Modalna logika

Barišić, Irena

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Irena Barišić

Modalna logika

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Irena Barišić

Modalna logika

Završni rad

Voditeljica: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

Sadržaj

Sažetak: U ovom završnom radu bavimo se proučavanjem modalne logike koja nastaje kao proširenje klasične logike. Više nas ne zanima samo tvrdnja 'A je istina' nego tvrdnje poput 'A je moguće' i 'A je nužno'. Čitatelj će se upoznati sa razvojem modalne logike kroz povijest te osnovnim definicijama kao što su K modalni sustav i Kripkeov okvir. Navest ćemo primjere, dokaze i interpretaciju nekih ekvivalentnih tvrdnji. U trećem poglavlju ćemo se upoznati sa semantikom mogućih svjetova te dokazati glavne teoreme za modalnu logiku, kao što su teorem korektnosti i teorem potpunosti.

Ključne riječi: modalni operatori 'nužno' i 'moguće' K sustav, Kripkeov okvir, semantika mogućih svjetova, teorem korektnosti, teorem potpunosti

Modal logic

Abstract: In this final work, we are studying the modal logic that emerges as a result of classical logic. We are not interested anymore in statement like 'A is true' but statements like 'A is possible' or 'A is necessary'. Through reading this final work, the Reader will be introduced with the development of modal logic throughout history and with basic terms such as K modal system and Kripke's frame. We will advert examples, proofs and interpretations of some equivalent statements. In the third chapter we will get acquainted with the semantics of possible worlds and prove the main theories of modal logic, such as the soundness theorem and the completeness theorem .

Key words: modal operators 'necessary' and 'possible', system K, Kripke's frame, possible-world semantics, soundness theorem, completness theorem

Uvod

U ovom završnom radu bavimo se modalnom logikom koja pripada takozvanim neklasičnim logikama uz kvantnu, temporalnu, intuicionističku, 'fuzzy' i njima sličnim. U prvom poglavlju ćemo se upoznati sa matematičarima i logičarima koji su utjecali na razvoj modalne logike te ćemo definirati osnovne pojmove vezane uz *klasičnu logiku sudova*. Također ćemo se upoznati sa dva 'nova' (modalna) operatora, tj. s operatorima *'nužno' i 'moguće'*.

U drugom poglavlju ćemo definirati *K modalni sustav* i dokazati jednu od formula pomoću aksioma i pravila izvoda sustava K, uz pomoć kojih se sama definicija K modalnog sustava može bolje razumjeti.

U trećem poglavlju proširujemo pojam K modalnog sustava na pojam *Kripkeovog okvira i modela*. U nastavku navodimo i opisujemo proširenja sustava K i ograničenja koja se postavljaju na odnose između okvira. Pokazujemo važne rezultate sustava K kao što su *Teorem o korektnosti sustava K* te *Teorem potpunosti sustava K*. Na primjeru pokazujemo slučaj u kojem neka formula nije teorem sustava K. Nadalje, upoznajemo se sa semantikom mogućih svjetova i dokazujemo ekvivalenciju dviju formula za bilo koji mogući svijet. Pored navedenog, opisat ćemo pravila glavnog testa te ista primjeniti na jednom od primjera karakterističnih principa logike. Na kraju završnog rada iskazati ćemo glavne teoreme, leme i dokazati da su svi promatrani sustavi *korektni i potpuni*.

1. Modalni operatori

1.1. Povijest

Modalna logika je stara kao i logika. Suvremeni interes za modalnu logiku počinje s Aristotelom [1]. Uz silogizme koji se bave kategorijskim izjavama, grčki mislilac je želio formalizirati logičke odnose između onoga što je, što je potrebno i što je moguće. Nažalost, njegovo postupanje prema modalitetu proizlazi iz brojnih smetnji i zbunjenosti dok su njegovi kategorijski silogizmi postali glavnim elementom klasičnog obrazovanja, modalna logika je odbijena kao neuspjeh. O modalnoj logici i semantici se na široko raspravljalo u srednjem vijeku. U suvremenom razdoblju, predmet modalne logike pokrenuo je C.I. Lewis [2]neposredno prije Prvog svjetskog rata. Lewis je utemeljio modernu modalnu logiku u svojoj *Harvard tezi* (1910. godina) i u nizu znanstvenih članaka počevši od 1912. godine. Njegov rad je kulminirao kada ga je objavio u svojoj knjizi "Simbolična logika" (1932. godina) u kojoj je predstavio pet sustava S1 - S5. U početku je reakcija tiska bila loša, uglavnom kao rezultat kritika Quinea[3], čiji je rad također proizveo veliku nepopularnost Meinongističke teorije. [4] Stvari se mijenjaju u ranim šezdesetim godinama 20.-tog stoljeća pojavom semantike mogućih svjetova, zahvaljujući interesu velikog broja filozofa i logičara koji su doprinjeli procvatu modalne logike. Posebno se ističe američki filozof i logičar Saul Kripke [5]. Kripkeova semantika je u osnovi jednostavna, ali dokazi se olakšavaju uz primjenu semantičkih tablica ili stabala.

Pojam mogućeg svijeta nalazi se u Leibnizu (npr. Monadology, poglavlje 53.)[6]. Modalni realizam je bio najraspostranjeniji za vrijeme D. Lewisa [7]. Značajni zagovornici aktualizma uključuju Plantinga [8] i Stalnakera [9]. Kripkeov pogled na prirodu mogućih svjetova se može naći u knjizi „Kripkeovi svjetovi“.

