_2 da može biti proizvoljan. Svojstveni vektor je tada primjerice $[0, 1]^T$.

Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 2.3 *Neka su zadane sljedeće matrice:* $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Tada je karakteristični polinom matričnog para (A, B)*:*

$$\det(A - \lambda B) = \begin{vmatrix} 6 - 3\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (6 - 3\lambda)0 \equiv 0.$$

Uočavamo da je karakteristični polinom jednak nul-polinomu pa je par (A, B) *singularan par. To također uočavamo iz kvocijenta* $0/0$ *zadanog dijagonalnog matričnog para.*

Propozicija 2.3 *(vidi [3, 4]) Ako jezgre matrica* A *i* B *nisu disjunktne, matrični par je singularan.*

Dokaz: Pretpostavimo da jezgre matrica A i B nisu međusobno disjunktne, odnosno da imaju zajedničke elemente, i neka je $x \neq 0$ element presjeka. Tada za svaki kompleksan par (α, β) vrijedi $(\beta A - \alpha B)x = 0$, odnosno matrica $\beta A - \alpha B$ je singularna za svaki par (α, β), pa je matrični par (A, B) singularan. $\square$

U teoremu 2.1 okarakterizirali smo broj svojstvenih vrijednosti opće matrice. U idućem teoremu reći ćemo nešto o broju svojstvenih vrijednosti regularnih matričnih parova, ali prije toga iskažimo pomoćni teorem kojeg ćemo koristiti u njegovom dokazu (oba teorema su dana u [3]).

Teorem 2.4 *Neka je* $W \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ *invertibilna matrica. Za dani par* (A, B) *definirajmo*

$$[C \;\; D] := [A \;\; B] \begin{bmatrix} w_{11}I & w_{12}I \\ w_{21}I & w_{22}I \end{bmatrix}, \text{ za } W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}.$$

Za dani $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$*, definiramo* (γ, δ) *sa:*

$$\begin{bmatrix} \delta \\ -\gamma \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Tada je $\langle \alpha, \beta\rangle$ *svojstvena vrijednost para* (A, B) *ako i samo ako je* $\langle \gamma, \delta\rangle$ *svojstvena vrijednost para* (C, D).

Teorem 2.5 *Regularan matrični par ima diskretan spektar s brojem elemenata jednakim redu matrica (uključujući višekratnosti i beskonačne svojstvene vrijednosti).*

Dokaz: Ako je matrični par (A, B) regularan, postoje skalari σ i τ takvi da je $\tau A - \sigma B$ invertibilna matrica. Ako stavimo da je matrica W iz teorema 2.4:

$$W = \begin{bmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & -\sigma \end{bmatrix}$$

i kao u teoremu definiramo matrice C i D, dobivamo da je $C = \sigma A + \tau B$ i $D = \tau A - \sigma B$. Svojstvenih vrijednosti matričnog para (C, D) ima, prema teoremu 2.4, isto koliko i svojstvenih vrijednosti para (A, B), a kako je matrica D invertibilna, svojstvene vrijednosti para (C, D) odgovaraju svojstvenim vrijednostima matrice $D^{-1}C$ (vidi napomenu 2.1) kojih ima n (odnosno red matrice $D^{-1}C$, što je jednako redu svih matrica A, B, C i D). Zaključujemo da regularan matrični par reda n ima n svojstvenih vrijednosti. □

Napomena 2.1 *Neka je $\langle \alpha, \beta \rangle$ svojstvena vrijednost para (A, B), pri čemu je B invertibilna matrica. Tada je $\beta \neq 0$. U tom slučaju svojstveni problem $Ax = \lambda Bx$ možemo zapisati kao $B^{-1}Ax = \lambda x$, pri čemu je $\lambda = \alpha/\beta$. Tada ako je λ svojstvena vrijednost matrice $B^{-1}A$, onda je $\langle \lambda, 1 \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ svojstvena vrijednost para (A, B).*

Propozicija 2.6 *Ako je barem jedna od matrica A i B invertibilna, onda je matrični par (A, B) regularan.*

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti, neka je matrica B invertibilna. Za par $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ vrijedi: $\det(\beta A - \alpha B) = \det(-B) \neq 0$. Kako postoji par (α, β) za koji je $\det(\beta A - \alpha B) \neq 0$, matrični par (A, B) je regularan. □

Ako je matrični par regularan, stupanj karakterističnog polinoma jednak je redu matrica ili manji (ako je matrica B neinvertibilna). Ako je stupanj manji, svojstvene vrijednosti koje nedostaju su beskonačno.

