Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Keti Martinić

Fourierovi redovi

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Keti Martinić

Fourierovi redovi

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Krešimir Burazin

Osijek, 2017.

Sažetak

U ovom radu ćemo proučiti pojam Fourierovog reda i Fourierovih koeficijenata. Potom ćemo analizirati vrste konvergencija Fourierovog reda (Konvergencija po točkama, uniformna konvergencija, konvergencija u smislu L^2-norme) te definirati kompleksni oblik Fourierovog reda i Fourierovih koeficijenata. Također ćemo definirati i Fourierovu transformaciju koja se koristi za procesiranje signala te je pružila veliki doprinos u tehničkim znanostima i medicini.
U zadnjem poglavlju ćemo navesti dva primjera primjene Fourierovog reda, provođenje topline i valna jedadžba.

Ključne riječi: trigonometrijska funkcija, Fourierov red, Fourierovi koeficijenti, konvergencija, Fourierov integral, Fourierova transformacija, parcijalne diferencijalne jednadžbe

Summary

In this paper we will study the terms Fourier series and Fourier coefficients. Then we will analyze the types of convergence of Fourier series (pointwise convergence, uniform convergence, convergence in L^2-norm) and define the complex form of Fouriers series. We will also define Fourier transform which is used to process the signal and has contributed greatly to technical sciences and medicine.
In the last section, there are two examples of the application of the Fourier series, heat conduction and wave equation.

Keywords: trigonometric function, Fourier series, Fourier coefficients, convergence, Fourier integral, Fourier transform, partial differential equations

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu bavit ćemo se dijelom Fourierove analize poznat pod nazivom Fourierov red. Fourierova analiza je moćan alat za rješavanje mnogih problema kao što su parcijalne diferencijalne jednadžbe u području znanosti i inženjerstva. Fourierova analiza proizašla je iz ideje da svaku periodičku funkciju možemo zapisati kao sumu kosinusnih i sinusnih funkcija različitih amplituda, faza i frekvencija. Takva suma naziva se Fourierov red. Matematičar Jean Baptiste Joseph Fourier (1768.-1830.), slika 1, došao je na tu ideju tako što je postavio problem rješavanja parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline. Sve svoje teorije o danom problemu i Fourierovim redovima objavio je u svom radu "Analitička teorija topline" 1822. godine. Danas su Fourierove teorije dalje razvijene, poput Fourierove transformacije koju ćemo spomenuti kasnije. Tome su pridonijeli kasnije i Dirichlet i Riemann.

Slika 1: *Jean Baptiste Jospeh Fourier*

2 Fourierovi redovi

Kao što smo spomenuli u uvodu, Fourierovi redovi omogućit će nam prikaz periodične funkcije u obliku reda trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus. Prije nego definiramo Fourierov red, uvest ćemo nekoliko korisnih pojmova i relacija.

Definicija 1 *Niz funkcija*

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), ... \tag{2.1}$$

zove se **osnovni trigonometrijski sustav***.*

Lema 1 *Osnovni trigonometrijski sustav je ortogonalan na* $[-\pi, \pi]$ *u sljedećem smislu: integral na* $[-\pi, \pi]$ *produkta dviju različitih funkcija sustava je nula, dok je integral kvadrata svake funkcije sustava različit od nule.*

Dokaz. U stvari, vrijede sljedeće jednakosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(kx) dx = 0, \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(kx) dx = 0, \tag{2.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx = 0, za \quad k \neq n, \tag{2.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = 0, za \quad k \neq n, \tag{2.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = 0, \tag{2.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi, \tag{2.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi, \tag{2.8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \tag{2.9}$$

Dokazat ćemo tvrdnje (2.4)-(2.8) pomoću adicijskih formula i formula za umnožak sinusa i kosinusa.

(2.4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k-n)x - \cos(k+n)x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(k-n)xdx - \int_{-\pi}^{\pi}(\cos(k+n)xdx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k-n}\sin(k-n)x - \frac{1}{k+n}sin(k+n)x\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}(0-0)$$
$$= 0$$

(2.5)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k-n)x + \cos(k+n)x)dx$$

Dokaz dalje analogno kao gore.

(2.6)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\Big(\sin(k+n)x + \sin(k-n)x\Big)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n}(-\cos(k+n)x) + \frac{1}{k-n}(-\cos(k-n)x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg(-\frac{1}{k+n}\Big(\cos(kx)\cos(nx) - \sin(kx)\sin(nx)\Big)$$
$$- \frac{1}{k-n}\Big(\cos(kx)\cos(nx) + \sin(kx)\sin(nx)\Big)\Bigg)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \left(-\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k-n}\right)\cos(kx)\cos(nx)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$+ \left(-\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k-n}\right)\sin(kx)\sin(nx)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \left(-\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k-n}\right)(\cos(k\pi)\cos(n\pi) - cos(-k\pi)\cos(-n\pi))$$
$$= 0$$

Zadnja jednakost u dokazu slijedi iz parnosti funkcije kosinus.

(2.7)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2(nx))dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}dx \\
&= x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx)dx \\
&= 2\pi - \pi - \frac{1}{4n}(\sin(2nx))\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi - 0 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Dokaz za kosinus provodimo analogno:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}(\pi-(-\pi)) - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx)dx \\
&= \pi - \frac{1}{4n}(sin(2nx))\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi - 0 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

□

Definicija 2 *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična i integrabilna na $[0, 2\pi]$. Tada red*

(1) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ *zovemo* **trigonometrijski red**, *dok je*

(2) $f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ *njegova (N+1)-va parcijalna suma.*

Sada nas zanima kako izgledaju koeficijenti a_0, a_k, b_k. Integracija reda "član po član" nam omogućava jednostavan izvod formula za računanje koeficijenata reda. Trenutno nećemo ulaziti u pitanje pod kojim je uvjetima takav postupak korektan, nego ćemo kasnije dati uvjete na f pod kojima formalno dobiveni red konvergira.
Da bi dobili koeficijente a_0, integrirajmo red (1) član po član i iskoristimo da je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = 0.$$