1.2. Klasična logika sudova

Svaki kompletan sustav logike treba sadržavati barem tri komponente: rigorozni jezik za pisanje tvrdnji, način tumačenja tvrdnji, tj. određivanje njihove vrijednosti istine te način pisanja dokaza. U klasičnoj logici se jezik logike sudova definira na sljedeći način:

Definicija 1.2.1. *Alfabet logike sudova je unija skupova A_1, A_2, A_3, gdje su:*

$A_1 = \{P_0, P_1, P_2, ...\}$ *prebrojiv skup čiji se elementi zovu propozicionalne varijable,*
$A_2 = \{\neg, \vee, \wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$ *skup logičkih veznika,*
$A_3 = \{(,)\}$ *skup pomoćnih simbola (zagrade).*

[1]Aristotel, starogrčki filozof (384.pr.Kr. - 322.pr.Kr.)
[2]Clarence Irving Lewis, američki akademski filozof (1883. - 1964.)
[3]Willard Van Orman Quine, američki filozof (1908. - 2000.)
[4]Alexius Meinong Ritter von Handschuchsein, austrijski filozof (1853. - 1920.)
[5]Saul Aaron Kripke, američki filozof i logičar (1940.-)
[6]Monadologija (1714.), knjiga njemačkog filozofa Gottfrieda Leibniza (1646. - 1716.)
[7]David Kellogg Lewis, američki filozof (1941. - 2001.)
[8]Alvin Carl Plantinga, američki filozof (1932. -)
[9]Robert Stalnaker, američki filozof (1940. -)

Definicija 1.2.2. *Atomarna formula je svaka propozicionalna varijabla.*
Pojam formule definiramo induktivno:

a) *svaka atomarna formula je formula*

b) *ako su A i B formule tada su i riječi $(\neg A)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \longrightarrow B)$, $(A \longleftrightarrow B)$*

c) *riječ alfabeta logike sudova je formula ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka uvjeta a) i b).*

U nastavku, prvo dajemo definiciju sustava RS, zatim definiramo pojmove dokaza, teorema i izvoda.
Alfabet logike sudova koji smo koristili prije zamjenjujemo sa skupom osnovnih simbola, tj. sa skupom $\{\neg, \longrightarrow, (,)\} \cup \{P_0, P_1, P_2, ...\}$.
Više o novom uvedenom alfabetu možete pronaći u [6].
Uvođenjem navedenih pojmova kasnije ćemo bolje razumjeti definiciju Kripkeovog modalnog sustava.

Definicija 1.2.3. *Sustav RS zadan je svojim shemama aksioma i jednim pravilom izvoda.*
Sheme aksioma sustava RS su:

A1) $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$;

A2) $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$;

A3) $(\neg B \longrightarrow \neg A) \longrightarrow (A \longrightarrow B)$.

Jedino pravilo izvoda je modus (u nastavku mod pon) tj.

$$\frac{A \qquad A \longrightarrow B}{B}$$

Svaku instancu neke od shema A1) - A3) nazivamo aksiom.

Definicija 1.2.4. *Kažemo da je niz formula $F_1, \cdots, F_n$ dokaz za formulu F u sustavu RS ako vrijedi:*

a) *formula F_n je upravo F, tj. $F_n \equiv F$;*

b) *za sve $k \in \{1, \cdots, n\}$ formula F_k je ili aksiom ili je nastala primjenom pravila modus ponens na neke formule F_i i F_j, gdje su $i, j < k$.*

Kažemo da je formula F teorem sustava RS, u oznaci $\vdash_{RS} F$ (odnosno, kratko $\vdash F$), ako u RS postoji dokaz za F.

Definicija 1.2.5. *Neka je Γ proizvoljan skup formula logike sudova i F neka formula. Kažemo da je niz formula $F_1, \cdots, F_n$ izvod iz skupa Γ formule F u sustavu RS, u oznaci $\Gamma \vdash F$, ako vrijedi:*

a) *formula F_n je upravo formula F, tj. imamo $F_n \equiv F$;*

b) *za sve $k \in 1, \cdots, n$ vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

- $b_1)$ *F_k je aksiom sustava RS;*
- $b_2)$ *$F_k \in \Gamma$ tada formulu F_k nazivamo pretpostavka;*
- $b_3)$ *formula F_k je nastala iz nekih $F_i, F_j, (i, j < k)$ pomoću pravila mod pon.*

1.3. Operatori 'nužno' i 'moguće'

Pogledajmo tvrdnju 'Zvijezde postoje'. Ovu tvrdnju možemo opisati u klasičnoj logici i reći da je tvrdnja istinita. Dakle, sigurni smo u postojanje zvijezda jer ih vidimo i naučili smo da su dio nebeskih tijela pored planeta, asteroida i prirodnih satelita.
No, za tvrdnje 'NLO postoji' i 'Izvanemaljci postoje' nismo sigurni jesu li istinite ili lažne. O njihovom postojanju je bilo puno govora tijekom Drugog svjetskog rata. Građani skadinavskih zemalja su 1946. godine uočili nepoznate leteće objekte nalik raketama iznad svojih naselja. Smatrali su da neprijatelji ispaljuju svoje rakete,kasnije je ta teorija odbačena. Do današnjeg dana još uvijek nije utvrđeno tko se ili što pojavilo na nebu. Raspravljalo se o mogućnosti dolaska izvanzemaljskog oblika života, njihovm sredstvima prijevoza (NLO-i), pa čak i mogućnosti kontakta s tim oblicima života. No da bi pojavljivanje izvanzemaljaca i NLO-a bilo moguće, oni moraju nužno postojati.

Zbog prethodnih tvrdnji klasična logika nam nije dovoljna da bi opisali mogućnost i nužnost. U primjerima; 'Moguće je da će znanstvenici otkriti lijek za besmrtnost.' te 'Nužno je spriječiti globalno zatopljenje Zemlje.', pojavljuju se dva operatora $\Diamond$ i $\Box$. Navedeni operatori pripadaju tzv. modalnim operatorima te se pripadne logike nazivaju modalne logike. Intuitivno, $\Diamond A$ čitamo - A je moguće, a $\Box A$ čitamo - A je nužno.

Kant[10] i Frege [11] su oboje tvrdili da modaliteti ne dodaju nikakve relevantne informacije o argumentu, nego nas samo mogu navoditi zašto bi mogli vjerovati da je određena tvrdnja istinita. Oni su vjerovali da ni više ili manje ne može biti izvedeno iz modalnog oblika tvrdnje A nego iz A same. Ta se tvrdnja smatra lažnom. Uostalom, ako su dvije izjave ekvivalentne, one bi trebale povlačiti jedna drugu. Čini se razumnim reći da, ako je A događaj, onda A mora biti moguće stanje stvari, jer ono što je istinito ne može biti nemoguće. Međutim, sasvim je manje očito reći da je zbog toga što je A moguće, A je događaj. Moguće je, na primjer, da je moj pas veći oblik puža, ali nema razloga vjerovati da je to zapravo istina. Dakle, dok aktualnost podrazumijeva mogućnost, mogućnost ne znači aktualnost. Čini se, dakle, da postoji više modaliteta nego što su Kant i Frege pretpostavljali, tj. modalne tvrdnje nisu sasvim ekvivalentne njihovim odgovarajućim nemodalnim događajima.