Prisjetimo se iz [2] definicije ekvivalentnih i sličnih matrica te veze između svojstvenih vrijednosti sličnih matrica.

Definicija 2.4 *Matrice A i B nazivamo* ***ekvivalentnima*** *ako postoje invertibilne matrice S i T takve da vrijedi $B = SAT$, a* ***sličnima*** *ako postoji invertibilna matrica T takva da vrijedi $B = T^{-1}AT$.*

Propozicija 2.7 *Slične matrice imaju jednake karakteristične polinome.*

Iz propozicije 2.7 slijedi da slične matrice imaju jednake svojstvene vrijednosti.

Definirajmo sada ekvivalentne i kongruentne matrične parove te pogledajmo vezu između njihovih svojstvenih vrijednosti (vidi [3, 4]):

Definicija 2.5 *Za dva matrična para (A_1, B_1) i (A_2, B_2) kažemo da su* ***ekvivalentni*** *ako postoje invertibilne matrice E i F takve da vrijedi $A_2 = EA_1F$, $B_2 = EB_1F$.*

Propozicija 2.8 *Neka je dan regularan par (A_1, B_1). Tada je i njemu ekvivalentan par (A_2, B_2) regularan. Nadalje, ako je (λ, x) svojstveni par matričnog para (A_1, B_1), onda je $(\lambda, F^{-1}x)$ svojstveni par od (A_2, B_2). Dakle, regularni ekvivalentni matrični parovi imaju iste svojstvene vrijednosti, a svojstveni vektori su jednostavno povezani.*

Dokaz: Prva tvrdnja slijedi direktnom primjenom Binet-Cauchyjevog teorema (vidi [2]). Pretpostavimo da je (λ, x) svojstveni par matričnog para (A_1, B_1). Tada vrijedi $A_1 x = \lambda B_1 x$. Množenjem s lijeve strane matricom E dobivamo sljedeći niz implikacija:

$$EA_1 x = \lambda EB_1 x \Rightarrow$$

$$EA_1 Ix = \lambda EB_1 Ix \Rightarrow$$
$$EA_1 FF^{-1}x = \lambda EB_1 FF^{-1}x \Rightarrow$$
$$A_2 F^{-1}x = \lambda B_2 F^{-1}x.$$

Zaključujemo da je $(\lambda, F^{-1}x)$ svojstveni par od (A_2, B_2). □

Definicija 2.6 *Za dva matrična para (A_1, B_1) i (A_2, B_2) kažemo da su **kongruentni** ako postoji invertibilna matrica F takva da vrijedi $A_2 = F^* A_1 F$, $B_2 = F^* B_1 F$.*

Ako postoji invertibilna matrica F takva da vrijedi $F^* AF = D_1$ i $F^* BF = D_2$, pri čemu su $D_1 = \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ i $D_2 = \mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ dijagonalne, onda kažemo da F **istovremeno dijagonalizira** matrični par (A, B). Matrični par za koji postoji takva matrica F nazivamo **istovremeno dijagonalizibilan**.
Omjeri $\phi_i/\psi_i, i = 1, \ldots, n$ su jedinstveni, ali matrice D_1 i D_2 nisu.
Ako je $\psi_i \neq 0, i = 1, \ldots, n$, moguće je normalizirati matrice D_1 i D_2: $D_1 = \Lambda$, $D_2 = I$ (vidi [4]).

Sjetimo se da je matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dijagonalizibilna (slična dijagonalnoj matrici) ako i samo ako ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora. U tome slučaju sustav jednakosti $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, \ldots, n$ je ekvivalentan matričnoj jednakosti $AX = X\Lambda$, gdje je $X = [x_1, \ldots, x_n]$ matrica svojstvenih vektora, a $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ matrica pripadnih svojstvenih vrijednosti.
Neka je matrični par (A, B) regularan i istovremeno dijagonalizibilan, odnosno neka postoji F takva da vrijedi