Tada dobivamo sljedeće:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Kako bi dobili koeficijente a_n, pomnožimo (1) s $\cos(nx)$ te ponovno integriramo član po član i iskoristimo (2.2),(2.5),(2.6) i (2.8).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = a_n\pi \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

Ukoliko (1) pomnožimo sa $\sin(nx)$ te ponovimo postupak kao gore, dobivamo koeficijente b_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = b_n\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = b_n\pi \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Red (1) zove se **Fourierov red** funkcije f, dok se koeficijenti

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

zovu **Fourierovi koeficijenti** funkcije f. Uočimo, ako je funkcija f parna ($f(-x) = f(x)$), onda Fourierov red ne sadrži sinusne članove (jer je $b_k = 0$). Dakle, Fourierov red parne funkcije glasi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx),$$

a ako je funkcija f neparna ($f(-x) = -f(x)$), onda Fourierov red ne sadrži kosinusne članove (jer je $a_k = 0$) te glasi

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx).$$

Pokažimo da se funkcije mogu razviti u Fourierov red na bilo kojem simetričnom intervalu $[-L, L]$, $L > 0$.
Neka je funkcija f, perioda $2L$, zadana na intervalu $[-L, L]$. Definirajmo linearnu funkciju $\varphi : [-\pi, \pi] \to [-L, L]$ za koju vrijedi $\varphi(-\pi) = -L$, $\varphi(\pi) = L$. Tada možemo izračunati

funkciju $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiranu s $h = f \circ \varphi$. S obzirom da je φ linearna funkcija koja glasi $\varphi(x) = ax + b$, možemo izračunati njezine koeficijente.

$$\begin{aligned}
&\varphi(-\pi) = -L \Rightarrow -a\pi + b = -L \\
&\varphi(\pi) = L \Rightarrow a\pi + b = L \\
&\Rightarrow b = 0,\ a = \frac{L}{\pi}
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija $\varphi(x)$ glasi $\varphi(x) = \frac{Lx}{\pi}$. Sada funkciju $h(x)$ možemo razviti u Fourierov red, ali prvo izračunajmo njezine Fourierove koeficijente.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi(x))dx \\
&= \left| \begin{array}{c} \xi = \varphi(x) \\ d\xi = \varphi'(x)dx = \frac{L}{\pi}dx \\ dx = \frac{\pi}{L}d\xi \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(\xi)\frac{\pi}{L}d\xi \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi(x))\cos(kx)dx \\
&= \left| \begin{array}{c} \xi = \frac{Lx}{\pi} \\ x = \frac{\pi\xi}{L} \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\Big(\frac{k\pi\xi}{L}\Big)\frac{\pi}{L}d\xi \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\Big(\frac{k\pi\xi}{L}\Big)d\xi.
\end{aligned}$$

Analogno dobijemo da je

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\sin\Big(\frac{k\pi\xi}{L}\Big)d\xi.$$

Kako vrijedi $h(x) = (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$, a $\xi = \varphi(x)$, te zbog činjenice da funkciju $h(x)$ možemo razviti u Fourierov red, dobivamo

$$f(\xi) = h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{k\pi\xi}{L}\Big) + b_k\sin\Big(\frac{k\pi\xi}{L}\Big)\Big).$$

Ukoliko promjenimo naziv varijable funkcije f u x imamo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big) + b_k\sin\Big(\frac{k\pi x}{L}\Big)\Big), \tag{2.11}$$

s koeficijentima

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)dx, \\ a_k &= \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx, \\ b_k &= \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Neka je F periodičko proširenje funkcije f definirane na $[a,b]$, s periodom proširenja $T = b - a$. Definirajmo linearnu funkciju $\varphi : [-\pi,\pi] \to [a,b]$ sa $\varphi(x) = cx + d$, pri čemu vrijedi $\varphi(-\pi) = a$, $\varphi(\pi) = b$. Izračunajmo njezine koeficijente

$$\begin{aligned} &\varphi(-\pi) = a \Rightarrow -\pi c + d = a \Rightarrow c = \frac{a-d}{-\pi} \\ &\varphi(\pi) = b \Rightarrow \pi c + d = b \\ &\Rightarrow \quad d = \frac{a+b}{2}, \ c = \frac{b-a}{2\pi} \\ &\Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{b-a}{2\pi}x + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Tada možemo izračunati funkciju $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definiranu sa $g = F \circ \varphi$. Sada analognim izvodom kao ranije dobivamo:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) + b_k\sin\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)\right), \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx, \\ a_k &= \frac{2}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)dx, \\ b_k &= \frac{2}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)dx. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Za svaku funkciju f za koju postoji $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ možemo odrediti Fourierove koeficijente, pa ako red konvergira, dobivamo pridruživanje

$$x \mapsto S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)).$$

Međutim, općenito ne možemo izjednačiti $f(x)$ sa $S(x)$, te se nameće pitanje pod kojim uvjetima formalno dobiveni red predstavlja polaznu funkciju. Time ćemo se baviti u idućem poglavlju.