[10]Immanuel Kant, njemački filozof (1724. - 1804.)
[11]Friedrich Ludwig Gottlob Frege, njemački matematičar (1848. - 1925.)

2. Kripkeov modalni sustav

Jedan od najednostavnijih modalnih sustava je Kripekov modalni sustav koji je dobio ime u čast već spomenutog američkog filozofa i logičara Saula Kripkea. U nastavku ćemo koristiti izraz K modalni sustav ili samo sustav K.

2.1. Sintaksa K modalnog sustava

Definicija 2.1. *Alfabet modalnog sustava K sadrži alfabet klasične logike sudova i logičku konstantu $\perp$ te jedan unarni modalni operator $\Box$. Pojam formule se definira standardno, pri čemu se još dodaje: ako je A formula, tada je i $\Box A$ formula.*
Koristimo i unarni modalni operator $\Diamond$, pri čemu je $\Diamond A$ pokrata za formulu $\neg\Box\neg A$.

Sustav K sadrži sljedeće aksiome:

A0) *sve tautologije (promatrane u novom jeziku)*

A1) $\Box(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\Box A \longrightarrow \Box B)$

Pravila izvoda sustava K su:

1. mod pon

$$\frac{A \qquad A \longrightarrow B}{B}$$

2. nužnost

$$\frac{A}{\Box A}$$

Sasvim analogno, kao za sistem RS, definiraju se pojmovi dokaza, izvoda i teorema.

Napomena 2.1. *U iskazu aksioma A0) smo naveli da su sve tautologije aksiomi promatrane u novom jeziku. To znači da osim valjanih formula klasične logike sudova uzimamo i modalne formule koje supstitucijom 'modalnih podformula' s propozicionalnim varijablama postaju tautologije. Takve su očito $\Box A \vee \neg\Box A$, $\Box\Diamond\Box A \longrightarrow \Box\Diamond\Box A$ i $(\Diamond A \wedge \neg\Box A) \longrightarrow \neg\Box A$.*

Dok su tautologija i mod pon isti kao u klasičnoj logici, $A1)$ i *nužnost* mogu primiti neki argument. Počet ćemo s A1) : $\Box(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\Box A \longrightarrow \Box B)$.
Recimo da imamo dokaz za formulu i da tumačimo simbol $\Box$ u smislu nužnosti. Tada smo dokazali da je nužno istinito da vrijedi $\Box(A \longrightarrow B)$. Ako možemo dokazati da je A nužno istinit, onda smo pokazali da je A istinit u svakom mogućem svijetu [12]. Budući da $A \longrightarrow B$ mora biti istinit u svakom mogućem svijetu, kažemo da isto vrijedi i za B i da je B nužno istinit.

[12] Mogući svijet je koncepcija ukupnog načina na koji bi svemir mogao biti. Često se suprotstavlja načinu na koji stvari zapravo jesu. G.W. Leibniz je u svojoj knjizi Theodicy (1710.), upotrijebio koncept mogućeg svijeta u svojem predloženom rješenju teološkog problema postojanja zla, tvrdeći da bi savršeni Bog ostvarivao najbolje od svih mogućih svjetova. Ovu je zamisao kasnije satirirao Voltaire u svom stripu Candide (1759.). Filozofi su od tada izgradili nekoliko različitih formalizacija koncepta mogućeg svijeta.

Napomena 2.2. *Često koristimo sljedeće ekvivalencije :*

$$\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A \quad i \quad \Box A \equiv \neg\Diamond\neg A.$$

Označimo s:

$$\Diamond A \ldots \text{'Moguće je da NLO postoji'} \tag{1}$$
$$\Box A \ldots \text{'NLO nužno postoji'} \tag{2}$$

pa je interpretacija prethodne napomene koristeći (1) i (2) dana s :
'Moguće je da NLO postoji ako i samo ako nije nužno da NLO ne postoji.' i 'NLO nužno postoji ako i samo ako nije moguće da NLO ne postoji.'.

U propoziciji koja slijedi navest ćemo neke formule sustava K:

Propozicija 2.1. *Neka su A i B proizvoljne formule. Tada su sljedeće formule teoremi sustava K :*

a) $\Box(A \wedge B) \longrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

b) $(\Box A \wedge \Box B) \longrightarrow \Box(A \wedge B)$

c) $(\Box A \vee \Box B) \longrightarrow \Box(A \vee B)$

d) $\Box(A \longleftrightarrow B) \longrightarrow (\Box A \longleftrightarrow \Box B)$

e) $\Box \perp \longrightarrow \Box A$

Dokaz:

Dokaz za formulu $\Box(A \wedge B) \longrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ izvest ćemo pomoću niza formula dobivenih korištenjem aksioma A0), A1) i pravila izvoda sistema K.

1. $(A \wedge B) \longrightarrow A$	(A0)
2. $\Box((A \wedge B) \longrightarrow A)$	(nužnost na 1.)
3. $\Box((A \wedge B) \longrightarrow A) \longrightarrow (\Box(A \wedge B) \longrightarrow \Box A)$	(A1)
4. $\Box(A \wedge B) \longrightarrow \Box A$	(mod pon na 2. i 3.)
5. $(A \wedge B) \longrightarrow B$	(A0)
6. $\Box((A \wedge B) \longrightarrow B)$	(nužnost na 5.)
7. $\Box((A \wedge B) \longrightarrow B) \longrightarrow (\Box(A \wedge B) \longrightarrow \Box B)$	(A1)
8. $\Box(A \wedge B) \longrightarrow \Box B$	(mod pon na 6. i 7.)
9. $(\Box(A \wedge B) \longrightarrow \Box A) \longrightarrow ((\Box(A \wedge B) \longrightarrow \Box B)$ $\longrightarrow (\Box(A \wedge B) \longrightarrow (\Box A \wedge \Box B)))$	(A0)
10. $(\Box(A \wedge B) \longrightarrow \Box B) \longrightarrow (\Box(A \wedge B) \longrightarrow (\Box A \wedge \Box B))$	(mod pon na 4. i 9.)
11. $\Box(A \wedge B) \longrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$	(mod pon na 8. i 10.)