$$F^* AF = D_1, \quad F^* BF = D_2.$$

Iz toga dobivamo da je

$$A = (F^*)^{-1} D_1 F^{-1}, \quad B = (F^*)^{-1} D_2 F^{-1}.$$

Sada svojstveni problem $Ax = \lambda Bx$ glasi

$$(F^*)^{-1} D_1 F^{-1} x = \lambda (F^*)^{-1} D_2 F^{-1} x.$$

Množenjem slijeva matricom F^* dobivamo

$$D_1 y = \lambda D_2 y,$$

pri čemu je $y = F^{-1}x$. To je svojstveni problem za dijagonalni par čije su svojstvene vrijednosti kvocijenti dijagonalnih elemenata (propozicija 2.2), a to su ujedno i svojstvene vrijednosti danog para (A, B). Nadalje, svojstveni vektori svojstvenog problema za dijagonalni par su vektori $y_i = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, vektori kanonske baze za $\mathbb{R}^n$, pa su svojstveni vektori početnog generaliziranog svojstvenog problema $x_i = Fy_i$, $i = 1, \ldots, n$ upravo stupci matrice F. Dakle, ako je matrični par (A, B) istovremeno dijagonalizibilan, onda postoji n linearno nezavisnih svojstvenih vektora. U tome slučaju, kao i za dijagonalizibilnu matricu, iz sustava jednakosti $Ax_i = \lambda_i Bx_i$, $i = 1, \ldots, n$ slijedi matrična jednakost $AX = BX\Lambda$, gdje je $X = [x_1, \ldots, x_n]$ matrica svojstvenih vektora, a $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ matrica pripadnih svojstvenih vrijednosti.

Sljedeća tablica sadrži do sada opisane sličnosti i razlike između osnovnog i generaliziranog svojstvenog problema. Kao što smo vidjeli, generalizirani svojstveni problem nije jednostavno poopćenje osnovnog, jer se u generaliziranom svojstvenom problemu pojavljuju neke složene razlike u odnosu na osnovni.

Osnovni svojstveni problem	Generalizirani svojstveni problem
$Ax = \lambda x$, $x \neq 0$	$Ax = \lambda Bx$, $x \neq 0$
Karakteristični polinom matrice A: $\det(A - \lambda I)$, nultočke su svojstvene vrijednosti matrice A.	Karakteristični polinom para (A, B): $\det(A - \lambda B)$, nultočke su svojstvene vrijednosti matričnog para(A, B).
$A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \lambda_i = a_i$	$A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n), B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ $\Rightarrow \lambda_i = a_i / b_i$
Slične matrice $\Rightarrow$ iste svojstvene vrijednosti.	Ekvivalentni matrični parovi $\Rightarrow$ iste svojstvene vrijednosti.
Svaka matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ima n konačnih svojstvenih vrijednosti (uključujući višekratnosti).	Regularan matrični par reda n ima n svojstvenih vrijednosti (uključujući ∞ i višekratnosti).

Tablica 1: Sličnosti i razlike između osnovnog i generaliziranog svojstvenog problema

3 Definitan svojstveni problem

U prethodnom odjeljku proučavali smo generalizirani svojstveni problem za opće matrice, a u ovom definiramo jednu važnu klasu generaliziranog svojstvenog problema.

Za početak, jedna od najvažnijih vrsta matrica jest hermitska matrica. Iskazat ćemo nekoliko tvrdnji za svojstveni problem hermitske (ili realne simetrične) matrice (vidi [2]):

Propozicija 3.1 *Sve svojstvene vrijednosti hermitske matrice su realni brojevi, a svojstveni vektori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno okomiti.*

Dokaz: Neka je x svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ matrice A. Tada je:

$$\lambda\langle x,x\rangle = \langle \lambda x,x\rangle = \langle Ax,x\rangle = \langle x,A^*x\rangle = \langle x,Ax\rangle = \langle x,\lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x,x\rangle.$$

Dijeljenjem s $\langle x,x\rangle$, različitim od nule, jer je x svojstveni vektor, dobivamo $\lambda = \bar{\lambda}$, odnosno λ je realan broj.
Nadalje, neka su λ i μ međusobno različite svojstvene vrijednosti i neka su x i y pripadni svojstveni vektori:

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y.$$

Prema prethodno dokazanom znamo da je: $\lambda = \bar{\lambda}$ i $\mu = \bar{\mu}$, pa vrijedi:

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x,y\rangle = \langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle = \langle x,Ay\rangle = \langle x,\mu y\rangle = \bar{\mu}\langle x,y\rangle = \mu\langle x,y\rangle.$$

Iz tog slijedi da je

$$(\lambda-\mu)\langle x,y\rangle = 0,$$

pa je zato $\langle x,y\rangle = 0$, odnosno vektori x i y su međusobno okomiti. □