Primjer 1 *Razvijte u Fourierov red funkciju $f(x) = x^2 - 1$ na intervalu $[-1, 1]$.*
Odredimo Fourierove koeficijente:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)dx = -\frac{4}{3}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cos(n\pi x)dx - \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)dx$$

Prvi integral označimo s I i riješimo ga pomoću parcijalne integracije gdje je $u = x^2$, $dv = \cos(n\pi x)$. Tada dobivamo sljedeće:

$$I = \frac{x^2}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{2x}{n\pi}\sin(n\pi x)dx = -\frac{2}{n\pi}\int_{-1}^{1} x\sin(n\pi x)dx$$

Ponovno primjenimo parcijalnu integraciju gdje je $u_1 = x, dv_1 = \sin(n\pi x)$, i dobivamo

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{n\pi}\Big(-\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)dx\Big) \\ &= -\frac{2}{n\pi}\Big(-\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{1}\Big) \\ &= \frac{4\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} \\ &= \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Drugi integral je jednak nuli, pa imamo

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}, \ n \geq 1.$$

Kako je $(x^2 - 1)\sin(n\pi x)$ neparna funkcija, onda je $b_n = 0$, $n \geq 1$. Stoga Fourierov red funkcije $f(x)$ ima oblik

$$\hat{f}(x) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$$

3 Konvergencija Fourierovih redova

Jedan od osnovnih problema u teoriji Fourierovih redova je određivanje uvjeta na funkciju f pod kojima red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right),$$

gdje su

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1,$$

konvergira ka funkciji f. Činjenica da Fourierov red konvergira ne povlači da on konvergira ka funkciji f. Razlikujemo tri tipa konvergencije Fourierovog reda: konvergencija po točkama, uniformna konvergencija i konvergencija u smislu L^2 norme. Da bi Fourierov red konvergirao na određeni način, funkcija f treba zadovoljavati neke uvjete. Krenimo od konvergencije po točkama.

3.1 Konvergencija po točkama

Najprije definirajmo neke pojmove koji će nam biti potrebni kasnije.

Definicija 3 *Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je* **po dijelovima neprekidna** *na $[a, b]$, ako je neprekidna svugdje osim u konačno mnogo točaka u kojima ima prekid prve vrste. Nadalje, za po dijelovima neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je* **po dijelovima glatka** *na $[a, b]$, ako ima derivaciju f' definiranu i neprekidnu svuda osim u konačno mnogo točaka u kojima f' ima konačan lijevi i desni limes (u rubnim točkama segmenta $[a, b]$ pretpostavljamo da ima konačne limese).*

Dakle, za po dijelovima glatku funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ imamo konačno mnogo točaka

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

u kojima f eventualno ima prekid dok f' nije definirana, ali postoje:

$$\begin{aligned} &f(x_0+), f'(x_0+), f(x_{n+1}-), f'(x_{n+1}-) \\ &f(x_i+), f(x_i-), f'(x_i+), f'(x_i-) \quad \textit{za} \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lema 2 *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ po dijelovima glatka, onda je*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(\alpha x) dx = 0.$$

Dokaz. Rastavimo segment $[a, b]$ na podsegmente $[x_i, x_{i+1}]$ kao gore. Sada su f i f' neprekidne na svakom intervalu $[x_i, x_{i+1}]$, a zbog (3.1) restrikcije od f i f' na (x_i, x_{i+1}) možemo proširiti na segment $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n$ (jer su rubne točke uklonjivi prekidi). Kako je

$$\int_a^b f(x)\sin(\alpha x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin(\alpha x)dx,$$

dovoljno je pokazati da je

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin(\alpha x)dx = 0, \quad 0 \le i \le n.$$

Zbog neprekidnosti proširenja od f i f' na $[x_i, x_{i+1}]$ možemo provesti parcijalnu integraciju ($u = f(x), dv = \sin(\alpha x)$) te dobivamo

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin(\alpha x)dx = -\frac{f(x)\cos(\alpha x)}{\alpha}\Bigg|_{x_i+}^{x_{i+1}-} + \frac{1}{\alpha}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\cos(\alpha x)dx.$$

Iz činjenice da su f i f' omeđene na $[x_i, x_{i+1}]$, postoje konstante M i M' takve da vrijedi

$$|f(x)| < M, \quad |f'(x)| < M', \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Sada dobivamo ocjenu integrala kao (ograda za $\cos(\alpha x)$ je 1)

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin(\alpha x)dx\right| \le \frac{2M}{\alpha} + \frac{M'(x_{i+1} - x_i)}{\alpha},$$

iz koje za $\alpha \to \infty$ slijedi tvrdnja. □

Sada ćemo iskazati uvjete koji nam garantiraju konergenciju po točkama Fourierovog reda.

Teorem 1 *Ako je $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ po dijelovima glatka funkcija, onda njen Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$, pri čemu za sumu reda vrijedi:*

1. *$S(x) = f(x)$, ako je f neprekidna u točki $x \in (-\pi, \pi)$;*
2. *$S(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, ako je $x \in (-\pi, \pi)$ točka prekida;*
3. *$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$*

Dokaz. Promatrajmo periodičko proširenje funkcije f, koje označavamo također s f, i neka je

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

parcijalna suma Fourierova reda. Pokažimo da kada $n \to \infty$

$$S_n(x) - \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \to 0. \tag{3.2}$$

Zbog (2.10) imamo

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)[\cos(k\xi)\cos(kx) + \sin(k\xi)\sin(kx)]d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(\xi - x))\right]d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kz)\right]dz. \end{aligned} \tag{3.3}$$

pri čemu smo koristili supstituciju $z = \xi - x$. Označimo faktor u uglatoj zagradi sa

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kz).$$

Pomnožimo li $\sigma_n(z)$ s $2\sin\left(\frac{z}{2}\right)$, dobivamo

$$\begin{aligned} 2\sigma_n(z)\sin\left(\frac{z}{2}\right) &= \sin\left(\frac{z}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kz)\sin\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{z}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)z\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)z\right)\right] \\ &= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kz) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})z\right)}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Uvrštavanjem u (3.3) dobivamo

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})z\right)}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)}dz \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})z\right)}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)}dz \end{aligned} \tag{3.4}$$

Kako je $\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(z) = \pi$ slijedi

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz = \pi \Big/ \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz = 1$$

odnosno, zbog parnosti integranda

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz = \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

Pomnožimo prvu jednakost u (3.5) s $f(x-)$, a drugu s $f(x+)$, zatim ih zbrojimo i dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{f(x-)+f(x+)\} &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x-)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz \\ &+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x+)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sada je