Ostale tvrdnje se dokazuju analogno.

$\blacksquare$

2.2. Semantika K modalnog sustava

Definicija 2.2.1. *Binarna relacija na skupu* X *je svaki podskup* $R \subseteq X \times X$.
Ako je uređeni par $(x, y) \in R$*, kažemo da je* x *u relaciji* R *s* y *te pišemo* xRy *ili* $R(x, y)$.
Binarna relacija je :

a) *refleksivna, ako je* $xRx, \forall x \in X$,
b) *simetrična, ako je* $xRy \Rightarrow yRx$,
c) *tranzitivna, ako je* $(xRy \quad \wedge \quad yRz) \Rightarrow xRz$,
d) *relacija ekvivalencije, ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.*

2.2.1. Definicija Kripkeovog okvira i modela

Definicija 2.2.1.1. *Neka je* W *neki neprazan skup te* $R \subseteq W \times W$ *proizvoljna binarna relacija. Tada uređeni par (W,R) nazivamo Kripkeov okvir ili kratko - okvir. Elemente skupa W nazivamo svjetovi, a relaciju R relacija dostiživosti.*

Kripkeov model $\mathfrak{M}$ *je uređena trojka* $(W, R, \Vdash)$*, gdje je (W,R) okvir, a* $\Vdash$ *binarna relacija između svjetova i formula, koju nazivamo relacija forsiranja te ima sljedeća svojstva:*

1. $w \nVdash \perp$
2. $w \Vdash \neg A$ *ako i samo ako* $w \nVdash A$
3. $w \Vdash A \wedge B$ *ako i samo ako* $w \Vdash A$ *i* $w \Vdash B$
4. $w \Vdash A \vee B$ *ako i samo ako* $w \Vdash A$ *ili* $w \Vdash B$
5. $w \Vdash A \longrightarrow B$*, ako i samo ako* $w \nVdash A$ *ili* $w \Vdash B$
6. $w \Vdash A \longleftrightarrow B$ *ako i samo ako* $w \Vdash A$ *je ekvivalentno sa* $w \Vdash B$
7. $w \Vdash \Box A$ *ako i samo ako* $\forall v(wRv$ *povlači* $v \Vdash A)$.

Primjedba 2.2.1.1. *Uočimo da su svi slučajevi prethodne definicije ekvivalentno definirani u klasičnoj logici, osim zadnjeg slučaja koji dodaje nešto novo. Također primjetimo, kao što možemo logičke veznike* $\wedge$ *i* $\vee$ *definirati preko negacije i implikacije, tako isto možemo učiniti za* $\Diamond$ *u terminima negacije i* $\Box$*. Ta ekvivalencija je pokazana u prvoj napomeni ovoga rada.*

Definicija 2.2.1.2. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *Kripkeov model. Kažemo da je neka formula* F *istinita na modelu* $\mathfrak{M}$*, ako za sve svjetove* $w \in W$ *vrijedi* $\mathfrak{M}, w \Vdash F$*. To kratko označavamo sa* $\mathfrak{M} \vDash F$.
Neka je $\mathcal{F} = (W, R)$ *neki Kripkeov okvir te* F *neka formula. Kažemo da je formula* F *istinita na okviru* $\mathcal{F}$*, ako za svaku relaciju* $\Vdash$ *na okviru* $\mathcal{F}$ *vrijedi da za model* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *vrijedi* $\mathfrak{M} \vDash F$*. To označavamo sa* $\mathcal{F} \vDash F$.

Primjer 2.2.1.1. *Pokažimo da formula $\Box(A \vee B) \longrightarrow (\Box A \vee \Box B)$ nije teorem sustava K.*

<u>*Rješenje*</u>:

Kako bi dokazali da formula nije valjana, trebamo naći barem jedan Kripkeov model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ i svijet $w \in W$ tako da $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box(A \vee B) \longrightarrow (\Box A \vee \Box B)$
Vrijedi sljedeće:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Box(A \vee B) \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}, w \nVdash \Box A \vee \Box B \tag{2}$$

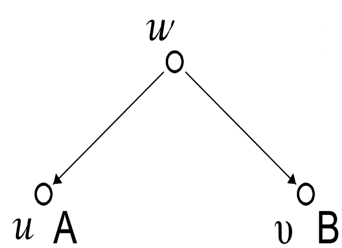
Iz (1) slijedi:

$$x \in W(wRx \Rightarrow x \Vdash A \vee B) \tag{3}$$

Iz (2) slijedi:

$$\exists x \exists y \quad (wRx \quad \& \quad wRy \quad \& \quad x \nVdash A \quad \& \quad y \nVdash B) \tag{4}$$

Iz (3) i (4) slijedi da jedan primjer modela koji ne zadovoljava zadanu formulu izgleda ovako:



Dakle, $R = \{(w, u), (w, v)\}$, $W = \{w, u, v\}$, te $u \Vdash A$ i $v \Vdash B$. Slijedi $w \Vdash \Box(A \vee B)$. Zbog toga što vrijedi wRu i $u \nVdash B$, slijedi $w \nVdash \Box A$. Dakle, $w \nVdash \Box A \vee \Box B$.

Ostale primjere kada neka formula je ili nije teorem sustava K čitatelj može pronaći u [8].

2.3. Proširenja K modalnog sustava

Zahvaljujući K sustavu kao temeljnom sustavu modalne logike, možemo razviti i neke složenije sustave. Logički sustavi koji zauzimaju jače ili barem specifičnije koncepte nužnosti mogu se dobiti dodavanjem dodatnih aksioma u K.
Zainteresirani više mogu pogledati u [4] i u [7].

Navedimo najčešča proširenja sustava K:

Sistem	**Shema**
D	$\Box A \longrightarrow \Diamond A$
T	$\Box A \longrightarrow A$
4	$\Box A \longrightarrow \Box\Box A$
B	$A \longrightarrow \Box\Diamond A$
S4	T + $\Box A \longrightarrow \Box\Box A$
S5	T + $\Diamond A \longrightarrow \Box\Diamond A$

Sljedeća tablica opisuje zajedničke sustave modalne logike i ograničenja koja se postavljaju na odnose između okvira.