Propozicija 3.2 *(vidi [2]) Za svaku hermitsku matricu postoji dijagonalna matrica kojoj je ona slična.*

Prema propoziciji 3.1, simetrične matrice imaju realne svojstvene vrijednosti. Za razliku od toga, za simetrične matrice A i B postoji mogućnost da su svojstvene vrijednosti matričnog para (A,B) kompleksne, kao što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 3.1 *Neka su zadane simetrične matrice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. *Tada su svojstvene vrijednosti para* (A,B) *rješenja jednadžbe*

$$\det(A-\lambda B) = \begin{vmatrix} 3\lambda & 3 \\ 3 & -3\lambda \end{vmatrix} = -9(\lambda^2+1) = 0.$$

Stoga dobivamo da su svojstvene vrijednosti para (A,B): $\lambda = \pm i$.
Iz sustava $(A-iB)x = 0$ *dobije se da je jedan svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost* $\lambda_1 = i$: $[1,-i]^T$, *a iz sustava* $(A+iB)x = 0$ *dobije se da je jedan svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost* $\lambda_2 = -i$: $[1,i]^T$.

Za svojstveni problem matrice, hermitičnost je dovoljna za dijagonalizaciju. Kod generaliziranog svojstvenog problema nije dovoljno da su matrice hermitske da bi ih mogli istovremeno dijagnalizirati. Naime, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.3 *(vidi [4]) Svaka kvadratna matrica M se može zapisati kao $M = AB^{-1}$ ili $M = B^{-1}A$, pri čemu su A i B odgovarajuće hermitske matrice.*

Neka vrijedi $(A - \lambda B)x = 0$ za neku invertibilnu matricu B. Tada je

$$(AB^{-1} - \lambda I)Bx = 0 \Leftrightarrow (M - \lambda I)Bx = 0,$$

odnosno

$$B(B^{-1}A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow B(M - \lambda I)x = 0.$$

Sve komplikacije koje se javljaju kod svojstvenog problema opće matrice M, mogu se pojaviti i kod generaliziranog svojstvenog problema matričnog para (A, B) s hermitskim matricama.

Da bismo pronašli dovoljne uvjete za istovremenu dijagonalizaciju matričnog para, definirajmo nove pojmove:

Definicija 3.1 *Za matrični par (A, B) kažemo da je **hermitski** ako su A i B hermitske matrice istog reda.*

Definicija 3.2 *Neka je (A, B) hermitski matrični par reda n. Broj*

$$\gamma(A, B) := \min_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1} |x^*(A + iB)x| = \min_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1} \sqrt{(x^*Ax)^2 + (x^*Bx)^2}$$

*zove se **Crawfordov broj** para (A, B).*

Crawfordov broj je uveden i istražen u [6, 7]. Primijetimo da je $\gamma(A, B) \geq 0$.

Definicija 3.3 *Hermitski matrični par (A, B) je **definitan** matrični par ako je $\gamma(A, B) > 0$. U suprotnom, ako je $\gamma(A, B) = 0$, par (A, B) je **indefinitan**.*

Uočimo:

$$\gamma(A, B) = 0 \Leftrightarrow \textit{postoji } \ x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 \ \textit{ takav da je } \ x^*Ax = 0 \ \textit{ i } \ x^*Bx = 0.$$

Slijede neki uvjeti uz koje je matrični par indefinitan:

- Ako A i B imaju zajedničku netrivijalnu jezgru, odnosno postoji $x \neq 0$ takav da je $Ax = Bx = 0$, onda je taj par indefinitan (također i singularan). Naime, množeći s lijeva s x^* dobivamo $x^*Ax = 0 = x^*Bx$.

- Ako je za neki $i = 1, \ldots, n$, $a_{ii} = b_{ii} = 0$, par (A, B) je indefinitan (ali ne nužno singularan). Naime, za x uzmemo e_i, gdje je e_i vektor kanonske baze za $\mathbb{R}^n$, pa vrijedi $e_i^*Ae_i = a_{ii} = 0$ i $e_i^*Be_i = b_{ii} = 0$ pa je i $\gamma(A, B) = 0$, odnosno par (A, B) je indefinitan.