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x-)+f(x+)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \{f(x+z)-f(x-)\}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz \\ &+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \{f(x+z)-f(x+)\}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz, \end{aligned} \tag{3.7}$$

stoga je dovoljno dokazati da integrali na desnoj strani teže k nuli za $n \to \infty$.
Drugi integral označimo s I_n, te ga napišimo kao

$$I_n = \int\limits_{0}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} = I_n' + I_n'', \qquad 0 < \delta < \pi$$

i ocijenimo I_n' i I_n''.
Neka je $\varepsilon > 0$. Pokažimo da za prikladno odabrani δ vrijedi $|I_n'| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n = 1, 2, ...$ i $|I_n''| < \frac{\varepsilon}{2}$ za dovoljno velike n. Kako je

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{f(x+z)-f(x+)}{z} = f'(x+),$$

za dovoljno malen $\delta > 0$ vrijedi

$$\left|\frac{f(x+z)-f(x+)}{z}\right| < |f'(x+)| + 1, \quad \forall z \in (0,\delta)$$

Nadalje,

$$\lim_{z\to 0} \frac{\frac{z}{2}}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} = 1,$$

pa za dovoljno malen $\delta > 0$ i $\forall z \in (0,\delta)$ imamo

$$1 < \frac{\frac{z}{2}}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} < 2.$$

S obzirom da je funkcija sinus ograničena s 1, za I'_n imamo sljedeću ocjenu:

$$\begin{aligned} |I'_n| &\leq \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \left|\frac{f(x+z)-f(x+)}{z}\right|\left|\frac{\frac{z}{2}}{\sin(\frac{z}{2})}\right|\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right|dz \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \{|f'(x+)|+1\}2dz = \frac{2\delta}{\pi}\{|f'(x+)|+1\}. \end{aligned}$$

Ukoliko odaberemo dovoljno malen $\delta > 0$ tako da osim gornje nejednakosti vrijedi i

$$\frac{2\delta}{\pi}\{|f'(x+)|+1\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

dobivamo

$$|I'_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n = 1, 2, ...$$

Za tako odabrani δ ocijenimo i $|I''_n|$ te ga najprije zapišimo u obliku

$$I_n'' = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x+)}{2\sin(\frac{z}{2})} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) z dz.$$

Prvi faktor integranda je po dijelovima glatka funkcija na $[\delta, \pi], \forall \delta > 0$ (jer je nazivnik na tom segmentu različit od nule). Prema Lemi 2. $I_n'' \to 0$ za $n \to \infty$, pa dakle $\exists N(\frac{\varepsilon}{2})$ takav da $n > N(\frac{\varepsilon}{2})$ povlači

$$|I_n''| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Time smo ocijenili I_n, jer vrijedi

$$|I_n| \leq |I_n'| + |I_n''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kako za prvi integral od (3.7) vrijedi analogna ocjena, time smo dokazali (3.2), tj. s $n \to \infty$

$$S_n(x) - \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \to 0.$$

Iz dokazanog slijedi tvrdnja teorema. Prvo smo vidjeli da red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$, a zatim da u točkama u kojima je f neprekidna imamo $f(x-) = f(x+) = f(x)$, pa imamo $S_n(x) \to f(x)$ tj. $S(x) = f(x)$, a to je ustvari tvrdnja 1. Iz izraza (3.2) vidimo da treba biti $S(-\pi) = S(\pi)$, što je prema (3.2) jednako aritmetičkoj sredini desnog limesa $f(-\pi+)$ u lijevom rubu i lijevog limesa $f(\pi-)$ u desnom rubu funkcije f. Time je dokaz teorema 1 gotov. □

Primjer 2 *Nađite Fourierov red funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 \leq x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < 5 \end{cases}.$$

Period ove funkcije je očito 10. *Prema tome imamo:*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3}{2} \\ a_n &= 0,\ za\, n \neq 0 \\ b_n &= \frac{1}{5} \int\limits_0^5 3\sin\Big(\frac{n\pi x}{5}\Big) dx = \frac{15}{5\pi x}\Big(-\cos\Big(\frac{n\pi x}{5}\Big)\Big)\Big|_0^5 = \frac{3}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{3}{n\pi}(1 - (-1)^n),\ n \geq 1 \end{aligned}$$

Ako je n paran, tada je $b_n = 0$. *Ako je n neparan, tj.* $n = 2k+1$, *tada je* $b_{2k+1} = \frac{6}{(2k+1)\pi}$, $k \geq 0$. *Prema tome, Fourierov red zadane funkcije je*

$$\hat{f}(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{5}\right).$$

3.2 Konvergencija u smislu L^2-norme

U slučajevima kada Fourierov red ne konvergira po točkama, on još uvijek može konvergirati u nešto slabijem smislu, kao što je konvergencija u smislu L^2-norme.

Definicija 4 *Za funkciju $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$ kažemo da je* **kvadratno integrabilna** *ako je*

$$\int_{-L}^{L} f^2(x)dx < \infty.$$

Kvadratno integrabilne funkcije tvore prostor koji označavamo s $L^2[-L, L]$. Istaknimo da nejednakost

$$|f(x)| \leq \frac{1 + f(x)^2}{2}$$

povlači da je svaka kvadratno integrabilna funkcija ujedno i integrabilna. Nadalje, iz nejednakosti

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f(x)^2 + g(x)^2}{2}$$

slijedi da je i produkt dviju kvadratno integrabilnih funkcija integrabilna funkcija. Također, iz $(f \pm g)^2 = f^2 \pm 2fg + g^2$ slijedi da, ako su $f, g \in L^2[-L, L]$, onda su im i zbroj i razlika u $L^2[-L, L]$. Osim toga, za $f \in L^2[-L, L]$ je i $kf \in L^2[-L, L]$ za svaku konstantu k, stoga možemo zaključiti da je $L^2[-L, L]$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Na tom vektorskom prostoru zadan je skalarni produkt kao