Logika	**Uvjeti okvira**
K	nema uvjeta
D	ekstenzionalnost [13]
T	refleksivnost
B	refleksivnost,simetričnost
K4	tranzitivnost
S4	refleksivnost, tranzitivnost
S5	refleksivnost,simetričnost, tranzitivnost

U nastavku slijedi obrazloženje logika:

'K' - dolazi od Kripke, jedan od najutjecajnijih matematičara na području modalne logike,

'D' - dolazi od deontičke logike koja se bavi primjenom logike na analizu etičkih sustava,

'T' - prema belgijskom logičaru Feysa koji predlaže sustav T oduzimanjem sistema 4 iz Gödelovog sustava S4,

'B' - dolazi od Brouwer , prema osnivaču intuicionizma,

'4' - prema Lewisu koji se bavio izučavanjem sustava S4.

[13] Za svaki svijet $\Gamma \in$ W $\exists$ barem jedan $w \in$ W tako da je w dostupan Γ

Budući da su okviri samo skup s relacijom, prirodno je željeti odabrati zbirku okvira na temelju svojstava R. To je upravo ono što su logičari učinili počevši od sustava K, koji ne stavlja nikakva ograničenja na okvir.

Primjetimo međusobne odnose u prethodnoj tablici. Na primjer: svaka formula koja je K valjana, trebala bi biti valjana u svim tim sustavima, budući da se njegova istinitost ne oslanja na neku posebnu strukturu okvira. Slično tome, ono što je istinito u B biti će istinito i u S5.

2.4. Korektnost

U nastavku ćemo navesti kada je sustav K korektan i potpun.

Teorem 2.4.1. *(Teorem korektnosti sustava K)*
Ako je dokaz za formulu A nastao primjenom aksioma i pravilom izvoda sustava K, tada je A, K - valjan.

<u>*Dokaz*</u>:

Modus Ponens:
Pretpostavimo da su formule A i $A \Longrightarrow B$, K - valjane.
Za sve modalitete na svim okvirima (W, R) i za sve $\Theta \in W$, vrijedi $\Theta \Vdash A$ i $\Theta \Vdash A \Longrightarrow B$.
Fiksirajmo okvir (W, R) i svijet $\Theta \in W$.
Kako $\Theta \Vdash A$ i $\Theta \Vdash A \Longrightarrow B$, znamo da ili $\Theta \nVdash A$ ili $\Theta \Vdash B$.
Kako znamo $\Theta \Vdash A$, tada $\Theta \Vdash B$.

Budući da su izbor svijeta, modela i okvira unutar K bili proizvoljni , B je K - valjan. Dakle, modus ponens je važeće pravilo zaključivanja.

Nužnost:
Pretpostavimo da je A, K - valjan.
Za sve modalitete na svim okvirima (W, R) i za sve $\Theta \in W$, $\Theta \Vdash A$. Fiksirajmo okvir (W, R) i svijet $\Theta \in W$.
Razmotrimo $\nu \in W$ tako da $\Theta R \nu$.
Kako je A istinit u svakom svijetu, jasno je da $\nu \Vdash A$.
Dakle, A je istinit u svakom svijetu dostupan za Θ.
Stoga, $\Theta \Vdash \Box A$.

Kako smo proivoljno birali okvir i svijet, $\Box A$ je K - valjan. Dakle, nužnost je također valjano pravilo zaključivanja.

Ostaje samo dokazati valjanost aksioma. To je trivijalno za klasične tautologije jer je metoda utvrđivanja istinitosti za ne-modalne izjave identična metodi koja se koristi u RS-u. Budući da su klasične tautologije točno važeće izjave sustava RS-a, one su i valjane. Jedini preostali zadatak stoga je pokazati valjanost Sheme K.

Shema K:
Želimo pokazati da $\Box(A \Longrightarrow B) = (\Box A \Longrightarrow \Box B)$ isitnito u svakom svijetu u svim okvirima.
Neka je (W, R) okvir i $\Theta \in W$.
Pretpostavimo da je $\Box(A \Longrightarrow B)$ istinit u Θ.
Znamo da će biti istinito ako je uvijek slučaj da $\Box A$ nije istinit u Θ ili $\Box B$ je istinit u Θ.
Pretpostavimo da je $\Box A$ istinit u Θ.
Dakle, za sve $\nu \in W$, $\Theta R \nu$ implicira da $\nu \Vdash A$. Fiksirajmo takav ν.
Kako je $\Box(A \Longrightarrow B)$ istinit u Θ i $\Theta R \nu$, znamo da $\nu \Vdash A \Longrightarrow B$.
Dakle, B mora biti istinit u ν, povlači da je $\Box B$ istinit u Θ.
U svakom svijetu Θ i u bilo kojem okviru, ili je $\Box(A \Longrightarrow B)$ neistina ili $\Box A \Longrightarrow \Box B$ je istinit.
Stoga je aksiom K - valjan.

Kako su aksiomi valjani i nizom pravilnih zaključivanja stvaramo teoreme valjanosti iz drugih teorema valjanosti, tada je svaki dokazivi A u sustavu aksioma K, K - valjan.

■

2.5. Potpunost

Dokaz za potpunost K sustava je teži od onog za korektnost. Zbog toga ćemo prvo uvesti definiciju i teoreme koji vrijede za bilo koje proširenje sustava K, te pomoću njih dokazati teorem o potpunosti sustava K.

Definicija 2.5.1. *Neka $\Re$ bude kratica za $(A \wedge \neg A)$. Za konačan skup formula $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ kažemo da je 'L - konzistentan'*[14] *ako $\{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n\} \Longrightarrow \Re$ nije dokaziv koristeći L sustav aksioma. Beskonačni skup je L - konzistentan ako je svaki konačan podskup L - konzistentan.*

Skup formula Γ je maksimalno L - konzistentan ako je Γ L - konzistentan i nijedno proširenje od Γ nije. Stoga ako je $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i Γ' također L - konzistentan, tada $\Gamma = \Gamma'$.

Sada ćemo pokazati vezu između L - konzistentnog i maskimalno L - konzistentnog skupa.