Navedimo sada jedan primjer indefinitnog regularnog matričnog para:

Primjer 3.2 *Neka su zadane matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.*
Vektor $x = [1, -i]^T$ je takav da je $x^*Ax = x^*Bx = 0$ pa je taj par indefinitan.
Kako je $\det(A - \lambda B) \neq 0$, za sve $\lambda \neq \pm i$, taj par je regularan.

Ako je hermitska matrica A pozitivno [negativno] definitna, onda je $x^*Ax > [<] \ 0$, za sve $x \neq 0$, pa je $\gamma(A, B) \neq 0$, odnosno par (A, B) je definitan matrični par. Analogno vrijedi i za matricu B. Iz toga zaključujemo da ukoliko je barem jedna od hermitskih matrica A ili B pozitivno [negativno] definitna, par (A, B) je definitan matrični par.

3.1 Istovremena dijagonalizacija definitnog matričnog para

Sljedeći teorem (vidi [3]) govori o istovremenoj dijagonalizaciji hermitskog matričnog para (A, B) u kojem je matrica B pozitivno definitna:

Teorem 3.4 *Neka je u hermitskom matričnom paru (A, B), matrica B pozitivno definitna. Tada postoji invertibilna matrica V koja zadovoljava $V^*BV = I$ i $V^*AV = D$, pri čemu je D realna i dijagonalna.*

Dokaz: Kako je u matričnom paru (A, B), matrica B hermitski pozitivno definitna, ona ima hermitski pozitivno definitan kvadratni korijen $B^{1/2}$ (usporedi s [5, Teorem 13.5.1]). Tada je, ako uzmemo $E = F = B^{-1/2}$, par (A, B) ekvivalentan paru $(B^{-1/2}AB^{-1/2}, I)$. Kako je matrica $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ hermitska, par $(B^{-1/2}AB^{-1/2}, I)$ pa onda i par (A, B) ima realne svojstvene vrijednosti.
Neka je $B^{-1/2}AB^{-1/2} = UDU^*$ spektralna dekompozicija hermitske matrice $B^{-1/2}AB^{-1/2}$, pri čemu je D realna dijagonalna matrica, a U unitarna matrica. Tada

$$B^{-1/2}AB^{-1/2} = UDU^* \Rightarrow (B^{-1/2}U)^*AB^{-1/2}U = D,$$

odnosno ako označimo $V = B^{-1/2}U$, matrica V je invertibilna jer je umnožak invertibilnih matrica, pa slijedi:

$$V^*AV = D, \ \ V^*BV = I.$$

□

Zaključujemo da je hermitski par (A, B), u kojem je B pozitivno definitna matrica, regularan par te istovremeno dijagonalizibilan s realnim svojstvenim vrijednostima, dok se svojstveni vektori mogu odabrati tako da budu okomiti s obzirom na B-skalarni produkt.[2]

Teorem 3.5 *(vidi [3]) Neka je (A, B) definitan par, i za $\phi \in \mathbb{R}$ definirajmo*

$$A_\phi := A\cos\phi + B\sin\phi, \quad B_\phi := -A\sin\phi + B\cos\phi.$$

Tada postoji $\phi \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je B_ϕ pozitivno definitna i $\gamma(A, B) = \lambda_{min}(B_\phi)$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{F}$ polje vrijednosti[3] od $A + iB$. Tada je $\gamma(A, B) = \min_{h\in\mathcal{F}} \|h\|_2$. Neka se minimum postiže u $h = x_0^*(A + iB)x_0$. Kako je $\mathcal{F}$ ograničen, konveksan skup (prema [3]), sadržan je u poluravnini $\mathcal{H}$, čija granica prolazi okomito kroz h.

Neka su $\mathcal{F}_\phi$, $\mathcal{H}_\phi$ i h_ϕ odgovarajuće vrijednosti za par (A_ϕ, B_ϕ). Kako je $A_\phi + iB_\phi = e^{-i\phi}(A + iB)$ (vidi ispod), te vrijednosti su zapravo jednake originalnim vrijednostima rotiranima za kut ϕ. Izaberimo ϕ tako da $\mathcal{H}_\phi$ leži u gornjoj poluravnini, odnosno da h_ϕ leži na imaginarnoj osi. Tada je $x_0^*A_\phi x_0 = Re(h_\phi) = 0$. Kako niti jedna točka iz $\mathcal{F}_\phi$ ne leži ispod poluravnine $\mathcal{H}_\phi$, imamo:

$$0 < \gamma(A, B) = x_0^*B_\phi x_0 = \min_{\|x\|=1} x^*B_\phi x = \lambda_{min}(B_\phi).$$

[2] Za pozitivno definitnu matricu B, vektori x i y okomiti su s obzirom na B-skalarni produkt ako je $x^*By = 0$.