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\, dx,$$

a norma je

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx}.$$

Neka je $V = L^2[-\pi, \pi]$, a V_N potprostor razapet skupom vektora
$\{1, \cos(x), \sin(x), ..., \cos(Nx), \sin(Nx)\}$. Tada vektor u potprostoru V_N ima oblik

$$c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx), \quad c_k, d_k \in \mathbb{C}.$$

Pretpostavimo da je $f \in V$ i neka je

$$f_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \in V_N$$

parcijalni Fourierov red, pri čemu su a_k i b_k Fourierovi koeficijenti. S obzirom da su ti koeficijenti dobiveni ortogonalnom projekcijom funkcije f na potprostor razapet funkcijama $\cos(kx)$ i $\sin(kx)$, funkcija f_N je ortogonalna projekcija funkcije f na potprostor V_N. Osim toga, f_N je funkcija u potprostoru V_N koja je najbliža funkciji f u L^2 smislu, tj.

$$\|f - f_N\|_{L^2} = \min_{g \in V_N} \|f - g\|_{L^2}$$

Sada iskažimo teorem koji nam govori o konvergenciji u prostoru $L^2[-\pi, \pi]$ te koji također vrijedi i za kompleksne Fourierove redove.

Teorem 2 *Neka je $f \in L^2[-\pi,\pi]$, te neka je*

$$f_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

pri čemu su a_k i b_k Fourierovi koeficijenti funkcije f. Tada niz funkcija f_N konvergira prema funkciji f u prostoru $L^2[-\pi,\pi]$. Drugim riječima,

$$\lim_{N\to\infty} \|f_N - f\|_{L^2} = 0.$$

Istaknimo još dvije važne nejednakosti.

Teorem 3 (Besselova nejednakost) *Neka je $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ kvadratno integrabilna funkcija. Ako Fourierovi koeficijenti a_n i b_n funkcije f postoje, onda vrijedi*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x)dx.$$

Dokaz. Neka je

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

Tada je

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-L}^{L} (f(x) - S_N(x))^2 dx \\ &= \int_{-L}^{L} f^2(x) - 2\int_{-L}^{L} f(x)S_N(x)dx + \int_{-L}^{L} S_N^2(x)dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Iz definicije Fourierovih koeficijenata dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x)S_N(x)dx &= \int_{-L}^{L} f(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\right]dx \\ &= \frac{a_0}{2} La_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n La_n + b_n Lb_n) \\ &= L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\Big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Koristeći relacije ortogalnosti dobivamo

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} S_N^2(x)dx &= \int_{-L}^{L} S_N(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\right]dx \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} S_N(x)dx+\sum_{n=1}^{N}\left[a_n\int_{-L}^{L} S_N(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx+b_n\int_{-L}^{L} S_N(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] \\
&= L\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Supstitucijom(3.9)-(3.10) u (3.8) dobivamo

$$
0 \le \int_{-L}^{L} f^2(x)dx - L\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right)
$$

$$
\Rightarrow \quad \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2) \le \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx. \tag{3.11}
$$

Kako nejednakost (3.11) vrijedi za svaki $N \ge 1$, zaključujemo da je

$$
\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2) \le \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx.
$$

□

Može se pokazati da za kvadratno integrabilne funkcije vrijedi *Parsevalova jednakost*

$$
\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2dx.
$$

Napomena L^2 normu nekog signala obično interpretiramo kao njegovu energiju. Uz takvu fizikalnu interpretaciju, kvadrati Fourierovih koeficijenata nekog signala mjere energiju odgovarajućih harmonika (sinusoidalni doprinos određene frekvencije ukupnom periodičnom gibanju), odnosno frekvencijskih komponenti. Prema tome, fizikalna interpretacija Parsevalove jednakosti govori da je ukupna energija signala jednaka zbroju energija njegovih harmonika.

3.3 Uniformna konvergencija

U mnogim primjena Fourierovog reda je poželjno da red uniformno konvergira. To se posebno može vidjeti kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom separacije varijabli. Najprije se podsjetimo, kažemo da niz funkcija $F_n(x)$ konvergira uniformno prema funkciji $F(x)$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\,\exists n \in \mathbb{N})\ \text{koji ne ovisi o } x,\ \text{takav da je } |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon \forall x, \forall n \geq n_0.$$

Dakle, Fourierov red funkcija f **uniformno konvergira** prema $f(x)$ ako niz parcijalnih suma

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

uniformno konvergira prema $f(x)$ kada $n \to \infty$. Prije nego iskažemo teorem o uniformnoj konvergenciji Fourierovog reda, iskazat ćemo jedan bitan rezultat pod nazivom Cauchy–Schwarz–Buniakowsky nejednakost.

Propozija 1 *Neka su z_i, w_i kompleksni brojevi za $1 \leq i \leq n$. Tada je*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2}.$$

Sada iskažimo i dokažimo teorem o uniformnoj konvergenciji Fourierovog reda na intervalu $[-L, L], L \in \mathbb{R}$.

Teorem 4 *Neka je f neprekidna, po dijelovima glatka i periodična funkcija s temeljnim periodom $2L$. Tada Fourierov red konvergira uniformno ka f na $[-L, L]$.*

Dokaz. Neka je

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

N-ta parcijalna suma Fourierovog reda funkcije f, i neka je

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(b_n \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - a_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right),$$

s koeficijentima

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$B_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f'(x) dx = 0.$$

S obzirom da je f neprekidna na $[-L, L]$, po Teoremu 1 vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x), \quad \forall x \in [-L, L].$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
|f(x) - S_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\right| \\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right| \\
&\le \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|), \quad \forall x \in [-L, L].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ako pokažemo da su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergentni, tada će uniformna konvergencija slijediti iz relacije (3.12). Parcijalnom integracijom koeficijente a_n možemo prevesti na oblik

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
&= \left| \begin{array}{c} u = f(x) \\ dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{L} \left(\frac{L}{n\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} f'(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \\
&= -\frac{L}{n\pi} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
&= -\frac{L}{n\pi} A_n, \quad n \ge 1.
\end{aligned}$$