Teorem 2.5.1. *Ako je Γ L - konzistentan, onda se može proširiti do maksimalnog L - konzistentnog skupa.*

Dokaz:

Neka je Γ jedan L - konzistentan skup formula. Kako je svaka formula nastala primjenom konačnog skupa simbola, znamo iz teorije skupova da je svaki konačan skup valjanih formula prebrojiv.
Označimo sa $P_1, P_2, P_3, \ldots$ valjane formule i konstruirajmo niz skupova $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ na sljedeći način:

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- ako je $\Gamma_n \cup P_{n+1}$ L - konzistentan, tada je $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup P_{n+1}$
- inače, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$

[14] Sa slovom 'L' ćemo označiti bilo koju logiku D, T, K4, B, S4 ili S5

U tako konstruiranom nizu je svaki Γ_k konzistentan.
Nadalje, $\Gamma_k \subseteq \Gamma_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.
Možemo definirati limes Γ^* niza kao $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots$. Tvrdimo da je Γ^* maksimalno konzistentan, to jest Γ^* L - konzistentan i ako je $\Gamma^* \cup \Gamma'$ konzistentno tada je $\Gamma^* = \Gamma'$.

Pokažimo da je Γ^* L - konzistentan. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom.

Pretpostavimo da Γ^* nije L - konzistentan, tada postoji konačan podskup $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ od Γ^* tako da $(S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_n) \Longrightarrow \Re$.
No, znamo da svaki S_k ne dolazi iz Γ, jer je Γ bio L-konzistentan. Također znamo da za svaki $S_k \notin \Gamma$, postoji neki $j \in \mathbb{N}$ tako da $S_k \notin \Gamma_j \cap \Gamma_{j-1}$, ($\Gamma_j$ je prvi skup u nizu koji sadrži S_k). Budući da je skup od S_Γ konačan možemo fiksirati i koji je jednak najvećem takvom j. Kako je svaki S_k u Γ_j za neki $j \leq i$, slijedi da je svaki $S_k \in \Gamma_i$. Stoga Γ_i je inkonzistentan s L.
Ali, mi znamo da je Γ_k L - konzistentan za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa smo došli do kontradikcije.
Slijedi Γ^* je L - konzistentan.

Također ćemo pomoću kontradikcije dokazati da je Γ^* maksimalan.
Recimo da postoji odgovarajuće proširenje Γ^* koje je sačuvalo L - konzistenciju.
Zatim, postoji neka formula $S \notin \Gamma^*$ tako da je $\Gamma^* \cup \{S\}$ L - konzistentna.
Ali mi znamo da je lista formula $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sadržava sve formule, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da $S = P_k$. Znači ili je $P_k \in \Gamma_k$ ili $P_k \notin \Gamma_k$. Tada mora vrijediti da $\Gamma_{k-1} \cup P_k$ nije konzistentan.
Kako $\Gamma_{k-1} \subseteq \Gamma^*$, tada $\Gamma^* \cup P_i$ ne bi bio konzistentan.

Dakle, ne može postojati odgovarajuće proširenje od Γ^* koje sadržava L - konzistenciju, slijedi Γ^* je maksimalno L - konzistentan.

■

Iduća dva teorema ćemo samo iskazati, dok se dokazi mogu pogledati u [4].

Teorem 2.5.2. *Ako je skup* $\{\neg\Box P,\ \Box Q_1,\ \Box Q_2,\ \ldots\}$ *L - konzistentan tada je i* $\{\neg P,\ Q_1,\ Q_2, \ldots\}$ *L - konzistentan.*

Teorem 2.5.3. *Neka je dan* $(W, R, \Vdash)$ *Kripkeov okvir,* $S \in W$ *i valjana formula* P*, tada je sljedeće istina:*

$$S \Vdash P \text{ ako i samo ako } P \in S.$$

Sada konačno možemo pokazati da je sustav K potpun.

Teorem 2.5.4. *Ako je* P*, K - valjana formula, tada je* P *teorem sistema K.*

<u>Dokaz</u>:

Dokaz ćemo provesti koristeći kontrapoziciju. Pretpostavimo da P nema dokaz u K. Kako P nema dokaz, skup $\{\neg P\}$ je konzistentan.

Proširimo ovaj skup do maksimalno konzistentnog skupa P^* i neka je $(W, R, \Vdash)$ Kripkeov okvir. Tada se takav skup nalazi u W. Kako je $\neg P \in P^*$, slijedi $\neg P$ je istina u P^*.

Kako je P^* maksimalno konzistentan, slijedi $P \notin P^*$. Dakle, P nije istina u P^*, a to znači da P nije valjana u $(W, R, \Vdash)$. Sada je jasno da se $(W, R, \Vdash)$ nalazi se u zbirci okvira K budući da K ne postavlja nikakva ograničenja na svoje okvire.

Dakle, pokazali smo da postoji model koji se temelji na okviru u K u kojem P nije valjan. Stoga P nije K - valjan.

■

3. Izgradnja semantičkih stabala

Pogledajmo (W, R, f), gdje je W neprazan skup čiji su članovi svi mogući svjetovi, a R binarna relacija na W. Ako imamo bilo koja dva moguća svijeta s i t iz W tada oni mogu ili ne moraju biti u relaciji. Pišemo sRt ako oni jesu u relaciji i kažemo t je *dostupan* iz s. Funkcija f dodjeljuje istinosnu vrijednost 1 ili 0 svakoj formuli u svakom svijetu.
Za bilo koji svijet $w \in W$ vrijedi:

1. $f_w(\neg A) = 1$ onda kada je $f_w(A) = 0$, inače $f_w(\neg A) = 0$
2. $f_w(A \wedge B) = 1$ onda kada je $f_w(A) = f_w(A) = 1$, inače $f_w(A \wedge B) = 0$
3. $f_w(A \vee B) = 1$ onda kada je $f_w(A) = 1$ ili $f_w(B) = 1$, inače $f_w(A \vee B) = 0$

Mogući svjetovi ne doprinose neku važeću ulogu operatorima koji nisu modalni, ali za modalne operatore su od bitne važnosti.
Za bilo koji svijet $w \in W$ vrijedi:

1. $f_w(\Box A) = 1$ ako $\forall w' \in W$ vrijedi wRw' te $f_{w'}(A) = 1$, inače $f_w(\Box A) = 0$
2. $f_w(\Diamond A) = 1$ ako postoji neki $w' \in W$ za koji vrijedi wRw' te $f_{w'}(A) = 1$, inače $f_w(\Diamond A) = 0$

Primjer 3.1. *Ovim primjerom dokazujemo istinosnu vrijednost formule $\neg\Diamond A \Leftrightarrow \Box\neg A$. Dakle, u bilo kojem mogućem svijetu $w \in W$ vrijedi:*

$$\begin{aligned} f_w(\neg\Diamond A) = 1 & \\ & \Leftrightarrow f_w(\Diamond A) = 0 \\ & \Leftrightarrow \forall w' : wRw', f_w(A) = 0 \\ & \Leftrightarrow \forall w' : wRw', f_w(\neg A) = 1 \\ & \Leftrightarrow f_w(\Box\neg A) = 1. \end{aligned}$$

3.1. Pravila glavnog testa

U ovom potpoglavlju ćemo opisati izgradnju semantičkih stabala koristeći "nova" (modalna) pravila. Izgradnja je vrlo slična kao ona u propozicionalnoj logici uz neke modifikacije koje ćemo sada navesti. Svaku granu stabla čini formula A i nenegativni cijeli brojevi $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ili nešto oblika krl, gdje su $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, a svaki broj predstavlja neki mogući svijet.

$A, \top k$ čitamo A istinita u svijetu k
$A, \bot k$ čitamo A lažna u svijetu k
krl čitamo svijet k je dostupan iz svijeta l

Pogledajmo pravilo za operator:

(1) *disjunkcije* ($\vee$):

$$\frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \quad \top k}{\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ A, \top k & B, \top k \end{array}}$$

(2) *konjukcije* ($\wedge$)

$$\frac{\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}, \quad \top k}{\begin{array}{c} A \quad \top k \\ B \quad \top k \end{array}}$$

Sada ćemo navesti "nova" (modalna) pravila:

(3) za *nužnost* ($\Box$)

$$\frac{\Box \mathbf{A}, \quad \top k}{A \quad \top l}$$

(l je dostupan iz k)

(4) za *mogućnost* ($\Diamond$)

$$\frac{\Diamond \mathbf{A}, \quad \bot k}{A \quad \bot l}$$

(l je dostupan iz k)

(5) *negacija za nužnost* ($\neg\Box$)

$$\frac{\neg\Box \mathbf{A}, \quad \top k}{\Diamond\neg A, \quad \top k}$$

(6) *negacija za mogućnost* $(\neg\Diamond)$

$$\frac{\neg\Diamond\mathbf{A}, \quad \top k}{\Box\neg A, \quad \top k}$$

uočimo da smo svojstvo (6) pokazali u prethodnom primjeru

Kada imamo sljedeće sustave:

K, K4, KB $\ldots l$ je prethodno upotrebljen

KD, KT $\ldots l$ je najmanji neupotrebljeni (slijedeći novi) ili prethodno upotrebljen

Sada ćemo navesti primjer koji pripada takozvanim karakterističnim principima logike:

Primjer 3.1.0.1. $KB \Vdash A \longrightarrow \Box\Diamond A$

$$A \longrightarrow \Box\Diamond A \quad \bot 0$$

$$A \quad \top 0 \tag{1}$$

$$\Box\Diamond A \quad \bot 0$$

$$\neg\Box\Diamond A \quad \top 0$$

iz svojstva (5):

$$\Diamond\neg\Diamond A \quad \top 0$$

$$0r1$$

$$\neg\Diamond A \quad \top 1$$

$$\Diamond A \quad \bot 1$$

$$1r0$$

$$\Box\neg A \quad \top 1$$

$$\neg A \quad \top 0$$

$$A \quad \bot 0 \tag{2}$$

$$x$$

Iz (1) i (2) zaključujemo da smo došli do kontradikcije te smo time pokazali da je početna formula valjana.

Zainteresirani čitatelji mogu pronaći u [3] i neke druge karakteristične principe logike.

U nastavku rada dokazati ćemo da su svi promatrani sustavi korektni i potpuni.

Definicija 3.1.1. *Ako je Γ proizvoljan skup formula, tada za formulu A kažemo da je semantička posljedica od Γ ako je A istinita u svakoj interpretaciji u kojoj su sve formule iz Γ istinite ($\Gamma \models A$).*

Ako postoji zatvoreno stablo s premisama Γ i konkluzijom A, pišemo $\Gamma \vdash A$, tj. A je dokaziva (izvediva) iz skupa formula Γ.

Definicija 3.1.2. *Neka je $M = (W, R, \Vdash)$ neki Kripkeov model te g neka grana semantičkog stabla. Reći ćemo da je M vjeran g ako postoji preslikavanje $h : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to W$, takvo da vrijedi:*

- *za sve $A \top i$ na g, u M vrijedi $A \top h(i)$*
- *ako je irj na g, tada je $h(i)Rh(j)$ na M.*

Iduća lema nam govori da postoji proširenje od g tako da je M vjeran tom proširenju.

Lema 3.1.1. *Neka su g i $M = (W, R, \Vdash)$ proizvoljna grana i Kripkeov model. Ako je M vjeran g, nakon primjene proizvoljnog pravila (metode semantičkih stabala) postoji barem jedno proširenje g' od g takvo da je M vjeran g'.*

Dokaz:

Neka je h odgovarajuće preslikavanje. Lemu dokazujemo razmatranjem pravila, slučaj po slučaj.

1) neka je npr. $A \wedge B \top i$ na g.
Nakon primjene pravila za konjukciju dobivamo (proširenu) granu g' koja sadrži A $\top i$ i B $\top i$. Kako je M vjeran g, $A \wedge B$ je istinit u $h(i)$ pa su A i B istiniti u $h(i)$, tj. M vjeran g'. Slično i za ostale istonosne veznike, pogledajmo sad modalne operatore. Za njihove negacije ($\neg\Box A \top i$ i $\neg\Diamond A \top i$) je očito.

2) pretpostavimo da je $\Box A \top i$ na g.
Tada je $\Box A \top$ na $h(i)$ te, ako je irj na g, vrijedi $h(i)Rh(j)$ pa je $A \top h(j)$.