[3] Prema [3], polje vrijednosti za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je skup $\mathcal{F}(A) = \{x^*Ax : \|x\|_2 = 1\}$.

Iz toga zaključujemo da su sve svojstvene vrijednosti matrice B_ϕ pozitivne pa je ta matrica pozitivno definitna. $\square$

Rotacijom para (A, B) ne mijenja se njegov Crawfordov broj jer vrijedi:

$$\begin{aligned} A_\phi + iB_\phi &= A\cos\phi + B\sin\phi - iA\sin\phi + iB\cos\phi \\ &= A(\cos\phi - i\sin\phi) + B(\sin\phi + i\cos\phi) \\ &= A(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)) + Bi(i\sin(-\phi) + \cos(-\phi)) \\ &= e^{-i\phi}(A + iB), \end{aligned}$$

pa je $|x^*(A + iB)x| = |x^*(A_\phi + iB_\phi)x|$.

Posljedice teorema 3.5 su:

1. Svaki definitan par (A,B) se može rotirati u par (A_ϕ, B_ϕ), pri čemu je B_ϕ pozitivno definitna matrica.
2. Za svojstvene vrijednost $\langle\alpha, \beta\rangle$ para (A, B) i svojstvene vrijednosti $\langle\alpha_\phi, \beta_\phi\rangle$ para (A_ϕ, B_ϕ) vrijedi:
$$\begin{bmatrix}\beta \\ \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_\phi \\ \alpha_\phi\end{bmatrix}.$$
3. Svojstveni vektori rotacijom ostaju isti.
4. Definitni parovi su regularni sa svojstvenim vrijednostima $\langle\alpha, \beta\rangle$ za koje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ako je generalizirani svojstveni problem zadan jednadžbom (7)), odnosno realnim i beskonačnim svojstvenim vrijednostima (ako je generalizirani svojstveni problem zadan jednadžbom (4)), i istovremeno dijagonalizibilni.

Dokaz za 2. i 3. točku: Kako je $\langle\alpha_\phi, \beta_\phi\rangle$ svojstvena vrijednost matričnog para (A_ϕ, B_ϕ), vrijedi:

$$\begin{gathered} \beta_\phi A_\phi x = \alpha_\phi B_\phi x \\ \beta_\phi(A\cos\phi + B\sin\phi)x = \alpha_\phi(-A\sin\phi + B\cos\phi)x \\ (\beta_\phi\cos\phi + \alpha_\phi\sin\phi)Ax = (\alpha_\phi\cos\phi - \beta_\phi\sin\phi)Bx. \end{gathered}$$

Slijedi da za svojstvenu vrijednosti $\langle\alpha, \beta\rangle$ matričnog para (A, B) vrijedi:
$\alpha = -\beta_\phi\sin\phi + \alpha_\phi\cos\phi$ i $\beta = \beta_\phi\cos\phi + \alpha_\phi\sin\phi$, što je ekvivalentno gornjem matričnom zapisu, a svojstveni vektori očigledno su isti. $\square$

Sada možemo na novi način definirati definitan matrični par:

Definicija 3.4 *Hermitski matrični par (A,B) je* ***definitan*** *matrični par ako postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha A + \beta B$ pozitivno definitna matrica. U suprotnom kažemo da je matrični par (A,B)* ***indefinitan****.*

Definicija 3.5 *Hermitski matrični par (A,B) je* ***pozitivno [negativno]*** *definitan matrični par ako postoji $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $A - \lambda_0 B$ pozitivno [negativno] definitna matrica.*

Veza između definitnog i pozitivno/negativno definitnog matričnog para (prema [8]): Neka je matrični par (A, B) definitan. Tada postoje realni brojevi α i β takvi da je $\alpha A + \beta B$ pozitivno definitna matrica. Ako je $\alpha \neq 0$, onda je par (A, B) ili pozitivno ili negativno definitan matrični par (ovisno o predznaku od α) s $\lambda_0 = -\beta/\alpha$. Ako je $\alpha = 0$, onda je $\beta \neq 0$ pa je B ili pozitivno ili negativno definitna matrica.
Neka je matrični par (A, B) pozitivno [negativno] definitan. Tada je on i definitan par ($\alpha = 1$, $\beta = -\lambda_0$).