Analogno dobijemo da je

$$b_n = \frac{L}{n\pi} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} B_n, \quad n \ge 1.$$

Dakle,

$$|a_n| = \frac{L}{n\pi} |A_n| \quad i \quad b_n = \frac{L}{n\pi} |B_n|, \quad n \ge 1. \tag{3.13}$$

Sada pokažimo da redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |A_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |B_n|$ konvergiraju. Prema C-S-B nejednakosti, za svaki $N \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |A_n| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} A_n^2} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} A_n^2} \tag{3.14}$$

jer je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Analogno dobijemo

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |B_n| \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} B_n^2}. \tag{3.15}$$

Derivacije funkcije f' je po dijelovima neprekidna što povlači da je f' kvadratno integrabilna na $[-L, L]$ pa iz Besselove nejednakosti slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(f'(x))^2 < \infty$$

pri čemu smo uzeli u obzir da je $B_0 = 0$. Odavde slijedi da su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2$ konvergentni pa iz relacija (3.14) i (3.15) slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|A_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|B_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2}.$$

Sada relacija (3.13) povlači da redovi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ konvergiraju jer je

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leq \frac{L}{\sqrt{6}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| \leq \frac{L}{\sqrt{6}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2}.$$

Konačno, iz relacije (3.12) zaključujemo da Fourierov red konvergira uniformno jer

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{-L\leq x\leq L}|f(x) - S_N(x)|\right) \leq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = 0.$$

Time je tvrdnja dokazana. $\square$

4 Kompleksni oblik Fourierovog reda

Promotrimo kompleksne funkcije realne varijable $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tj. funkcije oblika

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x) \tag{4.1}$$

Funkcija f je kvadratno integrabilna na $[a, b]$ ukoliko postoji $\int_a^b f\overline{f}dx$. Nadalje, kažemo da su f_1 i f_2 *ortogonalne* obzirom na $[a, b]$ ukoliko je $\int_a^b f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = 0$, dok za sustav $\{f_k\}$ kažemo da je *ortogonalan* obzirom na $[a, b]$ ako vrijedi

$$\int_a^b f_j\overline{f_k}dx = \begin{cases} > 0 & za \quad j = k \\ 0 & za \quad j \neq k \end{cases}$$

Koeficijenti Fourierova reda funkcije f po takvom ortogonalnom sustavu glase

$$c_k = \frac{1}{\|f_k\|^2} \int_a^b f(x)\overline{f_k(x)}dx, \quad k = 1, 2, ... \tag{4.2}$$

pri čemu se norma definira kao

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f\overline{f}dx}.$$

dok je

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x) \tag{4.3}$$

pripadni Fourierov red.

Poslužimo se sustavom

$$f_k(x) = e^{ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{4.4}$$

koji je ortogonalan na $[-\pi, \pi]$. Uvrštavanjem f_k u (4.2) dobivamo Fourierove koeficijente za sustav (4.4) koji glase

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{4.5}$$

dok je

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{4.6}$$

Fourierov red funkcije f. Koeficijent c_0 trivijalno dobijemo da je jednak $\frac{a_0}{2}$. Sada nam još preostaje vidjeti kako izgledaju c_k za $k = 1, 2, ...$ te $k = -1, -2, ...$, pri čemu ćemo koristiti Eulerove formule

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Za pozitivne k-ove imamo

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(kx) - i\sin(kx))dx = \frac{1}{2}(a_k - ib_k),$$

a za negativne

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(kx) + i\sin(kx))dx = \frac{1}{2}(a_k + ib_k).$$

Sada red

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}e^{-ikx} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)). \end{aligned}$$

Primjer 3 *Promotrimo pravokutni impuls visine h i širine 2ε. Iz tog impulsa izgradimo periodičku funkciju f s frekvencijom v. Funkcija f ima period $P = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\Omega}$ $(P > \varepsilon)$.*

Fourierovi koeficijenti u kompleksnom obliku glase

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{P}\int\limits_{\frac{P}{2}}^{\frac{-P}{2}} f(x)e^{-i\frac{2k\pi}{P}}dx = \frac{1}{P}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} he^{-ik\Omega x}dx = \frac{h}{P}\Big(-\frac{1}{ik\Omega}e^{-ik\Omega x}\Big)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \\ &= -\frac{h}{P}\frac{P}{ik2\pi}[\cos(k\Omega\varepsilon) - i\sin(k\Omega\varepsilon) - \cos(k\Omega\varepsilon) - i\sin(k\Omega\varepsilon)] \\ &= \frac{h}{k\pi}\sin(k\Omega\varepsilon), \quad k = \pm1, \pm2, ... \end{aligned}$$

S obzirom da je $c_0 = \frac{2\varepsilon h}{P} = \lim_{k\to\infty} \frac{h}{\pi}k\sin(k\Omega\varepsilon)$, onda možemo pisati

$$f(x) = \frac{h}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\Omega\varepsilon)}{k}e^{ik\Omega x}.$$

5 Fourierova transformacija

Fourierova transformacija ima važnu ulogu u konstrukciji filtera kojeg možemo shvatiti kao "crnu kutiju" koja uzima ulazni signal, procesira ga i vraća izlazni signal koji je promijenjen. Jedan primjer filtra je uređaj koji uklanja šum iz signala. Naime, s matematičkog stajališta, signal je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koja je po dijelovima neprekidna, a filter je transformacija koja signal f preslika u novi signal $\hat{f}$. Stoga pogledajmo što je točno Fourierova transformacija.