3) neka je $\Diamond A \top i$ na g. Primjenom pravila za $\Diamond$ dobivamo irj i $A \top j$ na g'. Kako je M vjeran g, vrijedi $\Diamond A \top h(i) \Rightarrow h(i)Rw$, $A \top w$, za neki $w \in W$.
Sada h proširimo do preslikavanja h',dodajući samo $h'(j) = w$.
Po definiciji, $h'(i)Rh'(j)$ i $A \top h'(j)$ pa je M vjeran g'.

Provjerimo pravila za T, B, 4 i D.
Za $\boldsymbol{T}$: imamo iri na g pa i $h(i)Rh(i)$, zbog refleksivnosti od R.
Za $\boldsymbol{B}$: imamo irj na g, $h(i)Rh(j)$ pa zbog simetričnosti od R i $h(j)Rh(i)$.
Za **4**: irj i jrk na g; $h(i)Rh(j)$, $h(j)Rh(k)$ i $h(i)Rh(k)$.

Za ***D***: primjenom na i dobivamo irj, gdje je j (slijedeći) novi. Znamo da je $h(i)Rw$, za neki $w \in W$ pa definiramo h' dodajući na h još $h'(j) = w(j$ se ne pojavljuje na g, tek na proširenoj grani g'). Iz konstrukcije je jasno $h'(i)Rh'(j)$ te je M vjeran g'.

Analogno vrijedi i za bilo koju kombinaciju od T, B, 4 i D.

■

Teorem koji govori da su svi promatrani sustavi korektni, dokazati ćemo u nastavku koristeći prethodnu lemu.

Teorem 3.1.1. *(Korektnost) Za konačan* Γ*, ako* $\Gamma \vdash A$ *tada* $\Gamma \vDash A$*.*

Dokaz:

Pretpostavimo $\Gamma \nvDash A$. Tada postoji Kripkeov model $M = (W, R, \Vdash)$ u kojem su sve premise (formule iz Γ) istinite i A lažna, u nekom svijetu w. Neka je h preslikavanje dano sa $h(0) = w$. Time Kripkeov model M postaje *vjeran* početnoj listi. Nakon primjene bilo kojeg pravila, možemo (prema prethodnoj lemi) naći barem jedno proširenje kojem je M *vjeran*. Uzastopnom primjenom prethodne leme možemo pronaći čitavu granu g tako da je I *vjeran* svakom njenom početnom komadu. Kada bi grana g bila zatvorena, sadržavala bi formule oblika B i $\neg B$, koje se nalaze u istom početnom komadu, no tada bi u modelu M vrijedilo $\Vdash B$ i $\nVdash B$. Dolazimo do kontradikcije, pa je b otvorena, tj. $\Gamma \nvdash A$.

■

Lema 3.1.2. *Neka je* g *proizvoljna potpuna otvorena grana semantičkog stabla. Označimo s* $M = (W, R, \Vdash)$ *Kripkeov model induciran s* g*.*
Vrijedi sljedeće:

$$A \quad \top i \text{ na } g \Rightarrow A \text{ je istinita u svijetu } w_i;$$

$$A \quad \bot i \text{ na } g \Rightarrow A \text{ je lažna u svijetu } w_i.$$

Dokaz:

Induktivno po složenosti od A.
Ako je A atomarna, tvrdnja slijedi direktno iz definicije. Ako je A npr. oblika $B \vee C$, tada je ili $B \top i$ ili $C \top i$ na g pa je (po pretpostavci indukcije) ili B ili C istinito u w_i te je i $B \vee C$ istinito u w_i.

Slično i za ostale istinosne veznike.
Ako je A oblika $\Box B$, tada je $\Box B \top i$ na g i za sve j t.d. je irj na g, $B \top j$ je na g.
Po konstrukciji i pretpostavci indukcije, za sve w_j t.d. je $w_i R w_j$, B je istinito u w_j.
Slijedi $\Box B$ istinito u w_i.

Slično i za ostale modalne operatore.

Za ***T***: za svaki $w_i \in W$, iri je na g, po definiciji od R je i w_iRw_i.

Za ***B***: neka za w_i,$w_j \in W$ vrijedi w_iRw_j.
Primjenjujući definiciju za B, irj na g pa je i jri na $g \Rightarrow w_jRw_i$.

Za ***4***: neka za $w_i, w_j, w_k \in W$ vrijedi w_iRw_j,w_jRw_k.
Po definiciji irj, jrk su na g, a to znači da je i irk na g pa je i w_iRw_k.

Za ***D***: ako je $w_i \in W$ tada je za neki j irj na g. Slijedi, w_iRw_j.

Analogno vrijedi i za bilo koju kombinaciju T, B, 4 i D.

■

Teorem 3.1.2. *(potpunost) Za konačan* Γ*, ako je* $\Gamma \vDash A$ *tada* $\Gamma \vdash A$*.*

<u>*Dokaz*</u>:

Pretpostavimo $\Gamma \nvdash A$. Proizvoljna otvorena grana semantičkog stabla inducira Kripkeov model u kojem su sve premise (formule iz Γ) istinite i A lažna u svijetu w_0 (prema prethodnoj lemi). Dakle, $\Gamma \nvDash A$.

■

Literatura

[1] P. Blackburn, M. Rijke, Y. Venema: *Modal logic*, Springer-Verlag, 2001.

[2] G. E. Hughes, M. J. Cresswell: *An Introduction to Modal Logic*, London, Spottidwooode, Ballantyne and Co Ltd, 1968.

[3] I. Matić: *Modalna logika i Fittingova nomenklatura*, Poučak 36, 2008.

[4] J. McCance: *A brief introduction to modal logic*; `http://www.http://documents.kenyon.edu/math/McCance.pdf`

[5] G. Priest: *An introduction to Non - Classical Logic*; Cambridge University Press; 2001.

[6] M. Vuković: *Matematička logika 1, skripta*, Zagreb: PMF-Matematički odjel, 2007.

[7] E. N. Zalta: *Basic Concepts in Modal Logic*, Center for the Study of Language and Information Stanford University, 1995.

[8] FER: *Modalna logika*, vježbe, `https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/05-FER-ML-web-2016.pdf`