Definirajmo sada inerciju hermitske matrice (vidi [9]) koja će nam trebati za sljedeći teorem:

Definicija 3.6 ***Inercija*** *hermitske matrice A, u oznaci In(A), je uređena trojka broja pozitivnih svojstvenih vrijednosti matrice A, broja negativnih svojstvenih vrijednosti matrice A i svojstvenih vrijednosti od A jednakih nuli, odnosno*

$$In(A) = (n_+, n_-, n_0),$$

gdje n_+ *predstavlja broj pozitivnih svojstvenih vrijednosti od A,* n_- *negativnih, a* n_0 *broj svojstvenih vrijednosti jednakih 0.*

Prethodno smo u teoremu 3.4 dokazali da se hermitski matrični par, u kojem je jedna matrica definitna, može istovremeno dijagonalizirati. Sada slijedi ključan teorem (vidi [10]) koji tvrdi da se definitni matrični parovi, u kojima niti jedna od matrica ne mora biti definitna, mogu istovremeno dijagonalizirati transformacijom kongruencije.

Teorem 3.6 *Neka je (A,B) pozitivno definitan matrični par reda n, takav da B ima inerciju* $In(B) = (n_+, n_-, n_0)$.

1. *Tada postoji invertibilna matrica W takva da vrijedi*

$$W^* A W = \begin{bmatrix} \Lambda_+ & & \\ & -\Lambda_- & \\ & & I_{n_0} \end{bmatrix},$$

$$W^* B W = \begin{bmatrix} I_{n_+} & & \\ & -I_{n_-} & \\ & & 0_{n_0} \end{bmatrix},$$

   gdje su $\Lambda_+ = \operatorname{diag}(\lambda_1^+, \ldots, \lambda_{n_+}^+)$, $\Lambda_- = \operatorname{diag}(\lambda_1^-, \ldots, \lambda_{n_-}^-)$ *realne, dijagonalne matrice s* $\lambda_{n_-}^- \leq \ldots \leq \lambda_1^- < \lambda_1^+ \leq \ldots \leq \lambda_{n_+}^+$.

2. *Sve konačne svojstvene vrijednosti para (A,B) su realne i ima ih* $r = rang(B) = n_- + n_+$ *te su dane na dijagonalama matrica* Λ_- *i* Λ_+. *Svaka svojstvena vrijednost* λ_j^- *ima svojstveni vektor x takav da je* $x^* B x = -1$, *dok svaka svojstvena vrijednost* λ_j^+ *ima svojstveni vektor x takav da je* $x^* B x = 1$.

3. *Par (A,B) je pozitivno definitan ako i samo ako je* $\lambda_1^- < \lambda_1^+$. *U tom slučaju je* $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} : A - \lambda_0 B \text{ pozitivno definitna } \} = \langle \lambda_1^-, \lambda_1^+ \rangle$.

Sličan terorem vrijedi i za negativno definitne matrične parove, jer ako je par (A, B) pozitivno definitan, onda je par $(-A, B)$ negativno definitan.

Literatura

[1] R. Scitovski, Numerička matematika, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2004.

[2] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] G. W. Stewart, J.-g. Sun, Matrix Perturbation Theory, Academic Press, New York, 1990.

[4] B. N. Parlett, The Symmetric Eigenvalue Problem, SIAM, Philadelphia, 1998.

[5] K. Kuttler, Linear Algebra, Theory And Applications, The Saylor Foundation, 2012.. Dostupno na: https://www.saylor.org/site/wp-content/uploads/2012/02/Linear-Algebra-Kuttler-1-30-11-OTC.pdf.

[6] C. R. Crawford, A stable generalized eigenvalue problem, SIAM J.Numer.Anal. 13 (1976), str. 854–860.

[7] G. W. Stewart, Perturbation bounds for the definite generalized eigenvalue problem, Linear Algebra and Appl. 23 (1979), str. 69–85.

[8] M. Miloloža Pandur, Računanje unutarnjih svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora definitnih matričnih parova, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.

[9] V. Hari, Matrična teorija perturbacije, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1996.

[10] X. Liang, R.-C. Li, Z. Bai, Trace minimization principles for positive semi-definite pencils, Linear Algebra and its Applications, 438 (2013), 3085-3106.

[11] N. Truhar, Numerička linearna algebra, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.