Najprije definirajmo Fourierovu integralnu formulu i Fourierov integral. Do sada smo promatrali kako razviti periodičnu funkciju f definiranu na intervalu $[-L, L]$ u Fourierov red. No, ukoliko pustimo da L teži u beskonačno, tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onda Fourierov red prelazi u Fourierov integral. **Fourierova integralna** formula ima oblik

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi, \tag{5.1}$$

pri čemu se izraz na desnoj strani zove **Fourierov integral**. Da bi se funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mogla prikazati formulom (5.1), funkcija f treba biti po dijelovima glatka na svakom konačnom segmentu i apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$ (tj. vrijedi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$).
Kao što smo imali kompleksni oblik Fourierovog reda, tako imamo i kompleksni oblik Fourierovog integrala koji je dan s

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi. \tag{5.2}$$

Zapišimo (5.2) kao

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right),$$

i označimo s

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \tag{5.3}$$

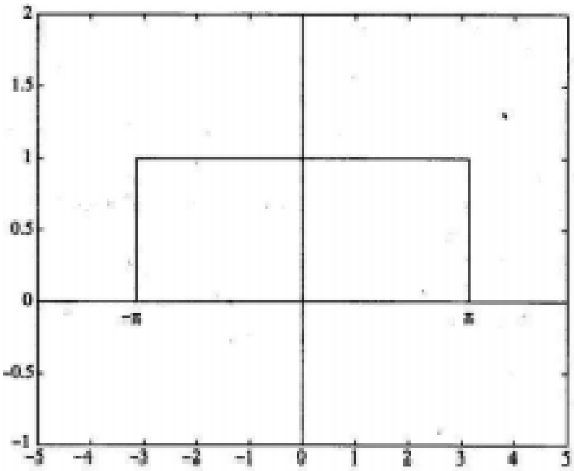
tada dobivamo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{5.4}$$

Preslikavanje $f \mapsto \varphi$ definirano s (5.3) zove se Fourierova transformacija, a funkcija φ zove se spektralna funkcija, spektar ili Fourierov transformat od f. Prijelaz od φ na f definiran sa (5.4) zove se inverzna Fourierova transformacija.

Primjer 4 *Odredimo Fourierovu transformaciju pravokutnog vala,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x \le \pi, \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$



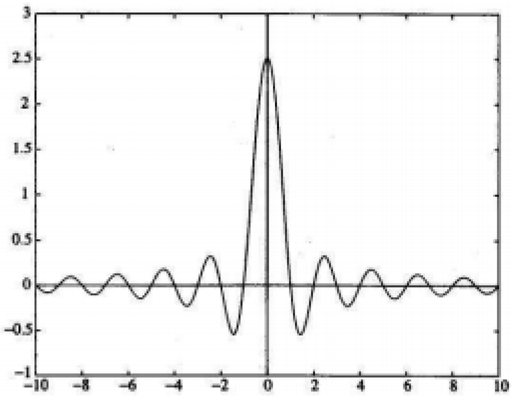
Slika 2: Pravokutni val

prikazanog na Slici 2.

Očito je $f(\xi)e^{-i\lambda x} = f(\xi)(\cos(\lambda\xi) - i\sin(\lambda\xi))$*. S obzirom da je* f *parna funkcija, a* $f(\xi)\sin(\lambda\xi)$ *je neparna, pa je njezin integral po skupu* $\mathbb{R}$ *jednak nuli. Zbog toga je Fourierova transformacija funkcije* f *jednaka*

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda\xi) d\xi = \frac{\sqrt{2}\sin(\lambda\pi)}{\sqrt{\pi}\lambda}.$$

Fourierova transformacija $\varphi(\lambda)$ *mjeri amplitudu frekvencijske komponente od* f *koja titra s frekvencijom* λ*. U ovom primjeru,* f *je po dijelovima konstantna funkcija. Kako konstantna funkcija ima frekvenciju nula, očekujemo da* $\varphi(\lambda)$ *poprima najveće vrijednosti kada je parametar* λ *blizu nule, što i vidimo s grafa transformacije* $\varphi(\lambda)$ *prikazanom na Slici 3.*



Slika 3: Transformacija $\varphi(\lambda)$

6 Primjena Fourierovih redova

6.1 Provođenje topline

Joseph Fourier je u svojoj raspravi "Theorie analytique de la chaleur" (Analitička teorija topline), izdanoj 1822. godine, objavio rad o provođenju topline. U središtu rasprave nalazi se Newtonov zakon hlađenja: protok topline između susjednih molekula proporcionalan je ekstremno maloj razlici njihove temperature. U ovom poglavlju ćemo proučiti problem provođenja topline na štapu. Naravno, štap može imati ugrađen izvor topline, ali mi ćemo vidjeti što se događa na potpuno izoliranom štapu gdje nema nikakve razmjene topline s okolinom.

Neka je štap predstavljen intervalom $[0, L]$ i neka je temperatura u točki x u vremenu t označena s $u = (x, t)$. Pretpostavimo da je tok topline od toplijih područja prema hladnijim takav da je brzina protoka proporcionalna gradijentu temperature te da ima suprotan smjer. Uvjet da toplina neće prijeći rubne točke je, matematičkim riječima, da je gradijent temperature jednak nuli na rubovima. Ukoliko temperaturu štapa u početnom trenutku označimo s $f(x)$ tada imamo sljedeći problem:

$$u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L; \tag{6.1}$$
$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{6.2}$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{6.3}$$

Prvo potražimo rješenje homogenog potproblema (6.1)+(6.2). Koristit ćemo se metodom separiranih varijabli, pa pretpostavimo da je $u(x,t) = X(x)T(t)$, pri čemu funkcije X i T ovise samo o varijablama x i t redom, te uvrstimo u (6.1) :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Izraz na lijevoj strani ovisi samo o varijabli t, a izraz na desnoj strani ovisi samo o varijabli x, pa možemo zaključiti da su oba izraza jednaka nekoj konstanti λ, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - \lambda T(t) = 0,$$

pri čemu treba vrijediti $X'(0) = X'(L) = 0$ da bi se zadovoljilo (6.2) bez da je $u = 0$. To nas dovodi do sljedećeg rubnog problema za X:

$$\begin{aligned} &X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 < x < L; \\ &X'(0) = X'(L) = 0. \end{aligned}$$

Imamo 3 slučaja:
1) $\lambda = 0$
Tada je $X(x) = Ax + B$ i $X'(x) = A$. Iz uvjeta $X'(0) = X'(L) = 0$ slijedi

$$\begin{aligned} &0 = X'(0) = A, \quad 0 = X'(L) = A \\ &\Rightarrow A = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Iz

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

iz toga slijedi da je B konstanta. Zaključujemo da $\lambda_0 = 0$ svojstvena vrijednost s vlastitom funkcijom $f_0(x) = 1$

2) $\lambda > 0$
Tada je $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ i $X'(x) = A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Ukoliko primjenimo uvjete $X'(0) = X'(L) = 0$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
0 = X'(0) = A\sqrt{\lambda} - B\sqrt{\lambda} \Rightarrow A = -B \\
0 = X'(L) = A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}L} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}L}
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem $A = -B$ u drugu jednadžbu, dobivamo $A = B = 0$ (jer je $\lambda > 0$). Opet smo dobili trivijalno rješenje.
3) $\lambda = -k^2$
Ovaj slučaj će nam dati netrivijalno rješenje.
Sada je $X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$ i $X'(x) = -Ak\sin(kx) + Bk\cos(kx)$. Opet primjenimo uvjete $X'(0) = X'(L) = 0$ i dobivamo

$$
\begin{aligned}
& X'(0) = Bk = 0 \Rightarrow B = 0 \\
& X'(L) = -Ak\sin(kL) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \\
& \Rightarrow \lambda_n = -k_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

Dakle, rješenja su dana u obliku niza $X_n(x) = A_n\cos(k_n x)$, $n = 1, 2, ...$ Rješenje za jednadžbu $T'(t) - \lambda T(t) = 0$ je $T_n(t) = C_n e^{-k_n^2 t}$.
Sada možemo zaključiti, pomoću principa superpozicije i konvergencije Fourierovog reda, da je rješenje za početni problem niz oblika

$$
u_n(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.5}
$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
a_n = A_n C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
f(x) = u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
\end{aligned}
$$

Primjetimo da rješenje (6.5) ima svojstvo da, ukoliko $t \to \infty$, svi osim prvog člana će težiti nuli. To je sukladno intuiciji da će se temperatura štapa stabilizirati nakon nekog vremena.

6.2 Valna jednadžba

Valna jednadžba opisuje oscilacije žice, longitudinalne oscilacije štapa i torzijske oscilacije štapa. Riješimo problem oscilacije žice.

Zamislimo žicu, npr. violine ili gitare, rastegnutu između 0 i π na x-osi. Točka s koordinatom x u trenutku t ima položaj koji odstupa od ravnoteže za $u(x,t)$. Ukoliko je žica homogena, njene vibracije su male, i uzimamo da zatvaraju pravi kut s osi x, gravitaciju zanemarimo, a masu, duljinu i vrijeme prikladno odaberemo tako da funkcija u zadovoljava valnu jednadžbu u najjednostavnijem obliku $u_{xx} = u_{tt}$. Iz činjenice da je žica pričvršćena na krajevima slijedi $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. U početnom trenutku tj. kad je $t = 0$ svaka točka na žici ima određen položaj i određenu brzinu kretanja. Želimo pronaći $u(x,t)$, za $t > 0$ i $x \in (0,\pi)$. To je predstavljeno početno-rubnim problemom:

$$u_{xx} = u_{tt}, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0; \tag{6.6}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{6.7}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < \pi; \tag{6.8}$$

$$u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < \pi; \tag{6.9}$$

Sada, kao i kod provođenja topline, koristimo separaciju varijabli kako bi pronašli rješenje našeg problema. Dakle, pretpostavimo $u(x,t) = X(x)T(t)$ iz čega slijedi:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{6.10}$$

$$X(0) = X(\pi) = 0; \tag{6.11}$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{6.12}$$

Znamo da jednadžba (6.10) ima netrivijalno rješenje za $\lambda = n^2$, $n \geq 1$, odnosno za višekratnike od $X_n(x) = \sin(nx)$, a rješenje jednadžbe (6.12) za $\lambda = n^2$, $n \geq 1$, je $T_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$. Zbog homogenosti dobivamo sljedeće rješenje potproblema (6.6)+(6.7):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \sin(nx). \tag{6.13}$$

Ukoliko u (6.8) uvrstimo $t = 0$ slijedi

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx).$$

Daljnjim diferenciranjem u odnosu na t i uvrštavanjem $t = 0$ dolazimo do početnog uvjeta (6.9) te dobivamo da je

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin(nx).$$

Ako odaberemo a_n tako da bude sinusni koeficijent funkcije f, te odaberemo b_n takav da je nb_n odgovarajući koeficijent funkcije g, onda niz (6.13) predstavlja traženo rješenje.

Sumu (6.13) možemo zapisati u obliku $A_n \sin(nt + \alpha_n) \sin(nx)$ koja u glazbi ima značenje n-tog djelomičnog tona kojeg emitira oscilacija žice. Ukoliko je $n = 1$ tada imamo ton znan kao osnovni ton. Pitagora je uočio sljedeće: ako je duljina žice prepolovljena i vibrira na isti način kao što bi vibrirala cijela, tada ton čujemo za oktavu više.

Literatura

[1] M.Braun: Differential Equations and Their Applications, Springer

[2] I. Ivanšić: Fourierovi redovi, Diferencijalne jednadžbe, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Osijek 2000.

[3] Saša Krešić-Jurić: Parcijalne diferencijalne jednadžbe, Skripta, Odjel za matematiku, Prirodoslovno-matematički fakultet, Split 2014.

[4] A.Vretblad: Fourier Analysis and Its Applications, Springer, New York 2006.

[5] `https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/3_fourierova_transformacija.pdf`